AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN UN CONTEXTO REALISTA DEL CÁLCULO MULTIVARIADO EN TEMAS RELACIONADOS CON SUPERFICIES

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como opción al Grado científico de

Doctor en Educación Matemática

Pablo Andrés Acosta Solarte

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2022

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN UN CONTEXTO REALISTA DEL CÁLCULO MULTIVARIADO EN TEMAS RELACIONADOS CON SUPERFICIES

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como opción al Grado científico de

Doctor en Educación Matemática

Pablo Andrés Acosta Solarte

DIRECTOR DE TESIS

Miguel Cruz Ramírez (Ph.D)

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2022

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre 10 de 2022

AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por el espacio para promover esta investigación, y a todos mis estudiantes, gracias por darme la posibilidad de conseguir los resultados que presento.

A la Universidad Antonio Nariño, gracias por darme la oportunidad de desarrollar esta investigación desde el doctorado, y a mis docentes en el programa, gracias también por el conocimiento transmitido en todo el proceso.

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mi Madre, apoyo incondicional en todos mis trayectos académicos, y a mi Padre, quien me vio iniciar el doctorado pero dejó de acompañarnos antes de terminarlo. A mis hermanos, que son ejemplo de trabajo y dedicación.

A mis hijos, Juan Andrés y Mery Sofía, para quienes espero este trabajo sea ejemplo de superación, esfuerzo y dedicación.

A Yanneth, mi esposa, quien fue el tiempo de apoyo y acompañamiento en mis jornadas dedicadas a escribirlo.

SÍNTESIS

La investigación se llevó a cabo con estudiantes de cálculo en varias variables que cursan Tecnología en Mecánica Industrial en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Buscó avanzar en la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático cuando temas del curso se desarrollan por medio de contextos realistas. El marco teórico lo fundamenta la Teoría Educación Matemática Realista (ver por ejemplo, Freudenthal, 1971, 1991, o Bressan y col., 2016) y lo complementa la Matemática en Contexto (ver por ejemplo, P. Camarena y col., 2012, 2013). Aunque las dos están relacionadas, el complemento se dio por la articulación de las diferentes fases de la primera con las etapas de la segunda.

Las propuestas realistas con objetos cotidianos aplicadas en las actividades, motivaron a los estudiantes, lo que permitió identificar los procesos seguidos por ellos en busca de solución a los interrogantes y las características de esos procesos. Los estudiantes alcanzaron los niveles situacional, referencial y general de la matematización en la mayoría de los casos.

Esta investigación apoyó y aplicó propuestas internacionales de no asumir que el paso de 2d a 3d es automático y también, que el centrar la atención en trabajar con objetos cotidianos, palpables para los estudiantes estimula su buen desempeño en el aula de clase. Esas propuestas se corroboraron en los resultados de las actividades.

ABSTRACT

The research was carried out with students of Technology in Industrial Mechanics at the Francisco José de Caldas District University. The students were in the multivariate calculus class. The research proposed to advance in the characterization of the development of mathematical thinking when some topics of course through realistic contexts are developed. The framework is based on the Realistic Mathematics Education Theory (see for example, Freudenthal, 1971, 1991, or Bressan y col., 2016) and is complemented by Mathematics in Context (see for example, **camarena2013** , 2012, 2013). Although the two are related, the complement was given by the articulation of the different phases of the first with the stages of the second.

The realistic proposals with everyday objects applied in the activities motivated the students, which allowed them to identify the processes followed by them in search of a solution to the questions and the characteristics of these processes. The students reached the situational, referential and general levels of mathematization in most cases.

This research supported and applied international proposals of not to assume that the transition from 2D to 3D is automatic and also that focusing attention on working with everyday objects, palpable for students, stimulates their good performance in the classroom. These proposals were corroborated in the results of the activities.

ÍNDICE **PÁGINAS**

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en educación para cursos universitarios han centrado la atención, en mayor medida, en los de cálculo diferencial, cálculo integral y han dado un salto a las ecuaciones diferenciales.

Debido a que al parecer en la mayoría de las clases tiende a asumirse que el paso de dos dimensiones (2D) a tres dimensiones (3D) es automático, se ha dejado de lado, o se realizan en menor proporción las investigaciones en el cálculo en varias variables. Los trabajos de Montiel y col. (2009), Trigueros y Martínez-Planell (2010), Rasmussen y col. (2014), Törner y col. (2014), Lee Mcgee y Moore-Russo (2015) y los estados del arte allí presentados, entre otros, hacen suponer ello.

Si las investigaciones en cálculo en varias variables son escasas, con mayor razón lo serán las investigaciones que se preguntan sobre el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de este curso. Este cálculo ofrece herramientas con las que se hace posible representar muchas situaciones, objetos, contextos de nuestro entorno de manera directa y precisa. El estudiante de este curso tiene la posibilidad de asociar muchas de sus herramientas u objetos de estudio o de trabajo, con la matemática involucrada. Por ejemplo, el estudiante puede ver que un *diábolo doble rosca macho*, que se usa como antivibratorio en piezas mecánicas, puede asociarse como la superficie dada por un hiperboloide de una hoja.

En un ambiente informal, suele decirse que el cálculo en varias variables es una simple extensión del cálculo en una variable. Ello no es así. Representa dar un vuelco a la visión de tablero que los estudiantes mantienen de los objetos comunes en los cursos de cálculo diferencial e integral. En este curso el estudiante puede experimentar el cambio a una visión de salón de clase, de universidad, de ciudad o de ambiente real donde permanece. El curso implica una ampliación del mundo matemático que conoce el estudiante de los dos o tres primeros semestres de estudio.

La interpretación del término *real* o *realidad* está sujeta al nivel de especificidad del contexto en el que se use. Por ejemplo, para un ingeniero mecánico un manómetro es un objeto real o forman parte de su realidad, pero no necesariamente forma parte de la realidad de profesionales de otras áreas o de un estudiante de primer o segundo semestre de ingeniería mecánica. Por otro lado, según el área de profundización o de trabajo del ingeniero, ese instrumento puede formar parte o no de su *cotidianidad*, en el sentido de qué tan frecuentemente se topa con él.

Buscando acercar la realidad del estudiante a la matemática que estudia, Freudenthal (1991) afirma que "*un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado*"[1]. También, para Freudenthal, la realidad es lo que el sentido común acepta como tal. Para Treffers (1987) las actividades humanas están ligadas con la realidad y la realidad no solo se tiene, en matemáticas, en las aplicaciones. Polya (1965), la asocia con el mundo físico. Entre otras, esas posiciones, que se detallan más adelante y en la sección 2.3, fundamentan la posición de realidad o real que se asume en esta investigación.

[1] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002), p. 73 (1991).

Así entonces, bajo la premisa de que el **objeto de estudio** es el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables[2] para ingeniería y que este curso es parte de la formación básica de un ingeniero, en este trabajo los *contextos reales o realistas* son aquellos contextos que involucran situaciones, objetos, herramientas, etc, *cotidianos* para el estudiante. Cotidianos en el sentido de que puede tenerlos en su quehacer diario, los conoce o puede conocerlos con facilidad, son de conocimiento general o forman parte de su profesión según su nivel de formación (tercer semestre de carrera). Es decir, del mundo en el que vive el estudiante; *lo que en cierto momento el sentido común experimenta como real*"[3] (Freudenthal, 1991) para el estudiante.

No se busca entonces plantear modelos sofisticados que involucran, por ejemplo, temas de la física o de otras áreas del conocimiento de la ingeniería. De esta manera se busca que la matemática planteada en este curso se "*entienda como una actividad humana, ligada a la realidad: matemática para todos*"[4] (Treffers, 1987) desde la visión del estudiante.

Vale destacar que las aplicaciones en matemáticas no hacen referencia únicamente a modelos matemáticos sofisticados, sino también a pequeños modelos con los cuales puede conseguirse la comprensión de un tema. Según Treffers (1987): "*La novedad*

[2]Más exactamente cálculo de funciones en varias variables, o también llamado cálculo multivariado. Se hará diferencia con el cálculo vectorial el cual se entenderá como la parte del cálculo en varias variables que trabaja con funciones vectoriales y campos vectoriales en lo relacionado por ejemplo con integrales de línea, los teoremas de Green, Stokes o Gauss, entre otros temas.

[3]Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002), p. 17.

[4]Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company, p. 247.

de la concepción realista es que la realidad no solo funciona en aplicaciones sino que también sirve como fuente de formación de conceptos, es decir, para desarrollar primero nociones intuitivas, o en la terminología de Freudenthal, para constituir objetos mentales"[5].

En esa dirección, con este trabajo se quiere hacer un aporte práctico relacionado con la enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables, en lo concerniente con la noción de superficie y sus usos en temas específicos del curso para ingeniería, por medio de un conjunto de actividades novedosas que involucran contextos realistas para el estudiante (construcción de una ingeniería didáctica como producto y proceso; vid. Artigue y col., 1995).

La investigación se fundamenta en la teoría Educación Matemática Realista, EMR, (Bravo-Bohorques y col., 2016; Freudenthal, 1971; Gravemeijer, 1994; Gravemeijer y Doorman, 1999; Pochulu y Rodríguez, 2012; Sriraman y English, 2010; Treffers, 1993).

Así entonces, en complemento al aporte práctico señalado en el anterior párrafo, este trabajo busca presentar como **aporte teórico** un avance en la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático del estudiante de ingeniería cuando se estudian algunos temas específicos del cálculo en varias variables por medio de contextos realistas. La caracterización se hace con base en los niveles de matematización, propuestos por la teoría Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1971), alcanzados por los estudiantes del curso y en el marco de la Ingeniería Didáctica (Artigue y col.,

[5]Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction*. The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company, p. 246.

1995).

La investigación propone desarrollar aplicaciones, en el sentido de trabajar con contextos realistas, a lo largo del curso en sus condiciones normales en un semestre y no solo a posteriori del proceso de aprendizaje, como suele suceder en los cursos de cálculo.

Es por ello que la investigación en este trabajo es novedosa, afronta un problema vigente desde hace mucho tiempo y tiene potenciales trabajos investigativos que la complementen. Estas son razones importantes que se ha tenido en cuenta para dirigir la mirada en el cálculo en varias variables.

La población objeto de estudio son los estudiantes de Ingeniería Mecánica por ciclos propedéuticos de la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en Bogotá.

La investigación se justifica con base en tres enfoques: *la población involucrada*, *la necesidad de la investigación* (en términos de deserción)[6] y *algunas experiencias del autor en el aula de clase*.

Aunque la investigación se propone desarrollar con estudiantes del primer ciclo de ingeniería por ciclos propedéuticos, la población implícitamente involucrada es mucho más amplia. En Colombia, según información que puede encontrarse en los reportes del Ministerio de Educación Nacional (MEN), alrededor de 13 000 estudiantes toman un curso de cálculo en varias variables cada semestre. El desarrollar una investigación

[6] Entendida como el abandono voluntario de la carrera que puede ser explicado por diferentes categorías de variables: socioeconómicas, individuales, institucionales y académicas.

que involucre la enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables, considera por tanto un número significativo de potenciales beneficiarios.

Por otro lado, con respecto a la necesidad de la investigación en términos de deserción estudiantil, según información recolectada por el MEN (2018), en su base de datos SPADIES, el porcentaje promedio de abandono de las carreras de ingeniería y afines en los últimos 10 años es aproximadamente del 28.87 %. En Guzmán y col. (2009), el MEN identificó que para el 2008 el 44.9 % de estudiantes de pregrado abandonaron sus carreras y que la deserción en las áreas de Ingeniería, Arquitectura, Urbanismo y afines es de aproximadamente el 50 %.

En un estudio realizado en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por Quintero y col. (2010), se logró identificar que en el periodo 2000-2009 el 25 % de los estudiantes caen en prueba académica[7] y de esos el 57 % recaerán en prueba académica en semestres posteriores, es decir, aproximadamente ese 57 % perderán el cupo en la Universidad. Entre el 40 % y el 58 % de los estudiantes que cursan semestre quinto o posterior, tienen riesgo de perder el cupo en la Universidad.

Ahora bien, teniendo en cuenta que "*en el área de matemáticas, especialmente, es donde se encuentra una gran cantidad de literatura empírica sobre métodos efectivos de enseñanza pero al mismo tiempo, es el área que sigue presentando mayores dificultades para los estudiantes y con la que se asocia buena parte de la deserción académica de los primeros semestres*"[8] (Pinto Segura y col. 2007), el lograr disminuir

[7] Estado de riesgo de pérdida del cupo por parte de los estudiantes.

[8] Pinto Segura, M., Durán, D., Pérez, R., Reverón, C. & Rodríguez, A. (2007). *Cuestión de supervivencia. Graduación, deserción y rezago en la Universidad Nacional de Colombia*. Bogotá: Dirección Nacional

los porcentajes de deserción puede ser de gran utilidad económica y social, no solo para los estudiantes sino también para las instituciones de educación superior en el país.

Por otro lado, por medio de trabajo en el aula y encuestas con estudiantes de cálculo en varias variables de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, especialmente en lo que tiene que ver con representación matemática de superficies reales o superficies que se acercan mucho a la realidad, se han obtenido importantes datos.

Por ejemplo, en encuestas para estudiantes y docentes en el año 2016 se identificó que el 22.5 % de los estudiantes hace referencia a tener dificultades en el curso debido a las gráficas y superficies. Al presentarles una superficie poco común y real, solo el 30 % consideró ser capaz de encontrar una representación analítica de ella. Al indagar sobre qué tan difícil es para ellos la representación analítica, consideraron que de 0 (nada difícil) a 5 (muy difícil), tiene una dificultad de 4.2. Por su parte, los docentes encuestados consideran que la dificultad para los estudiantes en representar superficies de manera analítica es de 4.5 y el 67 % de los encuestados considera que las gráficas de las superficies justifican las dificultades o fallas en los estudiantes.

Adicionalmente, en una encuesta de mayo de 2015, se identificó que el 68 % de los estudiantes ven la representación analítica de superficies reales como algo interesante o muy interesante y solo el 8 % como poco interesante. Y en una encuesta en el primer semestre de 2018 sobre la representación de puntos y lugares en el espacio con un enfoque realista, al preguntarles sobre qué tanto les ayuda a comprender la

de Bienestar Universitario, Universidad Nacional de Colombia, p. 210.

representación en el espacio el usar este enfoque, la calificación fue en promedio de 4.1 siendo 1.0 *ayuda en nada* y 5.0 *ayuda completamente*.

En términos generales, se observó que el darle un manejo más aplicado, de contexto o realista a las actividades del curso, parece estimular la participación de los estudiantes y parece también ayudar a comprender mejor las situaciones y temas propuestos en un curso estándar de cálculo en varias variables. Esa tendencia a estimular el trabajo en el aula de los estudiantes por medio de contextos realistas ha demostrado ser un buen inicio para el análisis del desarrollo del pensamiento matemático del estudiante de ingeniería en este curso y en particular por medio de la noción de superficie.

El **problema de investigación** se identifica con la pregunta: *¿qué aspectos resultan esenciales, desde el punto de vista teórico, para avanzar en la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de ingeniería en un contexto realista del cálculo multivariado en temas de superficies?*

El **objetivo general** consiste en *Avanzar en la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de ingeniería en un contexto realista del cálculo multivariado en temas de superficies*.

Los **objetivos específicos** son:

1. Elaborar un conjunto de actividades realistas asociadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las superficies en los temas seleccionados del cálculo multivariado.
2. Describir los procesos seguidos por los estudiantes en el desarrollo de las actividades planteadas, con miras a alcanzar los niveles de matematización propues-

tos por la EMR.

3. Identificar características en el proceder de los estudiante que permitan visualizar las actitudes matemáticas adquiridas con las actividades propuestas.
4. Caracterizar los avances logrados por los estudiantes, en el alcance de los niveles de matematización propuestos por la EMR.

En el marco de dar un enfoque realista y cotidiano para el estudiante, al desarrollo del cálculo en varias variables, la **hipótesis de investigación** plantea que *el estudiante se verá motivado e interesado en el trabajo en el aula de clase, fomentando la participación, los buenos resultados académicos, disminuyendo la deserción y perdida del curso y estimulando el desarrollo de habilidades matemáticas de análisis y síntesis necesarias en el desempeño como futuro profesional de la ingeniería.*

Las **Tareas de investigación** que se propone desarrollar en el trabajo planteado son:

1. Construir un estado del arte de las investigaciones relativas al curso de cálculo en varias variables en general y en el estudio de la noción de superficie en particular.
2. Fundamentar teóricamente las formas de ver las superficies en el marco del cálculo en varias variables.
3. Comparar algunos contenidos programáticos de cálculo en varias variables ofrecido en diferentes universidades.
4. Seleccionar los temas del curso en los cuales se centrará la investigación y propuesta de actividades en contextos realistas y cotidianos para el estudiante.
5. Elaborar contextos realistas y apropiados para el diseño de guías para el estudiante, en el marco de la motivación, la generación de necesidades intelectuales y

la identificación de razonamiento matemático en los temas específicos de trabajo de la investigación.

6. Aplicar y analizar las actividades planteadas en la investigación a lo largo del curso.

El **cronograma de actividades** se resume a continuación:

Actividad / Mes	Agosto 2021	Septiembre 2021	Octubre 2021	Noviembre 2021	Diciembre 2021	Enero 2022	Febrero 2022	Marzo 2022	Abril 2022	Mayo 2022	Junio 2022	Julio 2022	Agosto 2022	Septiembre 2022
Elaboración del estado del arte														
Fundamentación teórica de la noción de superficie														
Elaboración del marco teórico														
Comparación de algunos contenidos programáticos de cálculo en varias variables														
Selección de contextos realistas y cotidianos														
Diseñar actividades														
Aplicar y analizar las actividades														
Elaborar el documento final														

La estructura de este documento la definen la introducción, cinco capítulos, las conclusiones, las recomendaciones, la bibliografía y los anexos. El primer capítulo presenta el análisis del estado del arte en la investigación, en el segundo capítulo se presenta el marco teórico asumido en la tesis, en el tercer capítulo la metodología, en el cuarto capítulo los resultados de las actividades y en el quinto capítulo la confrontación de los análisis a priori y a posteriori de la ingeniería didáctica.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La construcción del estado del arte se realizó en dos etapas. Una primera etapa hacia el año 2018 y se hizo a partir de una consulta de revistas reconocidas según las bases de datos Scopus y de Colciencias[1]. Se extrajo todas las revistas clasificadas en el Top 10 y en el primer cuartil del CiteScore Percentile (482 títulos) de Scopus por áreas de conocimiento: Matemática aplicada, Artes y Humanidades, Educación y Matemáticas.

De esa primer selección se filtró los títulos, según área de interés: cálculo en varias variables, matemática realista, superficies en el cálculo, educación en esas áreas, entre otros, para seleccionar 237 títulos de los cuales se consultó su contenido en los anteriores cinco años (22 revistas finales).

En esta primera etapa se amplió la consulta usando las bases de datos de revistas indexadas y homologadas por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia (CeTel-Colciencias). Entre las revistas indexadas a 2014, se consultaron cuatro de las 148 en categoría A2, 12 de las 124 en categoría B y 16 de las 226 en categoría C. Entre las revistas homologadas a 2016 se consultaron cinco en categoría A1, siete en categoría A2, cuatro en categoría B y nueve en categoría C.

De la revisión realizada se extrajeron 20 artículos que por su nombre o resumen hacían alusión al cálculo en varias variables o al cálculo en educación superior.

[1]Colciencias es el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia, promueve las políticas públicas para fomentar la CTI en Colombia. Hoy en día es Minciencias, el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación.

Las revistas analizadas pertenecen a los siguientes países (o lugares), Estados Unidos (11 revistas), Reino Unido (12 revistas), Países Bajos (cuatro revistas), Alemania (una revista), Taiwán (una revista), Canadá (una revista), Australia (tres revistas), España (seis revistas), Brasil (dos revistas), Francia (dos revistas), México (tres revistas) y Colombia (33 revistas).

La segunda etapa de la construcción se llevó a cabo en el año 2020. En esta se amplió la consulta de trabajos en las revistas seleccionadas en la primera etapa, pero en los números posteriores a 2017. También se hizo una consulta aleatoria por temas de interés en otras revistas reconocidas en el ámbito de la educación. De la segunda etapa se extrajeron cinco artículos que le aportan de alguna manera a la investigación de la tesis.

La revisión detallada de cada artículo seleccionado llevó al análisis de nuevos artículos o revistas adicionales a las seleccionadas aumentando el número inicial de artículos. Como apoyo adicional en la construcción del estado del arte se consultaron investigaciones en eventos académicos de alto reconocimiento en educación y finalmente, se hizo la consulta en buscadores de información académica en internet de manera general y por temas relativos a la investigación. La construcción del estado del arte se muestra a continuación por medio de cuatro secciones. Se presenta el planteamiento de investigaciones cercanas a la tesis planteada.

1.1. Hacia una matemática realista en cálculo en varias variables

En esta sección se muestran trabajos de investigación que apuntan al desarrollo de actividades prácticas, cotidianas, realistas con los estudiantes, en el marco del curso de cálculo en varias variables o de una variable. Las investigaciones se acercan al enfoque de la tesis, en el sentido de manejar objetos palpables, en algunos casos, o que salen de la cotidianidad del estudiante en otros. Esos objetos pueden ser de temas relacionados con la matemática o de herramientas que facilitan la comprensión de los temas de matemáticas.

1.1.1. A "model" multivariable calculus course[2]

Este trabajo es resultado de experiencias de clase en cursos de cálculo en varias variables ofrecidos en la Universidad Estatal de Grand Valley, Estados Unidos. Se muestra ejemplos de trabajos realizados por los estudiantes en lo relacionado con la construcción de expresiones matemáticas de objetos (o lugares) de interés para los estudiantes (una rampa, el techo de un edificio, una presa, un lago, entre otros).

Se plantea suplir las necesidades de aprendizaje de los estudiantes en cálculo en varias variables, se enfatiza el trabajo en modelación obteniendo modelos como utilidad en economía, velocidad del agua, volumen específico entre otros. Con las actividades propuestas se encontraron también expresiones matemáticas para algunas superficies reales y describieron ciertos fenómenos físicos. Los autores y estudiantes encuentran valioso trabajar en otros temas del curso con superficies que los estudiantes han modelado. El trabajo de modelar algunas superficies se realiza como proyecto a desarrollar a lo largo del semestre (varias entregas), se hacen también modelos físicos (a escala) de ciertas superficies.

Se usa también alguna herramienta computacional para construir gráficos. Los mode-

[2] Beckmann, C. & Schlicker, S. (1999). A model multivariable calculus course. *PRIMUS*, *9*(3), 226-240.

los a escala se usan para introducir algunas nociones, por ejemplo las de derivadas parciales o derivadas direccionales.

Según los autores, “*Muchos (estudiantes) afirman que a través de este curso, encuentran las matemáticas muy prácticas y aprecian la oportunidad de experimentar dónde se aplica en su mundo. Algunos expresan que, por primera vez, comprenden y disfrutan de las matemáticas y sus usos*”[3] (Beckmann y Schlicker, 1999). El trabajo nos deja ver la importancia y el valor que tiene para los estudiantes definir los objetos matemáticos del curso asociados a elementos reales y más aún si ellos mismos construyen esos elementos. Ello hace que éste sea uno de los trabajos más cercanos, sin llegar a ser el mismo, a la propuesta de investigación que en la tesis se plantea.

1.1.2. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example[4]

Se trabaja en la propuesta de la Educación Matemática Realista, con problemas en contexto para un curso de cálculo diferencial buscando que los estudiantes se enfrenten mejor a las matemáticas formales. Se toma como problema en contexto aquellos problemas en los que la situación es experimentalmente real para el estudiante. Los autores buscan responder la pregunta ¿cómo podemos ayudar a los estudiantes a enfrentarse a las matemáticas formales?

Se toma como ejemplo un diseño de matemática realista, “*para ilustrar que la teoría*

[3] Beckmann, C. & Schlicker, S. (1999). A model multivariable calculus course. *PRIMUS*, *9*(3), 226-240, p. 238.

[4] Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1/3), 111-129.

basada en la heurística de diseño utilizando problemas de contexto y modelización, desarrollada para las matemáticas de la escuela primaria, también se ajusta a un tema avanzado como el cálculo"[5] (Gravemeijer y Doorman, 1999).

En el trabajo reseñado, las situaciones informales son los puntos de partida. Las instrucciones deben basarse en las contribuciones propias de los alumnos al proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre otras, la matemática realista busca que el diseño de instrucciones esté "*dirigido a crear oportunidades óptimas para la aparición de conocimientos matemáticos formales*"[6] (Gravemeijer y Doorman, 1999).

Se diseña el curso de cálculo diferencial a partir de la construcción de modelos emergentes (es decir, modelos que los mismos estudiantes construyen) en el contexto de la educación matemática realista y enmarcado también en la historia del cálculo.

En este trabajo se da un manejo amplio a diferentes posiciones sobre la Educación Matemática Realista, lo cual aporta significativamente al desarrollo de la tesis propuesta. Es un trabajo en cálculo diferencial, sin embargo los resultados encontrados sugieren trabajos similares en el cálculo en varias variables con un enfoque de la Educación Matemática Realista; además en la propuesta que se presenta para la tesis no necesariamente se busca afrontar la matemática desde el punto de vista formal o alcanzar un formalismo, sino más bien un acercamiento al trabajo real del estudiante y de cómo asimila este conocimiento desde esta perspectiva.

[5] Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1/3), 111-129, p. 111.

[6] Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1/3), 111-129 p. 116.

1.1.3. El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo[7]

Es un trabajo de Matemática en Contexto de tipo cualitativo relacionado con el aprendizaje de los conceptos de función de dos variables y de derivada parcial, en carreras de ingeniería. Se busca indagar sobre el funcionamiento cognitivo (acto de aprendizaje determinado por operaciones mentales que posibilitan interiorizar y codificar el conocimiento) de los estudiantes cuando se enfrentan a un cálculo contextualizado en ingeniería. Según el autor, en escenarios didácticos contextualizados se propicia un aprendizaje con significado para el estudiante, con sentido en el ámbito de su futura área profesional.

La investigación se realiza en seis sesiones de 75 minutos cada una con 12 estudiantes de ingeniería de sistemas e industrial del curso cálculo multivariable (o cálculo en varias variables) y que ya habían tomado los cursos de cálculo diferencial e integral del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus San Luis Potosí, México.

Se toma un conjunto de datos relacionados con la contaminación por residuos de sustancias químicas de algunas empresas aledañas a San Luis de Potosí (de curtido de pieles), y se modela por mínimos cuadrado el comportamiento de los datos con funciones en dos variables, lo que lleva a introducir la noción de funciones en dos variables y derivadas parciales.

Se identificó que los estudiantes estaban acostumbrados a presentar sus cursos en la forma teoría-aplicaciones. El cambio al presentar una situación contextualizada pro-

[7] Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime*, *10*(1), 145-175.

vocó dificultades en los estudiantes.

Este trabajo va en la dirección de la tesis en el sentido de que se refuerza en el artículo la posición de que se necesita, en las clases de cálculo, introducir contextos o situaciones reales: "*Un problema importante ligado a esta situación (verdadera comprensión) es que el conocimiento generalmente se trata fuera de contextos apropiados... a lo más que se llega en un curso común de cálculo es a resolver los llamados problemas de aplicación*"[8] (Zuñiga, 2007); la propuesta de matemática realista que se planea seguir en la tesis propuesta apoya esta posición.

Además, se mantiene la dirección de la investigación pues se busca vincular la matemática a los cursos de ingeniería de una manera más contextualizada y más cotidiana para el estudiante. Tratar de dejar de lado la evaluación sobre métodos algebraicos pues el estudiante siembra la idea de que dichos métodos son lo importante. En la investigación se identifica la necesidad de construir propuestas sobre estructuras didácticas alternativas que posibiliten un mejor aprendizaje. Los estudiantes pueden aprender a derivar o integrar, pero no saben cómo o cuándo usarlas. Similar a lo que pasa con las superficies, por ejemplo, saben qué es un elipsoide pero no necesariamente saben cómo representarlo en un contexto real o de su vida laboral.

1.1.4. Manipulatives for 3-dimensional coordinate systems[9]

La investigación se centra en la enseñanza de los sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas en un curso de cálculo en varias variables. El autor y su

[8] Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime*, *10*(1), 145-175, p. 147.

[9] Koss, L. (2011). Manipulatives for 3-dimensional coordinate systems. *PRIMUS*, *21*(4), 364-376.

grupo de clase construyen una representación física del espacio coordenado que pueden manipular y modificar dependiendo de lo que se quiera representar. Su título en inglés, "*manipulative*". Para su construcción usan materiales comunes en el mercado (limpiapipas (escobillones), cuentas y alambre de calibre fino). Usando dicha construcción se introducen y se manejan los tres tipos de coordenadas.

Es interesante destacar que el autor encuentra mucha más valiosa esta manera de introducir las coordenadas, que hacerlo usando por ejemplo un computador o el tablero. El hecho que los estudiantes puedan manipular los ejes de representación, según el autor, hizo que su comprensión del tema fuera mejor, en comparación con otros semestres en los que no se usó este sistema. Los ejercicios solucionados son típicos de los textos de cálculo en varias variables.

La manipulación del sistema construido hace que el estudiante se acerque a un ambiente real del curso. Una situación similar a las situaciones propuestas en la tesis propuesta pero con la diferencia de que solo incluye los tipos de coordenadas.

1.1.5. Visualizing three-dimensional calculus concepts: the study of a manipulative's effectiveness[10]

En esta investigación se da mucha importancia a la visualización con el fin de ayudar al estudiante de ciencias o ingeniería a comprender conceptos relacionados con puntos, superficies, curvas, contornos y vectores en el espacio. Las actividades o ejercicios desarrollados con un grupo de control y un grupo experimental (120 estudiantes en total)

[10] Mcgee, D., Moore-Ruso, D., Ebersole, D., Lomen, D. & Quintero, M. (2012). Visualizing three-dimensional calculus concepts: the study of a manipulative's effectiveness. *PRIMUS*, *22*(4), 265-283.

no son novedosos, en el sentido de que pueden encontrarse similares en los libros de cálculo en varias variables. La novedad radica en el "*manipulative*"(el kit 3-dimensional) usado para visualizar y comprender el ejercicio. Los autores usaron piezas metálicas, magnéticas, de plástico y otras para construir un modelo del espacio coordenado.

A pesar de que el uso del kit 3-dimensional ha generado buenos resultados, los autores consideran que nos son lo suficientemente significativos para hacer conclusiones sobre su uso. Con relación al trabajo algebraico no se tiene diferencias considerables de un grupo a otro, en cambio el manejo geométrico es mucho más claro con el grupo que usó el kit.

Igual que en Koss (2011), la manipulación del kit 3-dimensional lleva al estudiante a acercarse a un ambiente real del cálculo en varias variables. Una situación similar a la tesis propuesta. Los resultados mostrados en este artículo hacen suponer que la tesis planteada en educación matemática realista para este curso en particular, puede producir interesantes efectos en la enseñanza y aprendizaje de las superficies.

1.1.6. Discovering calculus on the surface[11]

La investigación se desarrolla con 38 estudiantes de cálculo en varias variables en el año 2011 y las actividades se desarrollaron en grupos de tres o cuatro estudiantes.

En este trabajo los autores "*diseñaron superficies reales y tangibles y las fabricaron con un centro de mecanizado de control numérico computarizado con el fin de que estudiantes puedan descubrir propiedades clave del cálculo en varias variables*"[12] (Wang-

[11] Wangberg, A. & Johnson, B. (2013). Discovering calculus on the surface. *PRIMUS*, *23*(7), 627-639.

[12] Ibíd,. p. 627.

berg y Johnson, 2013). Las actividades realizadas consisten en que los estudiantes respondan preguntas que les lleven a comprender diferentes conceptos del cálculo en varias variables y se responden en su mayoría usando las superficies diseñadas y construidas.

Los autores consideran que las herramientas computacionales pueden llegar a confundir y distorsionar las relaciones gráficas con los conceptos involucrados. Conjeturan "*que los desafíos de identificar conceptos geométricos y sus relaciones pueden no resolverse mediante el uso de mejores proyecciones visuales de superficies, sino trabajando en las superficies reales*"[13] (Wangberg y Johnson, 2013).

Las actividades propuestas se desarrollan usando las piezas fabricadas, pero no se hace explícito de qué manera los estudiantes llegan a los conceptos buscados. Se enfatiza en el trabajo con vectores, sobre todo en el vector gradiente para las superficies fabricadas. El trabajo le aporta a la tesis en el sentido de poder usar superficies reales para introducir o complementar la teoría a trabajar en el curso, pero las preguntas en las actividades no son con un enfoque realista. Las superficies construidas a la manera de esta investigación pueden aportar a la comprensión del concepto de superficie en los estudiantes.

1.1.7. Portfolio analysis for vector calculus[14]

La consulta realizada deja ver que esta es una de las pocas investigaciones que se acercan al estudio del cálculo en varias variables desde un enfoque realista, aunque

[13] Ídem.

[14] Kaplan, S. R. (2015). Portfolio analysis for vector calculus. *PRIMUS*, *25*(1), 31-40.

la propuesta de marco teórico no sea la Educación Matemática Realista. El trabajo se desarrolla partiendo de la teoría de temas económicos, pero no es explícita una teoría en educación que se esté usando como marco teórico.

El autor busca la manera de introducir el análisis clásico de cartera de acciones en un contexto económico en un curso de cálculo en varias variables incluyendo supuestos básicos, ejemplos prácticos y fuentes de datos reales. Considera que al plantear a sus estudiantes problemas relacionados con acciones, planes de jubilación, inversiones mensuales, minimización del riesgo de una inversión, entre otras, la clase fue mucho más enérgica y comprometida que al plantear otros temas cubiertos en el curso. En el artículo se detalla los diferentes términos del contexto económico y financiero usados en el tema y se realizan cálculos involucrados en los procesos. Las evaluaciones del desarrollo del curso incluyen estos temas como los que más les gustaron a los estudiantes.

En la dirección de esta tesis, la visión realista del tema planteado en el artículo y la percepción de los estudiantes, permiten conjeturar que los resultados que lleguen a obtenerse pueden ser de gran utilidad para la enseñanza y aprendizaje de las superficies en el cálculo en varias variables.

1.1.8. Using the pottery wheel to explore topics in calculus [15]

En el artículo se presenta la experiencia de aula sobre un "*un proyecto en el que los estudiantes crean sólidos de revolución con arcilla en una rueda de alfarería y*

[15] Farnell, E. & Snipes, M. A. (2015). Using the pottery wheel to explore topics in calculus. *PRIMUS*, *25*(2), 170-180.

estiman los volúmenes de estos objetos utilizando sumas de Riemann"[16] (Farnell y Snipes, 2015). Además se da atención también a gráficas de funciones de las que no se tiene una expresión algebraica. Los autores consideran que el hecho de que no se tenga una expresión, dio más libertad a los estudiantes de tomar puntos que definen una partición, llevando a que se tenga una comprensión más profunda de los temas relevantes. Se da importancia al hecho de que los estudiantes puedan tocar los sólidos de revolución que obtienen. El proyecto se implementó en tres semestres en por lo menos cuatro clases, cada clase entre 15 y 25 estudiantes.

Aunque los autores no hacen explícito el uso de la Educación Matemática Realista que se propone en esta tesis, tienen claro que el trabajo en contextos del mundo real llevan a los estudiantes a adquirir experiencias valiosas y a desarrollar una intuición y comprensión más profundas. Identificaron también que los estudiantes disfrutan (se motivan) con las actividades en las que pueden palpar los objetos.

El trabajo se llevó a cabo en la línea de esta tesis, es decir, en educación superior, pero con estudiantes de cálculo integral. Los autores sugieren desarrollar el proyecto haciendo modificaciones como por ejemplo con otro tipo de superficies, como frutas, objetos o esculturas reales, radiografías, entre otras, en el caso de no contar con ruedas de alfarería.

1.2. La teoría APOS en cálculo en varias variables

La investigación para la construcción del estado del arte permitió identificar una buena cantidad de artículos que toman como marco teórico la teoría Action-Process-Object-

[16] Ibíd,. p. 170.

Schema (APOS), tanto en cálculo en varias variables como en una variable. En esta sección se incluyen aquellos que le aportan a la tesis desde este marco teórico y en cálculo en varias variables. Es valioso el proceso de análisis de los datos y construcción de una descomposición genética del tema de estudio, que pueden servir de guía en la tesis.

1.2.1. Geometrical representations in the learning of two-variable functions[17]

Los autores destacan la importancia de tener en cuenta a las funciones en dos variables en las investigaciones y han comprobado que se tiene escasos trabajos al respecto; "*muchos estudios tienen en cuenta algunas propiedades de las funciones en varias variables pero pocos de ellos centran su atención en las particularidades explícitas con miras a estudiar su comprensión por parte de los estudiantes*"[18] (Trigueros y Martínez-Planell, 2010).

La investigación se desarrolló con nueve estudiantes al final del semestre a manera de entrevista. Busca ampliar la literatura existente en estudios de cálculo en varias variables analizando algunos factores geométricos, relacionados con la noción de función en dos variables que tienen los estudiantes. Se enmarca en la teoría APOS (acción, proceso, objeto, esquema) con el fin de examinar la construcción de objetos matemáticos involucrados en la construcción de funciones en dos variables y para describir los resultados de la coordinación de diferentes esquemas; también toma como marco teórico a las representaciones semióticas de Duval (para la representación y visualiza-

[17] Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

[18] Ibíd,. p. 3.

ción que llevan a procesos de aprendizaje). Se tiene en cuenta varios trabajos que han partido de la Visualización como herramienta de estudio.

El trabajo busca responder las preguntas ¿cuáles son las concepciones de los estudiantes de planos fundamentales (paralelos a los planos coordenados) y como las usan para construir ciertos subconjuntos del espacio que son necesarios para el análisis gráfico de funciones en dos variables? y ¿cómo son las concepciones de los estudiantes de las gráficas de funciones en dos variables relacionadas con su conocimiento del espacio y sus subconjuntos?

Las actividades propuestas relacionan los ejes coordenados con puntos cardinales y con ello se ubican puntos en el espacio. Se parte de curvas en el plano para construir ciertas superficies y dada una superficie se pide identificar la figura en un plano que se tiene al dar un valor fijo de alguna de las variables (identificar trazas). Se presentan conclusiones sobre el razonamiento de los estudiantes.

Una característica de las funciones en dos variables es su gráfica. El conocer e interpretar de manera plena las funciones en dos variables puede llevar a un manejo más amplio de las superficies, es decir, a un manejo analítico (por medio de expresiones matemáticas) de las superficies, complementando su uso en la vida profesional del futuro ingeniero y ampliando el manejo de expresiones matemáticas a otros contextos de cursos de cualquier área de su formación. Una de logros que se pretende obtener con la tesis.

1.2.2. Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction[19]

Este trabajo es la continuación de otros realizados por los autores en la misma dirección. En esta oportunidad centran la atención en que los estudiantes comprendan las gráficas de funciones en dos variables. Se preocupan por diseñar un conjunto de actividades (instrucciones) que lleven a los estudiantes a construcciones específicas del tema. Se trabaja a manera de entrevista de alrededor de 45 minutos con un grupo de 15 estudiantes. Durante la entrevista se pide, por ejemplo, solucionar algunas actividades con la posibilidad de usar instrumentos que representen el espacio coordenado (Kit 3D) usado también en otras investigaciones.

Los autores consideran que se ha dedicado poca atención en la educación matemática a las investigaciones relacionadas con funciones en dos variables; aunque ha aumentado considerablemente en los últimos años.

Se concluye que la comprensión de las gráficas de funciones en dos variables está fuertemente ligada al esquema que los estudiantes construyen sobre $\mathbb{R}^3$. Se identifica que es muy difícil para los estudiantes comprender las funciones en dos variables y que se tiene más dificultades que en cursos previos al de cálculo en varias variables.

Una dificultad identificada en los estudiantes se dio cuando se les pidió representar trazas de una función dada en planos diferentes a los planos coordenados. O cuando

[19] Martínez, P. R. & Trigueros, G. M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 663-672.

al reemplazar una sola variable por algún valor, la función completa se convertía en constante.

Aunque el enfoque del trabajo no es en Educación Matemática Realista (usa la teoría APOS), la forma que se plantean las actividades, o la información sobre las actividades encontrada en las entrevistas, permiten sugerir cuál debe ser el enfoque realista de la tesis para mejorar la comprensión de la noción de superficie en los estudiantes de cálculo en varias variables.

1.2.3. On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables[20]

Los autores del artículo plantearon su investigación siguiendo la teoría APOS y por medio de entrevistas a 26 estudiantes de ciencias e ingeniería que acababan de tomar un curso de cálculo en varias variables en grupos diferentes de estudio de una misma institución. Las entrevistas tenían en cuenta temas del curso que los estudiantes habían visto hacía ya un buen tiempo. Las respuestas de los estudiantes y la manera de enfrentar las actividades propuestas hacen ver que ello llegó a ser una debilidad del proceso pues no tenían en mente (o completamente frescos) los temas sobre los que eran interrogados.

Los temas centrales del trabajo son los conceptos de derivada parcial, plano tangente, el diferencial, derivada direccional y sus interrelaciones, pero no se pone atención a las superficies como se hace en la tesis. Se muestran algunos trabajos que permiten iden-

[20]Martínez, P. R., Trigueros, G. M. & Mcgee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 57-86.

tificar un interés creciente en investigaciones en temas del cálculo en varias variables sobre todo en la noción y comportamiento de funciones en dos variables.

Los autores identificaron que las expresiones algebraicas comunes suelen actuar como obstáculos cognitivos que restringen la comprensión de los estudiantes; sin embargo se apoyan constantemente en el conocimiento sobre funciones en una variable con el que los estudiantes deben contar. Buscan generalizar el conocimiento en una variable a varias variables en lo relacionado, por ejemplo, con el concepto de derivada.

1.2.4. Students' understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables[21]

La investigación centra la atención en la comprensión de los estudiantes de las derivadas direccionales de funciones en dos variables. Se realizó con 26 estudiantes de ciencias e ingeniería que acababan de terminar un curso de cálculo en varias variables. El estudio se hizo por medio de entrevistas semiestructuradas y aplicando la teoría APOS. Se analiza las construcciones mentales que los estudiantes eran capaces de hacer, de las que tenían dificultad para hacer y las que parecían hacer en este tema del cálculo en varias variables.

Después de analizar algunos enfoques del estudio de las derivadas direccionales, los autores consideraron importante enfatizar en el cambio vertical en el plano tangente dado por la derivada direccional, consideran que este enfoque es apropiado para ayudar al estudiante a comprender conceptos relacionados con funciones en dos va-

[21] Martínez, P. R., Trigueros, G. M. & Mcgee, D. (2017). Students' understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 13-41.

riables. Trabajan con los “planos de cálculo”, es decir, trozos de planos tangentes en un punto dado de la superficie como herramienta para ayudar a comprender los cambios generados a la noción de pendiente cuando se pasa a tres dimensiones.

Las preguntas de investigación que guían este estudio son: ¿cuál es la comprensión de los estudiantes de la derivada direccional después de tomar un curso de cálculo en varias variables? ¿qué construcciones mentales pueden utilizar los estudiantes para comprender este concepto? y ¿cuáles de estas construcciones mentales se pueden deducir del trabajo de los estudiantes y cuáles parecen causar dificultades?.

Entre los resultados encontrados con la investigación, se tiene que los estudiantes no conocen el cálculo de pendientes en el plano, lo que lleva a dificultar la interpretación en tres variables. O que el cálculo de la pendiente está sujeto al uso de una fórmula, es decir, la noción de pendiente está ligada a la razón aritmética únicamente. Eso les indicó que el estudiante no había construido la noción de pendiente en el espacio como un proceso (un requisito para comprender las funciones en dos variables). La interpretación geométrica de fijar una variable para la derivada en la dirección de la otra variable, tampoco se dio con la mayor claridad.

Como en otras investigaciones, en este se hace referencia a la dificultad presente en los estudiantes en el paso de dos a tres dimensiones, ahora con la noción de pendiente. Una situación que se ha planteado en la tesis y que se ha identificado también en otros trabajos de este estado del arte. Por otro lado, la representación geométrica y el uso, entre otros, de los planos fundamentales son de gran importancia en el desarrollo del artículo. Tema que también se tiene en cuenta en la investigación de la tesis. Con el artículo se identifica la importancia de que el estudiante tenga claro que una pareja (x_0, y_0) lleva al punto de la superficie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, lo cual no fue claro para varios entrevistados. Esto se refuerza con la propuesta de la tesis. De manera general, el manejo gráfico en tres dimensiones de lo que implica la derivada direccional fue una situación difícil para los estudiantes.

1.2.5. Students' understanding of the general notion of a function of two variables[22]

La investigación se realiza a manera de entrevista con un grupo de trece estudiantes que habían tomado un curso típico de cálculo en varias variables en el semestre previo y se enmarca en la Teoría APOS y la Teoría de Representación Semiótica. Los estudiantes entrevistados pertenecían a universidades de México y Puerto Rico. Según los docentes, de los estudiantes seleccionados, tres de ellos eran buenos, siete promedio y tres débiles en matemáticas.

El trabajo se enfoca en la comprensión por parte del estudiante de aspectos formales del concepto de función, y de las nociones de dominio, rango, unicidad del valor de una función y posible naturaleza arbitraria de una relación funcional, por medio de preguntas o ejercicios de cálculo en varias variables sobre los temas planteados. La noción de función en dos variables que se les dio a los entrevistados en su curso, se enmarcó en una generalización de la noción de función en una variable.

Algunas de las conclusiones a las que se llega con el trabajo son que pocos estu-

[22]Martínez-planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365-384.

diantes tuvieron la destreza de construir el concepto de función en dos variables; la mayoría tuvieron dificultad en identificar un dominio de una función en dos variables (por ejemplo algunos veían el dominio como dos conjuntos separados por haber dos variables) y se identificó también dificultad en el manejo de las coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Se identifica una necesidad grande en la falta de instrumentos que permitan al estudiante comprender mejor nociones como dominio y rango de funciones en dos variables. Se concluye también que la transición del concepto de función en una variable a función en dos variables no es directa y que los estudiantes que asimilan mejor el conjunto de ternas en $\mathbb{R}^3$, comprenden mejor las gráficas de funciones en dos variables.

Este trabajo es continuación de otros realizados por los autores y se detalla muy bien el manejo de la teoría APOS y la construcción de la descomposición genética en este tema. Las preguntas de investigación planteadas son: ¿Cuáles son las construcciones que los estudiantes necesitan con el fin de comprender las funciones en dos variables? y ¿cuáles de aquellas construcciones pueden ser asociadas con la comprensión de la noción de dominio, rango, unicidad del valor de la función, posible naturaleza arbitraria de una relación funcional?

Como los autores lo manifiestan, el paso de tener funciones en una variable a tener funciones en dos variables no es directo, por tanto la construcción de gráficas de ellas tampoco lo es. El identificar a una superficie como gráfica de una función en dos variables puede generar dificultades en los estudiantes, por tanto, entre otras cosas la propuesta de investigación buscará minimizar el impacto que puedan producir esas dificultades.

1.2.6. Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables[23]

Se presenta en este trabajo una investigación bastante amplia que busca definir una descomposición genética para usar con los estudiantes para que puedan comprender características de las funciones en dos variables. La investigación se realiza por medio de tres ciclos de investigación, que permiten refinar su propuesta y precisar conjuntos de actividades. Se hace con estudiantes que acababan de terminar cálculo multivariado en carreras de ciencias e ingeniería. Cada ciclo de investigación incluyó un número diferente de estudiantes, el primer ciclo se hizo con 14, el segundo con 15 y el tercer ciclo con 24 estudiantes pertenecientes al Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM) y a la Universidad de Puerto Rico recinto Mayagüez. Se usó la teoría APOS como marco teórico.

La propuesta de modelo que acá se presenta se complementa con otras investigaciones de los autores en la misma dirección del tema del artículo y de temas complementarios o similares. Algunas de las conclusiones que se hacen en este artículo se toman incluso de esas investigaciones.

Las actividades propuestas en el modelo se incluyeron después de varios semestres de aplicarse (de analizar los ciclos de la investigación), algunas se incluyeron debido a los resultados observados. Aunque en el primer ciclo se identificó algunas dificultades en la comprensión de ciertos temas, no se incluyeron actividades conducentes a reforzar esas debilidades debido a limitaciones de tiempo en el curso, en cambio se replanteó

[23] Martínez, R., P. & Trigueros, M., G. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(100687), 1-19.

la forma de presentar el tema en la clase redistribuyendo su tiempo y presentando más ejemplos del tema.

El manejo de los planos fundamentales para construir curvas de nivel, proyecciones o secciones trasversales de la superficie que tiene como gráfica la función, es un tema importante que se tuvo en cuenta en el segundo ciclo de la investigación.

Los investigadores identificaron que los estudiantes que trabajaron en los conjuntos de actividades propuestas, tenían mayor probabilidad de mostrar una concepción más consistente de la noción de funciones en dos variables que aquellos estudiantes que no trabajaron las actividades. Dando a entender que construyeron una comprensión más profunda de esta noción.

A manera de conclusión, entre otras, se tiene que el manejo de las variables libres es un tema que debe reforzarse para que los estudiantes asimilen mejor las características de funciones en dos variables. Existe debilidad en el manejo de $\mathbb{R}^3$, y eso dificulta la compresión de las funciones en dos variables. Algunos estudiantes no relacionan la gráfica de una función con su diagrama de contornos. Expresiones algebraicas conocidas o familiares actúan como obstáculos para los estudiantes. No hay claridad de la diferencia entre la gráfica de la superficie completa y la gráfica de la intersección de la superficie con un plano fundamental específico.

El uso de los ciclos que propone la teoría APOS, les permitió a los autores construir actividades y material didáctico para implementación en el aula. Muchas actividades se discutieron en clase y eso reflejó mejor comprensión por parte de los estudiantes, pero eso necesitaba de mayor tiempo en el aula de clase, con lo cual no siempre es posible contar. Una posibilidad de mejora del trabajo con los estudiantes, consideran los autores, puede estar dada con versiones digitales de las actividades, pues la retroalimentación sería inmediata. Se identificó que los estudiantes tienen dificultad para pasar de representaciones verbales o gráficas a representaciones algebraicas, y de representaciones algebraicas y de tablas a representaciones verbales.

Con lo anterior es claro que este trabajo aporta en gran manera a la investigación desarrollada en la tesis. Por tratarse del cálculo en varias variables y también porque suministra información de las debilidades encontradas en los estudiantes, por ejemplo, la representación de regiones en $\mathbb{R}^2$ y superficies en $\mathbb{R}^3$ (una altura para un punto del plano), los planos fundamentales y las intersecciones con la superficie. Temas a los que se les ha dado importancia en la tesis.

1.2.7. The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students[24]

La investigación se llevó a cabo en la universidad estatal de Ankara en Turquía con seis futuros profesores de matemáticas en educación secundaria. Los estudiantes fueron voluntarios que habían cursado satisfactoriamente sus asignaturas que incluían el cálculo en varias variables y la geometría analítica de su plan de estudio. Esta investigación es de tipo cualitativo, se desarrolló por medio de entrevistas y se utilizó como marco teórico la teoría APOS.

Con este proyecto se busca analizar la comprensión conceptual del espacio euclidiano

[24] Şefik, Ö. & Dost, Ş. (2020). The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students. *Journal of Mathematical Behavior*, *57*(100697), 1-22.

tridimensional y de las funciones en dos variables. Se plantearon dos preguntas, la primera: "*¿cuál es la comprensión de los conceptos de función de dos variables y espacio tridimensional entre los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria que han tomado los cursos de geometría analítica y cálculo?*"[25] (Şefik y Dost, 2020), y la segunda "*¿cuáles son las estructuras mentales de los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria que han tomado los cursos de geometría analítica y cálculo sobre los conceptos de función de dos variables y espacio tridimensional dentro del contexto de la teoría APOS?*"[26]

Los investigadores usaron actividades de otros trabajos de investigación en la misma dirección, incluyeron una pregunta adicional y las adecuaron al turco para realizar su análisis sobre las estructuras mentales que identifican en sus estudiantes y así completar la descomposición genética que conforman las preguntas propuestas. Se analiza cada una de las once preguntas planteadas a los estudiantes, se toma como referencia algunas respuestas dadas para conjeturar sobre lo que está sucediendo con la entrevista.

Los investigadores identificaron que no fue fácil para los estudiantes asignar una altura a un conjunto de puntos del plano xy. De manera general se identificaron dificultades en las siguientes actividades: identificar puntos del plano para un subconjunto de puntos en el espacio, intersecciones de planos con objetos tridimensionales, establecer una relación entre el concepto de función en dos variables y el espacio tridimensional, representación geométrica de expresiones algebraicas y relacionar la definición

[25] Ibíd,. p. 3.

[26] Ídem.

de función en dos variables con contextos de la vida diaria.

Por otro lado, los autores identificaron que la comprensión conceptual del espacio tridimensional y el concepto de función en dos variables estaban muy relacionados. O que los estudiantes asocian casi siempre el manejo algebraico para proceder con la solución de un problema. Esto les sugiere que es recomendable que se incluya la escritura de expresiones algebraicas de los objetos en el espacio para mejorar la comprensión de ciertos temas por parte del estudiante.

De los resultados encontrados y conclusiones realizadas puede inferirse que la dirección tomada en la tesis ayudará a comprender mejor el espacio tridimensional y las funciones en dos variables, entre otros temas del cálculo en varias variables. Este trabajo le aporta a la tesis en el enfoque de las actividades propuestas y también en el análisis de los resultados.

1.3. La necesidad de investigar e innovar en educación superior

Varios autores consideran que la investigación en enseñanza y aprendizaje del cálculo y principalmente en cálculo en varias variables es escasa. Se ha identificado también que una necesidad común en educación superior es la de innovar sus métodos de enseñanza y aprendizaje. Algunos autores identificaron en sus investigaciones que los cursos en educación superior se desarrollan de manera tradicional y poco atractivo para los estudiantes. En los artículos de esta sección se verán reflejadas esas posiciones y se identificará también que la dirección que sigue la tesis puede ser valiosa para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables.

1.3.1. Changing attitudes to university mathematics through problem solving[27]

Se desarrolla un trabajo de investigación con un grupo de 44 estudiantes destacados en matemáticas de Ingeniería Industrial y de Sistemas (tercer a quinto semestre) de la *Universiti Teknologi Malaysia* que consiste en enfocar los cursos hacia la resolución de problemas. Se busca identificar los cambios en las actitudes de los estudiantes al plantear los cursos en esta dirección. Los cambios de actitudes se identifican por medio de encuestas sobre la matemática y la resolución de problemas en la universidad.

Se encuentra que los docentes deben tener una mejor actitud sobre las capacidades de los estudiantes. " *Lo que se ha demostrado en esta investigación es que los métodos de enseñanza formal estándar en la educación superior pueden causar cambios de actitud que son lo contrario de lo que se considera deseable por los matemáticos*"[28] (Mohammad-Yusof y Tall, 1999). Los autores identificaron que "*una mayoría (de estudiantes) declaró actitudes negativas como la ansiedad, el miedo a nuevos problemas y la falta de confianza. Durante el curso de resolución de problemas los cambios fueron casi todos en la dirección deseada. Durante los siguientes seis meses de clases estándar de matemáticas, casi todos los cambios fueron en la dirección opuesta*"[29] (Mohammad-Yusof y Tall, 1999).

De manera general el trabajo plantea que el desarrollo de los cursos de matemáticas de manera diferente a la formal (que es común en las universidades), como en este

[27] Mohammad-Yusof, Y. & Tall, D. (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(1), 67-82.

[28] Ibíd,. p. 81.

[29] Ibíd,. p. 67.

caso por medio de la resolución de problemas, genera en los estudiantes actitudes favorables para su motivación y comprensión de los temas. Estos valiosos hallazgos dan luces para continuar en la investigación propuesta en la tesis, pues refuerza la hipótesis de que el trabajo desde una matemática realista o en contexto hará seguramente que las actitudes de los estudiantes hacia el trabajo en cálculo en varias variables y en matemáticas en general, sea más ameno y permitirá hacer aportes a la caracterización del pensamiento matemático llevado a cabo en el proceso.

1.3.2. Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context[30]

El trabajo muestra un análisis desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico de una investigación realizada con seis estudiantes que terminaban de ver el curso de cálculo en varias variables en una universidad de Estados Unidos. La entrevista tomó aproximadamente una hora y media y se realizó después de que los estudiantes resolvieron ciertos ejercicios.

Se preguntó a los estudiantes acerca de su comprensión de la variedad de sistemas de coordenadas y su relación con las coordenadas rectangulares. Se enfatiza en la comprensión que tienen los estudiantes de cuándo una expresión en coordenadas polares, representa una función de θ. Se busca una comparación con el criterio gráfico usado en coordenadas rectangulares para saber si una expresión representa una función.

[30] Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 139-160.

Los autores consideran que existe poca investigación en el área al afirmar que "*investigaciones sobre la epistemología y didáctica en general de cálculo multivariado son virtualmente inexistentes y ésta es la razón por la cual no se hace una revisión real de la literatura sobre el tema*"[31] (Montiel y col., 2009). El investigar en cálculo en varias variables lo consideran como un "*nuevo territorio*"[32] (Montiel y col., 2009).

Es muy clara la importancia del uso de diferentes sistemas de coordenadas en problemas por ejemplo de integración o para la parametrización de algunas superficies, sin embargo en este trabajo solo se estudia la comprensión por parte de los estudiantes de la relación de esos sistemas de coordenadas con el sistema rectangular. La investigación propuesta en esta tesis se plantea una ampliación a ese trabajo y a los pocos existentes en cálculo en varias variables; además de que en la propuesta de esta tesis no se maneja el enfoque ontosemiótico.

1.3.3. The role of intuition in the solving of optimization problems[33]

La investigación se desarrolla con 38 estudiantes universitarios que están cursando cálculo diferencial. El objetivo es analizar la intuición y el rigor en la solución de problemas de optimización, sin dejar de lado la formalización. La investigación se pregunta sobre la intuición para optimizar (en la dirección de otros trabajos en los que se habla de intuición geométrica e intuición analítica entre otras).

El trabajo se enmarca en el enfoque ontosemiótico de Godino y Batanero y en la "*cien-*

[31] Ibíd,. p. 140.

[32] Ibíd,. p. 140.

[33] Malaspina, U. & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107-130.

cia cognitiva de las matemáticas" de Lakoff y Núñez. Se parte del supuesto de que la intuición es un vector en tres componentes, formado por la idealización, la generalización y la argumentación. Se usan las experiencias cotidianas, como la búsqueda del mejor camino al trabajo, para introducir la optimización en los estudiantes; se excluye los problemas en los que el enunciado tiene la gráfica explícita de la función objetivo con el fin de evitar soluciones visuales únicamente.

Se analizan varios tipos de resultados en el trabajo de los estudiantes, por ejemplo, cuando solo mostraron la respuesta, usaron un lenguaje formal o encontraron el resultado que se les pidió. Con ello los autores intentan justificar que los resultados obtenidos son óptimos y demuestran el contar con una intuición para optimizar por lo menos en alguna parte del proceso. El artículo muestra algunos datos numéricos de los resultados obtenidos y hace comparaciones sobre los tipos de problemas usados.

Los autores notan, entre otras situaciones, que el hecho de que los estudiantes usen una intuición para optimizar les lleva a considerar como óptima la respuesta que presentan sin haber justificado su valor aunque se les pida hacerlo. Se concluye que la intuición para optimizar sí existe. Que el hecho de trabajar en grupos hace que los estudiantes no justifiquen sus respuestas y que aunque se tenga algunos argumentos explícitos, en ciertos pasos en la solución del problema se identifica intuición para optimizar.

En el cálculo en varias variables, la optimización es un tema muy importante y uno de los más usados en ingeniería. La relación que se da entre las curvas y superficies de nivel de la función a optimizar y la restricción al usar multiplicadores de Lagrange, puede quedar más clara si el manejo de las superficies por parte de los estudiantes es preciso, haciendo que la comprensión del método mejore. Es posible que una intuición bien manejada mejore las condiciones de trabajo en el aula.

1.3.4. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?[34]

El artículo hace un balance del estado de la investigación en cálculo con base a la literatura consultada. Los autores percibieron en la literatura cuatro tendencias de investigación: identificación de conceptos erróneos, procesos por medio de los cuales los estudiantes aprenden conceptos particulares, estudios o experiencias de aula e investigaciones sobre conocimientos, creencias y prácticas de los maestros; todas ellas buscando mejorar la enseñanza y aprendizaje.

La investigación de la literatura existente permite identificar, por ejemplo, qué nuevas áreas de investigación en cálculo son necesarias; entre ellas la del cálculo en varias variables (Rasmussen y col., p. 512, 2014).

Se presenta una gran cantidad de referencias con investigaciones en temas del cálculo como derivadas, interpretación de las derivadas, regla de la cadena o integrales para funciones en una variable.

Los autores cuestionan los avances que se han dado después de muchos años de investigación (por ejemplo de la derivada) en la práctica docente. Muchos de los datos mostrados en los artículos consulados resultan de realizar entrevistas, y en muchos casos con un número pequeño de entrevistados (lo cual también se cuestionan los

[34] Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507-515.

autores). Se resalta la falta de conexión entre la teoría y la práctica en los trabajos analizados y propuestas de diferentes investigaciones planteadas.

Dada la seriedad del artículo, se afianza la confianza en desarrollar la tesis en el tema propuesto. Tanto por la necesidad de investigar en el área, por tomar un tamaño significativo de muestra de estudio, o por la propuesta de relacionar más de cerca la realidad del estudiante con la matemática del curso de cálculo en varias variables, la tesis coincide con la investigación mostrada en este artículo.

1.3.5. Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts[35]

El trabajo es resultado de una investigación realizada a manera de encuesta con siete profesores universitarios: seis miembros del Comité Europeo de Educación de la Sociedad Europea de Matemáticas y el tercer autor del artículo. Se indaga sobre el estado del currículo y la enseñanza del cálculo diferencial en varios contextos.

Aunque el tema inmediato tratado en este trabajo se aleja del propósito de la investigación a plantear en esta tesis, se incluyó en el estado del arte por la insistencia que hacen los autores en investigar en temas relacionados con el cálculo, y de paso la enseñanza de la matemática en educación superior. El análisis de la literatura realizado por los autores, haciendo referencia a investigaciones en el área, les permite afirmar, que "*lamentablemente, no existe una fuente general sobre los diferentes desarrollos históricos en los países europeos que pueda ayudar a fomentar la comprensión de las*

[35] Törner, G., Potari, D. & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 549-560.

discusiones didácticas sobre el cálculo, y una perspectiva europea sobre el currículum es una perspectiva bastante nueva"[36] (Törner y col., 2014).

Afirman también que seguramente las investigaciones realizadas no se encuentran en el idioma inglés. Otra posición encontrada es que "*...ni un documento de discusión del ICMI ni un volumen de estudio del ICMI abordan nuestro tema*"[37] (Törner y col., 2014).

Esto hace pensar que puede haber una necesidad urgente de investigar la enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables y en particular la noción de superficie. Y la necesidad de ampliar la literatura existente sobre investigaciones en el área, sobre todo en el idioma español.

1.3.6. First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes[38]

Con este trabajo puede identificarse con facilidad la gran utilidad en enseñanza y aprendizaje que puede llegar a tenerse al desarrollar la investigación planteada en esta propuesta de tesis. A continuación se dan algunos puntos de vista de los autores y en la dirección de la propuesta de investigación que se presenta.

El trabajo muestra un estudio realizado con 161 estudiantes de primer año de la Facultad de Química y de Tecnología Química, de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Ljubljana en Eslovenia. El estudio se enfoca en examinar las creencias

[36] Ibíd,. p. 549.

[37] Ídem.

[38] Drobnic Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(5), 1161-1187.

o percepciones de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y en la solución de problemas por medio de 5 etapas: creencias sobre el profesor de matemáticas, creencias sobre sus competencias, creencias sobre la matemática misma, creencias sobre la participación activa y creencias acerca de problemas de contexto.

En el trabajo se sigue la noción de problemas de contexto como aquellas aplicaciones o problemas no rutinarios con múltiples pasos que los estudiantes pueden enfrentar en su vida cotidiana o en un campo profesional.

Centrando la atención en la última etapa del estudio, por ser de interés en la investigación propuesta a desarrollar, puede destacarse como resultados encontrados, por ejemplo, que los estudiantes con habilidades destacadas en matemáticas (en ejercicios rutinarios) no asumen los problemas de contexto de mejor manera que los estudiantes con menores habilidades en matemáticas. En parte, porque las personas sienten mayor placer en las actividades en las que son buenas.

Las creencias de los estudiantes sobre la matemática dependen también de la exigencia en el programa de estudio. "*Cuando (los estudiantes) se encuentran con un problema de contexto con competencias y estrategias desconocidas, es probable que se sientan incómodos, inseguros o quizás desconfiados. Como no están acostumbrados a lidiar con tales emociones, sus creencias sobre los problemas de contexto se vuelven más negativas en comparación con las creencias matemáticas generales*"[39] (Drobnic Vidic, 2015).

[39] Drobnic Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(5), 1161-1187, p. 1182.

Tampoco puede concluirse que los estudiantes con percepciones negativas sobre los problemas de contexto no tienen éxito en su solución ni que los que tienen percepciones positivas si son exitosos, pero queda claro que, "*para mejorar la educación matemática terciaria en programas de estudio más exigentes, necesitamos mejorar las creencias de los estudiantes sobre los problemas de contexto*"[40]. Por otro lado, "*una experiencia positiva de participación activa en problemas de contexto planteados gradualmente puede cambiar la sensación de dificultad expresada por los estudiantes*"[41].

La investigación permite afirmar que "*las características de los problemas de contexto que parecen contribuir a su eficacia en términos de mejorar la comprensión y, por tanto los logros, se encuentran en la educación matemática realista*"[42]. "*Si los profesores preparan problemas atractivos a un nivel adecuado de dificultad, los alumnos estarán preparados para participar en tales actividades*"[43].

1.3.7. La docencia universitaria: realidad compleja y en construcción. Miradas desde el estado del arte[44]

La investigación se desarrolla en el marco de 153 referencias bibliográficas y analiza el abordaje de la docencia universitaria, el trabajo y prácticas docentes y la formación de los profesores en Iberoamérica.

Desde diferentes perspectivas se logra identificar la necesidad de "*alternativas orien-*

[40]Ibíd., p. 1183.

[41]Ibíd., p. 1184.

[42]Ídem

[43]Ídem.

[44]Londoño-Orozco, G. (2015). La docencia universitaria: realidad compleja y en construcción. Miradas desde el estado del arte. *Itinerario Educativo*, *29*(66), 47-85.

tadas a lograr un trabajo más pertinente por parte del profesor universitario, por perfeccionar su ejercicio y por señalar prácticas y destrezas que fortalezcan sus competencias docentes. Se destaca el interés por un cambio en la cultura docente universitaria"[45] (Londoño-Orozco, 2015). Se identifica que los docentes deben interesarse en implementar mejores métodos de enseñanza. Se quiere "*dar un papel protagónico al estudiante y favorecer su desarrollo a nivel cognoscitivo, procedimental y actitudinal, e incluso promover el desarrollo de su voluntad*"[46].

Los trabajos revisados dejan ver "*claras preocupaciones en relación con perspectivas que enriquecen la discusión sobre la formación de profesores universitarios*"[47]. El artículo reseñado destaca pues, la necesidad de innovar en el aula de clase en cursos de educación superior y la necesidad de llevar al estudiante por caminos atractivos para él. Los cursos de matemáticas, y en particular de cálculo en varias variables no pueden ser la excepción en el intento de pensar en nuevas metodologías y herramientas de enseñanza-aprendizaje.

1.3.8. Supporting students mathematical thinking in the learning of two-variable functions through blended learning[48]

Es claro para los autores que la noción de función en varias variables es muy importante en matemáticas y ayuda a comprender nociones de otras áreas del conocimiento.

[45]Londoño-Orozco, G. (2015). La docencia universitaria: realidad compleja y en construcción. Miradas desde el estado del arte. *Itinerario Educativo*, *29*(66), 47-85, p. 54.

[46]Ibíd., p. 53.

[47]Ibíd., p. 62.

[48]Kashefi, H., Ismail, Z., Yusof, Y. M. & Rahman, R. A. (2012). Supporting students mathematical thinking in the learning of two-variable functions through blended learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *46*, 3689-3695.

Según ellos la comprensión del concepto y de las particularidades de las funciones en dos variables por parte de los estudiantes, no ha logrado identificarse con claridad debido a lo escaso de investigaciones en esta dirección.

Con la investigación se busca dar soporte al pensamiento matemático de los estudiantes de cálculo en varias variables, por medio de un modelo de enseñanza y aprendizaje de funciones en dos variables, apoyado en el aprendizaje combinado (blended learning). Se mide también el impacto del entorno combinado en la enseñanza de funciones en dos variables para la superación de obstáculos de los estudiantes. El blended learning combina formatos presenciales y virtuales de aprendizaje.

Se trabajó con un grupo de 59 estudiantes matriculados en cálculo en varias variables en la Universidad Islámica Azad de Kermanshah en Irán, durante tres semanas en reuniones semanales de tres horas (dos presenciales y una en laboratorio). La investigación tiene que ver con el capítulo uno del contenido del curso de cálculo en varias variables (multivariate calculus) ofrecido en esta universidad (un contenido muy similar al ofrecido en las universidades colombianas). Los temas del curso se presentaban de manera magistral y luego los estudiantes pasaban al trabajo de laboratorio en línea para poder preguntar, solucionar actividades y discutir lo visto. Las actividades fueron en línea pero las evaluaciones se hicieron de manera presencial.

Una actividad mostrada en el artículo y presentada a los estudiantes tiene que ver con encontrar el dominio y rango de una función en dos variables (la actividad es muy común a los libros de texto tradicionales). Con esa actividad buscaban luego responder a las preguntas como ¿qué entienden los estudiantes por dominio y rango? ¿qué hacen para encontrarlos? y ¿cuáles dificultades encuentran? El análisis de los errores cometidos por el estudiante tuvo en cuenta el enfoque de pensamiento matemático que involucra los conceptos matemáticos, técnicas de manipulación algebraica, notación, entre otros.

Con la investigación se identifica que las debilidades en el conocimiento matemático de funciones en una variable y las malas manipulaciones algebraicas son un obstáculo considerable para aprender las funciones en dos variables. Según los autores esos obstáculos en las actividades propuestas fueron superados con el aprendizaje combinado pues los estudiantes tuvieron la posibilidad de interactuar con herramientas y con otros estudiantes. Se concluye que el uso de las herramientas interactivas ayuda a los estudiantes a comprender las funciones en dos variables.

Aunque el artículo hace referencia al estudio de las funciones en dos variables, las actividades mostradas y el análisis realizado tienen en cuenta únicamente el dominio y rango de estas funciones. En este trabajo se enfatiza que las dificultades para comprender características de las funciones en dos variables, radican en gran parte en las debilidades que traen los estudiantes de las características de las funciones en una variable.

En la dirección de la tesis, puede pensarse entonces que una manera de introducir los temas de cálculo en varias variables podría ser sin dependencia absoluta del conocimiento de cálculo en una variable (otra podría ser retomar el cálculo en una variable, pero eso puede tomar más tiempo). Por otro lado es valioso también para la tesis enfatizar por ejemplo en que el manejo preciso de las curvas en el plano xy puede hacer que se generen o construyan superficies en el espacio de una manera más comprensible para el estudiante.

1.4. El paso de dos dimensiones a tres dimensiones

En los cursos de cálculo en varias variables parece asumirse que el paso de dos dimensiones (2D) a tres dimensiones (3D) es automático para los estudiantes. Algunas investigaciones han encontrado que no es así. Ello sugiere la necesidad de detenerse en la construcción de un método, o de herramientas que permitan la mejor comprensión de los estudiantes en este cambio de dimensiones. En los artículos que se presentan en esta sección se identificó la dificultad en el paso de 2D a 3D en diferentes temas del cálculo en varias variables. Las debilidades encontradas en los trabajos son insumo valioso para la construcción de actividades o herramientas en la enseñanza y aprendizaje del curso.

1.4.1. Generalising calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range[49]

Con la investigación se busca estudiar la manera en que los estudiantes de cálculo en varias variables, piensan o le dan significado al dominio y rango de funciones en una y varias variables y cómo ellos generalizan esta noción desde el caso una variable al caso dos variables.

Este trabajo se desarrolla con 18 estudiantes voluntarios matriculados en cálculo en

[49]Dorko, A. & Weber, E. (2014). Generalizing calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 269-287.

varias variables en una universidad de Estados Unidos. Cada estudiante participó en una entrevista semiestructurada que duró aproximadamente una hora. Se direcciona la investigación hacia una generalización, relacionada con el dominio y rango de funciones en una variable a funciones en varias variables como marco teórico, desde una perspectiva orientada al actor (actor-oriented perspective), es decir, de cómo los estudiantes ven similitudes en situaciones matemáticas, en contraste a una perspectiva orientada al observador (observed-oriented perspective) en la cual las similitudes en situaciones matemáticas se identifican desde la visión de un experto.

Los autores identifican varios términos, para dominio y rango, usados por los estudiantes y parten de ellos para hacer el análisis del significado que le dan en las funciones tanto de una como de dos variables. Se identificó que este no era un tema que se detallara con atención en el curso, por lo que los autores sugieren darle más importancia.

La percepción de los autores sobre los tópicos de cálculo en varias variables es que son extensiones naturales de los tópicos de cálculo en una variable.

Este trabajo es uno más entre los ya referenciados que incentiva la investigación en temas del cálculo en varias variables. Según los autores "*mientras existe un gran cuerpo de conocimientos sobre cómo los estudiantes entienden varios conceptos en el cálculo de una sola variable, existen muchos menos estudios sobre la comprensión de los estudiantes de los conceptos de cálculo en varias variables*"[50] (Dorko y Weber, 2014).

Aunque este trabajo le aporta a la literatura en investigaciones en cálculo en varias

[50]Dorko, A. & Weber, E. (2014). Generalizing calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 269-287, p. 269.

variables, no hace referencia al estudio de las superficies en este curso. También le aporta a la investigación de la tesis en el sentido de cuestionar cómo los estudiantes comprenden los diferentes conceptos de cálculo en varias variables.

1.4.2. Students' images of two-variable functions and their graphs[51]

El trabajo indaga sobre las gráficas de funciones en dos variables. Presenta un análisis conceptual sobre las gráficas de funciones en una variable que los estudiantes construyen y la manera como extienden a gráficas de funciones en dos variables. Por ejemplo se direcciona la construcción de superficies partiendo de la gráfica de una curva y provocando un barrido de ella de manera paralela a un eje dado por un parámetro. Se utiliza el análisis conceptual basado en el razonamiento cuantitativo covariacional para construir una posible trayectoria de aprendizaje.

Con la investigación se busca que los estudiantes vean una gráfica de una función como la representación de variables que han covariado. Se indaga sobre la influencia que genera la comprensión de las gráficas de funciones en una variable en la generalización a gráficas de funciones en dos variables, y se pregunta también sobre el papel del razonamiento covariacional en esa generalización.

El trabajo se lleva a cabo con dos estudiantes que no habían tomado cursos de cálculo en varias variables. Se realiza un curso intensivo de tres semanas sobre razonamiento cuantitativo y covariacional y se apoyó con el uso de un computador.

[51] Weber, E. & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 44-57.

La investigación desarrollada por los autores les permite concluir que “*el proceso mediante el cual los estudiantes aprenden a representar las funciones de dos variables no se ha explorado completamente*”[52] (Weber y Lockwood, 2014) y que razonamiento covariacional con base cuantitativa permite a los estudiantes generar amplio conocimiento sobre el tema tratado. Manifiestan también que los trabajos existentes no especifican la manera cómo los estudiantes deben seguir su aprendizaje para comprender efectivamente las gráficas de funciones en dos variables; o no abordan los procesos mentales mediante los cuales los estudiantes podrían visualizar la gráfica de una función de éstas, limitándose a insinuar los esquemas que pueden ayudar a los estudiantes.

Según el estudio, las dificultades cuando se estudia el pensamiento (la comprensión) de los estudiantes sobre las funciones, está en pensar en cantidades asociadas a los valores de las variables y cómo esas cantidades cambian al tiempo en el caso de funciones de dos variables.

En el trabajo se presentan algunas formas de cómo los estudiantes vieron la manera de construir la gráfica de una función en dos variables. Por ejemplo, como el barrido provocado a una curva al variar un parámetro dado en la función en una variable; o el manejo de expresiones polinómicas como suma de funciones diferentes (cada término del polinomio es una función). Las funciones vectoriales o forma parametrizada de ellas también son tema de discusión en el trabajo.

---

[52] Weber, E. & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 44-57, p. 68.

El número tan pequeño de participantes es una fuerte debilidad del proceso, pues limita las afirmaciones que puedan llegar a hacerse.

Este trabajo se acerca mucho al planteado en la tesis y suministra información de la manera cómo los estudiantes piensan los procesos de construcción de la gráfica de una función en dos variables.

1.4.3. Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus[53]

La investigación se hace con un grupo de 68 estudiantes de ingeniería de la Universidad de Puerto Rico-Mayagüez (UPRM) entre 2012 y 2013 (divididos en grupos de 36 y 32 estudiantes que constituyen en grupo experimental y grupo de control). Se sigue las ideas de la teoría de registros de representaciones semiótica de Raymond Duval como marco teórico.

En el trabajo se compara formas de presentar la noción de pendiente para introducir, por ejemplo, el concepto de derivada en funciones en una y dos variables. Se analiza las posibles consecuencias de asumir que el estudiante hace el cambio, casi de manera automática, en el paso de 2D a 3D (dos dimensiones a tres dimensiones).

La investigación realizada muestra que mientras en 2D se presenta un buen número de interpretaciones de pendiente, en 3D es considerablemente menor. Los libros de texto consultados hacen ver que se espera que el estudiante comprenda la noción de

[53] Lee Mcgee, D. & Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(Suppl 2), 357-384.

pendiente y sus interpretaciones en 3D sin mostrársela de manera explícita.

Las clases se desarrollaron de manera tradicional salvo aquellas en las que el grupo experimental hizo uso del material experimental. Los resultados de las pruebas se identificaron por medio de entrevistas a algunos estudiantes clasificados según su rendimiento al momento de realizarlas y a lo largo del semestre en las clases y evaluaciones del curso.

La investigación aborda las siguientes preguntas: ¿Los estudiantes que experimentan una presentación explícita de pendientes en 3D pueden realizar tratamientos y conversiones consistentes con la comprensión de pendientes en 3D en comparación con los estudiantes que no tienen tales experiencias? ¿Los estudiantes que pueden realizar tratamientos y conversiones con pendientes 3D pueden realizar tratamientos y conversiones consistentes con la comprensión de derivadas en 3D en comparación con los estudiantes que no pueden realizar tratamientos y conversiones con pendientes 3D? ¿De qué manera la inclusión de materiales de instrucción que abordan explícitamente diferentes registros utilizados para representaciones relacionadas con pendientes simples en 3D impacta la capacidad de los estudiantes para tener éxito en el curso de cálculo multivariado?

Los resultados generales muestran diferencias considerables a favor del grupo que recibió información explícita sobre pendientes (grupo experimental) versus el grupo que no la recibió (grupo de control); los resultados de las tareas y evaluaciones fueron considerablemente mejores para el primer grupo. Salvo en actividades que involucraban manejo algebraico y numérico, el grupo experimental "*fue cinco veces más exitoso que* *el grupo de control*"[54] (Lee Mcgee y Moore-Russo, 2015); principalmente en actividades que involucraban derivadas. El material experimental que usaron también mostró favorecer la comprensión de los temas por parte de los estudiantes.

Algo que llama la atención del artículo, y que se ha planteado en la tesis, es la necesidad de investigar en cálculo en varias variables. Los autores del artículo identificaron muchos trabajos relacionados con la pendiente en dos dimensiones pero no encontraron trabajos en esta dirección para cálculo en varias variables. Es valiosa también la conclusión de que el mostrar varias representaciones de un mismo tema, ayuda a mejorar la compresión por parte del estudiante del tema. La representación analítica de superficies planteada en la tesis se ha enfocado desde diferentes puntos de vista, es de pensarse entonces que le aporta a la comprensión de las superficies por parte del estudiante.

Conclusiones del Capítulo 1

La preocupación por investigar en educación superior, buscando mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, ha sido notable en los últimos años. Aun así, la cantidad de trabajos existentes en revistas reconocidas es todavía pequeño, por lo menos en comparación con otros niveles de formación. Es claro, con la investigación realizada en la construcción del estado del arte, que investigar en educación superior, y en particular en cálculo en varias variables, aportará significativamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y aportará considerablemente a la literatura existente.

[54]Lee Mcgee, D. & Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(Suppl 2), 357-384, p. 381.

El tratar de hacer que los estudiantes comprendan los temas estudiados en el cálculo en varias variables, ha llevado a los investigadores a construir herramientas que el estudiante puede manipular y eso ha dado buenos resultados. Hacer ver al estudiante que muchas de las superficies dadas por una ecuación de la forma $z = f(x, y)$ o de la forma $f(x, y, z) = c$, entre otras, son objetos que puede tener en sus manos o tenerlos muy cerca, permite asimilar mejor los temas del curso, sobre todo de aquellos que necesitan de una representación gráfica.

Los contextos reales o cotidianos para el estudiante, motivan, estimulan y mejoran el aprendizaje por parte de los estudiantes. Algunos autores consideran que trabajar con objetos reales puede ser más útil para los estudiantes que trabajar incluso con un computador.

Cuando el estudiante llega al cálculo en varias variables, necesariamente se ve obligado a enfrentarse al cambio de 2D a 3D. Las investigaciones muestran que es necesario detenerse en ese cambio y no asumir que el estudiante lo hace de manera automática. El presentarle, por ejemplo, el espacio coordenado en el tablero, es decir, presentarle un objeto 3D en un espacio 2D, genera también obstáculos epistemológicos en el estudiante. Trabajar con superficies y objetos que el estudiante puede ver, manipular, poner en un lugar o en otro, parece que ayuda a disminuir el impacto negativo que en muchos de ellos genera el paso de 2D a 3D.

Una forma de introducir los temas en varias variables (por ejemplo funciones) es hacerlo apoyándose en el tema correspondiente a una variable. Algunas investigaciones se han direccionado de esta manera. Es claro en este caso que su buen desarrollo depende del conocimiento que el estudiante tenga del tema en una variable, o qué tanto recuerde de los cursos en una variable. Esto implica un manejo más cuidadoso pues puede generar obstáculos dado que no todos los estudiantes demuestran haber asumido esos temas de la misma manera o con la misma precisión.

En muchos temas de cálculo en una variable se muestra una amplia gama de interpretaciones prácticas o aplicadas (por ejemplo la noción de pendiente). Eso parece haber cambiado al llegar al cálculo en varias variables. Investigaciones muestran que las interpretaciones prácticas motivan a los estudiantes en el tema de estudio. El cálculo en varias variables debe entonces presentar una buena cantidad de interpretaciones prácticas para los temas que se desarrollan, con el fin de motivar a los estudiantes.

Situaciones que llaman la atención en la mayoría de las investigaciones realizadas sobre cálculo en varias variables, son el bajo número de individuos de estudio y la condición de los entrevistados, es decir, se toman entrevistas a estudiantes después de haber visto el curso. El bajo número de individuos puede quitar precisión a las recomendaciones que surgen de la investigación. La condición de entrevistados puede hacer subjetivas las respuestas pues están dadas sujetas a la buena o mala memoria del estudiante, más no al conocimiento mismo del tema.

En alguna investigación se destaca la dificultad del estudiante para pasar de expresiones verbales o gráficas a expresiones algebraicas. Considerando que el cálculo se desarrolla en su mayor parte por medio de la expresión algebraica de una función, es vital darle importancia al paso de lo verbal y gráfico a lo algebraico.

La investigación en la tesis centra la atención, entre otras cosas, en iniciar el trabajo del aula con la representación analítica de algún objeto para luego desarrollar un tema de la clase. Por ejemplo, para encontrar el volumen de un sólido, el estudiante debe hallar inicialmente las expresiones matemáticas de las partes que acotan el sólido, para luego plantear las integrales. En Şefik y Dost (2020) se recomienda trabajar de manera similar.

Apoyar el aprendizaje de los estudiantes por medio de objetos conocidos por ellos o por medio de herramientas manipulables es un tópico que se fortalece en la literatura. Este tópico va en la dirección de la tesis, en el sentido de partir de objetos reales para introducir su representación matemática y el uso que se le da en diferentes temas. Trabajos como los de Beckmann y Schlicker (1999) o Wangberg y Johnson (2013) centran la atención en construcciones manipulables y Farnell y Snipes (2015) o Mcgee y col. (2012) usan herramientas que los estudiantes manipulan para introducir algún tema del cálculo multivariado.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Los fundamentos teóricos que soportan este trabajo surgen de la Educación Matemática Realista, y se apoyan de manera explícita o implícita en ideas de otras propuestas o teorías como la Matemática en Contexto, la resolución de problemas, la visualización o la propuesta DNR, de cuyas características asumidas en el marco teórico se habla más adelante.

2.1. Las superficies en el cálculo en varias variables

En el cálculo en varias variables, las superficies en $\mathbb{R}^3$, aparecen desde varios enfoques. En estas líneas se busca fundamentar la noción de superficie, identificando aquellas diferentes formas de verlas en el espacio coordenado y que llevan a expresiones matemáticas específicas, desde la visión presentada en los diferentes textos de cálculo en varias variables, por ejemplo, Thomas (2010), Larson y col. (1999), Marsden y Tromba (1991), Smith y Minton (2007), entre otros. Como también desde trabajos más formales como Katok y Climenhaga (2008), Stillwell (1992), Glaeser (2017), Abate y Tovena (2012), entre otros.

En la literatura consultada se identifican cinco *formas de ver a las superficies* en el nivel académico de un curso de cálculo en varias variables del componente básico para ingeniería. La primera forma que se presenta en este documento es como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen una igualdad de la forma $z = f(x, y)$ con f

una expresión en x y y. La representación gráfica de una función en dos variables[1] está íntimamente asociada a las superficies en esta categoría. Vale destacar que las funciones en dos variables juegan un papel fundamental en este curso.

Una segunda forma de ver las superficies, y que para ciertos casos incluye la anterior, es como el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen $f(x, y, z) = c$, con c una constante. La diferencia con el caso anterior es que en éste, no necesariamente se tiene la gráfica de una función en dos variables. Por ejemplo, $z = 4 - x^2 - y^2$ está en el primer caso (y también en el segundo: $z + x^2 + y^2 = 4$), pero la expresión $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ está en el segundo caso pero no en el primero, pues no representa una función en dos variables.

Siguiendo una dirección similar a las dos anteriores y usando que el estudiante ya ha manejado expresiones de la forma $y = f(x)$, cuya gráfica es una curva en el plano cartesiano, otra forma de ver a las superficies es como el resultado de girar la curva alrededor de un eje específico. Por ejemplo, si la expresión conocida tiene la forma $y = f(x)$ y se hace girar alrededor del eje x, entonces la superficie en $\mathbb{R}^3$ así formada está representada por la expresión $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$. La diferencia con los casos anteriores es que para éste se parte de una expresión conocida en el plano xy [2].

En Katok y Climenhaga (2008) se toma también como una manera de ver a las superficies al resultado de incluir un *mango* (o asa) a una superficie dada, de manera similar a la que un vaso se convertiría en una tasa al incluirle un mango.

[1]Ver por ejemplo Thomas, p. 747 para la definición de función en dos variables.

[2]En Larson y col. (1999), p. 1 029 puede encontrarse más expresiones de superficies de revolución en esta dirección.

Para el caso que se estudia en esta investigación, no se tienen en cuenta estas construcciones, pero si las que se obtienen a la manera de una expresión o función a trozos. Por ejemplo, la función

$$f(x,y)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1575}{52}}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{25}}+\frac{13}{2} & \text{si } \frac{9}{4}\leq x^2+y^2\leq 25,\\ \sqrt{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1/6}-1} & \text{si } \frac{1}{4}\leq x^2+y^2\leq \frac{9}{4},\\ \frac{5}{2}\sqrt{x^2+y^2}-1 & \text{si } \frac{4}{25}\leq x^2+y^2\leq \frac{1}{4},\end{cases} \tag{2.1}$$

es la representación de la parte superior de un diábolo de dos palos como el de la figura:

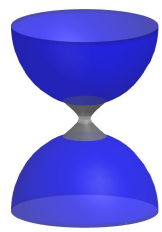


Figura 1. Diábolo de dos palos.

Por último, una forma adicional de ver una superficie, que se tendrá en cuenta de manera implícita en la investigación, es por medio de ecuaciones paramétricas. En Larson y col. (1999, p. 1 338) se encuentra la siguiente definición: *si* $x,\ y$ *y* z *son funciones en las variables* u *y* v*, continuas en un dominio* D *del plano* uv*, entonces se llama superficie parametrizada (o paramétrica) al conjunto de puntos* (x,y,z) *dados por* $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$*. Las ecuaciones* $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ *y* $z=z(u,v)$ *se llaman ecuaciones paramétricas de la superficie*. Por ejemplo, la esfera de radio 3 es la imagen de la parametrización

$$\boldsymbol{\phi}(u,v)=(3\cos u\,\mathrm{sen}\,v,3\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v,3\cos v)$$

para D el rectángulo definido por $0\leq u\leq 2\pi$ y $0\leq v\leq\pi$.

2.2. El pensamiento matemático y la resolución de problemas

Según Schoenfeld (2016), aprender a pensar matemáticamente tiene dos características. La primera que se debe desarrollar un gusto, una motivación por la matemática y sus procesos, es decir, "*valorar los procesos de matematización y abstracción y tener la predilección por aplicarlos*"[3] (Schoenfeld, 2016). Y la segunda, que se debe "*desarrollar competencia con las herramientas de la matemática y usar esas herramientas al servicio del objetivo de comprender la estructura: construir sentido matemático*"[4] (Schoenfeld, 2016).

La preocupación de muchas instituciones en realizar análisis o diseñar herramientas en pro de la mejora de la educación, suele darse, en gran proporción, partiendo de los resultados de mediciones de calidad realizadas en sus países o en otros países. En algunos casos esos estudios se alejan de condiciones locales y pueden afectar el rendimiento de los estudiantes.

El trabajo de Schoenfeld (2016) considera tener en cuenta cuatro puntos para este tipo de análisis: malos resultados en pruebas, las altas tasas de deserción en matemáticas, los problemas de equidad y los cambios demográficos.

El interés en la investigación para esta tesis, no es ajeno a las posiciones mostradas en los párrafos anteriores, y en relación con el anterior, centra la atención en algo que puede considerarse, sino igual, más fundamental. Ello es la motivación del estudiante.

[3] Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1-38, p. 1.

[4] Ibíd., p. 2.

Una buena motivación ayudaría a cambiar los altos niveles actuales, en muchas instituciones de educación superior, en los dos primeros puntos planteados por Schoenfeld (2016).

Por otro lado, en sus investigaciones, Santos-Trigo (2008), ha identificado que la resolución de problemas puede verse como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático; o también que "*la relación de la educación matemática realista con la resolución de problemas se manifiesta en el reconocimiento que el mundo real es una fuente o punto de partida para el desarrollo de los conceptos matemáticos*"[5] (Santos-Trigo, 2008), lo que lleva a que "*la visión o perspectiva de la educación matemática realista, que resalta la idea de que los problemas sean vistos por los estudiantes como situaciones auténticas para desarrollar el pensamiento matemático, aporta las bases o elementos para promover la resolución de problemas.*"

Así entonces, la visión de la tesis al trabajar con la Educación Matemática Realista, augura buenos resultados en la motivación del estudiante y el desarrollo de su pensamiento matemático. Se busca entonces incentivar que el estudiante aprenda a pensar matemáticamente por medio de la motivación que generen contextos cotidianos y realistas.

Ahora bien, aprender a pensar matemáticamente no solo involucra contar con gran cantidad de conocimiento matemático del tema, sino también, como se cita en Santos-

[5]Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *En: Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 1-27, p. 16.

Trigo (2008), "*incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas de juego*"[6] (Schoenfeld, 1985). Debe entonces entregarse al estudiante, las herramientas y estrategias de trabajo y cultivarle el afán de involucrarse en el curso.

Por otro lado, es claro que la noción de problema y de resolución de problemas pueden tenerse desde distintos enfoques y no necesariamente con el mismo punto de vista de profesores, investigadores o desarrolladores de currículo (Santos-Trigo, 2008).

Desde la visión de investigadores como Falk de Losada (1980), Onuchic (1999), Rizo y Campistrous (1997), Da Silva y Lima (2013), entre otros, y desde enfoques diferentes, a un problema lo conforman aquellas situaciones que tienen un planteamiento inicial y requisitos que llevan a transformarla; es un punto de partida para dar respuesta a aquello de lo que no se tiene una, pero que debe resolverse. Los problemas deben ser situaciones que estimulen al lector (resolutor), que sea interesante para él y sin respuesta inmediata.

La resolución de problemas es el medio para la obtención de nuevos conocimientos, es el proceso que permite enfrentar situaciones inciertas que implican moverse por conocimientos o procedimientos para llegar al aprendizaje, para apropiarse de nuevo conocimiento. Es una forma de pensar.

Como se cita en Santos-Trigo (2008), por parte del estudiante, "*la resolución de problemas exitosa requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un automonitoreo efectivo, y una disposi-*

[6] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press, p. xii.

ción productiva a plantear y resolver problemas," y por parte del docente, "*la enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesores, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y actitudes en sus estudiantes... La enseñanza en sí misma es una actividad de resolución de problemas.*"[7]

2.3. Educación Matemática Realista (EMR)

El trabajo de los ingenieros se destaca, entre otras cosas, por aplicar la teoría en la búsqueda de solución a los problemas de la sociedad en ambientes variados; la corriente didáctica *Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1971, 1991), con la que se trabaja en la tesis, se encamina en esta dirección.

Con esta corriente en la investigación se busca, de alguna manera, la reinvención de la matemática que se hace en el curso y se enfatiza, por lo menos en algunos temas, en la importancia de que éste debe surgir del sentido común.

En la EMR se plantea que "*el aprendizaje de la Matemática, dentro y fuera de la escuela, sea una actividad desafiante en la que las aptitudes de los alumnos se aprovechen de manera óptima, posibilitándoles construir el conocimiento matemático y las capacidades que necesitarán más tarde, tanto en su vida diaria como en la profesión que elijan*"[8] (Pochulu y Rodríguez, 2012). Esta es una posición que debería tenerse con

[7]Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *En: Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 1-27, p. 16.

[8]Pochulu, M. & Rodríguez, M. C. (s.f.). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, p. 175.

mayor énfasis en la educación superior.

La implementación de esta corriente en esta tesis busca alejar de prácticas poco didácticas a la enseñanza del cálculo en varias variables y pretende enseñar a matematizar los procesos en los que se ve inmerso el estudiante cuando se trabaja o se involucran con superficies. Polya (1965) plantea, sobre los problemas que el estudiante solucionaría, que "*una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre si, ni con el mundo físico*"[9].

Autores como Bravo-Bohorques y col. (2016), Gravemeijer (1994), Gravemeijer y Doorman (1999), Pochulu y Rodríguez (2012), P. Camarena y col. (2013), Sriraman y English (2010), Treffers (1993) y por supuesto Hans Freudenthal (1971) entre muchos otros se han preocupado por hacer matemáticas en un contexto real para los estudiantes.

La formación de un ingeniero requiere que la matemática que se enseña perdure para que pueda solucionar sus requerimientos. Freudenthal (1971) afirma que "*no creo que las matemáticas desligadas a la realidad, puedan tener una influencia duradera en la mayoría de los individuos... La gente suele olvidar lo que no está relacionado con el mundo en el que vive.* "[10]

La matematización es uno de los puntos importantes de la Educación Matemática Realista. Las siguientes líneas buscan precisar el término para comprender mejor la forma

[9]Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, p. 35.

[10]Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413-435, p. 420.

en que se implementa en esta investigación.

En Treffers (1987) se entiende la matematización como la "*actividad organizadora y estructuradora en la que se recurre a los conocimientos y habilidades adquiridos para descubrir regularidades, conexiones y estructuras aún desconocidas.*"[11].

La matematización se hace en dos etapas. Una *horizontal* y otra *vertical*. La matematización horizontal "*conduce del mundo de la vida (la realidad) al mundo de los símbolos*"[12] (Freudenthal, 1991). La matematización vertical se mueve en el mundo de los símbolos: "*los símbolos son moldeados, reformados y manipulados, de manera mecánica, comprensiva, reflexiva*"[13](Freudenthal, 1991).

En Treffers (1987), en la matematización horizontal, "*el camino hacia las matemáticas se allana mediante la formación de modelos, esquematizando, simbolizando*"[14], y en el caso vertical se ocupa del procesamiento matemático.

Los mundos a los que hace referencia Freudenthal no están completamente demarcados y no tienen un tamaño específico. Todo depende de la visión y profundidad con la que se tomen las situaciones. Puede tenerse elementos de un mundo que están también en el otro. Para el matemático, los objetos matemáticos pueden formar parte del mundo de la vida (la cotidianidad), en cambio para un estudiante de ingeniería o de matemáticas, por ejemplo, pertenecerán al mundo de los símbolos. "*La distinción en-*

[11] Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company, p. 247.

[12] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002), p. 42.

[13] Ídem.

[14] Treffers, ídem.

tre matematización horizontal y vertical depende de la situación específica, la persona involucrada y su entorno"[15] (Freudenthal, 1991).

En Bressan y col. (2016) se identifica que en la matematización los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión "*caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas. Estos niveles son:* ***situacional, referencial, general y formal****, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, no constituyendo una jerarquía estrictamente ordenada*"[16].

La siguiente gráfica, tomada de Bressan y col. (2016) sintetiza el proceso de matematización:

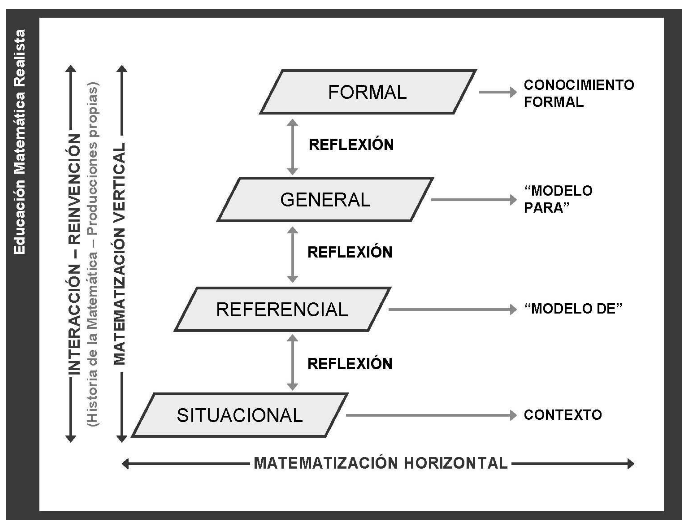


Figura 2. Niveles en la matematización[17].

Para el caso que nos ocupa, en el **nivel situacional** (que conforma la matematización

[15]Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002), p. 42.

[16]Bressan, M., A., Gallego, F., M., Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista, bases teóricas.* Recuperado 23 de octubre de 2018 de http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/. Fundación Grupo Patagónico de didáctica de la Matemática, p. 6.

[17]Íbid., p. 7.

horizontal), el estudiante deberá leer, comprender, interpretar, asumir como propio el contexto, actividad o situación realista[18] presentada.

Ahora bien, los contextos pueden enfocarse en el conocimiento del tema específico (en la parte teórica) o en su parte práctica. Para el caso que nos ocupa, los contextos centran su atención en la parte práctica, en la parte donde el estudiante tiene que repetir procesos para afianzar el conocimiento.

Los contextos propuestos piden solución a una situación específica con el fin de generar nuevo conocimiento, o de complementar, ampliar, perfeccionar el conocimiento que ya tiene el estudiante, es decir, buscan ser una *necesidad intelectual*[19] del estudiante al estilo de Harel (2008b).

Ahora bien, para hacer que el estudiante llegue al nivel situacional, el docente debe pasar antes por lo que Treffers (1987) llama, una *exploración fenomenológica*[20], es decir, por una búsqueda de contextos familiares, cotidianos, interesantes, fenómenos ricos para el curso, significativos y no pre-estructurados con vías a desarrollar nociones intuitivas que lleven a la formación de objetos matemáticos.

La exploración realizada para este trabajo, permite tener diversos contextos según el tema de estudio en el curso. Por ejemplo, sabiendo que el cálculo se desarrolla bajo la premisa de que las funciones en dos variables se grafican, derivan, integran,

---

[18]Vid., p. 3.

[19]Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 893-907, p. 897.

[20]Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company, p. 248.

entre otras, la representación matemática de objetos reales en los que el estudiante debe conseguir o investigar sobre sus dimensiones o características específicas, es un contexto en el que se insiste en este trabajo. Se apunta con ello a que los estudiantes "*interioricen, retengan y organicen el conocimiento*"[21] (Harel, 2008b).

La experiencia o práctica repetida da como resultado "*una fluidez o un procesamiento sin esfuerzo, lo que impone una menor demanda de atención consciente*"[22] (Harel, 2008b).

Por otro lado, después de interpretar el contexto y asimilar la matemática (los temas) con la que se va a trabajar, el estudiante pasa al **nivel referencial** (con el que se inicia la matematización vertical). En este nivel el estudiante plantea representaciones, modelos gráficos, descripciones, procedimientos propios, entre otros, que esquematizan el problema. Empieza a alejarse del contexto intuitivo e informal del anterior nivel.

Ahora bien, "*una influencia decisiva proviene de las propias construcciones y producciones del estudiante en el proceso de aprendizaje*"[23] (Treffers, 1987), por tanto, hacer uso de sus construcciones y producciones que se dan en este nivel es esencial para que aprenda a matematizar.

A este nivel, el estudiante plantea, al estilo de Bressan y col. (2016), un "*modelo de*"[24].

[21] Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 893-907, p. 900.

[22] Ídem.

[23] Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company, p. 249.

[24] Bressan, M., A., Gallego, F., M., Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista, bases teóricas.* Recuperado 23 de octubre de 2018 de

Es decir, una representación de la situación en las condiciones específicas suministradas.

Siguiendo con los niveles de comprensión, en el **nivel general** se generaliza el nivel referencial. Se enfoca la matemática hacia superar la referencia al contexto, es decir, se busca que el estudiante identifique que la matemática presente puede usarse en otros contextos similares al estudiado. Por ejemplo que la selección de un punto como el origen del espacio coordenado no depende de las dimensiones del lugar donde trabajó, pero que sí puede ser importante su forma (por ejemplo cuando se tiene el caso de coordenadas rectangulares).

De esta manera el estudiante identifica un *modelo para* según Bressan y col. (2016). Es decir, el estudiante identifica que después de analizar el *modelo de* del nivel referencial "*surgen aspectos generalizables* (de esos modelos) *y puede concluir que son utilizables en conjuntos de problemas homólogos a los estudiados*"[25](Bressan y col., 2016).

Cuando el estudiante llega al último nivel, el **nivel formal**, trabaja de manera directa con los conceptos, procedimientos, notaciones, etc, del tema del curso que se tenga en cuenta. Por ejemplo, denota con $\mathbb{R}^3$ al espacio tridimensional, usa el sistema de mano derecha para el sistema coordenado, maneja la notación $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ para una integral doble sobre una región R del plano xy, o $\iiint\limits_Q dv$ para el volumen del sólido Q, entre otras. En cursos más avanzados se esperaría que el estudiante realice una

http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/. Fundación Grupo Patagónico de didáctica de la Matemática, p. 7.

[25]Íbid., p. 8.

demostración matemática. En esta investigación, dado el nivel básico del curso no se profundiza en este nivel.

De manera general con la matematización se busca despertar el análisis matemático en los estudiantes y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente.

En el contexto de la labor realizada por los ingenieros, la matematización direcciona a acciones de vital importancia como relacionar la información, descubrir caminos, ejemplificar situaciones, usar un lenguaje adecuado, saber diferenciar en qué momento se tiene urgencia de usar la matemática o no, reflexionar sobre cada situación, abstraer, esquematizar, formalizar, entre otras. Es decir, lleva a lo que Freudenthal (1991) llama una "*reinvención guiada*"[26].

En las líneas anteriores se hace referencia a que la matematización, desde el punto de vista del estudiante, es clave en el proceso de la educación matemática realista. Por parte del docente, su actividad primordial según Freudenthal es la de "*didactizar*"[27], es decir, la actividad de organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje a nivel horizontal como a nivel vertical. "*Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar*

[26]Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002), p. 47.

[27]Bressan, M., A., Gallego, F., M., Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista, bases teóricas.* Recuperado 23 de octubre de 2018 de http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/. Fundación Grupo Patagónico de didáctica de la Matemática, p. 8.

su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización"[28] (Bressan y col. 2016).

En el marco de esta investigación y sabiendo que en las carreras de ingeniería de la mayoría de las universidades del país, un curso de cálculo en varias variables pertenece al grupo de cursos de ciencias básicas, o de formación básica para ingeniería, no se espera que la matematización vertical realizada lleve a generar modelos matemáticos sofisticados; pero si que la manipulación de los símbolos debe llevar, como mínimo, a que el estudiante comprenda la matemática involucrada en cada tema.

A manera de ejemplo, para el caso en el que se ocupa este trabajo, plantearle al estudiante el identificar una expresión matemática (piense en (2.1)) que tiene asociada un objeto específico, forma parte de la matematización horizontal. Obtener la expresión (2.1) y usarla, por ejemplo, para medir el volumen del objeto, forma parte de la matematización vertical.

2.4. Aportes al marco teórico de algunas teorías

En esta sección se presenta la visión de algunas teorías o puntos de vista teóricos que se toman como aporte al marco teórico de la investigación.

2.4.1. La visualización

El trabajo en cálculo en varias variables se facilita mucho si los estudiantes pueden ver las superficies que por ejemplo, genera una función en dos variables $z = f(x, y)$. Pero ese trabajo no es simplemente el de ver o contemplar un objeto, sino también

[28] Ídem.

el hecho de representar, modificar, relacionar con expresiones matemáticas, transmitir información de él, medir sus características, entre otras acciones. Estas características hacen parte de la actividad de visualización en el proceso de aprendizaje del curso.

La visualización en esta propuesta hace referencia a la utilización de nociones matemáticas del cálculo multivariado en ámbitos gráficos, numéricos, algebraicos y de cálculo. En los contextos realistas que se proponen en este trabajo, la visualización inicia desde el momento en el que se le entrega, ya sea física, gráficamente o se describe, un objeto al estudiante. Continúa en el ámbito numérico cuando el estudiante debe encontrar las medidas que identifiquen el objeto para luego representar algebraicamente y proceder por ejemplo a identificar los puntos del plano xy que lo describen por medio de esa expresión algebraica para encontrar su área superficial, su volumen etc.

El estudiante tiene que asimilar que la visualización que él aplica se verá reflejada en la interpretación de lo que recibe y en la correcta transmisión de los resultados que deben partir de la información recibida.

En definitiva, además de ver el objeto solo como un objeto, el verdadero escenario de la visualización para este estudio se tiene cuando se logra identificar características analíticas (aparte de físicas) de ese objeto.

2.4.2. La matemática en el contexto de las ciencias (MCC)

La propuesta educativa de la Matemática en el Contexto de las Ciencias nace en 1982 en el Instituto Politécnico Nacional (IPN, México) con Patricia Camarena Gallardo como su principal exponente (G. P. Camarena (2012, 2015)). Ha sido trabajada por autores como G. P. Camarena (2012, 2015), Muro (2004), Olazábal (2005), De Pavia (2006), Neira (2012), P. Camarena y col. (2013), entre otros, y según su creadora con "*resultados satisfactorios sobre la enseñanza de la matemática*"[29] (P. Camarena y col. (2013)).

Aunque la Educación Matemática Realista es la teoría tomada como base en el marco teórico de este trabajo, se quiso vincular en esta investigación a la MCC, dada su similitud con la EMR y también debido a la población de donde se ha conseguido algunos resultados. Es de esperar que si la MCC surge de una población que vive en ambientes sociales y económicos similares a la población muestra de la tesis, se obtengan resultados confiables y valiosos.

La visión de la Matemática en Contexto de las Ciencias es "*proveer a los estudiantes de las herramientas necesarias que le permiten enfrentar exitosamente problemas que requieren de capacidad analítica e innovación*" y también "*acercárlo a la resolución de problemas reales garantizando una sólida formación en matemáticas contribuyendo en la comprensión y resolución de fenómenos relacionados con la ingeniería*"[30] (P. Camarena y col. (2013)).

La MCC busca trabajar con contextos que partan de áreas del conocimiento distintas a la matemática. Ahora bien, es claro que la ingeniería involucra varias áreas del conocimiento con las que la matemática debería ir de la mano. Pero debe tenerse en

[29]Camarena, P., Trejo, E. & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11*(especial), 397-424, p. 398.

[30] Íbid., p. 399

cuenta también que esta relación se refleja en mayor proporción cuando el estudiante ha pasado por cursos del área profesional. En tercer semestre el estudiante aún no cuenta con muchas herramientas que le permitan identificar con claridad esta relación.

En la dirección de la MCC, los contextos del cálculo mutivariado con los que se trabaja en la tesis no necesariamente involucran áreas específicas de la ingeniería, sino que se parte de situaciones reales pero cotidianas para el estudiante (página 3). Aunque los contextos trabajados no involucran directamente otras áreas del conocimiento, aseguran una transferencia del conocimiento matemático de forma general, buscando suministrar bases que lleven a una formación integral necesaria para los ingenieros y un desarrollo de análisis y busqueda de instrumentos para dar solución a un problema.

La MCC plantea que el proceso de enseñanza y aprendizaje cubre cinco fases influenciadas por factores de tipo emocional, social, económico, político y cultural. En la gráfica se muestra la relación entre esas fases:

Figura 3. Fases de la Matemática en el Contexto de las Ciencias [31].

[31] Camarena, P., Trejo, E. & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la

Para lo que ocupa a esta investigación y pensando complementar el marco teórico que proporciona la EMR, se centra la atención entonces en la *fase didáctica* o también conocida como **Matemática en Contexto**. Esta fase es la más desarrollada en las investigaciones existentes y se ha aplicado en problemas parecidos al que se estudia en esta tesis, por esta razón no se tienen en cuenta las otras fases de la propuesta en este marco teórico.

En la Matemática en contexto se pide al estudiante trabajar con una matemática contextualizada. Para efectos de la tesis, y en la dirección de la sección 2.3, los contextos son realistas como se tomaron en la página 3.

La Matemática en Contexto (o fase didáctica), además de fungir como estrategia didáctica, permite seguir un proceso metodológico para contextualizar la matemática a enseñar. Este enfoque plantea nueve etapas para desarrollar la fase. A continuación se transcriben tal como están en P. Camarena y col. (2013, p. 403):

I. Determinación de los eventos o problemas matemáticos contextualizados.
II. Planteamiento del evento o fenómeno contextualizado.
III. Determinación de las variables (dependientes, independientes y controladas) y las constantes del problema.
IV. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos para abordar el desarrollo del modelaje y su solución, así como los temas indispensables de las disciplinas del contexto.
V. Determinación del modelo matemático.

matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11* (especial), 397-424, p. 402.

VI. Solución matemática del problema.

VII. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.

VIII. Interpretación de la solución en términos del problema y áreas de las disciplinas del contexto.

IX. Descontextualización de los conceptos y temas a tratarse en el curso.

En el marco de la Educación Matemática Realista, las últimas ocho etapas se agrupan en los niveles de comprensión que se describieron en la sección 2.3. En la siguiente gráfica se presenta la forma cómo la Matemática en Contexto se inmersa en la EMR desde esta tesis:

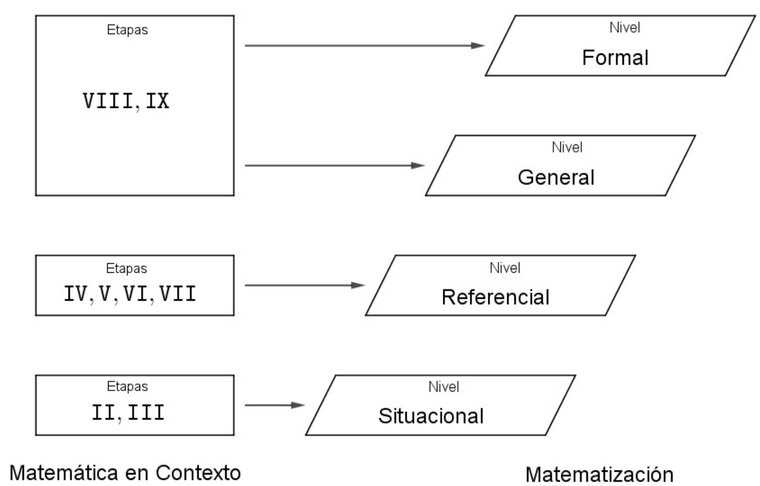


Figura 4. la Matemática en Contexto y la EMR.

Es claro que la matemática en contexto no centra la atención de manera explícita en la formalización de los temas estudiados, en el sentido del formalismo matemático o de la manera que lo busca el nivel formal de la matematización. Por ese motivo las etapas ocho y nueve llevarían a los niveles general y formal, en el sentido de que la descontextualización ayuda a construir los *modelos para* y si el tema de estudio lo permite amplía la interpretación que puede darse a la solución encontrada al problema.

Desde este punto de vista, la matemática en contexto por medio de sus etapas direcciona el trabajo propuesto a los estudiantes para incentivar el alcance de los niveles de comprensión presentes en la matematización. Es claro también que desde la matemática en contexto se enfatiza en el nivel referencial, en la construcción del *modelo de*. Esto es justificable desde el punto de vista de la búsqueda de una comprensión firme, duradera y organizada de las herramientas que llevaron al planteamiento de sus primeros modelos en cada tema seleccionado del curso.

La matemática en contexto además de fungir como estrategia didáctica, permite seguir un proceso metodológico para contextualizar los temas seleccionados del curso. Desde la visión de la tesis, el éxito del contexto seleccionado para que pueda desarrollar las competencias en los estudiantes y les motive a mantenerse en éste y futuros cursos, tiene que ver con su elección adecuada y con la guía del profesor al momento de que los estudiantes resuelvan el evento.

El hecho de tomar contextos realistas como se plantean acá, no obliga al estudiante a depender de lo que haya estudiado pasado un tiempo o de temas nuevos que pueden generar obstáculos innecesarios para comprender y analizar lo involucrado en los temas de este curso.

Según Gravemeijer y Doorman (1999), los problemas en contexto son la base para la progresiva matematización, la característica principal de la Educación Matemática Realista, de la que se habló en la sección 2.3.

2.4.3. Del modelo didáctico DNR: necesidad y repetición

La instrucción basada en DNR (*duality, necessity, and repeated reasoning*) fue desarrollada por Guershon Harel de la Universidad de California, San Diego, en trabajos de investigación realizados desde aproximadamente 1990 hasta 2001. En 2008 con los trabajos Harel (2008a) y Harel (2008b) se consolida la propuesta de dicho modelo didáctico. Desde entonces, autores como Stylianides y Stylianides (2009), Davis y col. (2009), Sriraman y English (2010), Zawojewski y col. (2013), Thompson (2013), Weber y Lockwood (2014), Bakar y col. (2018), Harel (2021), entre otros, han usado o hecho referencia a los trabajos de Harel en esta dirección.

El modelo DNR no es un marco central para el trabajo de investigación que se desarrolla en esta tesis. Se tiene en cuenta acá únicamente el enfoque centrado en la *necesidad intelectual* y el *razonamiento repetido* que la propuesta plantea debe indagarse y proponerse en el estudiante. En adelante se presenta entonces una visión general de estas características en el modelo de Harel.

El marco teórico DNR en matemáticas se acerca mucho al manejo de la enseñanza de la matemática en educación superior pues está "*basado en la investigación, intenta entender los problemas fundamentales en el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas, y utiliza esta comprensión para desarrollar nuevos productos curriculares potencialmente eficaces*"[32] (Sriraman y English, 2010) y se ha aplicado por lo menos en cursos de álgebra y cálculo multivariado en educación superior. Su aplicación en

[32]Sriraman, B. & English, L. (2010). *Theories of mathematics education.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, p. 344.

contextos del aula le da fortaleza y facilita el empeño buscado en la investigación para la tesis que en este documento se presenta.

El modelo de Harel busca, en lugar de ver las matemáticas en términos de *asuntos*[33], verlas como *herramientas conceptuales*[34].

El hecho de suponer que los estudiantes llegan a fortalecer y ampliar las bases que traen (en lugar de suponer que llegan sin conocimiento), es un tema valioso en la posición DNR. La *necesidad intelectual* de complementar y ampliar sus conocimientos, puede ayudar a repensar actividades y propuestas de trabajo en un curso de cálculo en varias variables y en particular en el manejo de las superficies.

El trabajo tampoco debe limitarse a un único ejemplo o único ejercicio. Practicar el *razonamiento repetido* propuesto por Harel con el fin de interiorizar las maneras de ver las superficies para el caso que acá interesa y por medio de los contextos realistas y no rutinarios, seguramente llevará al estudiante a matematizar de manera duradera su manejo y desarrollar más efectivamente su pensamiento matemático.

A continuación, se pretenden dar claridad a los términos *necesidad intelectual* y *razonamiento repetido* con relación a la posición asumida en esta investigación. La información que se presenta en las secciones surge de la posición del autor del modelo y se tomaron de Harel (2008a) y Harel (2008b).

Necesidad intelectual

El hecho de que un individuo o una comunidad llegue a tener un conocimiento es-

[33]Solamente en términos de definiciones, propiedades, teoremas entre otras.

[34]Las construcciones o pasos que llevan a los objetos matemáticos.

pecífico de algo, se da por la existencia de una *situación problémica*[35] inmersa que pedía solución. Si el conocimiento actual no permite responder a la situación problémica presentada entonces se debe generar nuevo conocimiento para responderla. La situación problémica en el estado anterior a la generación de ese conocimiento es una *necesidad intelectual* para el individuo (o comunidad).

Ahora bien, si por algún motivo, por ejemplo incapacidad, falta de interés, etc., el estudiante no alcanza el conocimiento necesario, entonces la situación problémica no es aún, una necesidad intelectual para él. Pero si el estudiante es consciente de que el conocimiento es justificación para responder a la situación problémica, entonces alcanza una *justificación epistemológica*[36] para la creación del conocimiento.

Por otro lado, la motivación es un tema que está presente y de manera paralela a la necesidad intelectual, pero los dos son temas diferentes. La primera tiene que ver "*con el deseo, la voluntad, el interés, la autodeterminación, y demás de las personas*"[37] (Harel, 2008b) para solucionar un problema. La segunda tiene que ver con la generación de conocimiento a partir del conocimiento que el individuo tenga.

En su página 905, Harel (2008b), clasifica las necesidades intelectuales en cinco categorías: la necesidad de certeza, necesidad de causalidad, necesidad de cálculos, necesidad de comunicación y la necesidad de conexión y estructura. Desde el pun-

[35]En la tarea que nos ocupa, la situación problémica (o problema) hace referencia a una pregunta o contexto que interrogan sobre un tema específico de la matemática pero en un ambiente de la realidad.

[36]"*Las justificaciones epistemológicas se refieren a la génesis del conocimiento, a las razones percibidas de su nacimiento a los ojos del aprendiz*" Harel (2008b) p. 897.

[37]Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 893-907, p. 898.

to de vista de la motivación, en este trabajo se considera valioso enfatizar, en primer lugar, en contextos que lleven a necesidades de causalidad.

Los cursos de cálculo, en particular el de varias variables, centran la atención en el trabajo con funciones. Por ejemplo, una función $f(x,y) \geq 0$ está presente en la integral $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ cuando se mide el volumen de un sólido específico. La precisión de la medida obtenida depende, entre otras cosas, de la correcta restricción del dominio de la función para identificar los límites de integración; de la correcta identificación de ese subconjunto del dominio que genera el sólido o sus características específicas. Los contextos planteados deben llevar a necesidades de causalidad con las que el estudiante identifique la causa de los cambios en la función, y a la vez del sólido, al modificar la región de integración o no identificarla con precisión.

Por otro lado, parte de la comprensión de los procedimientos, análisis realizado, interpretaciones identificadas, deducciones logradas, por parte del estudiante, se ven reflejados en los resultados que ellos entregan. O si son capaces, por ejemplo, de identificar sus cambios al modificar las hipótesis iniciales del contexto. Así entonces, en segundo lugar, las necesidades de cálculos son en las que también se enfatiza en este trabajo.

No hay que dejar de lado de todas formas, que el estudiante esté convencido de la certeza de alguna afirmación o resultado encontrado. Por ejemplo, debe ser cierto para el estudiante que la restricción del dominio de una función es necesaria para caraterizar una superficie específica, por ejemplo, para unir dos superficies diferentes. O que los límites de integración, según las funciones a integrar, le dan la forma lateral al sólido al que se medirá su volumen. Los dos anteriores son algunos de los temas en los que los estudiantes no tienen certeza plena y es importante identificar necesidades de certeza para fortalecer la formación del futuro ingeniero.

Razonamiento repetido Este principio busca que el docente se "*asegure de que sus estudiantes interioricen, retengan y organicen el conocimiento*"[38] (Harel, 2008b). La experiencia o práctica repetida da como resultado "*una fluidez o un procesamiento sin esfuerzo, lo que impone una menor demanda de atención consciente*"[39] (Harel 2008b).

El razonamiento repetido no hace referencia a la mera acción de solucionar ejercicios no rutinarios muchas veces. Las actividades planteadas deben incitar al estudiante a pensar todo el tiempo en la situación y su solución. Debe responder a las necesidades intelectuales del estudiante y a la construcción autónoma y espontánea del conocimiento.

El curso de cálculo multivariado, en lo relacionado con las superficies, tiene temas en los que debe enfatizarse y a la vez practicar repetidamente con el fin de que el estudiante interiorice el concepto y manejo. Por ejemplo, las expresiones de la forma $z = f(x, y)$ que están presentes desde inicios del curso hasta las integrales de superficie, es decir, en prácticamente todo el curso.

En la investigación se enfatiza en la representación analítica de superficies por medio

[38]Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 893-907, p. 900.

[39]Ídem.

de expresiones de la forma $z = f(x, y)$, o de manera más general

$$z = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{si } (x, y) \in R_1 \\ \vdots & \\ f_j(x, y) & \text{si } (x, y) \in R_j \end{cases},$$

para algún $j \in \mathbb{N}$ (en la sección 3.5.2 se justifica este énfasis). Siendo consciente de las debilidades con el manejo de estas expresiones por parte de los estudiantes, el razonamiento repetido es clave para identificar cómo el estudiante está desarrollando su pensamiento matemático .

Conclusiones del Capítulo 2

Desde la visión de enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariado, esta investigación no se enfoca en la totalidad del conocimiento sobre las superficies, sino que lo hace únicamente hacia la parte práctica, hacia el uso de las superficies y sus formas de verse en el desarrollo de los temas del curso. Se quiere complementar el desarrollo del programa por medio de la motivación.

Partiendo de la cotidianidad, de la vida diaria, del mundo en el que se mueve el estudiante de cálculo en varias variables, se hace presente el planteamiento de problemas y su resolución en busca de motivar, retener, estimular a los estudiantes en el curso y de tal manera que se logre identificar un avance en el desarrollo de su pensamiento matemático.

Con la identificación del alcance obtenido en los niveles de matematización, por parte de los estudiantes, se busca caracterizar los avances en el desarrollo del pensamiento matemático involucrando contextos realistas. Las etapas planteadas por la matemática en contexto complementan el proceso seguido en los niveles de matematización propuestos por la educación matemática realista.

La motivación del estudiante, importante para Schoenfeld o Harel, por ejemplo, es la base para justificar esta investigación. Actualmente los estudios de deserción y pérdida de cursos en educación superior muestran, entre otras situaciones, que la falta de motivación en las clases es un factor importante que aumenta los indicadores de deserción y pérdida de los cursos (ver, por ejemplo, Rodríguez, 2019).

Incentivar la motivación en los estudiantes es entonces una tarea primordial para poder continuar con el análisis del desarrollo del pensamiento matemático y es el camino para que una situación problémica se convierta en una necesidad intelectual, logrando que los estudiantes no se queden con la justificación epistemológica únicamente.

Es de anotar que con una participación desmotivada del estudiante, es poco probable que se tenga resultados de análsis valiosos en pro de identificar el desarrollo del pensamiento matemático, o de generar nuevos conocimientos en el estudiante. En la tesis se defiende la idea de que la Educación Matemática Realista será punto de inicio para la motivación y de paso para la generación de necesidades intelectuales.

Con el marco teórico asumido se busca llevar al estudiante hacia un ambiente de matematización de su conocimiento; se busca acercar la matemática a la realidad en la que se mueve el estudiante y futuro ingeniero. Se quiere responder a las necesidades del estudiante, enseñar para reflexionar sobre la matemática; identificar y construir estructuras matemáticas; usar un lenguaje apropiado en matemáticas, interactuar con diferentes grupos de trabajo, entre otras. Los análisis de deserción muestran que el hecho de que el estudiante ingrese a una carrera de ingeniería, no es razón suficiente para que vea a las ciencias básicas (en particular matemáticas) como la base de la ingeniería: ve la ingeniería como manipulación de máquinas, equipos sofisticados, visita a empresas entre otras.

Aunque la Educación Matemática Realista y la Matemática en Contexto están muy relacionadas, en esta investigación se busca complementar una con otra articulando los diferentes pasos, niveles, fases o principios con miras a la reinvención guiada de la noción de superficie y al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante de cálculo en varias variables.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

El conseguir respuesta a la pregunta planteada en la investigación se enmarca en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación (Artigue y col., 1995) y la Educación Matemática Realista como fundamento teórico. Se muestran a continuación los detalles que complementan esta herramienta.

3.1. Tipo y enfoque de la investigación

Pensando en que este trabajo busca estudiar una situación específica en el ámbito educativo (social) con miras a mejorar las condiciones de enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables, puede enmarcarse en una *investigación cualitativa y aplicada*. Además, se quiere mejorar, en condiciones reales de estudio del curso de cálculo multivariado sus procesos de enseñanza y aprendizaje en estudiantes de ingeniería. La dependencia se da en gran proporción de la participación de los estudiantes, por lo que se tiene entonces una investigación del tipo *Investigación Acción*.

3.2. Alcance del estudio

El análisis del estado del arte, da cuentas de que la proporción de investigaciones en el tema planteado en esta investigación es baja. La necesidad manifiesta de responder al problema planteado permite ubicar un *alcance exploratorio* en este trabajo y dado que se busca también identificar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes por medio de contextos realistas, se identifca además un *alcance explicativo* en la investigación.

3.3. Población y muestra

La investigación se desarrolla en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, sede Ciudad Bolívar en Bogotá, D.C. La muestra de la población objeto de estudio la conforman los estudiantes de Tecnología en Mecánica Industrial que pertenecen al primer ciclo de Ingeniería Mecánica desarrollada por ciclos propedéuticos. Los estudiantes están cursando cálculo en varias variables y en general ya han tomado los cursos de cálculo diferencial, cálculo integral y álgebra lineal. El tamaño promedio de un curso de cálculo multivariado es de 30 estudiantes y semestralmente se abren dos o tres grupos en este Proyecto Curricular. La investigación se desarrolla con uno de esos grupos.

Con datos de 2018, en Colombia existen 129 instituciones con carácter académico de Universidad. De esas instituciones, 106 tienen por lo menos una carrera de ingeniería en la que se incluye el curso de cálculo en varias variables y el total de programas que lo incluyen es 439. Si cada programa tuviese un solo grupo de cálculo en varias variables con 30 estudiantes, entonces la cantidad semestral de estudiantes que ven el curso en el país es de alrededor de 13 000. La investigación se enmarca en el cálculo en varias variables ofrecido en la mayoría de las carreras de ingeniería. De allí que el universo de individuos beneficiados por la investigación es muy amplio, en general lo conforman todos los estudiantes de cualquier ingeniería que cursen cálculo en varias variables.

3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

La Ingeniería Didáctica, como metodología de la investigación (Artigue y col., 1995, De Faria Campos, 2006) es el fundamento de la metodología de este trabajo. El análisis del desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes se apoya en la construcción de un conjunto de actividades cercanas a ingenierías didácticas (*micro-ingenierías*) en los temas seleccionados para el curso. La investigación en sí es también una ingeniería didáctica (*macro-ingeniería*) que abarca la noción de superficie y su uso en el curso y que se construye basada en ingenierías didácticas para los temas del contenido del curso que se tienen en cuenta en este proceso. La *concepción y análisis a-priori* presentado más adelante, hace referencia entonces a la macro-ingeniería, pero las fases de *experimentación* y *análsiis a posteriori* lo hacen para las micro-ingenierías en particular.

La idea de la investigación se fortalece en el *método empírico*, por medio de la *observación* de debilidades de los estudiantes en el curso de cálculo en varias variables. Esta observación se afianza por la experiencia de cerca de 10 años impartiendo ese curso en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El trabajo desarrollado en los cursos de cálculo parte de la presencia de una función (en una o varias variables). De allí uno de los intereses de esta investigación en contar con la expresión (función) matemática con la cual trabajar. Un sondeo preliminar permitió identificar algunas debilidades que necesitan ser tenidas en cuenta en esta dirección. Por ejemplo, para alrededor de 90 estudiantes encuestados en 2016, solo el 30 $\%$ consideró ser capaz de modelar de manera matemática un objeto real (cotidiano) suministrado en el contexto del curso.

Por otro lado, muchos de los temas de cálculo en varias variables generan dificultad en su comprensión, debido a la relación gráfica en 3D que lleva el proceso, según el 67 % de cerca de 20 docentes encuestados. Al aplicar algunas actividades que involucran identificar expresiones matemáticas relacionadas con algunos objetos, solo el 11 % de los estudiantes obtuvo un resultado acorde a lo esperado. Alrededor del 83 % de los docentes encuestados, considera que los estudiantes tienen dificultad para representar la región de integración para calcular una integral múltiple. Estos datos, entre otros, justifican los temas que se han tenido en cuenta en esta investigación.

Ahora bien, dado que el estudio se realiza en condiciones normales de desarrollo del curso, con las cuales los evaluados, entrevistados o encuestados pueden presentar distintas condiciones de adaptación a las actividades, entonces los resultados de la investigación se obtendrán por medio de *evaluaciones-actividades* o de *discusiones grupales*.

3.5. Fases de la investigación

Las fases de la investigación se enmarcan desde la Ingeniería Didáctica: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y evaluación (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez (1995), De Faria (2016)).

3.5.1. Fase I. Análisis preliminar

La investigación se lleva a cabo en condiciones normales de desarrollo del curso, es decir, con un grupo de estudiantes que están tomando el curso de cálculo en varias variables en su semestre de estudio; ello implica que se trabaja con estudiantes que ven el curso por primera vez o no, que se hayan destacado o no en matemáticas, que tienen condiciones sociales o económicas diferentes, entre otras situaciones.

En ese contexto, el análisis preliminar se centra, por un lado, en la forma cómo se estudian las superficies en los cursos de cálculo en ingeniería y hasta dónde la educación matemática realista, ya sea implícita o explícitamente, se hace presente. Y por otro lado, el análisis preliminar centra la atención en las condiciones específicas de cada tema de estudio. Esta segunda parte se hace explícita en los resultados de las actividades aplicadas.

A continuación se muestran los análisis preliminares globales de la investigación, dejando los particulares para el capítulo de resultados de la investigación.

Análisis epistemológico: en esta sección se presenta, con un enfoque histórico, el trabajo realizado en el cálculo que enmarca la necesidad de la investigación desarrollada. Los datos históricos, aunque pueden conseguirse por muchas fuentes, se tomaron en gran parte de Flores y col. (2008) y Kline (1992).

El cálculo diferencial e integral que se inician con Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), es el punto de partida para el gran avance en la ciencia que se conoce como el cálculo. Se da inicio al buscar estudiar el cambio, el movimiento y la medición de áreas y volúmenes en el siglo XVII.

Aunque el cálculo se desarrolló a partir de las técnicas infinitesimales utilizadas para resolver dos tipos de problemas: el cálculo de áreas y volúmenes y el cálculo de tangentes a curvas, no puede dejarse de lado los trabajos de Arquímedes de Siracusa

(287 a.C.-212 a.C.), quien había realizado los avances más significativos sobre esos problemas, aplicando el método exhaustivo o de agotamiento para la determinación de áreas y volúmenes, obteniendo importantes resultados sobre el cálculo de tangentes para ciertas curvas particulares.

En la primera mitad del siglo XVII, se renovó el interés por esos problemas clásicos y varios matemáticos como Bonaventura Cavalieri (1598-1647), John Wallis (1616-1703), Pierre de Fermat (1601-1665), Gilles de Roberval (1602-1675) e Isaac Barrow (1630-1677) entre otros, lograron avances que prepararon el camino para la obra de Leibniz y Newton.

Los trabajos de Leibniz y Newton, aunque con enfoques distintos, el de Leibniz con sumas de sucesiones para aproximar la curvatura de una curva, que lleva a la aproximación de la tangente, y el de Newton geométrico y analítico a las derivadas, fundamentaron los métodos y algoritmos que hacen del cálculo la herramienta que se conoce hoy en día.

El cálculo en varias variables (el cálculo vectorial sobre todo) se inicia con el cálculo de variaciones que surge junto con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la teoría de series y la geometría diferencial entre los años 1700 a 1800, esto de la mano principalmente de Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Las derivadas parciales e integrales múltiples se dan a inicios y primera mitad del siglo XVIII gracias a Fontaine, Euler, Clairut y D'Alembert.

Ahora bien, el conocimiento descubierto en el cálculo buscó desde sus inicios dar a conocerse, enseñarse. La enseñanza del cálculo terminó enmarcándose en modelos tradicionales que generan muchos obstáculos en los estudiantes. En Holton (2002), los autores Aline Robert y Natasha Speer, dejan ver que las investigaciones en enseñanza y aprendizaje del cálculo identifican obstáculos, por ejemplo, en las diferentes formas de expresar una función (gráfica, un subconjunto del plano Cartesiano, con su fórmula explícita), o en los temas de límites y tangentes. Se identifican osbtáculos epistemológicos, cognitivos o didácticos.

Reformas en la enseñanza del cálculo han buscado alejarla de un modelo tradicional de enseñanza. Tratando de modificar lo que se enseña y cómo se enseña. Robert y Speer en Holton (2002), describen las diferentes situaciones presentadas en Estados Unidos en el marco de reformas e investigación en educación matemática preuniversitaria. Por su parte Artigue y col. (1995), identifica caraterísticas de lo sucedido en la educación matemática francesa en lo relacionado con el cálculo.

Un ejemplo particular identificado, tiene que ver con la enseñanza de las integrales. Henry Poincaré (1854-1912), citado por Artigue y col. (1995, p. 101), considera que no importa qué definición se tenga de una integral, el estudiante nunca sabrá qué es, si no se le ha mostrado con anterioridad lo que en realidad es. Todas las sutilezas (continuidad, derivabilidad) van a ser indiferentes para el estudiante. Se deduce que el estudiante debe recibir el "objeto" antes que la matemática que lleva dentro.

En la década de 1960 se hizo muy notable la separación de la matemática enseñada en secundaria, y aquella matemática que se mueve en el mundo de la comunidad de matemáticos. "*Desde el comienzo de los años sesenta... en lo concerniente al cálcu-*

lo (se introdujo), *un apartado sobre las generalidades de las funciones con variables reales...: límites, continuidad, derivadas, primitivas, los teoremas generales hasta el teorema de Rolle, el teorema del crecimiento finito y la definición formal de la noción de límite*"[1] (Artigue y col., 1995).

A finales de la década de 1960, la reforma a las matemáticas modernas, hizo que la enseñanza del cálculo se viera influenciada considerablemente por el formalismo y conjuntismo con gran predilección a las definiciones (en particular) de gran auge en el momento. Esta reforma no prosperó.

Hacia 1980, se dio la contra-reforma. El cálculo fue importante en esta reforma. Algunas conclusiones a las que se llegó, para fundamentarla, son que despúes de los años 1960 se tenía (Artigue y col., 1995, p. 104-105):

1. Introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos al estudiante,
2. Construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas,
3. Empleo muy precoz de un lenguaje formalizado, a veces hermético,
4. Enseñanza muy centrada en el discurso del profesor.

Así entonces, con la contra-reforma, se busca que las matemáticas se perciban "*como una actividad humana, histórica, cuya finalidad es la resolución de problemas que han*

[1] Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes. Iberoamericana, grupo editorial, p. 103.

surgido en el desarrollo interno o externo de la disciplina." Se busca dar a conocer las matemáticas no solo porque están ahí, "*sino más bien unas matemáticas que el matemático construye en función de sus necesidades*"[2] (Artigue y col., 1995). Se planteó que la enseñanza de la matemática, entre otras, debe

1. Modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes,
2. Apoyarse en objetos típicos sencillos que más adelante servirán de referencia,
3. Teorizar únicamente lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes,
4. Promover un enfoque constructivista del aprendizaje.

De manera general, se ha identificado que "*la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio*"[3] (Artigue y col., 1995). La debilidad en los proyectos de reforma del cálculo (en Estados Unidos sobre todo), se da en la separación de ellos con los trabajos investigativos al respecto.

Nuevos contenidos y temas como el constructivismo, el aprendizaje cooperativo, tecnologías o problemas del mundo real, entre otros, han surgido en las diferentes propuestas de reforma. Las preocupaciones pragmáticas dieron pie a las reformas y a

[2]Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes. Iberoamericana, grupo editorial, p. 105.

[3]Íbid., p. 97.

sus propuestas de solución, pero desafortunadamente no se ha tenido resultados claros sobre la enseñanza del cálculo "*y los estudios comparativos realizados en relación con la reforma del cálculo no han mejorado significativamente nuestra comprensión de cómo los estudiantes aprenden cálculo y cómo las diferentes circunstancias de instrucción influyen en ese aprendizaje*"[4] (Holton, 2002).

"*En última instancia, el campo* (investigación sobre cálculo) *avanzará en la enseñanza y el aprendizaje efectivos solo si trata de manera significativa los problemas teóricos y pragmáticos simultáneamente*"[5] (Holton, 2002).

Análisis de la enseñanza tradicional: para este análisis, se investigó los contenidos de los cursos de cálculo en varias variables ofrecidos en diferentes universidades; se consultó los libros de texto más comunes seguidos en estos cursos y se encuestó a estudiantes y docentes.

Entre las universidades que se tuvo en cuenta para la consulta están las universidades del Valle, del Cauca, del Atlántico, Autónoma de Bucaramanga, Industrial de Santander, Distrital Francisco José de Caldas, Libre y EAFIT en Colombia; la Universidad Andrés Bello en Chile; la Universidad Privada del Norte en Argentina; la Universidad de las Fuerzas Armadas en Ecuador; la Universidad de Puerto Rico; el Instituto Tecnológico Nacional en México y la Universidad Autónoma de México.

Los contenidos del curso de cálculo en varias variables o su equivalente en estas universidades incluyen como texto guía o de referencia los libros de Thomas (2010),

[4]Holton, D. ((2002). *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study.* New York: Kluwer Academic Publishers, p. 295.

[5]Íbid., p. 297.

Larson y otros (1999), Marsden y Tromba (1991) o Smith (2007). Y también de trabajos más formales, como Katok & Climenhaga (2008), Stillwell (1992), Glaeser (2017), Abate & Tovena (2012), entre otros.

La diferencia entre los sílabos de las distintas instituciones radica en el orden en el que se presentan los capítulos. Además, la parte de análisis vectorial no se hace en todas las universidades, por ejemplo, en la Universidad Autónoma de Bucaramanga en lugar de análisis vectorial se hace un capítulo de sucesiones y series; en el Tecnológico Nacional de México no se hacen los teoremas de Green y Stokes, entre otros.

De manera general, puede decirse que son contenidos muy similares pero en ninguno de ellos se hace explícito un manejo específico de las superficies. Únicamente en la Universidad del Valle se nombra algunas formas de ver las superficies (de revolución, cuadráticas, cilindros); en los demás, a lo sumo, se incluye algún ítem del contenido que hace referencia a la gráfica de una función en dos variables.

Entre las referencias bibliográficas, los textos más frecuentes son los de Larson (por ejemplo, Larson, 1999) y Stewart (por ejemplo, Stewart, 2002) que están en nueve y ocho de los trece contenidos respectivamente. En estos textos se inicia el trabajo de las superficies como el conjunto de puntos (x, y, z) del espacio coordenado que satisfacen una ecuación de la forma $f(x, y, z) = c$, partiendo con la esfera y los planos, respectivamente. Posteriormente, se trabaja los cilindros y cuadráticas en los dos casos.

Al consultar Stewart (2002) puede verse que se relaciona los hiperboloides de una hoja con torres de enfriamiento de reactores nucleares y paraboloides con antenas de comunicación (radio, televisión, entre otras). En cambio en Larson (1999) no se identifica una asociación de las superficies con un contexto real. En los dos textos se encuentran algunos ejercicios que buscan relacionar contextos reales con el manejo de superficies pero ninguno dedica una parte del texto al trabajo de la noción de superficie y mucho menos en ambientes realistas.

Lo encontrado en esta consulta confirma la necesidad manifiesta de mejorar los procesos de enseñanza del cálculo, en particular del cálculo en varias variables (Beckmann y Schlicker (1999), Koss (2011), Malaspina y Font (2010), Mohammad-Yusof y Tall (1999), Montiel y col. (2009), Rasmussen y col., p. 512 (2014), Trigueros y Martínez-Planell (2010), Törner y col. (2014), Wangberg y Johnson (2013), Zuñiga (2007), entre otros). De manera general, siendo entonces los textos más comunes, podría inferirse la falta de contextualización en ambientes realistas del cálculo en varias variables (aparte de las aplicaciones típicas) ofrecido en las carreras de ingeniería en la actualidad.

Análisis de concepciones de estudiantes y docentes: desde el punto de vista de estudiantes y docentes, los cursos de cálculo en varias variables tienden a ser muy tradicionales y no incluyen un enfoque realista en el sentido de trabajar con contextos realistas o cotidianos para los estudiantes.

De las respuestas de 40 estudiantes encuestados en 2018, que estaban tomando el curso de cálculo en varias variables, se identificó, por ejemplo, que el 68 % considera interesante o muy interesante relacionar objetos reales con expresiones matemáticas que los representen. Solamente el 30 % se siente capaz de asociar una expresión matemática a un objeto real. El 47 % no siente seguridad al enfrentarse a problemas de optimización, en particular cuando debe haber una representación gráfica asociada. El

40 % tiene dificultad con las integrales múltiples, sobre todo en la identificación de los límites de integración. Y de manera general, en el caso de asociar expresiones matemáticas a objetos reales, solamente el 11 % de los estudiantes obtuvo un resultado satisfactorio.

De cinco docentes encuestados y que estaban ofreciendo el curso de cálculo en varias variables, el 67 % y 83 % consideran que los estudiantes tienen dificultades con optimización e identificar límites de integración respectivamente. El 67 % consideran que las mayores dificultades en los estudiantes se tienen en temas asociados con gráficas o representaciones gráficas en $\mathbb{R}^3$. El 83 % se apoya en herramientas computacionales como geogebra para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del curso. Con una calificación de 4,1 entre 0 y 5, los docentes consideran que manejar las superficies en el curso, por medio de objetos reales, es de gran utilidad para la comprensión de los temas del curso por parte de los estudiantes.

Análisis del campo de restricciones: siguiendo con el análisis global de la investigación, el trabajarla en condiciones normales del curso, provoca cambios repentinos y posiblemente inesperados en el desarrollo de las actividades fruto de las ingenierías didácticas construidas, lo que se convierte en restricciones del tipo didáctico.

Al tener condiciones o habilidades distintas en todo el grupo de trabajo (estudiantes con mayores o menores habilidades), se hacen notables restricciones asociadas a las características cognitivas de los estudiantes. Ahora bien, dada la tradicionalidad con la que se ofrece el curso, el hecho de introducir actividades contextualizadas generará también obstáculos cognitivos.

Por otro lado, la cantidad de estudiantes en el curso obliga a tener en cuenta más detalles en el desarrollo de la investigación. El cumplimiento del contenido programático mínimo propuesto para el semestre le aporta también significativamente a las restricciones.

Estas restricciones, aunque le dan mayor peso a la investigación, deben tenerse en cuenta constantemente y pueden hacerse más notables de un tema a otro de estudio en el curso.

3.5.2. Fase II. Concepción y análisis a priori

Al llegar al cálculo en varias variables, el estudiante se enfrenta al espacio en tres dimensiones: al paso de 2D a 3D. Debe afrontar el espacio $\mathbb{R}^3$ por si mismo y en contextos matemáticos, es decir, relacionar expresiones matemáticas con el espacio coordenado. Además, el trabajo que se realiza en el cálculo, por ejemplo los temas como gráficas, derivadas, integrales, optimización, etc, se hacen partiendo de una función (o de una expresión matemática):

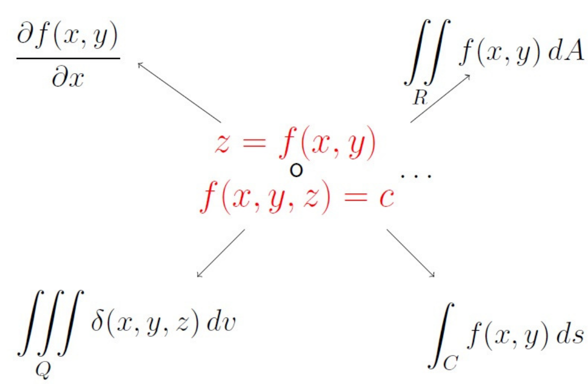


Figura 5. Presencia de las expresiones matemáticas.

Partiendo de ello, en esta fase se determinan como variables globales (macro-didáctica) a:

VG1. Manejo del espacio coordenado,

VG2. Representación de objetos por medio de expresiones matemáticas,

y las que las complementan, es decir, variables locales (micro-didáctica) las siguientes:

VL1. Representación de regiones en el plano (VG1-VG2),

VL2. Dado un objeto (superficie), ubicación de los ejes coordenados (VG1),

VL3. Relación de tipos de superficies con planos y superficies cuadráticas básicas (VG2),

VL4. Identificación de funciones a optimizar y restricciones en contextos de optimización (VG2),

VL5. Identificación de límites de integración en integrales dobles o triples en el cálculo de áreas y volúmenes (VG1-VG2).

Se quiere así, identificar cuál es el comportamiento de los estudiantes frente a cada una de estas variables, en el marco de contextos realistas y el desarrollo de su pensamiento matemático. Después de la fase IV, entonces, se busca validar las siguientes hipótesis:

HI1. Los objetos cotidianos (realistas) incentivan el trabajo de los estudiantes.

HI2. El estudiante relaciona de mejor manera el espacio coordenado con las superficies si éstas vienen de objetos cotidianos para él.

HI3. Los contextos realistas despiertan el interés del estudiante en identificar expresiones matemáticas de los objetos o regiones involucrados.

HI4. El relacionar los objetos (superficies) seleccionados con la matemática estudiada en el curso, estimula el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

3.5.3. Fase III. Experimentación

Como se menciona más arriba, la investigación se desarrolla en las condiciones normales de estudio de un semestre académico en la universidad. Los estudiantes involucrados están tomando el curso de cálculo en varias variables de su plan de estudio. No se hizo una selección específica ni se aplicaron las micro-ingenierías en condiciones externas a la clase.

La experimentación inicia con una contextualización de la situación didáctica propuesta. Una lectura previa grupal que permita precisar los términos usados en la redacción, algunas gráficas presentes o precisar sobre la cotidianidad efectiva de los objetos tenidos en cuenta. Algunas actividades se desarrollan en grupos de dos o tres estudiantes y otras de manera individual. A continuación se muestra información general de las actividades:

Ac1. Ubiquémonos en nuestra vivienda: el espacio coordenado.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	El espacio coordenado
Tiempo	Dos horas
Resultados de aprendizaje	Identifica y representa puntos del espacio por medio de ternas de la forma (x, y, z) Identifica la regla de la mano derecha para ubicarse en el espacio coordenado Asimila puntos en el espacio como una expresión general en $x,\ y$ y z.
Prerequisitos temáticos	números reales

Ac2. Florero de caras planas: planos en el espacio.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	planos en $\mathbb{R}^3$
Tiempo	Dos horas
Resultados de Aprendizaje	Representa un objeto real como parte de $\mathbb{R}^3$ Identifica puntos del espacio según las dimensiones del objeto Construye la ecuación de un plano usando tres puntos del espacio coordenado
Prerequisitos temáticos	números reales, el espacio coordenado

Ac3. Cafetería de la Facultad: introducir la interpretación de las gráficas de funciones en varias variables como superficies, superficies cuadráticas.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	Introducción a las superficies cuadráticas básicas
Tiempo	Tres horas
Resultados de Aprendizaje	Asocia un objeto real con una superficie en el espacio Relaciona una región del plano xy con puntos de la superficie Identifica la superficie como un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen una expresion en las variables $x,\ y$ y z.
Prerequisitos temáticos	Representa las partes del objeto por medio de expresiones matemáticas el espacio coordenado, fórmula de la distancia entre dos puntos, semejanza de triángulos

Ac4. Promoción de dulces: optimización.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	Optimización
Tiempo	Tres horas
Resultados de Aprendizaje	Identifica la magnitud a optimizar en el contexto presentado Representa cantidades involucradas en el contexto por medio de expresiones en términos de las incógnitas Plantea modelos que involucran el criterio de las segundas derivadas parciales y los multiplicadores de Lagrange Soluciona los modelos de optimización
Prerequisitos temáticos	derivadas parciales

Ac5. Florero de partes cuadráticas: integración múltiple, área superficial de una superficie y volumen de un sólido.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	Integrales múltiples: volúmenes y área superficial
Tiempo	Cuatro horas
Resultados de Aprendizaje	Asocia las superficies cuadráticas básicas con partes del objeto Identifica el grosor del objeto como el espacio entre dos superficies Representa las partes del objeto por medio de expresiones matemáticas Identifica las regiones del plano xy que definen las partes del objeto Plantea integrales múltiples que representan volumen o área superficial Calcula integrales múltiples
Prerequisitos temáticos	Métodos de integración

Ac6. Diábolo de dos palos: volúmenes y área superficial, superficies cuadráticas.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	Integrales múltiples
Tiempo	Cuatro horas
Resultados de Aprendizaje	Identifica las regiones del plano xy que definen las partes del objeto Identifica superficies cuadráticas como partes del objeto Representa las partes del objeto por medio de expresiones matemáticas Plantea y calcula integrales múltiples que representan áreas y volúmenes
Prerequisitos temáticos	Métodos de integración

Ac7. Reloj de arena: optimización, integrales múltiples, superficies cuadráticas.

Curso	Cálculo multivariado
Carrera	Tecnología en mecánica industrial
Docente	PAAS
Tema	optimización, integrales múltiples, superficies cuadráticas
Tiempo	Cuatro horas
Resultados de Aprendizaje	Identifica la magnitud a optimizar en el contexto presentado Representa cantidades involucradas en el contexto por medio de expresiones en términos de las incógnitas Plantea modelos que involucran el método de los multiplicadores de Lagrange Relaciona la interpretación de las integrales con las magnitudes involucradas en el contexto
Prerequisitos temáticos	integración, multiplicadores de Lagrange

Los resultados según cada micro-ingeniería se muestran en el Capítulo 4.

3.5.4. Fase IV. Análisis a posteriori y evaluación

En esta sección se presenta el análisis a posteriori y evaluación de la macro-ingeniería resultado de la investigación. Se extrae acá conclusiones generales que permiten identificarse gracias a los resultados obtenidos en la fase de experimentación y que se muestran en el Capítulo 4. En ese capítulo se presentan conclusiones por actividad y del capítulo mismo, mostrando de manera más detallada los resultados. Por ello en esta sección no se detalla la información mostrada.

La macro-ingeniería está formada por siete actividades, fue aplicada a lo largo del semestre 2021-II en un grupo de estudiantes de cálculo multivariado que estaban tomando el curso estándar de su carrera; el número de participantes cambió de una actividad a otra (por ejemplo, porque el estudiante faltó a clase esos días o porque no pudo llegar a la clase) y cinco de las siete actividades se aplicaron de forma virtual por la imposibilidad de retornar al salón de clase por pandemia.

La investigación realizada parte del supuesto de que la motivación del estudiante permitirá adelantar un análisis más real, más válido, de los alcances logrados por el estudiante en una propuesta de aprendizaje cualquiera. Las actividades desarrolladas muestran que el estudiante sintió motivación en trabajarlas y no las solucionó únicamente por tener una nota del curso.

La forma como el estudiante muestra sus respuestas deja ver la poca práctica que tiene para solucionar problemas con un contexto real. Aunque comprendió los contextos, no le fue muy fácil avanzar. Si la actividad necesitaba plantear una expresión en términos de las variables sin darle una guía de su forma, el estudiante no la planteó de manera correcta.

Aunque el estudiante mostró identificar puntos fijos en el espacio, tuvo dificultad para generalizar alguna característica de esos puntos, por ejemplo, escribir los puntos que están a una distancia a del origen en la forma $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$.

El estudiante relacionó de manera satisfactoria partes de objetos presentados con superficies usadas en el cálculo multivariado como planos o superficies cuadráticas. En este caso se identificó falta de precisión por parte del estudiante en la restricción de las variables para truncar la superficie y verla acotada como en el objeto presentado.

Si el objeto que se estudia en la actividad es uno que el estudiante puede ver, quizás lo tiene cerca o está familiarizado con él, entonces los resultados son mejores. El hecho de partir de una forma canónica de la ecuación de una superficie le ayudó mucho para avanzar en el desarrollo de la actividad.

El manejo del espacio coordenado mejoró con el paso del tiempo y el desarrollo de más actividades. La repetición en la ubicación de objetos en $\mathbb{R}^3$ mejoró los resultados.

En la mayor parte de los procesos, el estudiante se limita a escribir ecuaciones, expresiones matemáticas, pero no hace una descripción más o menos detallada de los procesos. Eso dificultó el análisis y compresión de las dificultades presentadas.

Aunque el estudiante expresa la variable z en términos de x y y, identifica débilmente las restricciones que debe darle a x y y para acotar la superficie cuando se le pide representar el objeto. Aún así, al plantear las integrales, identifica los límites de integración para medir el volumen o área superficial.

De manera general, si se toma los porcentajes alrededor de los cuales los estudiantes alcanzaron o no los niveles de la matematización propuestos por la EMR, puede estimarse que alrededor del 83 % de los estudiantes alcanzaron el nivel situacional, entonces, el estudiante lee, comprende, interpreta y asume como propio el contexto, actividad o situación realista. El alcance del nivel referencial está alrededor del 66 %, por tanto, el estudiante plantea representaciones, modelos gráficos, descripciones, procedimientos propios, entre otros, que esquematizan el problema; empieza a alejarse del contexto intuitivo e informal del nivel situacional. Y por último, el nivel general es alcanzado por alrededor del 60 % de los estudiantes, con lo que se concluye que el estudiante se acerca a enfocar la matemática hacia superar la referencia al contexto y busca identificar que la matemática presente puede usarse en otros contextos similares al estudiado. La siguiente gráfica resume la información anterior.

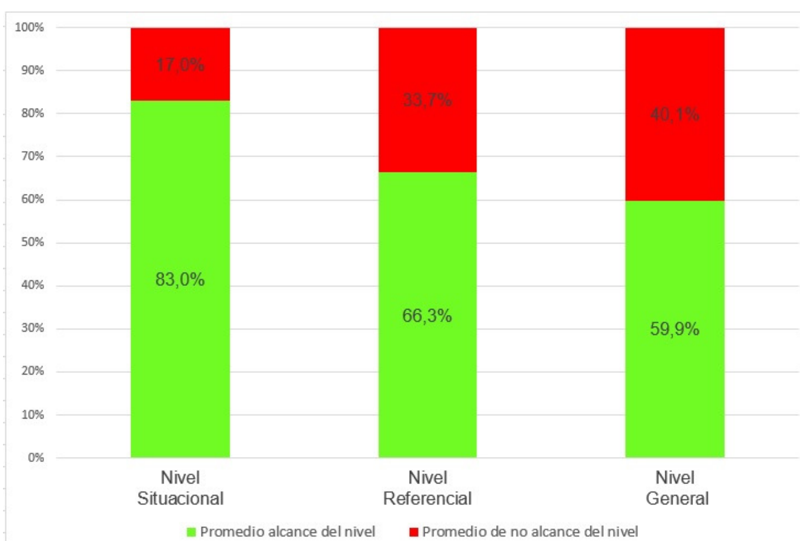


Figura 6. Promedio de alcance de los niveles de matematización.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES

En este capítulo se muestran los resultados de la aplicación de las actividades cercanas a micro-ingenierías que conforman el aporte práctico de la investigación, con miras a la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes del curso de cálculo multivariado.

Como se ha planteado antes en este documento, es clara la necesidad de las expresiones matemáticas para proceder en el cálculo (por ejemplo, las funciones para derivar o integrar). Es por ello que las actividades centran la atención en obtener expresiones matemáticas que representen objetos reales con características diferentes. Por ejemplo, asociar expresiones conocidas de superficies cuadráticas básicas a objetos reales o cotidianos para los estudiantes.

La forma de las actividades finales es resultado de la aplicación preliminar de, por lo menos, en dos oportunidades de actividades en semestres y poblaciones diferentes. Con esas aplicaciones preliminares se mejoró la redacción, los símbolos usados, se descartaron ítems o modificaron los contextos en general, teniendo en cuenta, en algunos casos, las sugerencias de los estudiantes y en otros las dificultades metodológicas identificadas junto con los resultados obtenidos. Siguiendo los niveles de matematización propuestos por la EMR, inicialmente se describen los indicadores de cumplimiento, según actividad, que permiten identificar si el estudiante alcanzaría o no el nivel propuesto y posteriormente se presenta el desempeño alcanzado por los estudiantes.

4.1. Actividad: ubiquémonos en nuestra vivienda

La siguiente tabla muestra los requisitos para alcanzar cada uno de los niveles de la matematización. Se identifica cada nivel de la siguiente manera: nivel situacional: NS, nivel referencial: NR, nivel general: NG y nivel formal: NF. Es de recordar que dada la temática de estudio, no se enfatizará, en todas las actividades, en el nivel formal.

Tabla 1. Indicadores de cumplimiento. Actividad: ubiquémonos en nuestra vivienda

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Plantea las dimensiones de la habitación que tomó	1
	NS2. Identifica las distancias para la ubicación del bombillo	$2a$
NR	NR1. Ordena las distancias encontradas según las condiciones propuestas	$2b$
	NR2. Modifica el punto de destino del bombillo e identifica distancias recorridas manteniendo caminos paralelos a las paredes	$2c,\ 2d$
	NR3. Construye representaciones propias del espacio donde va a trabajar	$3a,\ 3b$
NG	NG1. Identifica posiciones por medio de signos en las distancias recorridas	$3a,\ 3b$
	NG2. Identifica posiciones en la forma (x, y, z) según el punto de referencia	4

Una de las premisas de esta investigación, apoyada en la literatura, es que para los estudiantes el paso de 2D a 3D no es automático. El hecho de recibir a los estudiantes, en el curso de cálculo multivariado, con un sistema de coordenadas en tres dimensiones suponiendo claridad en su comprensión, genera obstáculos epistemológicos en los estudiantes que en muchos casos se mantienen durante todo el curso.

El objetivo de la actividad es representar e interpretar puntos del espacio en coordenadas rectangulares por medio de ternas de números reales de la forma (x, y, z). El contexto, de manera general, desde el que se parte es ubicarse en una habitación rectangular y poner un bombillo en algún lugar de ella.

La actividad la respondieron 27 estudiantes de tecnología mecánica y un estudiante de tecnología electrónica, que pertenecían a la misma clase.

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad. Las líneas siguientes describen, según nivel, los resultados encontrados:

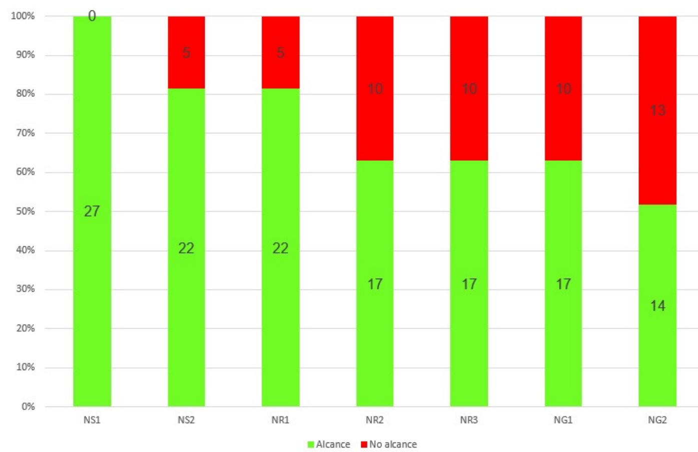


Figura 7. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad ubiquémonos en nuestra vivienda.

4.1.1. Resultados para el nivel situacional

La necesidad cotidiana a resolver (*ubicar un bombillo en su habitación*) se presenta usando un lenguaje común y corriente. Ese lenguaje puede ser confuso en ciertos momentos. Eso es intencional. Se hace con el fin de que el estudiante busque la manera de simplificar el lenguaje, pero a la vez fije información de referencia (un punto, una pared de referencia).

Dado que los estudiantes no están acostumbrados, por lo menos en matemáticas, a escribir frases o textos descriptivos (se acostumbran a manejar ecuaciones sin explicarlas), se esperaba que los términos y frases usados en la actividad (pared lateral, pared posterior, pared frontal, esquina posterior inferior izquierda) generaran dificultad, lo cual ocurrió. Eso logró superarse y dar continuidad a la actividad con las figuras de diferentes ambientes que se incluyeron en el texto de la actividad. Algo que los estudiantes destacaron posteriormente.

Ningún estudiante tuvo inconveniente en dar dimensiones a su habitación. La mayoría de ellos siguió la descripción en palabras de la posición del objeto. En la gráfica algunas respuestas de los estudiantes

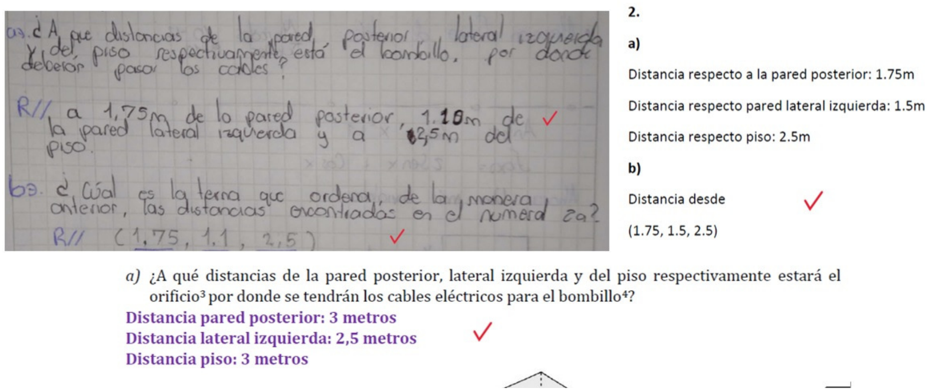


Figura 8. Respuestas en términos propuestos.

Solo cinco estudiantes no dieron respuestas claras en identificar las distancias para ubicar el bombillo en las condiciones definidas. La falta de claridad se dio porque los estudiantes confundieron el orden correcto de las dimensiones.

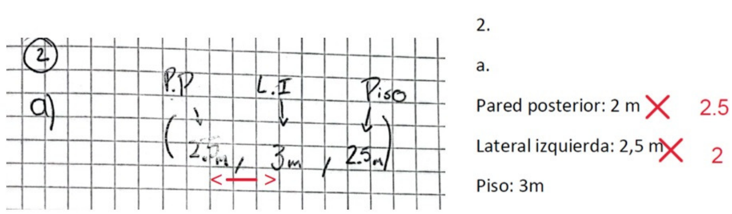


Figura 9. Falta de claridad en la descripción de las distancias (punto $2a$).

4.1.2. Resultados para el nivel referencial

Después de que el estudiante asume el contexto como suyo, la actividad busca direccionar su razonamiento hacia la determinación de la forma de las coordenadas rectangulares en el espacio. Inicialmente, debe ordenar la información encontrada, es decir, las distancias desde la pared posterior, lateral izquierda y desde el piso. 22 de los 26 estudiantes ordenaron correctamente la información, es decir, el 81 % lo hizo correctamente.

El error cometido se dio al intercambiar, en la terna de ordenación sugerida, las posiciones primera y segunda.

Por otro lado, en este nivel se busca también que el estudiante modifique el punto de destino del bombillo. Se da al estudiante ubicaciones alternas y se le pide ordenar las distancias de referencia que encuentra en el proceso. La decisión por parte del estudiante de fijar la mejor opción entre las entregadas, la toma al recorrer una distancia total mínima.

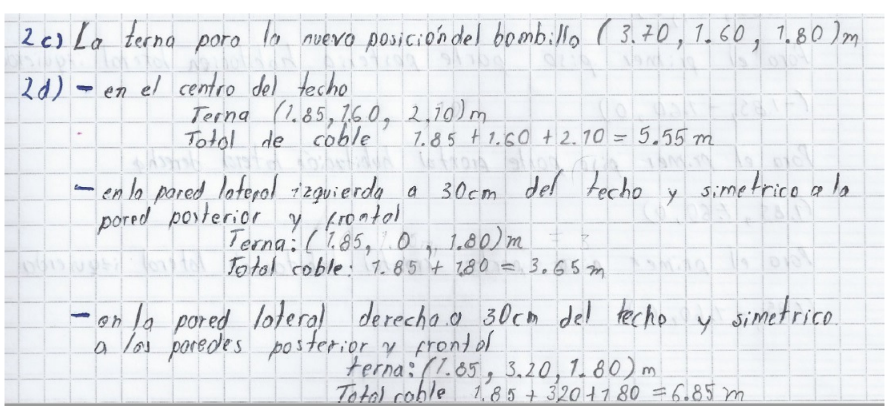

2c) La terna para la nueva posición del bombillo (3.70, 1.60, 1.80) m
2d) – en el centro del techo
Terna (1.85, 1.60, 2.10) m
Total de cable 1.85 + 1.60 + 2.10 = 5.55 m
– en la pared lateral izquierda a 30 cm del techo y simetrico a la pared posterior y frontal
Terna: (1.85, 0, 1.80) m
Total cable: 1.85 + 1.80 = 3.65 m
– en la pared lateral derecha a 30 cm del techo y simetrico a las paredes posterior y frontal
terna: (1.85, 3.20, 1.80) m
Total cable 1.85 + 3.20 + 1.80 = 6.85 m

Figura 10. Trabajo en NR2.

En este caso 17 de los 26 estudiantes hicieron el proceso completo. Los restantes 9 ya sea: solo mostraron la mejor opción sin hacer referencia a las otras, confundieron restar 30cm a la altura del techo o no hicieron explícitas las ternas de las distancias para llegar a la ubicación solicitada.

En la forma de redactar también se identifica que igualan la terna con la distancia total recorrida, es decir, no diferencian la forma vectorial con la escalar.

Para completar este nivel, se busca que el estudiante construya sus propias representaciones:

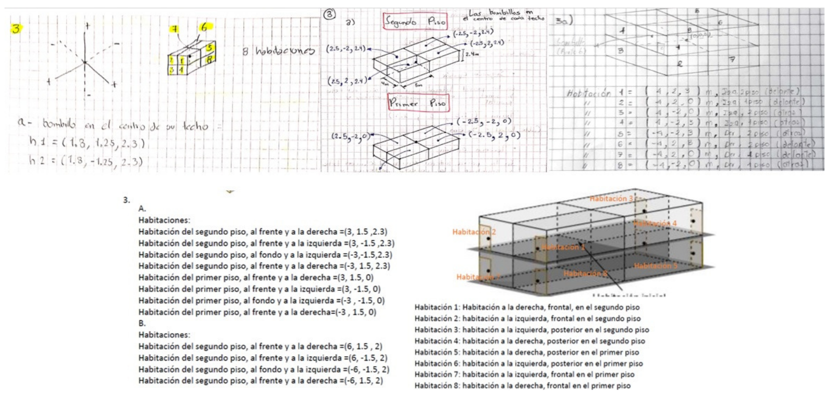


Figura 11. Representación propia del estudiante de su espacio de trabajo.

En este caso, 17 estudiantes construyen sus representaciones propias. Los otros, por ejemplo, enumeran las habitaciones del uno al ocho pero no hacen explícito cuál orden usaron, por tanto, no es claro dónde se están ubicando para un requerimiento específico. O también, no hacen su representación sino que usan la información de la guía.

4.1.3. Resultados para el nivel general

Inicialmente, las ternas de números se introducen como una manera de organizar o de ordenar la información de las distancias que se están tomando como referencia:

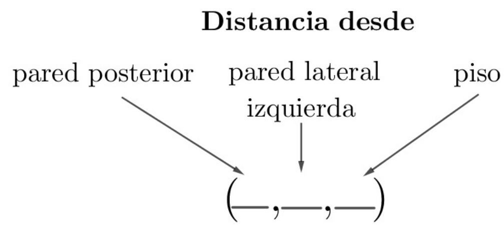


Figura 12. Distancias de referencia.

Ahora, para completar el nivel general se busca que el estudiante convierta la forma de identificar la posición de manera descriptiva en una forma analítica que depende de los signos de cada eje.

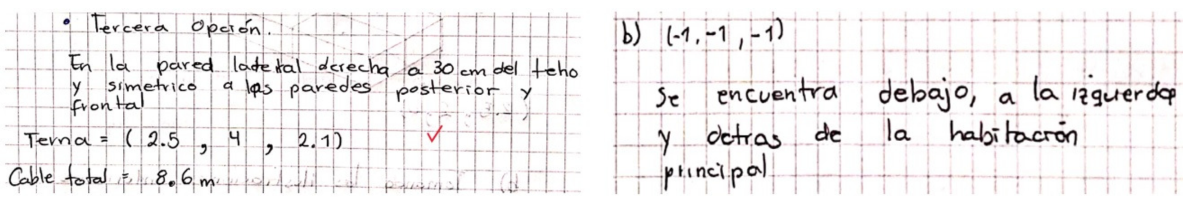


Figura 13. Descripción antes y después del ítem 4.

Con el cuarto ítem de la actividad se introducen los ejes coordenados como se conocen en matemáticas. Se presentan los ejes como la manera de simplificar la descripción usada hasta el momento en relación con las paredes de las habitaciones y se precisa su posición (regla mano derecha).

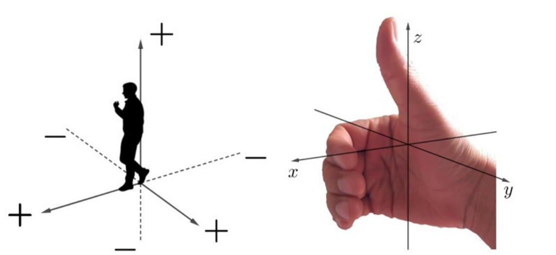


Figura 14. Los signos y el sistema mano derecha.

El 63 % de los participantes identificaron posiciones usando los signos en las distancias recorridas, pero solo el 52 % describieron en palabras una ubicación dada por medio de una terna, pero con las figuras suministradas, el estudiante identificó que lo importante en este proceso es el punto de referencia (el origen), más no la posición del observador, posición que resulta claramente subjetiva en este contexto.

Conclusiones de la actividad *ubiquémonos en nuestra vivienda*

De manera general, la actividad fue interesante para los estudiantes. Los resultados encontrados muestran que esta actividad los motivó. Por ejemplo, el 63 $\%$ de los estudiantes considera interesante introducir las ternas (x, y, z) por medio del contexto de la habitación. Solamente el 9 $\%$ habría preferido que se presente solo una definición del espacio en lugar del contexto. El 77 $\%$ considera que la forma en que se presentó la actividad (redacción, gráficas) es clara. Al 90 $\%$ de los estudiantes le quedó claro cómo representar puntos de la forma (x, y, z).

Se identificaron comentarios, entre otros, como “La forma en la que se explicó me da una vista a la realidad donde puedo aplicar este concepto de manera cotidiana si es el caso”, “La representación de puntos del espacio de la forma (x, y, z) me pareció clara gracias a la explicación con gráficas que se presentaba en el pdf”, “si claro, la información fue clara además de introducir algunas estrategias para hacerlo más entendible” y “Debido a la repetición del ejercicio en diversos puntos se pudo hacer una retroalimentación”.

Estas respuestas y comentarios dejan ver que el camino seguido en esta investigación es importante, productiva y estimulante por lo menos para los estudiantes. Con la solución de la actividad, por parte de los estudiantes, pudo identificarse que se superaron las dificultades, dudas o inquietudes enmarcadas en las siguientes posiciones:

- Los estudiantes no tenían suficientemente claro que el punto de referencia para tomar las ternas puede ser un punto cualquiera del espacio donde están ubicados. Eso les impedía proceder con las representaciones.
- Quedó clara la importancia de ordenar los valores en las ternas para no cambiar la interpretación real o apropiada de la situación.
- La característica de las coordenadas rectangulares (de formar rectángulos) se precisó con la ubicación del cable que llevaría la electricidad al bombillo.
- La terna de números en la forma (x, y, z) dejó de ser simplemente unos números ordenados en esa forma y pasó a ser un objeto, una posición en el espacio, pasó a ser el código con el que se identifica algo real en el espacio.

Inicialmente, los estudiantes ven la necesidad de enumerar todos los octantes para ubicarse en ellos (los octantes son las habitaciones en este caso). Consideran probablemente que la única forma de identificar la posición es enumerando los espacios. No asociaban el signo en las componentes de la terna para ubicarse en el espacio en lugar de numeraciones de octantes.

Para transmitir la información, por ejemplo de una ubicación, los estudiantes no tenían en cuenta puntos u objetos de referencia (por ejemplo la puerta de la habitación). Se les dificultaba fijar información que podían usar los demás para hacer entender lo que buscaban transmitir.

Se dio mayor precisión en la ubicación, en lo relacionado con, por ejemplo, estar a la izquierda del objeto o a la izquierda del observador. Los estudiantes precisaron eso con el objetivo de mejorar su comunicación.

Es importante enfatizar en la diferencia entre la terna y un valor que puede conseguirse de ella, por ejemplo, al sumar las coordenadas. Los estudiantes escriben $(1, 2, 3) = 6$.

Con relación a los resultados de aprendizaje planteados para la actividad (página 102), puede concluirse que, salvo el manejo completo de la regla de la mano derecha, lo estudiantes los cumplieron a satisfacción. Los puntos del espacio los identifica por medio de una terna y los asimila también como una expresión general en $x,\ y$ y z.

4.2. Actividad: florero de caras planas

En esta actividad no se direcciona el trabajo del estudiante, sino que se quiere identificar cómo procede a una instrucción corta y sin mayores detalles.

Siguiendo la notación de los niveles de matematización se tiene ahora:

Tabla 2. Indicadores de cumplimiento. Actividad: florero de caras planas

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Ubica el florero en el espacio coordenado	1
	NS2. Identifica las dimensiones del florero en el espacio coordenado	1
NR	NR1. Identifica cada parte del florero como parte de un plano	1
	NR2. Identifica que debe tomar tres puntos para encontrar la ecuación del plano	1
	NR3. Plantea sus propias representaciones del contexto	1
NG	NG1. Desarrolla el procedimiento para encontrar la ecuación del plano usando tres puntos	1
	NG2. Relaciona la ecuación del plano encontrado con alguna parte del florero	1

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad. Las líneas siguientes describen, según nivel, los resultados encontrados:

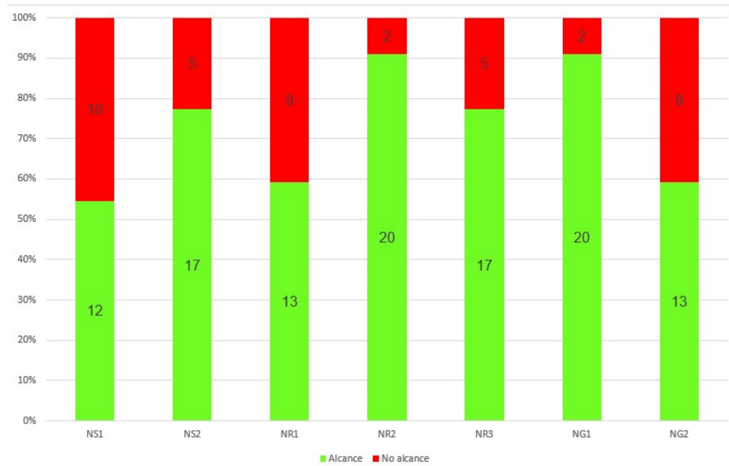


Figura 15. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad florero de caras planas.

4.2.1. Resultados para el nivel situacional

Para avanzar en el conocimiento del espacio coordenado de una manera comprensible para los estudiantes, se estudia ahora la superficie más sencilla: un plano en el espacio. El problema matemático contextualizado parte de un objeto de la cotidianidad pero con una forma específica para encontrar una expresión matemática que lo identifique o identifique las partes que lo componen. Se busca hacer ver al estudiante, que aunque su objeto no sea infinito, es posible asociarle un plano, como superficie, que lo contiene.

Entonces, la actividad consiste en identificar las ecuaciones de los planos que contienen las caras que conforman el florero de la siguiente imagen, usando esencialmente tres puntos de cada cara para conseguir la ecuación del plano.

Figura 16. Florero usado en el contexto.

Una debilidad identificada en el proceso de aprendizaje del estudiante tiene que ver en que en ocasiones tiende a no ver objetos planos como una superficie. Por ejemplo, si se usa en algún contexto un cilindro circular recto y se le pone tapa, el estudiante identifica esa tapa como un círculo en lugar de una superficie (parte de plano) a la que se le dio esa forma. Por tanto, tiende a relacionarla con la expresión $x^2 + y^2 = a^2$ en lugar de, por ejemplo, $z = b$ (si el plano es paralelo al plano xy). En esta actividad, en aplicaciones preliminares, asoció las caras con triángulos, más no con superficies (parte de un plano) de forma triangular.

Se hizo entonces, entre otras cosas, que el estudiante corrija esta debilidad por medio de esta actividad, al enfatizar en la parte grande que contiene la pequeña cara.

Aunque para identificar las ternas que le permiten construir el plano, necesita la posición de los ejes, solo 12 de los 22 estudiantes ubicaron el florero en el espacio coordenado de manera explícita. Sin embargo 17 de los 22 relacionaron las dimensiones en términos de los ejes coordenados, por ejemplo, identificaban la base en el plano xy o la altura para el eje z aunque no hayan ubicado el florero completo en el espacio coordenado.

4.2.2. Resultados para el nivel referencial

Para este nivel se busca identificar si el estudiante relaciona la matemática con el objeto en cuestión. Inicialmente el estudiante debe ubicar el objeto en el espacio coordenado. Comienza así su modelo precisando la ubicación según la posición de los ejes que haya seleccionado. Esa ubicación le facilitará o no tomar tres puntos no colineales que usará para encontrar la ecuación del plano que contiene esa cara del florero.

Las variables involucradas son $x,\ y$ y z con las que se representan los ejes coordenados y, a la vez, las que usa para las ecuaciones de los planos. Las dimensiones del florero son constantes.

Previo al desarrollo de la actividad, el estudiante trabajó en clase la noción de plano en el espacio y recordó algunas propiedades que permiten manejar vectores necesarias para plantear la ecuación del plano que acá se necesita. Así entonces, los temas que se involucran en la actividad son los relacionados con la ubicación de puntos en el espacio y representación de regiones en el plano.

El modelo matemático del contexto está formado por la ubicación del florero en el espacio, que es desde donde parte el estudiante para encontrar la información necesaria y así hallar las ecuaciones de los planos:

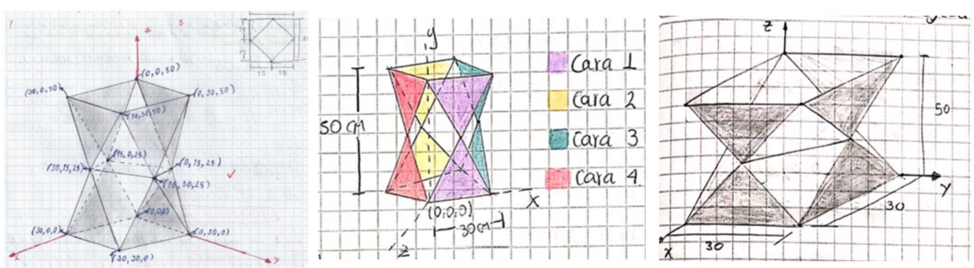


Figura 17. Ubicación del florero de algunos estudiantes.

Para este caso particular, la actividad centra la atención en la repetición de identificación de la ecuación de un plano usando tres puntos del espacio. La solución matemática al problema es la ecuación del plano que contiene cada una de las caras del florero. En la figura puede verse el proceso seguido por un estudiante

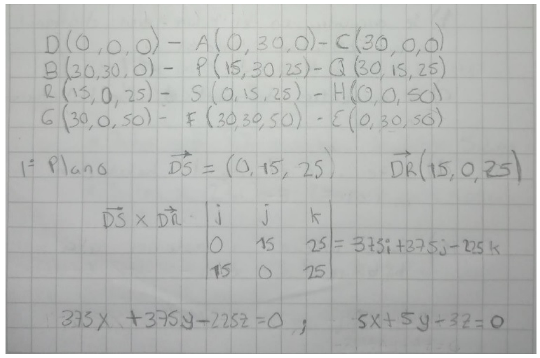


Figura 18. Selección de puntos y construcción de ecuación del plano.

Los resultados muestran que entre el 60 % y el 90 % de los participantes cumplieron a satisfacción los indicadores de cumplimiento de la actividad para el nivel referencial.

4.2.3. Resultados para el nivel general

Para el nivel referencial, el estudiante hace referencia a los puntos seleccionados para encontrar la ecuación del plano como vértices de los triángulos que forman la cara. Cuando el estudiante procede a identificar vectores, calcular un producto cruz y presentar la expresión para el plano, pasa al nivel general, en el sentido de construir una ecuación matemática en términos de las variables iniciales. Su procedimiento no hace explícito el contexto. La repetición del proceso hace que pueda concluir que la matemática que está usando la puede usar en otros contextos acercándose a un *modelo para* en lugar de un *modelo de*.

Aunque el 91 % de los estudiantes desarrolló el método que lleva a encontrar la ecuación del plano, infortunadamente algunos estudiantes no transmiten la información de forma clara. Por ejemplo, solo el 64 % hizo explícito qué parte del florero está en el plano al que le está encontrando su ecuación.

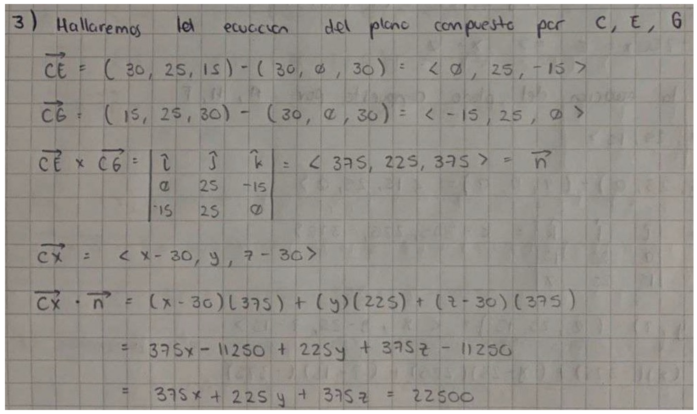


Figura 19. Identificación del plano con cara del florero.

4.2.4. Resultados para el nivel formal

La notación usada por los estudiantes para identificar sus puntos, sus vectores, el producto cruz, hacen que se identifique la formalidad que le dan a su trabajo. En la figura puede verse que los estudiantes usan la notación correcta en su escritura reflejando el nivel formal alcanzado:

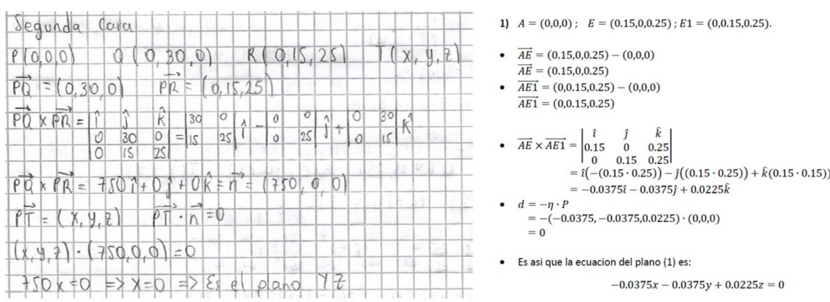


Figura 20. Notación usada en la solución de la actividad.

Así entonces, el nivel formal se ve reflejado en la forma cómo el estudiante relaciona las expresiones involucradas en términos de $x,\ y$ y z, en la notación y operaciones que no tienen que ver ya con el contexto.

Conclusiones de la actividad *florero de caras planas*

Inicialmente, los estudiantes no ven una relación matemática con el objeto, salvo su volumen. Después de señalarles las caras que componen el florero, empiezan a relacionarlas con los planos que se han introducido en el curso. De este modo, el florero les permite direccionar una visión matemática, a este nivel, de la realidad propuesta con la teoría introducida en el curso.

En buena proporción del número de estudiantes es débil la transmisión de la información. Se mantiene la debilidad en la claridad para exponer el trabajo que está desarrollando el estudiante, es decir, no es completamente clara la información que busca transmitir. Por ejemplo, en cerca del 45 $\%$ de las respuestas, no es clara (o por lo menos explícita) la ubicación del florero con respecto a los ejes coordenados, y en el 35 $\%$ tampoco es claro a cuál parte del florero le está encontrando el plano que la contiene.

La metodología propuesta para encontrar las ecuaciones de los planos (tomar tres puntos, formar dos vectores para encontrar el vector normal y plantear la ecuación) es clara en el 91 $\%$ de los participantes, es decir, la actividad logra el objetivo de identificar la expresión matemática para el plano que contiene cada triángulo que conforma la cara del florero. Sin embargo, se identificó que los planos paralelos al eje z tienden a hacerse a un lado. Varios estudiantes encontraron únicamente la ecuación de los planos no paralelos al eje z. La razón de ello se debe a que tienden a no asociar un plano a expresiones de la forma $x = a$ o $y = a$.

La repetición del proceso de encontrar la ecuación del plano, hace que el estudiante identifique con más facilidad las coordenadas de los puntos a usar y fortalezca la comprensión de la ubicación del objeto en el espacio coordenado.

El $91\,\%$ de los estudiantes usa de manera correcta la notación de los puntos, vectores o producto cruz, reflejando así un alcance del nivel formal de la actividad.

Los resultados muestran que se logró alcanzar los resultados de aprendizaje planteados para esta actividad (sección 3.5.3, página 103).

4.3. Actividad: Cafetería de la Facultad

Esta actividad es el inicio del trabajo enfocado a introducir la interpretación de las gráficas de funciones en varias variables como superficies. Las actividades posteriores hacen comprender que el objeto de estudio y una expresión matemática tipo función en dos variables no pueden separarse para el trabajo realizado en este curso. Así, con esta actividad, se inicia la repetición de asociar un objeto en tres dimensiones con una expresión matemática.

Cuando en este ítem se habla de *la Facultad*, se hace referencia a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, sede Ciudad Bolívar, ubicada en la Localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá D.C. Esta facultad cuenta con un edificio que concentra muchos estudiantes a lo largo de cada día, pues parte de éste funciona como cafetería.

Figura 21. Cafetería Facultad Tecnológica.

El edificio está formado por un cilindro, un tronco de cono (que no se alcanza a ver desde afuera) y un hemisferio. Ello hace que sea una buena oportunidad, por medio de un objeto cotidiano para los estudiantes, para introducir las superficies cuadráticas básicas del curso. Para esta actividad se le pidió los estudiantes trabajar de manera autónoma en la parte superior del edificio. Las partes restantes se trabajaron de manera colaborativa en clase.

En esta oportunidad, dado que, en teoría, lo estudiantes se mueven en el edificio, no se enfatiza en el nivel situacional, y más bien se hace en los otros niveles. Siguiendo la notación de líneas anteriores para los requisitos de los niveles de matematización se tiene entonces:

Tabla 3. Indicadores de cumplimiento. Actividad: cafetería de la Facultad

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Conoce el edificio de la cafetería	contexto
	NS2. Identifica el radio del hemisferio en el techo	$1\,a)$
NR	NR1. Identifica puntos del espacio que le permiten diferenciar el estar abajo del techo o en el techo	$1\,b), c), e)$
	NR2. Identifica puntos del espacio que le permiten estar en el borde del techo	$1\,d), f)$
	NR3. Plantea sus propias representaciones del contexto	1
NG	NG1. Representa cualquier punto del techo por medio de una expresión en términos de $x,\ y$ y z	$1\,i)$
	NG2. Identifica la región del plano con la cual se tiene la forma del techo	$1\,c), d)$

El objetivo de la actividad es tomar partes del edificio y asociarle una expresión matemática cuadrática con el fin de que el estudiante asocie una expresión diferente a la de los planos con un objeto real. Se busca extender a expresiones no lineales los objetos cotidianos que él tome. Para este caso, se trabaja con una esfera y un cono (más exactamente un hemisferio y un cono truncado) que forman el techo del edificio:

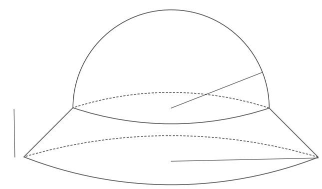


Figura 22. Techo de la Cafetería.

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad:

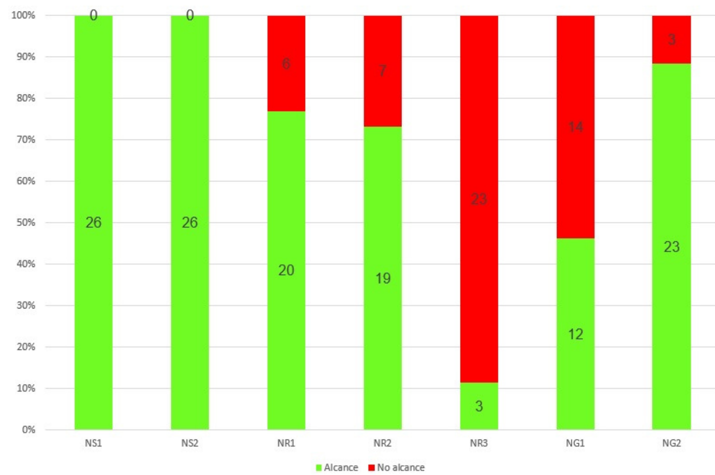


Figura 23. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad cafetería de la Facultad.

4.3.1. Resultados para el nivel situacional

Los estudiantes reciben la actividad por medio de un contexto que deja ver una necesidad propia o cercana al trabajo que ellos desarrollarán en su vida profesional. El resultado que obtiene el estudiante es una de las expresiones cuadráticas básicas usadas en el curso.

Con esta actividad, la situación planteada lleva al estudiante a relacionarse con las expresiones matemáticas comunes en el curso en una dirección opuesta a la usada en los libros de texto. Es decir, se presenta el objeto al estudiante y luego se consigue la expresión matemática. Eso es opuesto a los textos comunes del curso pues allí se muestra la expresión matemática (por ejemplo funciones) y luego se grafican.

Por experiencia ofreciendo este curso en varias oportunidades, se ha identificado que los estudiantes tienen dificultad para asociar la región del plano xy con la cual se representa una superficie o parte de ella. Pensando en ello, con esta actividad se introduce algunos ítems que llevan a relacionar el trabajo del estudiante en el manejo de dichas regiones.

Entre el 100 $\%$ de las respuestas dejan ver que se alcanzaron los indicadores de cumplimiento del nivel situacional.

4.3.2. Resultados para el nivel referencial

Con el fin de que el estudiante llegue hasta el final de la actividad y afiance la comprensión del contexto, inicialmente se precisa la terminología que se usará adelante. Por ejemplo la relacionada con la ubicación:

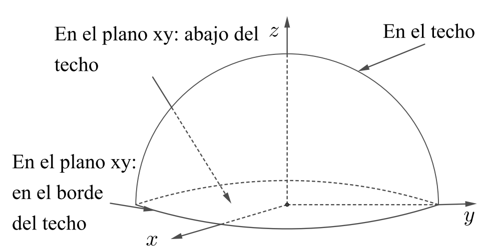


Figura 24. Terminología según ubicación.

El estudiante asume que al buscar una expresión matemática de cada parte del techo, necesita tomar como variables a $x,\ y$ y z y que el tema matemático que se abordará en el desarrollo es únicamente la fórmula de la distancia en el espacio (para la parte esférica) y algo de semejanza de triángulos (para la parte cónica).

Con las respuesta al ítem uno, el estudiante va construyendo el modelo matemático del contexto. Asume con claridad el hecho de que un punto esté en el techo, abajo del techo o en el borde del techo. La solución en el marco del contexto se da con la selección correcta de ternas en cada una de las partes señaladas del hemisferio, lo que le lleva a definir, en el siguiente nivel, la solución general al contexto.

Una debilidad identificada tiene que ver con la representación del borde del techo, es decir, dado que el borde está en el plano xy, algunos estudiantes, en lugar de tomar $z = 0$, asumen que "no existe", o aunque el punto está en $\mathbb{R}^3$ al tener $z = 0$ lo quitan y toman solo la pareja (x, y).

Entre el 73 y 77 $\%$ de los estudiantes identificaron correctamente los puntos que les permiten estar abajo, en el techo o en su borde. Solo el 12 $\%$ planteó sus propias representaciones, aunque esto no es malo, pues ello se debió a que la actividad mostraba toda la información necesaria, es decir, la mayoría de los estudiantes se quedaron con la información que se le entregó para hacer sus cálculos y demás.

4.3.3. Resultados para el nivel general

La identificación de algunos puntos del techo es superada con la introducción de un punto cualquiera por medio de la terna (x, y, z), que lleva a la ecuación de una esfera usando la fórmula de la distancia en el espacio. Inicialmente el estudiante relaciona los puntos encontrados en los ítems anteriores al $1.h)$ con la terna (x, y, z) y luego procede a calcular la distancia hasta el centro del hemisferio.

La fórmula a la que llega en términos de $x,\ y$ y z le hace ver que, sin importar el contexto, los puntos que la satisfacen forman un hemisferio $z = \sqrt{4{,}59^2 - x^2 - y^2}$ o una esfera $4{,}59^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Eso hace que descontextualice la situación y se quede con la expresión analítica general del objeto.

Infortunadamente, aunque la gran mayoría identificó puntos en el techo, en el borde o abajo del techo, solo el 46 % los relacionó de manera general por medio de una ecuación en las variables. Algo similar pasó con la región que define el techo: es claro para el 88 % que dicha región es necesaria para construir el techo, pero no traduce esa información en términos de $x,\ y$ y z. Sigue reflejándose una debilidad en el caso de generalizar a la variables $x,\ y$ y z.

4.3.4. Resultados para el nivel formal

Cuando el estudiante consigue las expresiones $z = \sqrt{4{,}59^2 - x^2 - y^2}$ o $4{,}59^2 = x^2 + y^2 + z^2$, está formalizando la descripción de un punto en el espacio que pertenece a un objeto con una forma específica. A este nivel trabajó directamente con el concepto de distancia y con la representación (x, y, z) de un punto en el espacio.

La conclusión de que un hemisferio está dado por $z = \sqrt{4{,}59^2 - x^2 - y^2}$ o por $4{,}59^2 = x^2 + y^2 + z^2$ para $0 \leq z \leq 4{,}59$ hace ver que el estudiante formalizó el contexto y relaciona un objeto de su cotidianidad con una expresión matemática.

Conclusiones de la actividad *Cafetería de la Facultad*

La meta de la actividad es conseguir una expresión en las variables $x,\ y$ y z que representa las partes del edificio. Aunque se identifica la solución correcta de varios estudiantes,

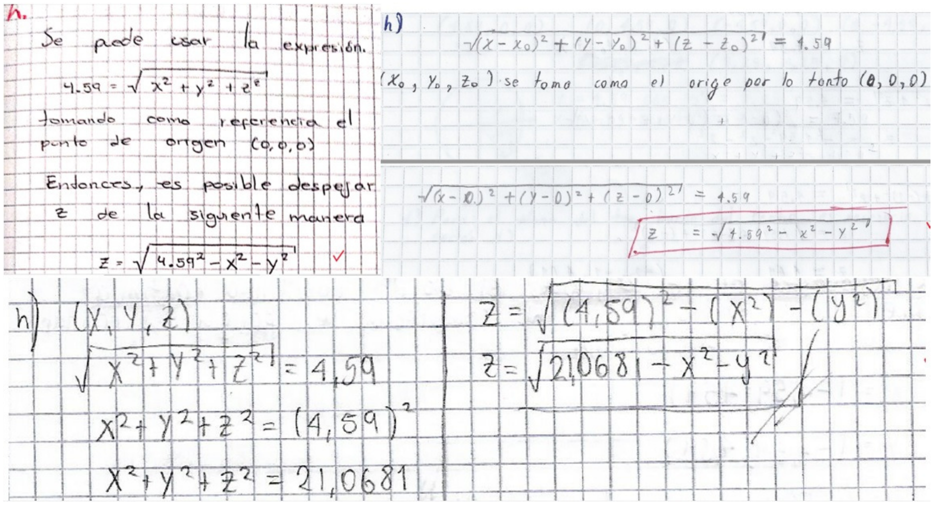


Figura 25. Ecuación esfera de algunos estudiantes.

es necesario reforzar el trabajo con la mayoría de ellos. Solo el 46 % encontraron la expresión correcta. La dificultad para el restante se dio en el proceso de matematización. Aunque encontraron puntos específicos en la superficie, usando la distancia, les causó dificultad identificar un punto cualquiera en términos de $x,\ y$ y z. No fue claro para ellos el asumir que (x, y, z), sujeto a una expresión matemática, es un punto de la superficie. Por tanto la mayoría de los estudiantes no lograron escribir la expresión correcta.

Este resultado obligó a proceder con la segunda parte (cono truncado) con un trabajo colaborativo, con el fin de profundizar en la matematización y lograr expresiones matemáticas en términos de $x,\ y$ y z que representen el objeto en estudio.

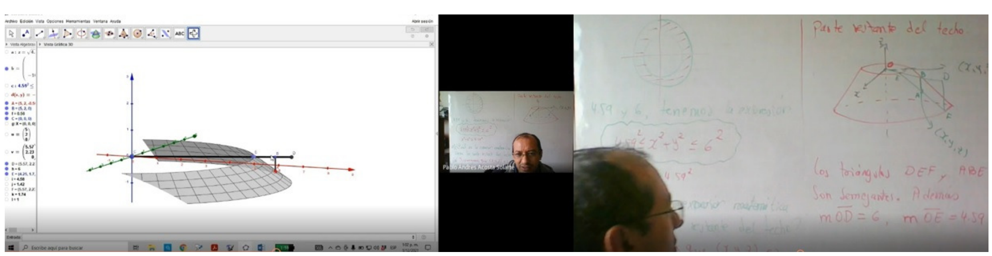


Figura 26. Trabajo colaborativo para cono truncado.

Con la información suministrada en la actividad, el 88 % de las respuestas permiten identificar que se asoció correctamente la región del plano xy para la parte hemisférica del techo y el 85 % de las respuestas identifican puntos del plano de manera explícita con los que puede conseguirse un punto de la superficie. Aun así, es débil el proceso de formalización, pues solo el 46 % asoció por medio de una expresión en términos de x y y dicha región del plano.

La debilidad en asociar regiones del plano o la superficie en el espacio en términos de las variables se superó con el trabajo colaborativo en la construcción de la expresión para la parte restante del techo, es decir, el cono truncado.

El trabajo individual de los estudiantes en la construcción de la expresión cuadrática para los objetos planteados en esta actividad, deja ver que es necesario reforzar y repetir el proceso en diferentes contextos, pues fue notable la falta de introducción de las variables en una expresión matemática general.

Aunque la generalización por parte de los estudiantes no fue óptima, puede concluirse que al tomar algunos puntos específicos, el estudiante alcanza los resultados de aprendizaje propuestos, es decir, identifica la región del plano que define la superficie y a la superficie como puntos en tres dimensiones.

4.4. Actividad: promoción de dulces

Cuando el estudiante recibe esta actividad ya se ha relacionado, por lo menos, con las formas de las gráficas de las superficies cuadráticas básicas y de expresiones de funciones en dos o tres variables. Ahora entonces se quiere que se apropie de los beneficios que le entrega la optimización por medio de una situación cercana a la condición social o económica de muchos de los estudiantes de la Universidad.

Infortunadamente esta actividad fue la que más dificultades generó a los estudiantes. Aunque se solucionó en grupos de trabajo, los resultados fueron muy bajos. La mayor dificultad se dio con la necesidad de describir una función o una restricción en términos de las variables o incógnitas. El hecho de no tener, por ejemplo, un objeto de manera explícita que debe representar matemáticamente aumentó el nivel de dificultad.

Siguiendo la notación de líneas anteriores para los requisitos de los niveles de matematización se tiene entonces:

Tabla 4. Indicadores de cumplimiento. Actividad promoción de dulces

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Nombra correctamente las variables involucradas en el contexto	1
	NS2. Diferencia los contextos según la información suministrada (función a optimizar o restricción)	$1, 3, 7$
NR	NR1. Usa las variables para identificar las funciones a optimizar o restricciones	$1, 3, 4, 7$
	NR2. Aplica el criterio de las segundas derivadas parciales para optimizar	2
	NR3. Aplica el método de multiplicadores de Lagrange para optimizar	$8, 9$
	NR4. Presenta sus respuestas en el marco del contexto presentado	$10, 11, 12$
NG	NG1. Plantea funciones a optimizar o restricciones en términos de las variables identificadas	$1, 3, 4, 7$
	NG2. Las funciones a optimizar o restricciones planteadas en términos de las variables identificadas son las que describen correctamente el contexto	$1, 3, 4, 7$

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad:

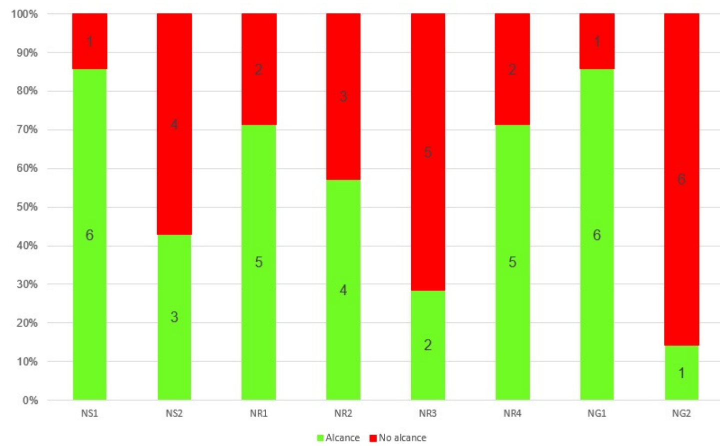


Figura 27. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad promoción de dulces.

4.4.1. Resultados para el nivel situacional

La situación real presentada en esta actividad surge como idea de un problema planteado por un estudiante hace algunos semestres. El estudiante *vendía minutos* para llamadas a celular en la Facultad y quiso saber cuál era la mejor manera para él de promocionar su pequeño negocio; en ese entonces se hicieron algunos cálculos y pudo él plantear los precios para su conveniencia y adecuados para su clientes. Probablemente, por el auge de los planes de datos móviles y las conexiones wifi, hoy en día ninguno de los estudiantes vende minutos, pero si ha aumentado la venta de mecato. Así es que surge la idea de esta actividad.

Pensando en que la mayoría de los estudiantes de la Facultad Tecnológica conocen la necesidad económica que implica el transportarse desde su casa a la Universidad para recibir sus clases, ya sea porque compran su pasaje o llegan en bicicleta o motocicleta, se tuvo en cuenta esta actividad y las formas que ellos pueden usar para conseguir dinero y no depender directamente de sus padres.

Para conseguir ese dinero algunos estudiantes venden mecato, sobre todo dulces, en algunos pasillos de la Facultad. El contexto presentado en esta actividad se relaciona directamente con esta situación. Se quiere, en el marco de la optimización estudiada en el curso, conocer la mejor manera de promocionar ciertos tipos de dulces en un ambiente cercano a la sana competencia comercial.

Los estudiantes comprendieron muy bien el enunciado y lo asumieron como propio. Una diferencia con los contextos de las otras actividades es que en ésta, el estudiante no puede ver el objeto al que le asocia las expresiones matemáticas, sino que debe plantearla manteniendo las condiciones e información suministrada. Esta situación hizo que en el nivel referencial se identifiquen debilidades en los procedimientos.

4.4.2. Resultados para el nivel referencial

Mientras el estudiante identifica las variables y función a optimizar del contexto, todo va bien. La mayoría plantea el esquema inicial (identificar variables y función informal a optimizar: inicios del *modelo de*) del proceso a aplicar. Infortunadamente en la segunda parte de la solución del problema, es decir, cuando el estudiante debe plantear el modelo donde debe incluir además una restricción en la cantidad de chocolatinas y mentas que entran en la promoción, el estudiante no se desenvolvió satisfactoriamente.

Aunque el estudiante hace sus propias representaciones y aplica procedimientos de manera correcta, las funciones que usa para ello no son correctas. Ello hace concluir que tiene clara la parte procedimental, pero no es igual la parte analítica del proceso. No logra relacionar el contexto con las expresiones matemáticas correctas.

Cuando el estudiante debe aplicar el criterio de las segundas derivadas, dado que solo debe plantear una función a optimizar, se ven buenos resultados (57 %). Pero cuando va a usar multiplicadores de Lagrange, debido a que debe incluir también una restricción, no se tuvieron buenos resultados (29 %).

Aunque el planteamiento del modelo de optimización no fue el mejor, el estudiante relacionó correctamente los valores encontrados con las respuestas de contexto (71 %).

4.4.3. Resultados para el nivel general

Después del planteamiento de los dos modelos que involucra el contexto, el estudiante tiene que centrar la atención en el manejo de las variables y funciones surgidas y proceder a encontrar una respuesta al contexto pero fuera del contexto mismo. Las derivadas y ecuaciones que surgen debe manejarlas superando la referencia al contexto dado. Aun así, las respuestas que encuentra no solo debe aceptarlas como optimización de la función planteada sino que debe transmitirlas como respuesta a las necesidades de Julián y Pedro. Es decir, complementa el nivel referencial y llega al nivel general.

Es claro, después de la solución, que el modelo planteado es para el estudiante un *modelo para* optimizar una función en dos variables o una función en dos variables sujeta a una restricción. Aunque el 86 % vio la necesidad de plantear una función a optimizar y una restricción, solo el 14 % lo hizo correctamente.

Conclusiones de la actividad *Venta de dulces*

Con la actividad se reitera la necesidad de manejar contextos prácticos en el desarrollo de los temas del curso. Para este contexto en particular se nota la debilidad, por parte de los estudiantes, en el planteamiento de modelos matemáticos que describen la situación. Solo el 29 % de los estudiantes logró representar la cantidad de dinero en función de la cantidad de chocolatinas y mentas vendidas. La dificultad encontrada en esta actividad se dio debido a que la función en dos variables a plantear no se obtiene de un objeto gráfico o de una situación explícita que le permita reconocer las operaciones que involucrarán a las variables, sino que debe el estudiante incluir las operaciones y expresiones necesarias del texto presentado.

Aunque se dieron dificultades en el planteamiento de los modelos, la mayoría de los estudiantes (el 57 %) demuestra manejar los métodos de optimización (criterio segundas derivadas y multiplicadores de Lagrange). Se concluye entonces, para este tema específico, que la necesidad mayor se da en la interpretación del texto para llegar a una correcta identificación de variables y funciones a optimizar.

Los resultados encontrados, sobre todo por la dificultad en el planteamiento de la función a optimizar, debilitaron las posibles conclusiones en el marco de la optimización de contextos reales o cotidianos para el estudiante. Teniendo en cuenta que las representaciones matemáticas de objetos que el estudiante puede ver fueron más precisas, esta actividad sugiere iniciar la optimización usando objetos que él pueda palpar o conozca directamente. Seguro en ese caso el modelo o modelos planteados serán más precisos y permitirán extraer conclusiones más certeras.

Con relación a los resultados de aprendizaje planteados en la página 104, puede concluirse que no se alcanzaron en su totalidad. El estudiante identifica la función a optimizar y su restricción, pero no las representa en términos de las variables. Sí plantea modelos en la dirección de las segundas derivadas parciales y los multiplicadores de

Lagrange y conoce el procedimiento de solución, pero infortunadamente dado que las funciones planteadas no son correctas, los resultados obtenidos tampoco lo son.

4.5. Actividad: Florero de partes cuadráticas

El tema central en esta actividad es el de integración múltiple asociado a la interpretación de volumen de un sólido y de área superficial. Ese tema se complementa con la repetición de identificación de expresiones matemáticas de objetos, para este caso, relacionadas con las expresiones cuadráticas básicas.

Tabla 5. Indicadores de cumplimiento. Actividad florero de partes cuadráticas

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Ubica el florero de manera clara en el espacio coordenado	parte inicial
	NS2. Relaciona de manera correcta cada parte del florero con partes de alguna de las superficies básicas estudiadas	parte inicial y final
NR	NR1. Identifica la expresión matemática que representa las partes del florero	parte inicial
	NR2. Identifica cuál es el volumen que debe encontrar para medir el grosor del florero	parte inicial
	NR3. Identifica cuál es el área que debe encontrar para medir la cantidad de metros cuadrados a recubrir con pintura	parte final
NG	NG1. Plantea correctamente las integrales que miden la cantidad de material	parte inicial
	NG2. Plantea correctamente las integrales que miden la cantidad de metros cuadrados a recubrir con pintura	parte final

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad. Las líneas siguientes describen, según nivel, los resultados encontrados:

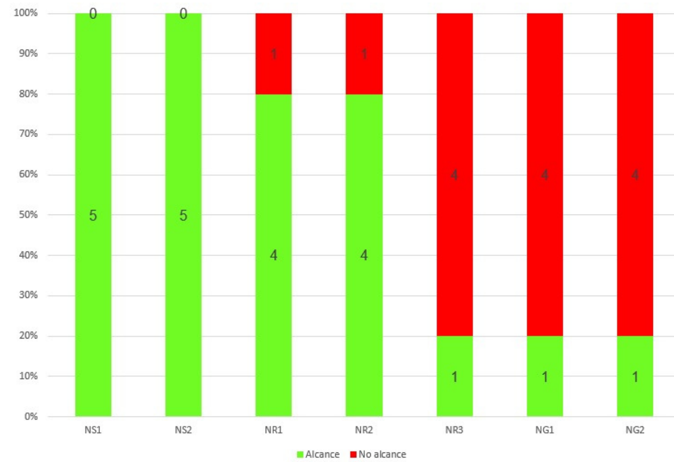


Figura 28. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad florero de partes cuadráticas.

4.5.1. Resultados para el nivel situacional

Los temas centrales para el uso de las integrales múltiples en el curso de cálculo multivariado son los de volumen y área superficial. Los contextos que se le entregan al estudiante, en la gran mayoría de los textos usados son del tipo *encuentre el volumen del sólido acotado por arriba por* ..., *por los costados por* ... *y por abajo por* ...; claramente esos contextos parece no estimular o motivar al estudiante a solucionar esas situaciones con el debido interés.

Pensando en darle un espacio de motivación al estudiante en este tema en particular, esta actividad le presenta un objeto de la realidad para que modele y encuentre, con el uso de integrales, la cantidad de material usado para tener el objeto y el área que debe cubrir si se quiere, por ejemplo, pintarlo. Se reitera en la construcción de las expresiones matemáticas necesarias que usará como integrandos o límites de la integral dependiendo si usará integrales dobles o triples. Este tema de las expresiones matemáticas para las funciones está presente en todas las actividades propuestas debido a, como se ha dicho antes, la forma en que se trabaja en el cálculo.

Es conocido que las formas de las superficies cuadráticas básicas (esfera, paraboloide, cono, elipsoide, hiperboloides) están presentes en muchos objetos cotidianos que probablemente pasan desapercibidos. Este contexto, entonces, busca seguir familiarizando a los estudiantes con la matemática desde la visión de su quehacer o de su cotidianidad.

La actividad involucra al estudiante en el contexto, por medio de la solución a una necesidad física (encontrar una cantidad de material y un área para pintar) para el objeto de referencia, para luego convertir esa necesidad física, por medio de procesos, en una necesidad intelectual, es decir, pasar del mundo de la vida al de los símbolos.

La actividad se desarrolló en grupos y la totalidad de grupos asimilaron el contexto y la información involucrada, de forma satisfactoria, como lo muestra la gráfica anterior.

4.5.2. Resultados para el nivel referencial

Las actividades han insistido en la identificación del espacio coordenado con relación a los objetos realistas trabajados. La repetición involucrada ha dado buenos resultados y para esta actividad la totalidad de los trabajos mostraron una ubicación correcta del florero en $\mathbb{R}^3$.

El inicio de la matematización vertical, al esquematizar la posición del objeto con el fin de incluir las variables que estarán presentes en las expresiones matemáticas que usará para integrar, fue un éxito por parte del estudiante. El estudiante incluye su propia representación del objeto y sus dimensiones.

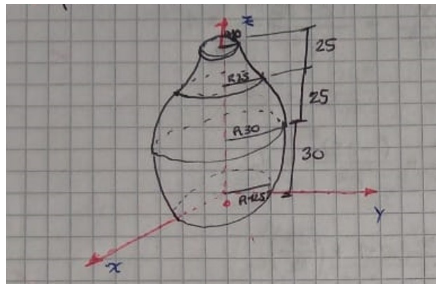


Figura 29. Ubicación en $\mathbb{R}^3$ del florero por parte del estudiantes.

En la identificación de las partes del florero, como superficies cuadráticas y de las regiones sólidas a calcular su volumen, también se tuvieron buenos resultados, pues el 80 % de las entregas mostraron comprender el requerimiento.

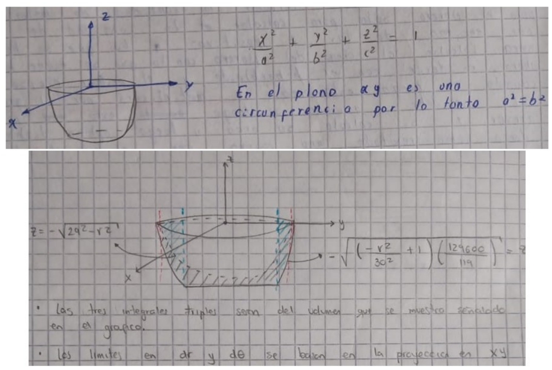


Figura 30. Identificación partes del florero como superficies cuadráticas.

Aunque se esperaba que la identificación del área a medir fuese comprensible, infortunadamente los resultados mostraron que el estudiante no logró hacerlo. Solo el $20\,\%$ mostró un resultado satisfactorio.

4.5.3. Resultados para el nivel general

Los resultados obtenidos en este nivel no fueron los esperados. Los estudiantes no lograron describir por medio de integrales los volúmenes y áreas a medir. Aunque identificó las variables y espacios a medir, la matemática que debía involucrar y que depende de la forma del objeto y el dominio de la variables en $\mathbb{R}^3$, no estuvo presente de manera correcta. Los problemas se dieron en identificar la región del plano xy que lleva a una forma específica de las superficies cuadráticas básicas involucradas.

Con los resultados encontrados no se logra identificar que el estudiante generaliza el hecho de que la región de integración en el plano xy da la forma lateral al objeto cuando el techo y la base no se juntan. La actividad muestra debilidad en alcanzar el nivel general. Los indicadores de cumplimiento en este nivel se alcanzaron solo en el 20 % de los casos.

Conclusiones de la actividad *Florero de partes cuadráticas*

En esta actividad los estudiantes, en su totalidad, ubicaron de manera correcta el florero en el espacio coordenado y relacionaron cada parte del florero con una superficie cuadrática básica.

El 80 % de las respuestas permite ver que los estudiantes relacionan de manera correcta una parte del florero con una superficie cuadrática básica y con su respectiva expresión matemática.

Los resultados muestran que es claro para el estudiante qué parte le suministra el volumen buscado. Sin embargo, el planteamiento de las integrales, es decir, la identificación de los límites de integración no es clara. Solo el 20 % de las respuestas muestran una integral correctamente planteada.

Entonces, puede concluirse que se alcanzó los resultados de aprendizaje planteados (ver página 104) para la actividad, salvo el de *identifica las regiones del plano xy que define las partes del florero* y *Plantea integrales múltiples que representan volumen o* *área superficial*.

4.6. Actividad: Diábolo de dos palos

En esta actividad se toma como referencia un objeto que involucra más componentes, es decir, se involucran más superficies para conformarlo. Sigue insistiéndose en la expresión matemática que lo representa pero se pide también calcular el volumen y área superficial. La actividad la respondieron 12 estudiantes en cinco grupos de trabajo.

Tabla 6. Indicadores de cumplimiento. Actividad diábolo de dos palos

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Comprende el contexto planteado	1
	NS2. Relaciona de manera correcta, según la ecuación, cada parte del diábolo con partes de alguna de las superficies cuadráticas básicas estudiadas	1
NR	NR1. Identifica la expresión matemática que representa las partes del diábolo	1
	NR2. Identifica correctamente la región del plano xy que define cada parte del diábolo	$1, 2$
	NR3. Hace explícita la restricción de las variables para definir cada parte del diábolo	1
	NR4. Relaciona correctamente el valor de la integral con un volumen	1
	NR5. Relaciona correctamente el valor de la integral con un área	2
NG	NG1. Plantea correctamente las integrales que miden un volumen	1
	NG2. Plantea correctamente las integrales que miden un área superficial	2

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad.

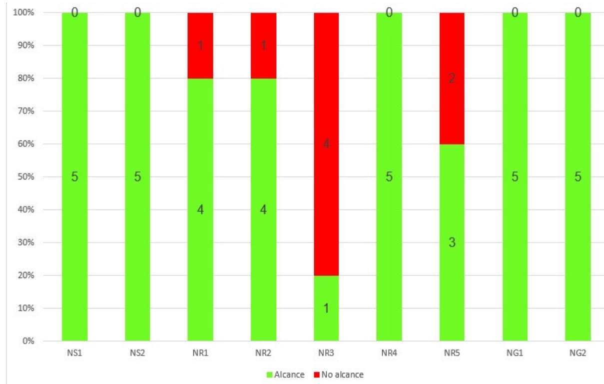


Figura 31. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad diábolo de dos palos.

4.6.1. Resultados para el nivel situacional

Se parte con un objeto, el diábolo de dos palos, que el estudiante seguramente ha visto en la Facultad o en algún parque. La guía deja ver también dónde y por qué encontrarlo.

Figura 32. Diábolo de dos palos[1]

Sin alejarse de las superficies cuadráticas básicas se describe el objeto unificando para el grupo la forma y dimensiones de las partes que lo conforman.

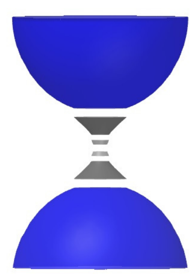


Figura 33. Partes del diábolo.

[1] La primera imagen es tomada de https://es.dreamstime.com y la segunda de http://spanish.visitbeijing.com.cn.

En este nivel, el estudiante comprende con claridad las formas involucradas en el objeto y comprende también que lo que se busca es medir su volumen y área superficial. El 100 % de los grupos asimiló correctamente el contexto.

4.6.2. Resultados para el nivel referencial

La unión de una parte a otra hace que la región de integración esté sujeta a las dimensiones de una y otra. Por tanto, el modelo a plantear por medio de las integrales múltiples depende del contexto propuesto. Las dimensiones y características deben verse reflejadas con la ubicación de los ejes coordenados definida para todos los estudiantes.

Los estudiantes plantearon su *modelo de* tomando, como debía ser, las variables x, y y z para obtener las representaciones de las partes del diábolo o de las regiones del plano xy para plantear las integrales. Se nota que el estudiante tiene claras las formas canónicas de las superficies cuadráticas involucradas al igual que las integrales múltiples que llevan al volumen o área superficial.

El modelo matemático planteado está formado por la región que describe cada parte del diábolo y la integral que calcula el volumen o área superficial. Aunque al plantear las expresiones matemáticas de cada parte del objeto, el estudiante no restringe las variables para acotar la parte involucrada, en el planteamiento de la integral sí es claro que está acotando la parte y procede a medir el volumen o área superficial. Por tanto puede concluirse que un resultado obtenido en la actividad es la identificación de la región del plano que describe la parte del objeto.

El estudiante relaciona también la integral o el valor encontrado con el significado de volumen o área que está midiendo.

4.6.3. Resultados para el nivel general

El estudiante ve el diábolo en el espacio coordenado como un objeto acotado formado por algunas superficies, es decir, se aleja del contexto y entra en el nivel general sin dificultad. Planteó las integrales y su solución de manera clara en términos de la necesidad propuesta. Puede identificarse que la solicitud realizada en la actividad de calcular una cantidad de material, el estudiante la convirtió en una integral a solucionar.

Los resultados muestran que con la actividad el estudiante llega al nivel general dando solución a la necesidad realista planteada inicialmente. El 100 % de los participantes muestran correctamente las integrales involucradas para dar respuesta al contexto.

Conclusiones de la actividad *Diábolo de dos palos*

Para iniciar los cálculos necesarios el estudiante debe representar de manera analítica cada parte del diábolo. El 100 % de los estudiantes representaron la parte elipsoide y la parte cónica, pero solo el 40 % la parte hiperboloide. Esto se debió a que el hiperboloide estaba truncado por encima de su parte media, eso el estudiante no identificó con claridad.

Para plantear las integrales es importante identificar la correcta región de integración. Los resultados muestran que el estudiante se enfrenta a dificultades si el sólido no inicia en el plano xy; así entonces, identifica correctamente la región de integración cuando la base del sólido a medir está en el plano xy. El 100 % de las respuestas identificaron la región de integración para el cono truncado y el 80 % para las otras partes del diábolo.

El estudiante identifica correctamente que el valor que encuentra al calcular la integral respectiva lo puede asociar con el volumen o área superficial del objeto, interpretando así la solución del problema en el contexto planteado.

Con esos resultados, puede concluirse que el estudiante alcanza los resultados de aprendizaje planteados para la actividad (ver página 105).

4.7. Actividad: Reloj de arena

Esta actividad fue la última aplicada en el proceso. Con ella se buscó trabajar tres temas importantes del curso y que se desarrollan en tiempos diferentes del semestre: la representación analítica de superficies, optimización por medio de Multiplicadores de Lagrange y las integrales múltiples (para volumen y área superficial).

Tabla 7. Indicadores de cumplimiento. Actividad reloj de arena

Nivel	Indicadores de cumplimiento	Numeral
NS	NS1. Ubica el reloj o las partes del reloj de manera correcta en el espacio coordenado	$4a)$
	NS2. Comprende la necesidad de optimizar al tener varias ampollas que satisfacen la restricción	$4a)$
	NS3. Identifica la función a optimizar y restricción en el método de multiplicadores de Lagrange	$4b)$
NR	NR1. Identifica y nombra las incógnitas del contexto	$4a, b)$
	NR2. Construye la expresión matemática que representa la ampolla del reloj	$4a)$
	NR3. Plantea la función a optimizar y restricción en términos de las incógnitas	$4b)$
NG	NG1. Plantea correctamente las integrales con las que identifica la función a optimizar y la restricción	$4a,\ b)$
	NG2. Plantea el modelo de optimización por multiplicadores de Lagrange	$4b)$

La siguiente gráfica resume el comportamiento en el número de respuestas según se alcanzó o no los indicadores propuestos para la actividad. Las líneas siguientes describen, según nivel, los resultados encontrados:

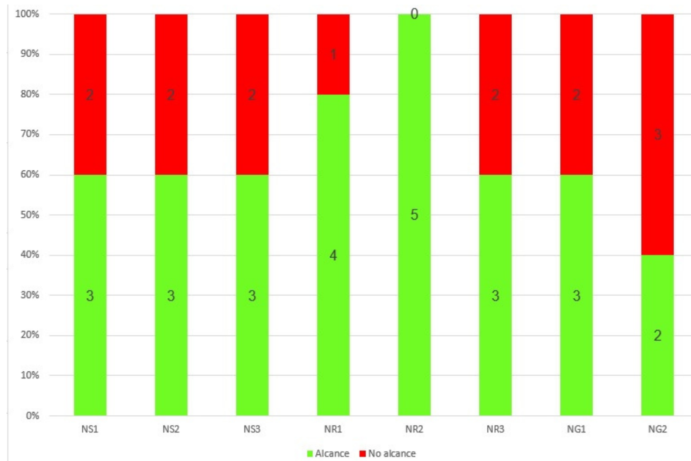


Figura 34. Número de respuestas en las que se alcanza los indicadores de la actividad reloj de arena.

4.7.1. Resultados para el nivel situacional

Los ítems del uno al tres de la actividad, buscan contextualizar al estudiante con el objeto tomado en esta oportunidad. El estudiante fija el tiempo que desea medir con su reloj como información propia y fija también la densidad de la arena que va a usar. La cantidad de arena necesaria para hacer los cálculos que llevan a las respuestas de la actividad fue claramente manejada por los 11 estudiantes que trabajaron en cinco grupos.

Aunque no todos identificaron (solo el 60 % lo hizo) la ampolla del reloj en el espacio coordenado, si le dieron un manejo adecuado a las variables. El 60 % de los trabajos revisados muestran que el estudiante comprende que puede tener ampollas de diferente tamaño pero con el mismo volumen. Se identifica entonces la necesidad de hacer un proceso de optimización. También el 60 % de los grupos conoce qué debe optimizar y bajo qué restricción.

A medida que va avanzando en la solución de la actividad debe afrontar temas distintos del curso, desde encontrar la ecuación de los paraboloides para las ampollas en términos de sus dimensiones, pasando por plantear integrales dobles o triples, hasta modelar un problema de optimización.

4.7.2. Resultados para el nivel referencial

El 80 % de las respuestas dejan ver que el estudiante tiene claro que debe incluir variables y lo hace correctamente. Además, dado que la función a optimizar depende de la forma de la ampolla, es claro para el 100 % de los trabajos entregados que debe encontrarse (y lo hace correctamente) una expresión para la ampolla del reloj.

Por otro lado, solo el 60 % de las respuestas muestra de manera explícita la función a optimizar y la restricción. Quienes no mostraron estas dos expresiones, por un lado ignoraron la restricción y por otro lado calcularon el volumen de la ampolla completa en lugar de una ampolla truncada.

4.7.3. Resultados para el nivel general

El estudiante identificó que necesitaba una función a optimizar y que ella debía conseguirse por medio de una integral. Infortunadamente el planteamiento de la integral no fue del todo preciso y solo tres de cinco grupos lograron plantear bien los límites de integración que les llevaron a las expresiones correctas.

Aunque el estudiante identificó que las integrales son la herramienta necesaria para responder requerimientos asociados con volúmenes o áreas superficiales, solo el 40 % de los trabajos plantearon correctamente el modelo de optimización solicitado. Los errores cometidos tuvieron que ver con el planteamiento incorrecto de las integrales múltiples, en lo relacionado con los límites de integración.

Conclusiones de la actividad *Reloj de Arena*

Inicialmente el estudiante tiene que definir la cantidad de arena, según su densidad, en la ampolla y teniendo en cuenta el tiempo a medir. También debe precisar el volumen total de la ampolla. El 100 % de las respuestas encontró la relación correcta entre volumen y tiempo a medir.

Para plantear el modelo de optimización propuesto es necesario contar con el volumen y el área superficial de la ampolla y para ellas, se necesita su representación analítica.

Infortunadamente plantear la expresión analítica en términos de la profundidad y radio desconocidos produjo dificultades para los estudiantes, pues solo el 40 % de las respuestas fueron correctas. Sin embargo, en las integrales mejoraron los resultados y el 60 % lo hizo correctamente.

Esta actividad, dada la dificultad en la solución del sistema de ecuaciones generado al aplicar multiplicadores de Lagrange, se le pide a los estudiantes que solo planteen el modelo, más no que lo resuelvan. Los estudiantes manifestaron que el haber estudiado multiplicadores de Lagrange hacía ya varios días del momento de esta actividad generó algunas dificultades; aun así, el 40 % de las respuestas mostraron un correcto planteamiento del modelo propuesto.

Con relación a los resultados de aprendizaje planteados en esta actividad, puede concluirse que se cumplieron tres de cuatro, a saber, se cumplió que el estudiante identifica la magnitud a optimizar, representa cantidades involucradas en el contexto en términos de las incógnitas y relaciona la interpretación de las integrales con las magnitudes involucradas. Puede decirse que fue difícil para el estudiante plantear el modelo completo de multipliadores de Lagrange para optimizar.

4.8. Conclusiones del Capítulo 4

A lo largo del desarrollo de las actividades buscó identificarse el alcance de los niveles situacional, referencial y general de la matematización en la Educación Matemática Realista, pero todo ello en el marco de una motivación a que el estudiante asuma las actividades de forma responsable y con interés. Una conclusión que vale la pena destacar entonces tiene que ver con la motivación. Los estudiantes se mostraron motivados al enfrentarse a situaciones que pueden acercarse a su quehacer diario, futuro quehacer profesional o su cotidianidad en general. Los estudiantes se sintieron atraídos por el tipo de actividades y para la gran mayoría fue novedoso, en el sentido de no trabajar con contextos realistas en otros cursos.

Con relación a los niveles de la matematización puede concluirse:

4.8.1. Nivel situacional

En este nivel, los estudiantes mostraron asumir como propio cada uno de los contextos presentados. Los indicadores de cumplimiento NS propuestos se satisficieron por encima del 80 % en la mayoría de las actividades. En las primeras actividades se identificó que aunque los estudiantes comprendieron la situación presentada, no llevaron la información involucrada al espacio coordenado. Eso dificultó el alcance de los indicadores en el nivel referencial. Después de la tercera actividad eso se superó.

Se identificó que si el contexto realista involucra un objeto que el estudiante puede ver, imaginarse fácilmente, o tenerlo a la mano, se obtienen mejores resultados y se alcanza el nivel situacional de mejor manera que cuando no se cuenta con un objeto explícito. Con ello, en el marco de la matemática en contexto puede concluirse que se cumplieron las etapas I y II que se tomaron para el nivel situacional.

4.8.2. Nivel referencial

Con este nivel se inicia la matematización vertical. Se busca identificar si el estudiante logra esquematizar el problema propuesto. Los resultados de las actividades muestran que:

1. Entre el 59 y 100 % de los participantes relacionan el objeto con puntos del espacio coordenado por medio de expresiones matemáticas, llevando al modelo deseado. El hecho de que no se tenga un objeto cotidiano hizo que sus resultados no fuesen los deseados; eso ocurrió en la actividad de optimización.
2. El estudiante siguió los procedimientos esperados para llegar a las respuestas de los ítems planteados. El método de multiplicadores de Lagrange para optimizar fue el único que no fue seguido por la gran mayoría.
3. En las actividades se esperaba una solución matemática del contexto realista propuesto. En la mayoría de las actividades se plantea la necesidad de representar matemáticamente un objeto para luego, por ejemplo, calcular su volumen, o su área superficial, o usarla para construir una restricción o función a optimizar. En las dos primeras actividades fue necesario direccionar esa representación

matemática, pero en las siguientes se buscó que el estudiante lo hiciera por su cuenta. Con base en las actividades posteriores a la segunda, puede concluirse que el estudiante se acercó significativamente a la solución matemática.

4.8.3. Nivel general

En este nivel se busca que el estudiante identifique un *modelo para*, es decir, que identifique que existen aspectos que puede generalizar y usar en contextos o problemas homólogos. Así entonces, los resultados de las actividades muestran que:

1. Con relación a las ubicaciones en el espacio coordenado, el estudiante identificó que puede ubicarse no solo en el primer octante sino en cualquiera usando signos en las distancias recorridas (el 63 % lo hizo). Además, en el 52 % de las respuestas el estudiante generalizó posiciones viéndolas en las forma (x, y, z).
2. El estudiante identificó la necesidad de representar matemáticamente el objeto de estudio, pues es la base para describir o encontrar sus características. A lo largo de las actividades, ubicó satisfactoriamente el objeto en el espacio coordenado y usó las variables para representarlo (por encima del 80 %).
3. Los objetos usados en las actividades son acotados (un hiperboloide truncado, cono truncado, hemisferio, etc). Su representación está completa si se restringen las variables. Únicamente, alrededor del 20 % hizo una restricción correcta o explícita de las variables.
4. En el caso de las integrales múltiples, aunque identificó dónde debería usarlas, no las planteó correctamente en la primer actividad (florero de partes cuadráticas, 20 %), pero sí lo hizo en las dos siguientes (diábolo y reloj de arena), lográndose un porcentaje de respuestas correctas entre el 60 y 100 %.

CAPÍTULO 5. CONFRONTACIÓN ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI

Después de tener tanto el análisis a priori y a posteriori, en este capítulo se muestra el cotejo entre los dos para la respectiva validación de las hipótesis tanto de la ingeniería didáctica como de la investigación.

5.1. Hipótesis de la ingeniería

5.1.1. Hipótesis HI1: Los objetos cotidianos (realistas) incentivan el trabajo de los estudiantes.

Los comentarios de los estudiantes sobre las actividades (ver página 116), las representaciones propias (ver páginas 114, 121 o 140) y el interés mostrado en las retroalimentaciones de las actividades dejan concluir que los estudiantes trabajaron con entusiasmo y se vieron motivados por los temas y situaciones propuestas.

5.1.2. Hipótesis HI2: El estudiante relaciona de mejor manera el espacio coordenado con las superficies si éstas vienen de objetos cotidianos para él.

Los resultados de todas las actividades, salvo los de la número cuatro, permiten concluir que el desarrollo de los temas del curso, como medir un volumen o un área superficial, se completa de mejor manera cuando el estudiante parte de un objeto real o conocido para él. Si por ejemplo se le pide *encontrar el volumen del sólido acotado por* $z = 5 - x^2 - y^2$ *y por* $z = 4x^2 + 4y^2$, el primer obstáculo con el que se enfrenta el estudiante es identificar o darse una idea de la forma del sólido y eso hace que no sienta seguridad en avanzar. Cuando se le entrega la figura en lugar de las expresiones, avanza más fácil, la relaciona con superficies básicas, encontrando las expresiones matemáticas y procediendo a encontrar solución al interrogante planteado.

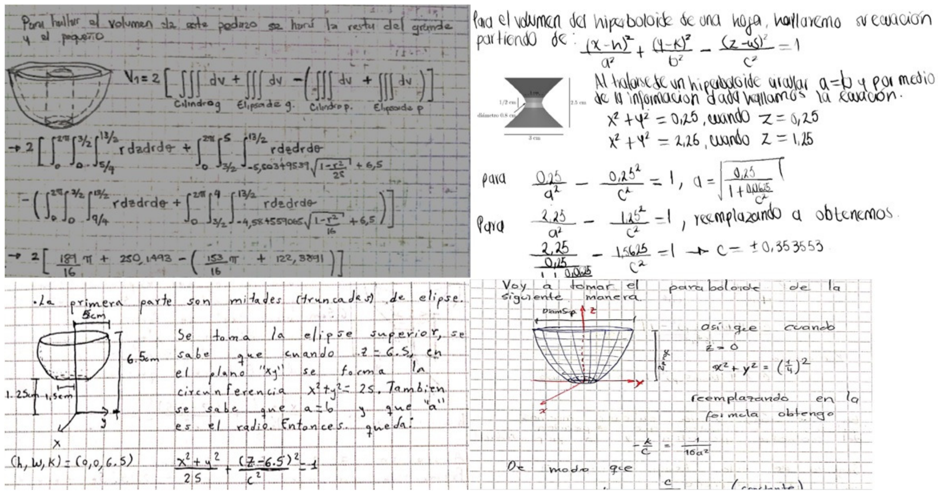


Figura 35. El espacio coordenado y procesos de estudiantes.

La actividad cuatro generó dificultades considerables en los estudiantes. Desde el inicio, la actividad obliga a contar con una función a optimizar y luego con una restricción. El estudiante debe plantearlas de acuerdo a la información suministrada pero esa información no depende de algún objeto o superficie básica o conocida. Las expresiones que el estudiante planteó no fueron las correctas y aunque siguió el método para solucionar el problema sus respuestas no fueron las adecuadas.

En definitiva, el no contar con un objeto visible para él, impidió el correcto manejo de las variables que llevan a las expresiones en varias variables, en relación con el espacio coordenado.

5.1.3. Hipótesis HI3: Los contextos realistas despiertan el interés del estudiante en identificar expresiones matemáticas de los objetos o regiones involucrados

Las hipótesis con las cuales se inicia el análisis a priori (ver página 100) sobre la presencia de las funciones en dos variables o expresiones en tres variables, es la razón para plantear las necesidades de las expresiones matemáticas. Para el estudiante es claro que debe contar con una función (o una expresión matemática) para avanzar en la actividad. La motivación que se despertó en el estudiante, al recibir el contexto, aumenta la probabilidad de que se mantenga trabajando y el siguiente paso es conseguir las expresiones que necesita. Los resultados muestran que esto así sucedió, dando vía libre a la hipótesis HI3.

5.1.4. Hipótesis HI4: El relacionar los objetos (superficies) seleccionados con la matemática estudiada en el curso, estimula el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes

Como lo muestran los resultados (capítulo 4), de manera general puede identificarse que el estudiante:

1. Asimiló satisfactoriamente los contextos realistas,
2. Construyó sus propias representaciones de la situación propuesta,
3. Relacionó el espacio coordenado con el objeto o sus características,
4. Identificó qué procesos debía seguir para obtener una respuesta,
5. Aunque en menor proporción, generalizó (en el sentido de alcanzar el nivel general de la matematización) la situación planteada.

Con ello, puede afirmarse que el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes parte de la relación de los objetos cotidianos y la matemática involucrada en sus características, o en las necesidades identificadas que tienen que ver con éste.

5.2. Hipótesis de la Investigación

Aunque el estudiante esté cursando una asignatura de tercer semestre (o más, en muchos casos), todavía se pregunta para qué le sirve lo que le enseñan en matemáticas en su carrera de ingeniería. La forma como el estudiante de ingeniería afronta los cursos de matemáticas, no es la misma como lo hace un estudiante de matemáticas o física. El de ingeniería llega a su carrera con la visión de estar en laboratorios, hacer visitas técnicas a empresas, manipular motores, maquinaria, entre otras. La visión no siempre es la de llegar a fundamentar sus conocimientos en ciencias básicas.

En esta investigación se planteó que la EMR ayudará, sino a responder, a acercarse a una respuesta a esa inquietud. Los resultados (capítulo 4) y análisis a posteriori (sección 3.5.4) de la aplicación de la propuesta de actividades muestran que la hipótesis de la investigación (página 9) es válida desde el punto de vista de la motivación, del interés en participar en clase, de la obtención de buenos resultados y del desarrollo de habilidades. Aunque la disminución de la deserción puede estar implícita conociendo la obtención de buenos resultados, la precisión en su conclusión puede tomar un tiempo y necesita de conocer información de los resultados generales de los participantes (por ejemplo, estado prueba académica, ver página 6).

CONCLUSIONES

Esta investigación permitió ampliar la literatura existe en lo relacionado con trabajos propuestos en educación superior y en particular en educación en cálculo en varias variables.

Los resultados encontrados en esta investigación van en la dirección de los resultados encontrados en investigaciones existentes en educación superior y en cálculo multivariado. Se apoya y fortalece las recomendaciones de trabajos internacionales en el sentido de no asumir que el cambio de 2D a 3D es automático y de que es conveniente, para el aprendizaje del estudiante, contar con objetos reales en el desarrollo de los temas del curso.

La propuesta de actividades realistas de esta investigación se aleja de la enseñanza tradicional del cálculo en varias variables, en particular, y del cálculo en general. Las actividades realistas, propuestas desde la visión de realidad de esta investigación, no necesitan docentes con estudios superiores para ampliarlas, complementarlas o ponerlas en práctica en el aula de clase.

La fase cuatro, sección 3.5.4 y el capítulo 4 describen los procesos seguidos por los estudiantes, las debilidades y características de esos procesos y la forma como ellos afrontan las situaciones matemáticas planteadas, identificando el desarrollo de su pensamiento matemático. Los resultados de aprendizaje e indicadores de cumplimiento de las actividades se satisficieron en una buena proporción en la mayoría de los casos.

La investigación deja ver que los estudiantes asumen con claridad los contextos realistas al pertenecer a su cotidianidad. Representan correctamente esos contextos a su manera e identifican los procesos matemáticos a seguir para responder los interrogantes presentados. Sin embargo es necesario fortalecer la parte teórica de los diferentes temas, desde la visión realista, pues es débil por momentos la generalización de las situaciones expuestas.

Aunque la macro-ingeniería propuesta termina siendo demasiado amplia, al abarcar varios temas del curso, y su análisis a posteriori se torna débil en algunos aspectos por su misma amplitud, es posible concluir, de manera general, que la EMR es razón justificada para motivar a los estudiantes y poder investigar en la enseñanza y aprendizaje del cálculo en varias variables.

La repetición (razonamiento repetido), desde la visión de la propuesta DNR, hizo que los estudiantes se familiarizaran de manera firme con las expresiones matemáticas que representan algún objeto. Logró que el espacio coordenado se convierta en una herramienta útil y necesaria para conseguir expresiones con las cuales se pueda aplicar procesos como los de integración múltiple.

El trabajar con situaciones que involucran superficies cotidianas para el estudiante hizo que la visualización no sea simplemente el hecho de ver o contemplar el objeto, sino también el de representarlo, relacionarlo con expresiones matemáticas, transmitir información de él, medir sus características, entre otras acciones. Se logró la utilización de nociones matemáticas del cálculo multivariado en ámbitos gráficos, numéricos, algebraicos y de cálculos.

RECOMENDACIONES

En el marco de la propuesta de esta investigación, y teniendo en cuenta los resultados encontrados y análisis realizados es válido lo siguiente:

1. Recomendar que se profundice en ingenierías didácticas desde el punto de vista de los temas, lo que en esta investigación se llamó micro-ingenierías. Desarrollar investigaciones en EMR por temas de estudio del curso.

2. La macro-ingeniería construida en este trabajo, se vería fortalecida con micro-ingenierías más robustas. Se recomienda hacer investigaciones en donde se amplíen las micro-ingenierías.

3. Esta propuesta centra la atención en la EMR desde el conocimiento aplicado, desde el planteamiento de contextos aplicados y no necesariamente en la parte teórica (ver página 68). Los estudiantes asimilaron correctamente los contextos, pero tuvieron dificultades, en algunos casos, en desarrollar la parte teórica y la generalización. Se recomienda, por ello, desviar la atención con el uso de contextos realistas, por lo menos en parte, hacia la teoría involucrada en los temas.

4. Las altas tasas de deserción y mortalidad en los cursos de matemáticas, fueron, entre otras, justificaciones de esta investigación. Los resultados encontrados no permiten hacer conclusiones del todo precisas en estas direcciones. Se recomienda profundizar en el nivel de disminución de estas variables con investigaciones como la realizada en esta tesis.

5. Se recomienda seguir profundizando en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de cálculo en varias variables, en especial con enfoques diferentes a los niveles de matematización de la EMR.

6. Teniendo en cuenta los resultados no solo de esta investigación sino de algunas incluidas en el estado del arte, con relación a la parte didáctica, se recomienda trabajar objetos reales para los estudiantes, sobre todo en la parte inicial del curso, y no suponer que el paso de 2D a 3D es automático.

BIBLIOGRAFÍA

Abate, M. & Tovena, F. (2012). *Curves and surfaces.* Italia: Springer-Verlag.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes. Iberoamericana, grupo editorial.

Bakar, M. T., Suryadi, D., Darhim, Tonra, W. S. & Noto, M. S. (2018). The association between conceptual understanding and reasoning ability in mathematics: An analysis of DNR-based instruction models. *Journal of Physics: Conference Series*, *1088*, 012107.

Beckmann, C. & Schlicker, S. (1999). A model multivariable calculus course. *PRIMUS*, *9*(3), 226-240.

Bravo-Bohorques, A., Castañeda-Rodríguez, L., Hernández-Yomayusa, H. & Hernández-Hernández, L. (2016). Enseñanza de las matemáticas en ingeniería: modelación matemática y matemática contextual. *Revista Educación en Ingeniería*, *11*(21), 27-31.

Bressan, M., A., Gallego, F., M., Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista, bases teóricas.* Recuperado 23 de octubre de 2018 de http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/. Fundación Grupo Patagónico de didáctica de la Matemática.

Camarena, G. P. (2012). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *7*(10), 183-193.

Camarena, P., Trejo, E. & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11*(especial), 397-424.

Da Silva, M. & Lima, M. (2013). Como formular problemas a partir de exercícios? Argumentos dos licenciandos em química. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *12*(1), 191-208.

Davis, M., Grassl, R., Hauk, S., Mendoza, B. & Yestness. (2009). *Learning proof by mathematical induction.* En Z. M. (Ed.), Proceedings of the 12th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Raleigh, North Carolina: Published electronically.

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2), 1-9.

De Pavia, T. (2006). *Desarrollo de habilidades del pensamiento para la matemática en el contexto de las ciencias.* (Tesis de Maestría) Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Dorko, A. & Weber, E. (2014). Generalizing calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 269-287.

Drobnic Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(5), 1161-1187.

Falk de Losada, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá, Colombia. Universidad Antonio Nariño.

Farnell, E. & Snipes, M. A. (2015). Using the pottery wheel to explore topics in calculus. *PRIMUS*, *25*(2), 170-180.

Flores, R., Valencia, M., Dávila, G. & García, M. (2008). *Fundamentos del cálculo.* México. Editorial Garabatos.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. New York: Kluwer Academic Publishers. (A. J. Bishop, Ed. Reimpresión 2002).

Glaeser, G. (2017). *Math tools. 500+Aplications in science and qrts.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1/3), 111-129.

Guzmán, C., Durán, D., Franco, J., Castaño, E., Gallón, S., Gómez, K. & otros. (2009). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana. Metodología de seguimiento, diagnóstico y elementos para su prevención.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia, Universidad de Antioquia.

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 487-500.

Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 893-907.

Holton, D. ((2002). *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Kaplan, S. R. (2015). Portfolio analysis for vector calculus. *PRIMUS*, *25*(1), 31-40.

Kashefi, H., Ismail, Z., Yusof, Y. M. & Rahman, R. A. (2012). Supporting students mathematical thinking in the learning of two-variable functions through blended learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *46*, 3689-3695.

Katok, A. & Climenhaga, V. (2008). *Lectures on surfaces: (almost) everything you wanted to know about them.* United States of America: American Mathematical Society. Mathematics Advanced Study Semesters.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid, España. Alianza Editorial.

Koss, L. (2011). Manipulatives for 3-dimensional coordinate systems. *PRIMUS*, *21*(4), 364-376.

Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1999). *Cálculo y geometría analítica.* Madrid: McGraw Hill.

Lee Mcgee, D. & Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(Suppl 2), 357-384.

Londoño-Orozco, G. (2015). La docencia universitaria: realidad compleja y en construcción. Miradas desde el estado del arte. *Itinerario Educativo*, *29*(66), 47-85.

Malaspina, U. & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107-130.

Marsden, J. & Tromba, A. (1991). *Cálculo vectorial*. Estados Unidos de América: Addison-Wesley Iberoamericana.

Martínez, P. R. & Trigueros, G. M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 663-672.

Martínez, P. R., Trigueros, G. M. & Mcgee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 57-86.

Martínez, P. R., Trigueros, G. M. & Mcgee, D. (2017). Students' understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 13-41.

Martínez, R., P. & Trigueros, M., G. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(100687), 1-19.

Martínez-planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365-384.

Mcgee, D., Moore-Ruso, D., Ebersole, D., Lomen, D. & Quintero, M. (2012). Visualizing three-dimensional calculus concepts: the study of a manipulative's effectiveness. *PRIMUS*, *22*(4), 265-283.

MEN. (2018). *Información sobre universidades*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Recuperado 15 de marzo de 2018 de https://spadies3.mineducacion.gov.co/spadiesWeb/page/basicas.

Mohammad-Yusof, Y. & Tall, D. (1999). Changing attitudes to university mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(1), 67-82.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 139-160.

Muro, C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa (Tesis de Doctorado)*. Instituto Politécnico Nacional. México.

Neira, V. (2012). *Modelación de problemas contextualizados usando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: basado en el enfoque de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (Tesis de Maestría)*. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

Olazábal, A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto (Tesis de Maestría)*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Onuchic, L. (1999). *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. (En Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas)*. São Paulo: Editorial UNESP.

Pinto Segura, M., Durán, D., Pérez, R., Reverón, C. & Rodríguez, A. (2007). *Cuestión de supervivencia. Graduación, deserción y rezago en la Universidad Nacional de*

Colombia. Bogotá: Dirección Nacional de Bienestar Universitario, Universidad Nacional de Colombia.

Pochulu, M. & Rodríguez, M. C. (s.f.). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.*

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Quintero, R., Vásquez, D., Estrada, J., Torres, N. & Archbold, C. (2010). *Informe sobre prueba académica y deserción estudiantil en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Bogotá: Oficina para la Permanencia Estudiantil - OPEUD, Bienestar Institucional Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507-515.

Rizo, C. & Campistrous, L. (2009). *Aprende a Resolver problemas aritméticos.* Playa, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Rodríguez, M. (2019). La investigación sobre deserción universitaria en Colombia. Tendencias y resultados. *Pedagogía y Saberes*, *51*, 49-66.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *En: Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 1-27.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1-38.

Şefik, Ö. & Dost, Ş. (2020). The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students. *Journal of Mathematical Behavior*, *57*(100697), 1-22.

Smith, R. & Minton, R. (2007). *Cálculus: early transcendental functions, multivariable*. New York: McGraw Hill.

Sriraman, B. & English, L. (2010). *Theories of mathematics education*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Stillwell, J. (1992). *Geometry of surfaces*. New York: Springer-Verlag.

Stylianides, A. & Stylianides, G. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 237-253.

Thomas, G. (2010). *Cálculo: varias variables*. México: Pearson Educación.

Thompson, P. (2013). *Constructivism in mathematics education*. Encyclopedia of mathematics education. http://cepa.info/2952 (pp. 96-102). Berlin: Springer.

Törner, G., Potari, D. & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 549-560.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction*. The Wiskobas Project. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal: realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *25*, 89-108.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Wangberg, A. & Johnson, B. (2013). Discovering calculus on the surface. *PRIMUS*, *23*(7), 627-639.

Weber, E. & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 44-57.

Zawojewski, J., Magiera, M. & Richard, L. (2013). A proposal for a problem-driven mathematics curriculum framework. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), Article 20.

Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime*, *10*(1), 145-175.

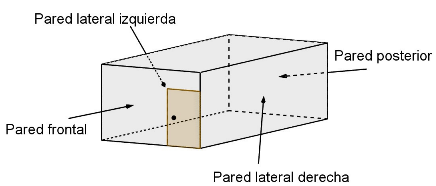
Anexo 1: Actividades

Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Cálculo Multivariado 2021 − II

Actividad 1: Ubiquémonos en nuestra vivienda

Con esta actividad queremos, entre otras cosas, apropiarnos del lenguaje que usaremos más adelante en muchos temas del curso. Un lenguaje que nos ayuda a comprender, visualizar, poner en práctica y complementar el trabajo en el aula y el trabajo como futuros profesionales.

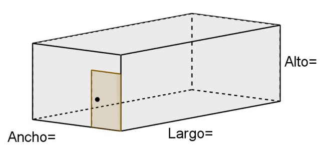
Inicialmente entonces seleccione una habitación[1] *rectangular como en la figura.*



Gráfica 1. Habitación

Ahora sigamos los ítems a continuación, que nos permitirán cumplir nuestro objetivo:

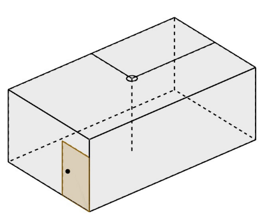
1. Tome las medidas de la habitación: ancho, alto y largo y señálelas en la gráfica.



Gráfica 2. Dimensiones de la habitación

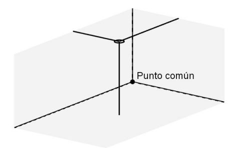
2. Algo que no puede faltar en una habitación es la iluminación artificial. Partiremos de esa necesidad para introducir nuestro nuevo lenguaje. Supongamos que se va a poner un bombillo en el centro del techo de la habitación[2].

   a) ¿A qué distancias de la pared posterior, lateral izquierda y del piso respectivamente estará el orificio[3] por donde se tendrán los cables eléctricos para el bombillo[4]?



Gráfica 3. Ubicación del bombillo

   b) Notemos que en el punto $2a$ las distancias se tienen al movernos perpendicularmente a una pared (o piso), o paralelamente a las otras dos paredes (o piso). Por ejemplo, la distancia desde la pared posterior se mide de manera perpendicular a esa pared y a la vez de manera paralela al piso y a la pared lateral izquierda, como puede verse en los segmentos en la gráfica 3. Ahora bien, notemos que esas paredes y el piso, las tres, tienen un punto en común como se señala en la siguiente gráfica.



Gráfica 4. Punto común de paredes y piso

ese punto está a una distancia de

- 0 metros de la pared posterior,
- 0 metros de la pared lateral izquierda
- y a 0 metros del piso,

es decir, si ordenamos esos valores podemos denotar aquél punto con la terna $(0, 0, 0)$:

Distancia desde

pared posterior — pared lateral izquierda — piso

$(0, 0, 0)$

Gráfica 5. Distancias de referencia

¿Cuál es la terna que ordena, de la manera anterior, las distancias encontradas en el numeral $2a$?

Distancia desde

pared posterior — pared lateral izquierda — piso

(__, __, __)

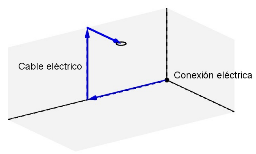
Gráfica 6. Distancias para el techo

   c) Si el bombillo se ubica en la pared frontal a 30 cm del techo y simétrico a las paredes laterales, ¿cuál es la terna de distancias a tener en cuenta para su ubicación?

   d) Si la conexión eléctrica para la habitación estuviese en la ubicación $(0, 0, 0)$ y el cable para el bombillo debe tenderse sobre las paredes y paralelo a ellas (como en la figura siguiente), ¿dónde recomendaría ubicar el bombillo si solo se quiere tener en cuenta la menor cantidad de cable, entre las siguientes ubicaciones? (haga explícito el total de cable usado en cada ubicación y las ternas de distancias en cada caso)

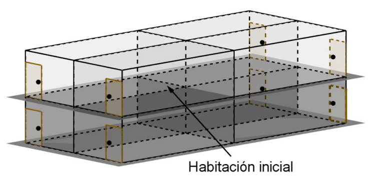
   - en el centro del techo,
   - en la pared lateral izquierda a 30cm del techo y simétrico a las paredes posterior y frontal,
   - en la pared lateral derecha a 30cm del techo y simétrico a las paredes posterior y frontal,
   - en la pared posterior a 30cm del techo y simétrico a las paredes laterales.

[1] o por ejemplo, un laboratorio, la tienda de la esquina, la sala de su casa, el salón de clase, si ellas tienen forma rectangular.
[2] Más adelante lo ubicaremos en otros puntos de la habitación.
[3] Suponemos que el cable eléctrico sale del techo.
[4] Recuerde que las distancias están dadas por el segmento perpendicular a cada pared y el piso.



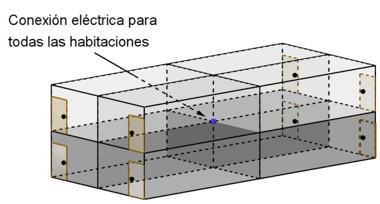
Gráfica 7. Ubicación cable eléctrico

3. Supongamos ahora que su habitación está en un piso superior (segundo, tercer piso) y contigua a otras de las mismas dimensiones[5]. En total se tiene ocho habitaciones, cuatro por piso:



Gráfica 8. Varias habitaciones

Recordemos que en el numeral $2b$ se tomó un punto común y correspondió al punto eléctrico para la habitación. Supondremos que esa ubicación es la conexión eléctrica para todas las habitaciones:



Gráfica 9. Conexión eléctrica para las habitaciones

que como se dijo en la gráfica 5 corresponde a la terna $(0, 0, 0)$.

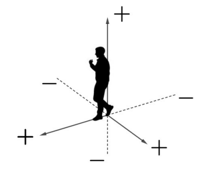
Ahora bien, esa terna nos permitió identificar ubicaciones al interior de la "habitación inicial". Si queremos ubicar un bombillo en otra habitación, tendremos que salir de la "habitación inicial".

Recordemos que para esas distancias se toma como referencia las paredes posterior, lateral izquierda y el piso. Pero eso es equivalente a movernos hacia adelante, a la izquierda y arriba *de la esquina posterior inferior izquierda*, es decir, de la ubicación $(0, 0, 0)$:

Gráfica 10. Al frente, izquierda y arriba de $(0, 0, 0)$.

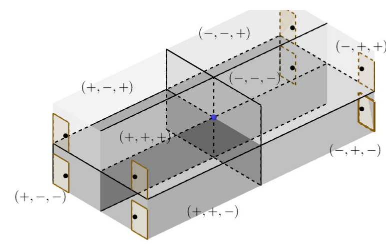
Por tanto, ahora para llegar a las otras habitaciones debemos movernos, además, a la derecha, atrás y abajo de la ubicación $(0, 0, 0)$.

Para diferenciar esos movimientos usaremos signos en las distancias recorridas de la siguiente manera



Gráfica 11. Signos al movernos desde la ubicación $(0, 0, 0)$.

En la siguiente gráfica podemos ver las ternas de signos según la habitación en la que estemos:



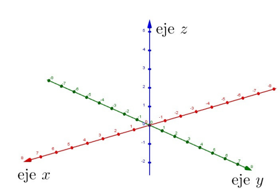
Gráfica 12. Signos para las distancias por habitación

a) Si para cada una de las ocho habitaciones se pondrá un bombillo en el centro de su techo, ¿cuáles son las ternas de distancias en cada caso? (desprecie el grosor de las paredes)

b) ¿Cuáles son las ternas de distancias para un punto a 30cm del techo en la pared de la puerta y simétrico a las paredes laterales para cada habitación?

4. Con la información anterior estamos identificando que podemos ubicar un punto de cada habitación por medio de una terna de números. Para nuestro ejemplo, la descripción de la posición es manejable al tener ocho habitaciones, pero podríamos tener un contexto que involucra más información que puede hacer confusa esa descripción. De manera general, para evitar confusiones en la descripción fijamos un punto y tres rectas para las seis formas de movernos rectangularmente como lo hemos hecho en esta actividad: atrás-adelante, izquierda-derecha, abajo-arriba.

Ahora bien, dependiendo de dónde nos ubiquemos en la habitación, esas direcciones son relativas. Fijamos entonces un nombre para esas rectas (que llamamos ejes), es decir, llamaremos, eje x, eje y y eje z identificando su signo según la posición de la distancia a medir:

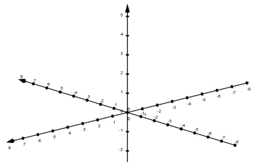


Gráfica 13. Ejes coordenados

Así las cosas, un punto se denota en la forma (x, y, z) respetando el orden de las letras.

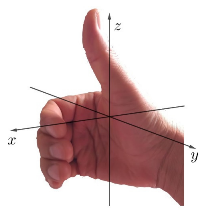
Si nos detenemos a analizar los ejes, puede mantenerse la misma duda, es decir, de saber cuál recta corresponde al eje x y cuál al eje y (el eje z es claro), por ejemplo en:

[5] algo similar a lo que se tiene en una casa de varios pisos o un conjunto residencial.



Gráfica 14. Ejes coordenados

Para precisar esos dos ejes usamos nuestra mano derecha: hacemos que el pulgar de nuestra mano derecha esté sobre la parte positiva del eje z, entonces nuestros dedos del índice al meñique se doblan desde la parte positiva del eje x hacia la parte positiva del eje y:



Gráfica 15. Sistema mano derecha

de esa manera no tendremos dificultad para identificar nuestros ejes y su signo.

Volviendo a nuestras habitaciones de la gráfica 8, supongamos que es una construcción de dos pisos y que nuestra habitación inicial está en el segundo piso, las otras estarán en la parte de atrás, abajo o derecha de ella[6]. Además, la intersección de los ejes x, y y z corresponde con el punto de referencia $(0,0,0)$ que se tomó en el numeral $2b$.

a) ¿En qué habitación está el punto de coordenadas $(1,1,1)$?

b) ¿En qué habitación está el punto de coordenadas $(-1,-1,-1)$?

c) ¿En qué habitación está el punto de coordenadas $(-1,1,-1)$?

d) ¿En qué habitación está el punto de coordenadas $(1,-1,1)$?

e) ¿En qué habitación está el punto de coordenadas $(-1,-1,1)$?

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad Tecnológica

Cálculo multivariado 2021 $-$ II

Actividad 2. Florero de caras planas

Una manera de dar vida a un espacio es por medio de las flores. Quizás hemos visto floreros de muchos tamaños y estilos en los lugares que hemos visitado, o en nuestra propia casa. Los fabricantes de floreros pueden preguntarse por los diseños más llamativos y quizás más económicos. Después de tener el diseño, seguramente surgen preguntas como ¿qué cantidad de material es necesario para construir el florero? ¿con qué cantidad de tierra se llena? Si necesita pintarse, ¿cuánta pintura se usará en cada florero? Es decir, ¿qué área debo recubrir?

Con las herramientas que nos brinda este curso responderemos esas y otras preguntas sin dificultad para muchos diseños de floreros. Esas herramientas involucran expresiones matemáticas que manipulamos de distintas maneras para encontrar ciertas medidas. Así lo hacemos en el cálculo.

Lo primero que hacemos entonces es tener las expresiones matemáticas que vamos a usar. Para esta actividad entonces, y dado que aún no tenemos esas herramientas, vamos a centrar la atención en conseguir expresiones matemáticas para las caras o partes del florero.

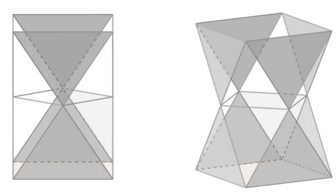
Por ahora tomemos un diseño particular y sencillo de florero y planteemos algunos tareas a realizar:

La fotografía muestra un diseño de florero de base cuadrada y paredes planas:

Gráfica 16. Fotografía florero

El florero tiene base cuadrada de lado 30cm. Su mitad es un cuadrado de lado $15\sqrt{2}$ que al proyectarse a la base estaría formado por los puntos medios de los lados de la base. Y el florero tiene una altura total de 50cm.

Adelante se muestra dos vistas adicionales construidas en geogebra.



Gráfica 17. Vistas geogebra

1. Encuentre las ecuaciones de los planos que contienen cada una de las partes (caras) planas que forman el florero.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad Tecnológica

Cálculo multivariado 2021 $-$ II

Actividad 3: La cafetería de nuestra Facultad

Muchos de los objetos, piezas de trabajo, edificios, entre otros, tienen formas particulares. Muchas de esas formas son comunes en varios de ellos. Para describir características de esos objetos, casi siempre es necesario, por ejemplo, tener sus planos, construir inicialmente un prototipo, modelarlos con algún software, o construirlos a escala.

Con la forma de proceder en los cursos de cálculo, es decir, por medio de expresiones matemáticas y usando herramientas como derivadas o integrales, podemos identificar de manera más precisa esas características de los objetos. La expresión

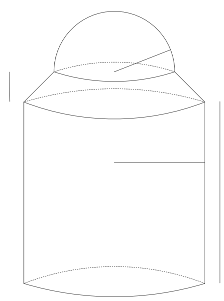
[6] es decir, por ejemplo, derecha primer piso, atrás segundo piso, debajo, etc.

matemática que represente un objeto, puede también ser insumo para modelarlo por medio de un software, ya sea usando su expresión explícita o por medio de un conjunto de puntos que suministra dicha expresión.

Para contextualizar los párrafos anteriores y también introducir un tema que nos interesa, vamos a trabajar sobre un objeto (un edificio) que seguramente ustedes conocerán. En nuestra Facultad[7] tenemos un edificio que concentra muchos estudiantes a lo largo de cada día. Nos preguntamos si podemos modelarlo, construirlo a escala, representarlo matemáticamente, etc.

Por ahora centraremos la atención en representarlo matemáticamente, es decir, identificar cada uno de sus puntos que lo conforman por medio de ternas de la forma (x, y, z). De manera similar a como lo hicimos con un plano en el espacio[8]. Veamos ahora las diferencias que se tienen con lo que aprendimos de los planos.

La gráfica

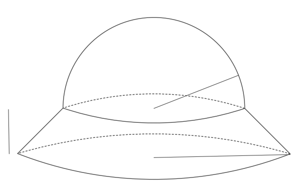


Gráfica 18. Representación cafetería

es una representación del edificio donde funciona la cafetería de la Facultad:

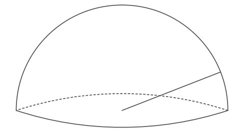
Gráfica 19. Cafetería Facultad Tecnológica

La parte superior del edificio, es decir, el techo, es una superficie que se vería como en la Gráfica 3 (suponiendo que es completamente liso):



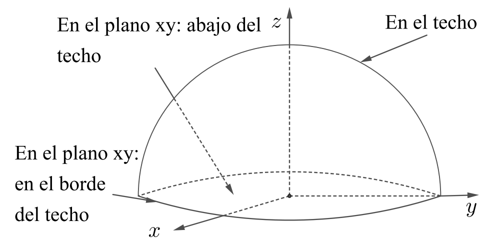
Gráfica 20. Techo de la Cafetería

1. *Centremos nuestra atención, inicialmente, en la parte esférica del techo (un hemisferio[9]) y busquemos representar los puntos que la conforman por medio de ternas de la forma* (x, y, z):



Gráfica 21. Parte esférica del techo

Supongamos que el origen del sistema de coordenadas es el centro del hemisferio. En la Gráfica 5 se muestra además de los ejes coordenados, la explicación gráfica de lo que se entenderá por estar *abajo del techo*[10], *en el techo*[11] y en el *borde del techo*[12], términos que se usan más adelante:



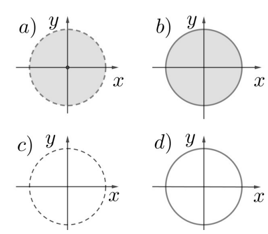
Gráfica 22. Parte esférica del techo. Ejes

Responda cada uno de los siguientes ítems y justifique sus respuestas

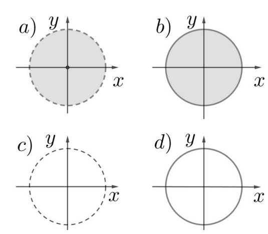
a) Encuentre, consulte, investigue, etc, la medida del radio del hemisferio.

b) Escriba cinco puntos que estén abajo del techo y cinco puntos que estén en el borde del techo.

c) Seleccione de dónde, en el plano xy, debe tomar los puntos para que estén abajo del techo[13]:



d) Seleccione de dónde, en el plano xy, debe tomar los puntos para que estén en el borde del techo:



[7] la *Facultad* hace referencia a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, sede Ciudad Bolívar, ubicada en la Localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá D.C.

[8] Recordemos que los puntos (x, y, z) de un plano deben satisfacer una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$

[9] hemisferio es el nombre que le damos a media esfera

[10] es decir, los puntos del plano xy que están abajo del hemisferio

[11] es decir, los puntos del hemisferio, sin contar sus puntos que también están en el plano xy

[12] el borde del techo es la parte del hemisferio que toca al plano xy

[13] recuerde que estamos haciedo diferencia entre *abajo del techo* y *borde del techo*. Además, la parte punteada quiere decir que ella no se tiene en cuenta, o no forma parte de la gráfica.

e) ¿Qué parte del eje x y qué parte del eje y están abajo del techo? (es decir, cuál intervalo para cada eje)

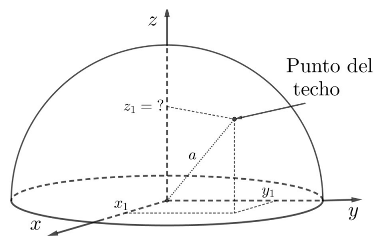
f) ¿Qué puntos del eje x y del eje y están en el borde del techo? (es decir, qué ternas para cada eje)

g) Ahora centremos la atención en los puntos del techo. Recordemos que la distancia entre los puntos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) en el espacio está dada por

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Como el radio del hemisferio es a (el valor que usted encontró en el numeral $1a$), entonces la distancia desde cualquier punto del techo al origen es a.

Tome cada una de las ternas $(x_1, y_1, 0)$ que encontró en el numeral $1b$ y use la información de las distancias para encontrar la coordenada z de tal manera que el nuevo punto esté en el techo, como en la gráfica siguiente



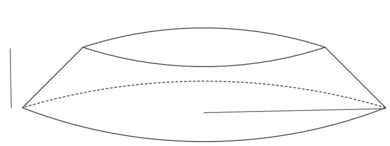
Gráfica 23. Punto en el techo según punto abajo del techo

h) Suponga que ahora (x, y, z) es un punto cualquiera del espacio. ¿Qué expresión debe satisfacer esa terna para poder decir que está en el techo? (tenga en cuenta que el techo es un hemisferio donde z es positivo)

i) Use un programa (por ejemplo Geogebra) para graficar la expresión que encontró en el numeral $1h$. ¿La gráfica en el programa tiene la misma forma que el techo de la cafetería?

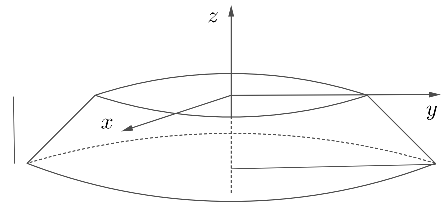
j) Ahora quedémonos solamente en el plano xy. ¿Cuáles parejas (x, y) del plano cartesiano están abajo del techo? y ¿cuáles en el borde del techo? Es decir, ¿qué expresión matemática deben satisfacer x y y para estar abajo del techo? y ¿cuál expresión para estar en el borde del techo? ¿puede unirse las dos expresiones en una sola?

2. *Ahora tomemos la parte que complementa el techo y que llamaremos* ***la parte restante del techo***:



Gráfica 24. Parte restante del techo

Supongamos que el origen del sistema de coordenadas es el mismo punto que para la parte esférica del techo. En ese caso, la gráfica se ve de la siguiente manera:

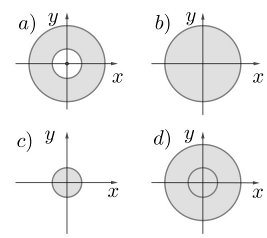


Gráfica 25. Parte restante del techo. Ejes

Responda cada una de los siguientes planteamientos y justifique sus respuestas.

a) Encuentre, consulte, investigue, etc, las dos medidas necesarias para describir esta parte de techo (es decir, altura y radio inferior de esta parte).

b) ¿Cuál de las siguientes regiones del plano xy es la que queda arriba de la parte restante del techo[14]?



Muestre cinco parejas (x, y) del plano xy que estén en esta región.

c) ¿Para qué valores de x la recta $y = -x$ está en la región que define la parte restante del techo?

d) En definitiva, ¿cuáles parejas (x, y) del plano xy están arriba o en el borde de esta parte del techo? Es decir, ¿qué expresión matemática deben satisfacer x y y para estar arriba o en el borde de la parte restante del techo?

e) ¿Cuáles ternas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ están en la parte restante del techo? Es decir, ¿qué expresión matemática deben satisfacer x, y y z para estar en la parte restante del techo?

f) Si hacemos que z dependa de x y y en la expresión encontrada en $(2e)$, es decir, despejamos z, ¿cuál es la expresión resultante?

3. Dado que el origen del sistema de coordenadas usado para las dos partes del techo de la cafetería es el mismo, ¿cuál es la expresión matemática a trozos que representa el techo completo?

4. El techo de la cafetería, representado en la gráfica 2, nos llevó a la expresión en el numeral 3. Vayamos ahora en la otra dirección, es decir, preguntémonos ¿a qué superficie nos lleva, por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + y^2$? ¿cómo podemos construir su gráfica?

[14] La parte esférica del techo, está ubicaba arriba del plano xy, por ello hicimos referencia a la región del plano xy como la que queda *abajo del techo*. Ahora la parte restante del techo está ubicada por debajo del plano xy, por esa razón hacemos referencia a lo que queda *arriba de la parte restante del techo*

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad Tecnológica

Cálculo multivariado 2021 $-II$

Actividad 4: promoción de dulces

Una manera en la que Julián, un estudiante de la Facultad Tecnológica, encontró para recibir algunos ingresos económicos necesarios para transportarse es por medio de la venta de dulces en los pasillos de la Facultad. Últimamente otros estudiantes también han optado por vender dulces en la Facultad al igual que Julián. Claramente los ingresos de Julián han disminuido.

Pensando en mejorar sus ventas, Julián ha decidido vender en promoción dos de sus productos: las Chocolatinas Mini Jet y las Mentas Chao. Julián vende cada chocolatina en \$350 y cada menta en \$200, el mismo precio que los otros estudiantes. La promoción consiste en obsequiar gomitas Trululú si le compran mínimo cinco chocolatinas y mínimo tres mentas. Obsequia una gomita por cada chocolatina por encima de la cuarta comprada y obsequia una gomita por cada menta por encima de la tercera comprada, cuando le compran los dos productos y en las cantidades mínimas por lo menos.

Gráfica 26. Dulces en la promoción

Por ejemplo, si alguien le compra 6 chocolatinas y 7 mentas entonces obsequia 2 gomitas por las chocolatinas y 4 gomitas por las mentas.

A Julián cada gomita le cuesta \$30.

Según la información anterior,

1. ¿Con qué expresión representa la cantidad de dinero que recibirá Julián en función de la cantidad de chocolatinas y de mentas vendidas con la promoción?

2. ¿Cuántas chocolatinas y cuántas mentas debe vender Julián con esa promoción para maximizar sus ingresos?

Con el fin de que los otros estudiantes que venden dulces en la Facultad lo hagan con la promoción, Julián les propuso venderles a ellos el paquete de 24 chocolatinas y de 50 Mentas directamente y les obsequiaría el paquete de 90 bolitas de gomas. Para ello les propuso que cada chocolatina y cada menta tendría el mismo valor de \$250 para ser vendidas a los precios de 350 y 250 pesos respectivamente.

Pedro, otro estudiante de la Facultad se mostró interesado en la propuesta y quiere hacer sus cálculos para verificar si la acepta o no:

3. ¿Cuál es la expresión que calcula los *ingresos* para Pedro en función de la cantidad de chocolatinas y mentas vendidas?

4. ¿Cuál es la expresión que calcula la *ganancia* para Pedro en función de la cantidad de chocolatinas y mentas vendidas?

5. Si Pedro vende todas las chocolatinas y todas las mentas de un paquete, ¿cuál es su ganancia?

6. ¿Debería Pedro aceptar el negocio que le propone Julián? (Justifique)

Después de revisar sus cuentas, Julian replantea su promoción para sus propias ventas. Ahora propone que si le compran los dos productos entonces disminuirá en \$15 el precio de cada chocolatina comprada por cada chocolatina por encima de la tercera y disminuirá en \$10 el precio de cada menta comprada por cada menta por encima de la cuarta compradas. Por ejemplo, si alguien le pide 4 chocolatinas y 6 mentas entonces cada chocolatina cuesta $\$350 - \$15 = \$335$ en lugar de \$350 y cada menta cuesta $\$200 - \$20 = \$180$ en lugar de \$200. Las gomitas Trululú no se tienen en cuenta por ahora.

Gráfica 27. Dulces en la nueva promoción

Según eso:

7. ¿Con qué expresión representa la cantidad de dinero que recibirá Julián en función de la cantidad de chocolatinas y de mentas vendidas con la promoción?

8. ¿Cuántas chocolatinas y cuántas mentas debe vender Julián con esa promoción para maximizar sus ingresos?

9. ¿Cuál es la cantidad máxima de dinero que recibe Julián con la promoción y cuál es la cantidad de dinero que recibiría con esa venta sin promoción?

Por otro lado, Julián también invita a sus compradores a comprarle la misma cantidad de chocolatinas que mentas y en ese caso en lugar de disminuir \$15 y \$10 disminuiría \$20 y \$15 respectivamente en la promoción anterior.

10. ¿Cuántas chocolatinas y cuántas mentas debería vender con esa nueva promoción para maximizar Julián sus ingresos?

11. ¿Con cuál de las dos formas de venta, Julián recibe mayores ingresos?

12. ¿Es significativo el cambio en los ingresos con una promoción o la otra en esta nueva etapa de su negocio?

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

FACULTAD TECNOLÓGICA

Tecnología Mecánica

Cálculo Multivariado. 2021 $-II$

Actividad 5: florero de partes cuadráticas

En algunas actividades anteriores estudiamos el florero de caras planas

Gráfica 28. Florero de caras planas

Pero podemos conseguir formas diferentes en gran número. En la gráfica vemos algunas cuantas y similares a la que vamos a trabajar en esta actividad.

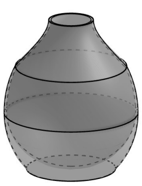
Gráfica 29. Algunas formas de floreros

Ahora entonces centramos la atención en uno similar a los que vemos en la imagen:

Gráfica 30. Florero Geogebra

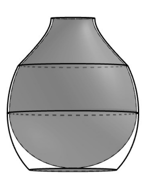
La anterior es una gráfica construida a escala con Geogebra. Dado que usted tiene las herramientas para parametrizar superficies como éstas, podría usted mismo construirlo en Geogebra.

Demos algunas características necesarias para comprender el florero: tiene un grosor y una forma interna diferente a la exterior en su parte inferior, como puede verse en la siguiente imagen



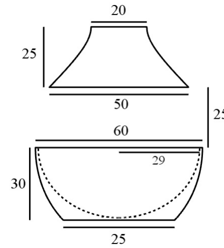
Gráfica 31. Grosor y forma interna

o también



Gráfica 32. Forma interna

La parte hemisférica interior está separada un centímetro de la base del florero. El florero es circular y sus dimensiones externas (en centímetros) se muestran a continuación.



Gráfica 33. Dimensiones

La parte interna inferior es un hemisferio, pero la parte externa inferior no tiene forma esférica.

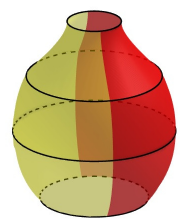
El grosor en la parte superior (arriba del hemisferio interno) es de un centímetro.

Con esa información, que debería dejar claro el objeto, supongamos que se fabricarán floreros en serie.

Con el fin de optimizar recursos es conveniente contar con la cantidad de material necesario para fabricarlos. si ignoramos el material que se desperdicia en la fabricación, ¿cuántos metros cúbicos de material se necesitan para fabricar 1000 floreros? (justifique su respuesta)

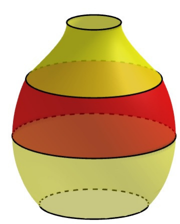
Por otro lado, la parte interna y la base del florero no se pintarán pero para la parte externa se usarán dos colores: rojo y amarillo.

El 50 % de los floreros fabricados se pintarán cada mitad de un color como en la figura:



Gráfica 34. Florero pintado a la mitad

El 25 % se pitarán con dos franjas amarillas y una franja roja:



Gráfica 35. Florero pintado en franjas

y el restante no se pintará.

Si la pintura tiene un rendimiento de un metro cuadrado por galón, ¿cuántos galones de pintura de cada color son necesarios para pintar los floreros?

Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Facultad Tecnológica,
Tecnología Mecánica
Cálculo Multivariado, $II - 2021$,
Actividad 6: Diábolo de dos palos

[15] no en el sentido de nuestros conos en el curso

Un diábolo (diabolo de dos palos) es un *juguete que consiste en una especie de carrete formado por dos conos unidos por el vértice*[15]*, al cual se imprime un movimiento de rotación por medio de una cuerda atada al extremo de dos varillas, que se manejan haciéndolas subir y bajar alternativamente* (https://dle.rae.es/diábolo)

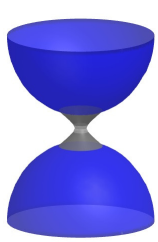
Gráfica 36. Fotografía de un diábolo de dos palos

Aunque los orígenes del diábolo se dan en China, hoy en día se usa en muchas partes del mundo. Adelante algunas imágenes:

Gráfica 37. Jugando diábolo de dos palos
Tomada de: https://es.dreamstime.com

Gráfica 38. Jugando diábolo de dos palos
Tomada de: http://spanish.visitbeijing.com.cn

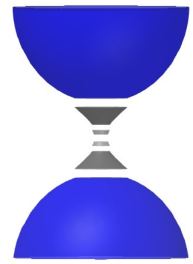
Los extremos del diábolo puede variar de un fabricante a otro o de la especificidad o no del producto. Pueden ser más o menos esféricos, más o menos elipsoidales, etc. Para lo que nos ocupa en esta actividad, partiremos de la siguiente representación gráfica del diábolo:



Gráfica 39. Representación gráfica del diábolo

y que tiene las siguientes características:

Está formado por seis partes:



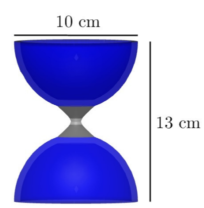
Gráfica 40. Partes del diábolo

Cada una de las partes es circular y tiene dos radios, uno mayor y uno menor. Las partes en azúl son mitades (truncadas) de elipsoides, las partes en negro un hiperboloide (truncado) de una hoja y las partes en gris dos conos truncados.

Partes sólidas y cortezas. Las partes en negro y gris son completamente sólidas y las partes en azúl son cortezas (es decir solo tienen grosor) de un grosor uniforme en toda su forma. Supondremos que el grosor es de 1cm

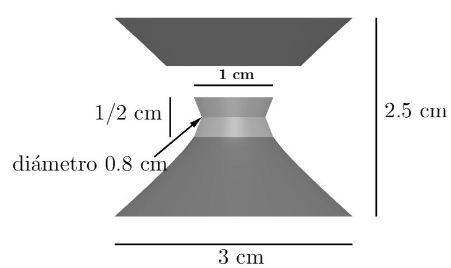
Gráfica 41. Corteza de grosor 1cm

Tiene siete medidas (dimensiones) que lo identifican Asumiremos que las medidas de nuestro diábolo son las siguientes



Gráfica 42. Dimensiones

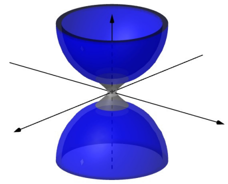
y más específicamente.



Gráfica 43. Dimensiones parte media

Teniendo claras las características de nuestro objeto y con el fin de dar un uso práctico a las integrales que hemos estudiado en el curso, calcularemos algunos volumenes y áreas superficiales. Recuerde que en todo momento debe hacer explícitas las integrales necesarias y no necesariamente debe hacer explícito el procedimiento para llegar al valor numérico que con ellas obtiene.

Supondremos también que los ejes coordenados, para fines de identificar expresiones que represetan las partes del diábolo, están ubicados en la parte media dando simetría al objeto:



Gráfica 44. Ejes coordenados

1. Suponiendo que cada color del diábolo es un tipo diferente de material, ¿cuánto material se necesita de cada tipo para su construcción? (Detalle el procedimiento que lleva a la construcción de todas las expresiones matemáticas involucradas y detalle también el planteamiento de las integrales usadas. Aunque esa cantidad pueda hallarse usando alguna fórmula conocida, es obligatorio plantear integrales)
2. ¿Cuántos centímetros cuadrados debe cubrir, de cada color, en el diábolo? (Detalle el procedimiento que lleva al planteamiento de las integrales usadas. Aunque esa cantidad pueda hallarse usando alguna fórmula conocida, es obligatorio plantear integrales)

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Cálculo Multivariado. 2021 $-$ II

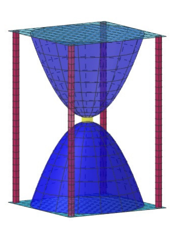
Actividad 7: Reloj de arena

La Real Acadamia Española de la Lengua define **reloj de arena** como el *artificio que se compone de dos ampollas unidas por el cuello, y sirve para medir el tiempo por medio de la arena que va cayendo de una a otra.* Las ampollas que lo conforman pueden tener formas muy variadas, por ejemplo conos truncados, partes esféricas o elipsoidales o combinaciones de ellas con cilindros o hiperboloides entre muchas otras.

Parece que no es claro de cuándo datan los relojes de arena, aunque se tiene modelos de principios del siglo XVIII. En esta actividad trataremos de obtener características que nos permitan construir de manera óptima un reloj de arena.

Iniciemos asumiendo alguna herramienta de la ingeniería, relacionada con el flujo de fluidos o sustancias granuladas. Para nuestro caso, usaremos que la cantidad de arena (masa) por unidad de tiempo que pasa de un extremo a otro (de una ampolla a la otra) está dada aproximadamente por $w = 0{,}533\rho\sqrt{g}A^{5/4}$ con ρ la densidad de la arena (fina), g la fuerza ejercida por la gravedad y A el área de la sección transversal del orificio por donde la arena pasa.

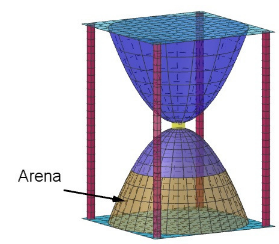
Con respecto a la forma del reloj, supongamos que nuestro reloj tiene ampollas con forma de paraboloides circulares truncados y que están unidas por un cilindro circular recto de radio 1/4cm y altura 1/2cm, como en la gráfica:



Gráfica 45. Representación del reloj

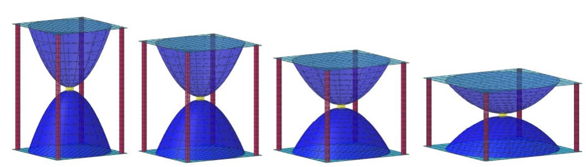
Los parámetros para identificar ciertas propiedades las tomará ud, según los siguientes ítems

1. ¿Cuánto tiempo va a medir en su reloj de arena?
2. Si el radio de paso de una ampolla a la otra es de 1/4cm, ¿cuántos centímetros cúbicos por segundo pasan de una ampolla a la otra?
3. ¿Qué cantidad total, en centímetros cúbicos, de arena necesita tener en una ampolla para medir el tiempo pactado en el numeral 1?
4. Ahora bien, la cantidad total de arena debe caber en una ampolla pero además debe haber un espacio libre cuando la totalidad de arena esté en ella. Supongamos que la tercera parte de la cantidad de arena debe ser equivalente al espacio libre en la ampolla, es decir, el volumen total de la ampolla debe ser cuatro tercios la cantidad de arena encontrada en el numeral 3. La gráfica se vería aproximadamente como la siguiente:



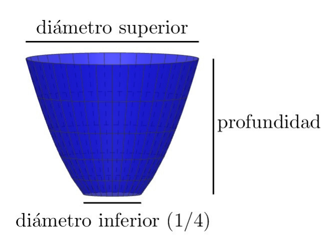
Gráfica 46. Arena en la ampolla inferior

Por otro lado, el paraboloide puede ser muy variado, en el sentido de sus dimensiones aún cuando el volumen es el mismo:



Gráfica 47. Algunos tamaños del reloj

a) Presente las dimensiones (ver gráfica adelante) de tres paraboloides truncados en los que se tenga el volumen definido en el anterior párrafo.



Gráfica 48. Dimensiones ampolla

b) Dado que existen muchas posibilidades para construir cada ampolla, se quire entonces construir una en la que la cantidad de material usada sea mínima. Modele el proceso de minimización de la cantidad de material en la construcción de la ampolla bajo las condiciones presentadas anteriormente.

c) ¿Tiene las herramientas necesarias para solucionar el modelo anterior? Justifique

Anexo 2: Encuesta estudiantes

Universidad Antonio Nariño.
Doctorado en Educación Matemática
Pablo A. Acosta Solarte.

Encuesta de Percepción de Dificultades en Cálculo Multivariado
Estudiantes de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas que ya tomaron el curso
Bogotá, Octubre de 2016

El objetivo de la encuesta es identificar dificultades en algunos temas que conforman el curso de cálculo multivariado para estudiantes de ingeniería, que permitan construir un modelo pedagógico que mejore la enseñanza y el aprendizaje del curso.

1. ¿Hace cuántos semestres vio el curso de cálculo multivariado? ________
2. De los siguientes temas vistos en cálculo multivariado, ¿cuál o cuáles le generaron dificultades en su comprensión:

   Funciones en varias variables ☐
   Interpretación gráfica de las derivadas parciales ☐
   Optimización ☐
   Integración múltiple ☐

3. Describa brevemente qué hizo que el tema seleccionado le haya producido dificultades

   Funciones en varias variables: ____________________

   Interpretación gráfica de las derivadas parciales: ____________________

   Optimización: ____________________

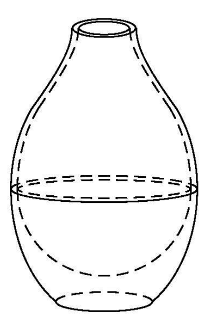
   Integración múltiple: ____________________

4. ¿En su curso de cálculo multivariado representaron, por medio de expresiones matemáticas, sólidos o superficies reales (cosas que haya visto o usado en su cotidianidad)?

   Si ☐ No ☐

5. ¿Se siente en capacidad de representar, por medio de expresiones matemáticas (a trozos), el *florero* de la figura?

   Si ☐ No ☐



Anexo 2: Encuesta docentes

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO.
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
PABLO A. ACOSTA SOLARTE.
Encuesta de percepción de dificultades en Cálculo Multivariado
Profesores de matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Octubre de 2016

El objetivo de la encuesta es identificar dificultades en algunos temas que conforman el curso de cálculo multivariado para estudiantes de ingeniería, que permitan construir un modelo pedagógico que mejore la enseñanza y el aprendizaje del curso.

1. De los siguientes temas de cálculo multivariado, ¿cuál o cuáles considera usted generan dificultades de comprensión a los estudiantes?

   Funciones en varias variables ☐
   Interpretación gráfica de las derivadas parciales ☐
   Optimización ☐
   Integración múltiple ☐

2. ¿Qué parte, de los temas señalados en el punto anterior, considera usted generan más dificultad en los estudiantes?

   Funciones en varias variables: ______________________________
   ____

   Interpretación gráfica de las derivadas parciales: ______________________________
   ____

   Optimización: ______________________________
   ____

   Integración múltiple: ______________________________
   ____

3. ¿Qué tan difícil considera usted es para los estudiantes la representación analítica (por medio de expresiones matemáticas) de superficies en el espacio? Siendo 1 menos difícil y 5 más difícil.

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

4. ¿Qué tan útil considera usted es que el estudiante aprenda a representar de manera analítica superficies que encuentra en su cotidianidad (recipientes, algunos elementos de su profesión etc)? Siendo 1 menos útil y 5 más útil.

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

5. ¿Qué medios usa usted en el curso de cálculo multivariado para ayudarle a los estudiantes a afrontar las dificultades que ellos encuentran en el curso?

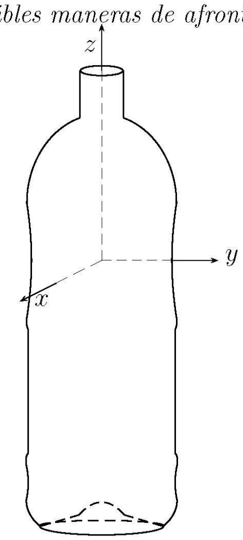
   ____
   ____
   ____
   ____

Anexo 3: Encuesta percepción actividad realista

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD TECNOLÓGICA
TECNOLOGÍA MECÁNICA
Cálculo Multivariado

Percepción Modelo Recipiente, Mayo de 2015

Se quiere modelar, de manera analítica[**] *una botella usada para comercializar agua potable de un litro de capacidad. Las siguientes preguntas buscan identificar, entre otras cosas, las posibles maneras de afrontar la situación.*



1. ¿Entiende lo que es modelar analíticamente?

   Si _____ **No** _____, ¿por qué?

2. ¿Qué utilidad le ve usted al representar algo de manera analítica?

3. ¿Conoce algún programa, aplicación, software, etc, con el que pueda representar de manera gráfica el recipiente seleccionado?

   Si _____ **No** _____.

4. Si su respuesta al ítem anterior fue **si**, ¿cuáles programas, aplicaciones, software, etc, usaría para representar gráficamente el recipiente?

5. Si su respuesta al ítem 3 fue **si**, ¿qué necesita para, usando alguna de esas herramientas, representar gráficamente el recipiente?

6. Si su respuesta al ítem 3 fue **si**, con la representación gráfica que obtenga, ¿podría calcular el volumen o la superficie del recipiente?

   Si _____ **No** _____, ¿por qué?

7. ¿Considera que los cursos de matemáticas que ha visto hasta el momento le han suministrado herramientas que le ayudan a plantear el modelo analítico solicitado?

   Si _____ **No** _____, ¿por qué?

8. ¿Se siente en capacidad de modelar de manera analítica el recipiente seleccionado?

   Si _____ **No** _____, ¿por qué?

[**] es decir, usando expresiones matemáticas

9. Modelar analíticamente el recipiente le parece:

a) Muy fácil.

b) Fácil.

c) Difícil.

d) Muy difícil

¿por qué?

10. Saber cómo modelar de manera analítica el recipiente seleccionado, le parece:

a) Algo inusual.

b) Algo común.

c) Algo poco interesante.

d) Algo interesante.

e) Algo muy interesante.

¿por qué?

11. ¿Qué tipo de recipientes o de objetos, por ejemplo que use en su carrera o usaría en su labor, le parece interesante o muy interesante modelar?

12. Si yo le diese a escoger UNA de entre dos representaciones del recipiente, la gráfica y la analítica, ¿cuál escogería?

Gráfica _____ **Analítica** _____, ¿por qué?

13. De los temas del curso de cálculo multivariado, cuál o cuáles considera le dan herramientas útiles para desarrollar trabajos o actividades similares a la planteada con el modelo del recipiente?

14. De los temas del curso de cálculo multivariado, cuál o cuáles le parecen útiles para su labor profesional?

15. De los temas del curso de cálculo multivariado, cuál o cuáles considera fueron explicados de manera clara?

16. De los temas del curso de cálculo multivariado, cuál o cuáles considera NO fueron explicados de manera clara?

¿por qué?