Programa de Doctorado en Educación Matemática

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Oscar Andrés Galindo Rivera

Bogotá D.C.

2021

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tesis presentado como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Oscar Andrés Galindo Rivera

Director de Tesis:

Dra. Mary Falk de Losada

Bogotá D.C.

2021

SINTESIS

El objetivo de esta presente investigación es el de mostrar algunos avances en la caracterización del Pensamiento Vectorial a través de la resolución de problemas en los estudiantes de Ingenierías de la Universidad Antonio Nariño.

Se diseñaron ocho actividades, las cuales se implementaron a 35 estudiantes. En estas actividades se proponen un conjunto de problemas retadores y no rutinarios frente a los cuales los estudiantes ofrecen estrategias de solución, donde salen a la luz cinco modos de pensamiento que caracterizan el Pensamiento Vectorial involucrado en ellos. Estos modos de pensamiento se encuentran plasmados en la rúbrica para la caracterización del Pensamiento Vectorial que se generó al implementar cada una de las actividades y de los resultados obtenidos de ellas en los análisis correspondientes.

Del trabajo realizado por los estudiantes en las actividades propuestas se pudo evidenciar y constatar los elementos que caracterizan el Pensamiento Vectorial involucrado con respecto a los conceptos del Cálculo Vectorial, donde además se propone el estudio de las formas diferenciales al final del curso y que sintetiza este pensamiento presente en los estudiantes.

SUMMARY

The objective of this present research is to show some advances in the characterization of Vector Thinking through problem solving in Engineering students at the Universidad Antonio Nariño.

Eight activities were designed, which were implemented to 35 students. In these activities, a set of non-routine or challenging problems are proposed for which students offer solution strategies, where five modes of thought that characterize the Vector Thinking involved in them come to light. These modes of thought are reflected in the rubric for the characterization of Vector Thinking that was generated when implementing each of the activities and the results obtained from them in the corresponding analyzes.

From the work carried out by the students in the proposed activities, it was possible to demonstrate an verify the elements that characterize the Vector Thinking involved with respect to the concepts of Vector Calculus, where the study of differential forms is also proposed at the end of the course and synthesizes this thinking present in students.

TABLA DE CONTENIDO **PÁG**

TABLA DE TABLAS **PÁG**

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Vectorial es una rama de las matemáticas que estudia las funciones en varias variables y funciones vectoriales en dos o más dimensiones. Tales funciones aparecen en el dominio de muchas ciencias aplicadas, pues es bien sabido que algunos fenómenos de naturaleza específica de tales ciencias dependen de más de una variable, y las herramientas del cálculo en una variable no son suficientes para realizar el estudio completo del fenómeno que se analiza.

El Cálculo Vectorial tiene sus orígenes durante finales del siglo XVIII y su desarrollo está relacionado con los cuatérnios de Hamilton y con la teoría del potencial. Estudios tan importantes en física como la termodinámica, la hidrodinámica, la mecánica de los fluidos desarrollada por Navier y Stokes y las investigaciones sobre la luz, la electricidad y el magnetismo debidas a Maxwell, tienen en sus teorías el desarrollo de esta rama del cálculo.

Con Gibbs se da la notación actual del Cálculo Vectorial al elaborar una versión exclusivamente vectorial con su propio lenguaje, independientemente de los cuatérnios y se establece el cálculo vectorial como una disciplina autónoma.

Más recientemente, en el ámbito de la inteligencia artificial (IA), los procesos de Support Vector Machines sobresalen en esta teoría al tener en su base la optimización tomada de métodos del Cálculo Vectorial, donde a su vez el método del descenso por el gradiente aparece como una herramienta para lograr soluciones de manera rápida.

En cuanto al aprendizaje del Cálculo Vectorial, al ser una asignatura que se cursa posteriormente a la del cálculo en una variable, ésta presenta para los estudiantes una gran variedad de nuevos conceptos y de entidades abstractas, entre ellos, los conceptos de campo escalar, campo vectorial, divergencia y rotacional. Además, aparecen los intrincados teoremas de Green, Gauss y Stokes, que relacionan conceptos tan importantes como las integrales de línea e integrales de superficie con integrales dobles y triples, tan útiles en los estudios de física antes mencionados.

En la experiencia del investigador, estos nuevos conceptos presentan dificultades en su comprensión para los estudiantes. Estas dificultades están dadas por el nivel de abstracción de los mismos, las nuevas técnicas de cálculo que se adquieren en la asignatura y el conjunto de asignaturas previas que deben manejar, como son: Álgebra Lineal, el Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable, Geometría Analítica y un limitado razonamiento espacial.

Por otra parte, el investigador aduce que algunos estudiantes en su proceso de aprendizaje de los temas del curso de Cálculo Vectorial han visto reflejados cierta clase de comportamientos de estos nuevos conceptos, que se familiarizan con lo que acontece en los vectores o en el Álgebra Lineal. Esto revela un intrincado proceso de pensamiento presente en los estudiantes que motiva esta investigación y que permitirá estudiar este proceso desde múltiples puntos de vista.

Por esta razón es necesario caracterizar cómo y de qué manera se logra un pensamiento capaz de involucrar y magnificar los temas anteriormente señalados (Pensamiento Vectorial o PV), que junto a una metodología coherente y una pertinente práctica pedagógica pueda llevar al estudiante de ingeniería a una correcta aplicación de estos conceptos en la resolución de problemas de su especialidad. En este proceso se busca que los estudiantes establezcan leyes y aborden los contenidos de las asignaturas: Electromagnetismo, Dinámica, Mecánica de Fluidos, Mecánica de Sólidos, Transferencia de Calor, Mecánica del Medio Continuo, Optimización, Análisis Matemático, Estructuras Algebraicas, entre otras.

El proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial y del Álgebra Lineal ha sido abordado por investigadores en congresos y reuniones tales como: International Congress on Mathematical Education (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM), en el Congreso de Enseñanza de la Ingeniería (CAEDI X), en los Congresos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, entre otros. En cada uno de estos congresos se discute y se aportan propuestas investigativas dirigidas a favorecer el aprendizaje del Cálculo Vectorial en el contexto de la matemática universitaria.

En el encuentro sobre la Enseñanza de Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI XXII) realizado en Uruguay se aborda el tratamiento de diferentes teorías educativas (campos conceptuales, APOS, matemática crítica, entre otras) para poder incluirlas en la enseñanza del cálculo en varias variables o en análisis matemático en general.

En el ICME 14 se hace referencia a algunas investigaciones sobre la Enseñanza – Aprendizaje del Cálculo, por ejemplo, las que se dieron en el grupo tema de estudio TSG13. Estas investigaciones tienden a concluir que la mayor dificultad de los estudiantes en ese proceso se refleja en la escasa visualización de los fenómenos que conllevan a su modelación y su posterior puesta en práctica. Estos resultados mostrados en el ICME 14 en parte están dados por la falta de comprensión del objeto que se le presenta al estudiante y cómo el docente se lo presenta.

En the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA) se discuten temas relacionados con la implementación de nuevas tecnologías en diferentes asignaturas matemáticas, donde en lo referente al cálculo vectorial y al álgebra lineal la mayoría de investigadores se basan en la visualización de algunos conceptos, enmarcados en la utilización de tecnologías como la de Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), donde el investigador de este trabajo tiene particular interés.

Al hacer referencia a distintos procesos de Enseñanza – Aprendizaje del Cálculo Vectorial, particularmente en el Álgebra Lineal, se encuentran las distintas vertientes para el estudio de conceptos y diferentes líneas de investigación de una forma no coherente ni unificada, que ayuden a resolver un problema desde diferentes puntos de vista y permitan la caracterización de este pensamiento.

Por otro lado, se considera en este trabajo que se debe hacer uso de herramientas teóricas muy poco utilizadas, que sean simples de manejar y que repercutan en conllevar a los mismos resultados, pero de una manera más visual y unificada en su trasfondo. Es en esta dirección, junto al aporte teórico y práctico en la que se basa esta investigación y en sus alcances en la Enseñanza – Aprendizaje del Cálculo Vectorial, que se explora la caracterización del pensamiento vectorial en cursos de Ingeniería y Matemáticas basados en la modelación, visualización y la resolución de problemas.

En su forma matemática, algunas investigaciones tienen gran relevancia en los procesos de Enseñanza - Aprendizaje. Por ejemplo, Dray y Manogue (2010), utilizando elementos del Cálculo Diferencial e Integral logran generar didácticas que permiten desarrollar los conceptos involucrados en las integrales dobles o triples cuando se hace un cambio de variables, cuestiones de importancia absoluta en el curso de Cálculo Vectorial. Sharipov (2004) toma los conceptos y notaciones mostradas por el análisis tensorial y lo lleva a una reformulación didáctica y práctica de las leyes de la electrodinámica y la teoría de la relatividad, no dejando de mencionar que este trabajo realizado en física pueda trascender a otras ramas de las ciencias.

El autor Sjammar (2017) relaciona la teoría de formas diferenciales y de su geometría usando los determinantes y una medida de n- volumen con signo, que según el concepto del investigador es una de las muchas formas de hacer la unificación y empalme de los conceptos del curso de Cálculo Vectorial.

Históricamente el Cálculo Vectorial y el Álgebra Lineal tuvieron un desarrollo conjunto también con la teoría electromagnética. Estas teorías se debieron al trabajo de grandes matemáticos y físicos que aportaron sus ideas y al estudio de la problemática de la dirección de cantidades, que tiene sus raíces en la dicotomía entre magnitud y número, presente en Euclides y estudiada después por Descartes con su primera representación de cantidades negativas.

Estas ideas planteadas anteriormente constituyen una antesala del concepto de vector, que tuvo su principio, en la línea matemática sobre las representaciones de números complejos hecha por Wallis, Wessel, Gauss y Argand entre otros.

En la línea física se destacan los trabajos de Galileo, Newton y Fourier, entre otros. En estos trabajos se trata de cambiar el esquema aristotélico de la física e iniciar el método científico, que redundó en algunos métodos vectoriales tales como la descomposición de las fuerzas en componentes con sistema mecánicos (paralelogramo de fuerzas), en la descripción de la velocidad y aceleración. Además, se favorece el concepto de espacio vectorial y los espacios generados en ellos. Estas ideas dan pie a fomentar un camino hacia el desarrollo del pensamiento vectorial.

Este análisis epistemológico inicial pretende evaluar la pertinencia y el impacto de una propuesta teórico-metodológica para el desarrollo del Pensamiento Vectorial en el curso de Cálculo Vectorial, basado en la resolución de problemas, en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Con base en la problemática expuesta anteriormente, surge el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial en el contexto de la resolución de problemas en estudiantes de la Universidad Antonio Nariño?

En la investigación se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Cálculo Vectorial en el nivel universitario.

En función de resolver el problema planteado se propone como **objetivo general**: avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial en el contexto de la resolución de problemas en estudiantes de la Universidad Antonio Nariño.

Se precisa como **objetivos específicos**:

1. Explorar e indagar la evidencia histórica de la matemática y el camino trazado por los matemáticos que permitieron dar paso a la generación de los conceptos propios del análisis vectorial y las estrategias de pensamiento evidenciadas en sus trabajos.
2. Diseñar e implementar actividades de aprendizaje basadas en problemas retadores en el marco de la resolución de problemas para los estudiantes de Ingeniería de la UAN.
3. Validar el sistema de actividades analizando los resultados obtenidos en los estudiantes luego de haber implementado las actividades.

4. Evaluar la evolución de los estudiantes en la resolución de problemas del Cálculo Vectorial, y con base en éstas, caracterizar el Pensamiento Vectorial de los estudiantes de Ingeniería de la UAN.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de caracterización del Pensamiento Vectorial en el contexto de la resolución de problemas en estudiantes de Ingeniería.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presenta la siguiente **hipótesis científica**: un sistema de actividades sustentado en la resolución de problemas, en la heurística, en el uso de la tecnología, en la manipulación, en la visualización, en la modelación como herramienta didáctica y en la conformación de equipos de trabajo, donde se fomente el liderazgo, la participación y la identidad, favorece el desarrollo del Pensamiento Vectorial en los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño y permite avanzar en su caracterización.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

- Determinar el estado el arte del proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Cálculo Vectorial, en particular sobre la caracterización del Pensamiento Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Determinar el marco teórico referente al proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Vectorial, en particular sobre la caracterización del pensamiento vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Determinar las premisas y principios para la caracterización del Pensamiento Vectorial en los estudiantes.
- Diseñar un sistema de actividades que permita avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial en los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño.
- Determinar la viabilidad del sistema de actividades.

- Analizar los resultados de las actividades.
- Avanzar en caracterizar el Pensamiento Vectorial en estudiantes de la Universidad Antonio Nariño.

El **aporte práctico** radica en un sistema de actividades sustentado en la resolución de problemas matemáticos retadores, en la heurística, en el uso de la tecnología, en la manipulación, en la visualización, en la modelación como herramienta didáctica, que propicie avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial en estudiantes de la Universidad Antonio Nariño.

El **aporte teórico** consiste en mostrar avances sobre la caracterización del Pensamiento Vectorial en estudiantes de la Universidad Antonio Nariño. También se aporta un sistema de relaciones y cualidades entre las categorías que sustentan las actividades, las cuales son fundamentales para la caracterización del Pensamiento Vectorial.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte del Cálculo Vectorial y sobre la caracterización del Pensamiento Vectorial. En el segundo, se explicitan los fundamentos teóricos al Cálculo Vectorial, su Enseñanza - Aprendizaje y de la caracterización del Pensamiento Vectorial. En el tercer capítulo se expone la metodología de la investigación. En el cuarto capítulo se presenta un sistema de actividades que propicia el avance de la caracterización del Pensamiento Vectorial. En el quinto capítulo se realiza una valoración de la implementación del sistema de actividades en la práctica y se avanza en la caracterización del Pensamiento Vectorial.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

El proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial, por su importancia en las carreras de ingeniería ha sido investigado desde diferentes contextos. En las investigaciones se precisan las potencialidades del tema, las dificultades que presenta y se proponen nuevas formas para enseñar en el aula. A continuación, se presentan algunos textos y artículos sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje en el contexto del Cálculo Vectorial.

1.1. Análisis de textos clásicos sobre el Cálculo Vectorial

1.1.1. Cálculo Vectorial[1]

Marsden & Tromba (2004) en su libro clásico de Cálculo Vectorial exponen, además de la teoría estándar del curso, la noción intuitiva y formal de forma diferencial y revelan la conveniencia del uso de ellas, para expresar de una manera unificada los teoremas de Green, Stokes y Gauss, la cual refleja una caracterización de un tipo especial de pensamiento en el estudio de los conceptos, y que fue una parte de la inspiración de esta investigación.

El libro define las 0 – formas, 1 – formas, 2 – formas y 3 – formas diferenciales como expresiones puramente formales respecto de las cuales se definen operaciones de espacio vectorial más derivación e integración de estas formas. Concluyen con la versión unificada de los teoremas antes mencionados y la potencia de la anterior notación junto a algunos ejercicios interesantes para llevar a la práctica.

En criterio del investigador, este método de mostrar la teoría involucrada por los autores puede mejorarse, mostrando ejemplos más visuales y concretos, reforzados por la tecnología y que permitan hacer una medición y caracterización del pensamiento de los conceptos mostrados.

---

[1] Marsden, J. E. & Tromba, A. J. (2004). *Cálculo Vectorial*. Edición 5, Addison Wesley.

1.1.2. Differential forms: A complement to Vector Calculus[2]

Este texto realiza un estudio detallado y muy práctico de las formas diferenciales y en su cálculo, para posteriormente hablar de las consecuencias geométricas que resultan y dar una muy buena introducción a las variedades diferenciales que son copias locales de un espacio vectorial euclidiano. El investigador nota que este libro resulta ser una continuación de la teoría expuesta en el libro de Marsden & Tromba, donde se toca muy brevemente el desarrollo de las formas diferenciales y deja al lector interesado en saber más de esta teoría.

También el investigador nota que la visualización mostrada en este texto es muy acorde a los objetivos del curso y da lugar a utilizar más herramientas tecnológicas de fácil acceso y que permitan ver todo el potencial y el alcance del pensamiento que se piensa instaurar. Los problemas propuestos en el texto son de alto nivel de complejidad, pero no hay un camino claro que guíe al estudiante a la consecución de la solución de los mismos. En conclusión, es un libro de texto que puede desarrollar gran parte del curso, pero que deja de lado el tratamiento didáctico, que es bueno pero insuficiente para un aprendizaje en contexto en las carreras de ingeniería, donde se requiere la modelación de fenómenos observados.

1.1.3. Cálculo en Variedades[3]

Este es uno de los textos más citados en la matemática actual por su elegancia para presentar los temas del curso de Cálculo Vectorial. Comienza con la teoría matemática subyacente a las variedades diferenciales como lo son los espacios euclideos.

---

[2] Weintraub, S. (1997). *Differential forms: A complement to Vector Calculus.* London. Academic Press.
[3] Spivak, M. (1988). *Cálculo en variedades.* Universidad de Brandéis. EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Se habla de la integración de cadenas y presentan el teorema de Stokes sobre cadenas como único Teorema Fundamental del Cálculo en variedades. Vale la pena decir que el contenido del libro es puramente matemático sin preocuparse por sus implicaciones a la enseñanza del Cálculo Vectorial, pero del cual se pueden deducir metodologías para esta enseñanza.

En la extracción de la metodología mostrada en este libro se dedujo el carácter formalista del mismo. Para que puedan ser remarcables en los estudiantes estas teorías tan densas, la posición del investigador es que se debe modificar el lenguaje presentada en ellas. Para ello se cuenta con unas actividades que se enfocan en alcanzar dicho objetivo y de las cuales se concluyan los mismos resultados pero por medio de métodos más intuitivos y replicables en el tiempo.

1.1.4. Calculus Made Easy[4]

En este libro se expone uno de los paradigmas más importantes en la enseñanza del cálculo. Sin usar las definiciones de épsilon y delta del límite formal, presenta estos nuevos conceptos del cálculo de una manera que se puede entender sin este enfoque tan árido para la mayoría de estudiantes. Temas como las reglas de las derivadas demostradas por medio de cantidades infinitamente pequeñas que son negligibles, y la geometría de estos diferenciales, hacen ver al estudiante que se puede comprender tales construcciones sin la necesidad de formalismos que obscurecen el horizonte de la solución de algún problema.

Con un lenguaje poco tradicional, la exposición de los temas se hace agradable y no empaña la veracidad y la elegancia de los resultados. Es sin duda uno de los libros que merece la atención de la comunidad de educadores matemáticos.

[4] Thompson, S. and Gardner, M. (1998). *Calculus Made Easy*. New York: St. Martin’s Press.

Se considera que este texto bien puede adaptarse a las necesidades de la investigación y sería un muy buen ejemplo de cómo es hacer matemáticas sin una base formalista y más bien intuitiva de los conceptos del cálculo. El aporte en el aula de este enfoque radicará en una mejor comprensión de las distintas modelaciones que se presenten en un problema y de cómo el estudiante tomará partido de las herramientas conceptuales que se le presenten, sin pensar en lo que realmente significa el concepto sino solo utilizarlo para la resolución de una tarea específica. De esta manera se sacaría como producto agregado una caracterización del Pensamiento Vectorial utilizado por los estudiantes en su práctica.

1.1.5. Vector Mechanics for Engineers. Statics and Dynamics[5]

Este es un libro de texto muy utilizado en la mayoría de carreras de ingeniería donde se encuentra la teoría de la dinámica y la estática. La presentación del texto es clásica al tomar su camino didáctico como: presentación de las fórmulas sin deducciones, realización de un ejemplo ilustrativo y una buena cantidad de ejercicios donde varía la dificultad en cada caso, pero siendo latente la carencia de una línea coherente de lo que se pretende con los problemas.

El investigador piensa que, a pesar de ser un libro muy citado y usado como fuente bibliográfica en la ingeniería, tiene vacíos metodológicos y didácticos muy marcados en cuanto a la visualización y la abstracción propia de los conceptos. Pero tiene una gran ventaja con respeto a los otros textos, ya que es más contextualizado en lo que a ejemplos y problemas se trata.

Valdría la pena tomar las partes positivas del texto y replicarlas en la investigación, en cuanto a determinar el tipo de pensamiento involucrado en él y en la manera como se podría mejorar la presentación de los temas.

[5] Beer, F.P; Johnston, E.R; Eisenberg, E.R. (2010). *Vector Mechanics for Engineers. Statics and Dynamics*. [9] Edition. Mc Graw Hill.

1.1.6. Cálculo Vectorial[6]

Este texto contextualiza varias formas de tratar el curso de Cálculo Vectorial desde la parte tecnológica, haciendo uso de las herramientas computacionales Maple y Matlab, donde solo se realiza un pequeño tratamiento teórico de los temas del curso y una gran parte en problemas propuestos para el estudiante. El investigador discrepa de la forma didáctica tratada en este texto, pues se limita a realizar algunas graficas poco comprensibles y ejercicios con alta carga teórica y formal.

En el texto en este sentido no hay una conexión entre los temas y los problemas que refuercen los mismos. Aunque el texto muestra cómo realizar algunos comandos en Matlab para realizar las gráficas, el investigador toma esta forma y la implementa en su investigación, aportando nuevas herramientas tecnológicas que permita hacer uso de la visualización en los estudiantes.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en el nivel universitario

1.2.1. Using Differentials to Bridge the Vector Calculus Gap[7]

En este artículo se presenta una manera novedosa de utilizar las diferenciales como herramienta nemotécnica para resolver problemas asociados con derivadas e integrales de funciones escalares y vectoriales.

---

[6] Malakhaltsev, M., y Arteaga, J., (2013). *Cálculo Vectorial*. Bogotá: Universidad De Los Andes.
[7] Dray, T. & Manogue, C. (2003). *Using differentials to bridge the vector calculus gap*, College Math. J. 34, 283–290.

Los autores utilizan como elementos novedosos las concepciones tomadas en su artículo anterior en cuanto a la geometría de las diferenciales y cómo estas concepciones permiten al estudiante tener otro punto de vista de temas como las integrales de línea y de superficie más allá de los textos tradicionales.

Muestran como la discusión acerca de las diferenciales tomadas en el contexto educativo tienen una ventaja al acercamiento del estudiante de manera geométrica y de manejo de fórmulas que él posee. Esto justifica la razón por la que los autores llaman “use what you know” como filosofía de su artículo. Comparan la experiencia que tuvieron en dos instituciones educativas donde contrastaron el modelo tradicional y el que ellos proponen. Los resultados mostraron que al tener una versión más geométrica del asunto los estudiantes comprendieron mucho más los temas tratados.

A modo de ver del investigador, este estudio mostrado puede mejorarse, incorporando otros marcos teóricos que permitan evidenciar el Pensamiento Vectorial inherente en ellos y su impacto en el aula. Este es uno de los principales objetivos de esta investigación.

1.2.2. Putting Differentials Back into Calculus[8]

En este trabajo se presenta la versión que se tiene en distintos libros de las diferenciales y su uso, no tomado extrañamente en aquellos libros, en la resolución de problemas en distintos temas del cálculo diferencial.

Los autores comienzan hablando del contraste entre diferencial como función y diferencial como la aplicada a ecuaciones, donde la primera se utiliza en el cálculo integral sin ninguna limitante al hacer los distintos métodos de integración, y la segunda se presenta en el cálculo diferencial como aplicada a resolver derivadas implícitas y problemas de optimización. Muestran la ventaja que tiene hacer esta

[8] Dray, T. & Manogue, C. (2010). *Putting Differentials Back into Calculus*, College Math. J. 41 No. 2.

derivación para el estudiante y su posterior comprensión del concepto que se adquiere en estas asignaturas. Vale la pena decir que este es un trabajo más claro que el que mostraron los mismos autores en [7], pues ya se tenía la experiencia de implementar esta nueva forma de abordar los conceptos del cálculo.

Considera el investigador que esta es una etapa clara en la toma de las ideas presentadas para este proyecto, pero enfocado hacia la dirección del Cálculo Vectorial, pues la asignatura está en el afluente entre estos dos conceptos de derivadas e integrales y de cómo el Pensamiento Vectorial puede mejorar y generalizar los resultados obtenidos en estas dos ramas.

1.2.3. On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra[9]

En este visionario artículo de Anna Sierpinska, independientemente de Hillel (2000) con sus modos de descripción (geométrico, algebraico y abstracto), se distinguen tres tipos de pensamiento en álgebra lineal que están muy cercanos al tipo de pensamiento que se pretende desarrollar en esta investigación, y que están ligados epistemológicamente a la desaritmetización de la geometría y el rechazo de la "intuición geométrica" a solo un dominio aritmético.

Estos tres modos de pensamiento forman la base de una caracterización del pensamiento en Álgebra Lineal. Se dan bastantes ejemplos de estos tipos de pensamiento en distintos conceptos de la asignatura, junto con algunas actividades que reflejan la interacción entre estos modos.

Estas actividades reflejan, en cierto sentido, la estaticidad de los entes geométricos involucrados en el estudio (sistemas de ecuaciones lineales, paralelismo, cambios de base, transformaciones lineales)

---

[9] Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students´ thinking in Linear Algebra*. En Dorier, J.L. (Eds.), The teaching of Linear Algebra in question (pp. 209-246). Netherlands:Kluwer Academic Publishers.

que, aunque se da una idea acertada de estos modos de pensamiento, es incompleto en la forma de abordar los conceptos de una manera dinámica e interactiva, que potencie la adquisición de los mismos para un curso basado en gran parte en el Álgebra Lineal, pero con el énfasis del movimiento, como lo es el Cálculo Vectorial.

Además de contrastar y valorar los distintos modos de pensamiento para el Álgebra Lineal, la autora muestra una carencia fundamental en el último modo de pensar (Analítico - Estructural), pues los estudiantes en el estudio se inclinaban más por el modo Analítico – Aritmético, haciendo notar que es el pensamiento dominante históricamente de la matemática en general.

Uno de las principales tareas en esta investigación es complementar, mejorar, potenciar y generalizar estas ideas, pero para el curso en cuestión, donde se vean involucradas más teorías y marcos teóricos que puedan aportar al objetivo del avance en la caracterización del Pensamiento Vectorial.

1.2.4. Teaching and Learning of Calculus. ICME 14[10]

En este compendio de trabajos se encuentran las tendencias en las investigaciones actuales del cálculo a nivel mundial. Se hablan sobre metodologías, de realización de currículos, un análisis de la situación de la investigación a nivel mundial y se proponen nuevos ámbitos de estudio para posteriores trabajos.

Cabe resaltar que en esta fuente no se encontraron temas relacionados al objeto de esta investigación de ninguna índole, por lo que se considera el tema pertinente y un objeto de investigación reciente. Más de este compendio se pretende tomar algunas ideas de los más recientes avances en cuanto a la modelación, visualización y aprendizaje en contexto.

[10] *Teaching and Learning of Calculus* (ICME 14). Springer.

1.2.5. ERME Book Chapter – Discussion Sessions. CERME 11[11]

En el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (**CERME 11**) que se realizó en el año 2019 en Holanda, se realizaron diferentes aportes y discusiones sobre diferentes teorías de la educación que marcarían las pautas para el futuro. De los marcos teóricos que existen cabe resaltar que el uso de las tecnologías fue uno de los principales objetos de estudio por parte de los investigadores.

Aunque no mencionan el tema explícito del cálculo y sus distintas ramas, si es analizado el papel de las tecnologías para el aporte conceptual de muchos objetos matemáticos que puedan tener un carácter geométrico. Tal es el caso de los grupos de trabajo temático sobre enseñar y aprender matemáticas con tecnología y otros recursos (TWG 15 y TWG 16a). El investigador pretende tomar algunas ideas sustentadas en estas discusiones y enfocarlas en el Pensamiento Vectorial para el avance de su caracterización y posterior análisis.

1.2.6. Enseñanza del Cálculo Vectorial en el Contexto de la Ingeniería: Una Revisión Bibliográfica[12]

Este artículo muestra una revisión bibliográfica y metodológica de la problemática sobre los aspectos que causan inconvenientes en el entendimiento de los conceptos del Cálculo Vectorial en los estudiantes de ingeniería. Aunque algunas propuestas que la autora hace son obvias sin aportar algo nuevo a la vista (como el aprendizaje en contexto o el uso de las TIC), hay algunas como la de tomar el rol de la historia en este contexto, donde el investigador cree que es una temática interesante.

---

[11] *ERME Book Chapter – Discussion Sessions*. CERME 11.
[12] Costa, V. A. & Arlego M. (2011). *Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – ICIECyM

El investigador piensa que aquel encuadre metodológico del que trata el artículo se puede extender más al tratar como objeto fundamental del curso el de forma diferencial y su posible anclaje a los temas más inhóspitos del Cálculo Vectorial, mediante un análisis de la geometría en el espacio por medio de la modelación, la cual no se presenta en el artículo citado.

1.2.7. Conceptual Understanding of Dot Product of Vectors in Dynamic Geometry Environment[13]

Entendiendo que es un artículo basado en Álgebra Lineal, se tiene un interés particular en él dado que se toma la teoría de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) que hacen de este trabajo un muy buen aporte a la presente investigación.

El artículo trata de los modos de descripción de Hillel y de los modos de pensar de Sierpinska junto con un análisis cuantitativo de las diferentes reacciones de los estudiantes en ese entorno dinámico creado para tal fin. Esta es una temática moderna que permite vislumbrar el camino que siguen las investigaciones recientes, donde el contexto de sistemas geométricos dinámicos es clave para la investigación en curso mostrada acá.

Cuando define el producto punto desde el punto de vista de los tres modos de pensar el Álgebra Lineal, se deja un énfasis, como lo hacen las demás investigaciones, que los estudiantes en general optan por la manera aritmética de pensamiento, pero junto a las actividades dinámicas en applets presentadas, dejan de lado ese modo de pensamiento sin formulaciones y van en general hacia el modo de pensar geométrico.

---

[13] Donevska-Todorova, A. (2015). *Conceptual Understanding of Dot Product of Vectors in a Dynamic Geometry Environment*. The Electronic Journal of Mathematics & Technology 9(3).

El estudio concluye afirmando que es posible hacer un vínculo entre el modo axiomático con el geométrico de pensamiento, y unifica la manera trigonométrica de ver esta operación de vectores. El investigador sugiere tomar esta teoría y modificarla al contexto del curso de Cálculo Vectorial para visualizar curvas y superficies.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de caracterización del Pensamiento Vectorial en el contexto de la resolución de problemas

1.3.1. Cálculo de Varias Variables. Trascendentes Tempranas[14]

Este es el libro de texto más utilizado en el contexto educativo mundial. Esto se da gracias a su tratamiento didáctico adecuado para el curso de Cálculo Vectorial, su empalme entre la resolución de problemas que sigue todo el libro siguiendo los cuatro pasos de Polya, y la buena visualización de casi todo el contenido. Trata de contextualizar la teoría a un nivel físico, como lo hace la mayoría de textos, pero deja de lado algunas aplicaciones importantes en la ingeniería, tal y como son las de la mecatrónica (robótica), industrial (producción), etc.

El investigador pondera que este texto, a pesar de ser uno muy bueno en su forma general, deja de lado la abstracción necesaria para realizar problemas a un nivel superior o problemas más retadores. Cabe destacar que el Pensamiento Vectorial tratado en el libro es casi nulo y se cree que el hacer su estudio y caracterización respectiva ayudaría en gran medida a solucionar los problemas mencionados anteriormente.

[14] Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* Séptima edición. Brooks – Cole / Cengage Learning.

1.3.2. Vector Analysis[15]

La serie de compendios Schaum se ha caracterizado por mostrarnos textos en los cuales la teoría expuesta de manera simple puede ser reforzada con bastantes problemas resueltos y problemas propuestos acorde con el grado de dificultad de cada temática. En el caso de este libro, vale la pena destacar que, aunque el autor no lo haga explícito, queda la consigna que pregunta si un ejercicio resuelto podrá realizarse por otro camino u otro método, y después de ello ¿será posible realizar un problema propuesto de otra manera como el expuesto que conlleve a la misma solución?

Para el investigador, la anterior pregunta es el punto más interesante de este texto, pues recordando la manera como se trabaja en Olimpiadas Matemáticas, sería muy útil proponer un problema donde el pensamiento divergente del estudiante lo lleve a conjeturar una o varias maneras de resolver el problema en cuestión, algo que se cree se recogerá como subproducto el Pensamiento Vectorial propuesto en este trabajo.

A pesar de la poca visualización tomada por el autor de este texto, deja entrever el camino por donde quiere llevar al estudiante: generalizar los resultados expuestos y llevarlos al terreno del análisis tensorial, donde el investigador cree que existe una aplicación que conlleve al avance de la caracterización del Pensamiento Vectorial en estudiantes de Ingeniería.

[15] Spiegel, M. R. (1967). *Vector Analysis*. McGraw – Hill Book Co., U.S.A

1.4. Investigaciones sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial, en particular sobre el proceso de caracterización del Pensamiento Vectorial en el contexto de la resolución de problemas en estudiantes colombianos

1.4.1. Cálculo Vectorial[16]

En este texto que pretende ser unas notas de clase para las carreras de Ingeniería de la ECI, se menciona una notación muy novedosa de los temas del curso de Cálculo Vectorial, recordando la notación de la matemática hecha por George Papy que, según el criterio de los autores, tan buenos frutos han dado para la enseñanza de la matemática en cuanto a su aporte didáctico y maniobrabilidad de los términos involucrados en una teoría particular, en especial de la geometría.

El texto no deja claro la resolución de problemas, salvo por algunos ejercicios que introducen al estudiante a la teoría matemática de las superficies y sus integrales, para dar un ejemplo. Mediante una conversación realizada por el investigador y los autores del texto, ellos manifestaron que el texto no fue bien aceptado por parte de la comunidad estudiantil de la ECI, y ello se debió a la complejidad abordada en los temas del curso y su extenso formalismo para dar los temas.

El investigador pretende analizar cómo el Pensamiento Vectorial ayuda a mejorar la componente didáctica del texto y refinarla para bien de su investigación, tomando como punto de partida realizar una matemática más intuitiva y menos formal, sin perder el rigor que caracteriza esta asignatura.

[16] Acosta, E. y Aldana, B. (2013). *Cálculo Vectorial*. Notas de clase. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

1.4.2. Una Estrategia Didáctica para la Enseñanza del Concepto de Espacio Vectorial con Ayuda del WINPLOT y WX-MÁXIMA[17]

En este proyecto de investigación se muestra, de manera estadística, la implementación de algunos recursos tecnológicos como el Winplot y el WX-máxima para la enseñanza de algunos contenidos, bastante escasos, del curso de Álgebra Lineal por medio de la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS).

Aunque la investigación se basó en el estudio del espacio vectorial de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, se vio que la implementación de las TIC aporta de manera benéfica a la representación de tales espacios en los estudiantes, aunque el objeto del estudio fuera validar por prueba de hipótesis los resultados obtenidos, lo cual pierde todo el carácter de una investigación en Educación Matemática.

El investigador cree que tales herramientas utilizadas son bastante robustas para la implementación en el aula, al no ser de fácil acceso ni de fácil utilización por parte de los estudiantes que no poseen tales programas. Así, se sugiere que a través de ejemplos concretos que sean de la especialidad del curso, se pueda hacerse de una plataforma coherente y sencilla de usar que modele ciertos fenómenos de soluciones de algunos problemas.

[17] Bohórquez, L. y Yepes, C. (2014). *Una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de espacio vectorial con ayuda del WINPLOT y WX-MÁXIMA.* Repositorio, Universidad Sergio Arboleda.

1.4.3. Secuencia didáctica para la Enseñanza del Álgebra Vectorial a partir de la Geometría Euclidiana y Analítica[18]

En la tesis presentada se muestra la construcción del concepto de vector mediante su representación para estudiantes de básica media en las asignaturas de geometría analítica y física, donde se mostraron evaluaciones diagnósticas que evidenciaron obstáculos de aprendizaje del concepto mencionado.

El investigador resalta que la tesis toma un carácter histórico en el cual introduce el concepto de vector y presenta su evolución, lo cual se está realizando más profundamente en la realización de la tesis presente, aunque el autor solo menciona lo relacionado con Álgebra Lineal.

En lo referente a las TIC nada nombra tal estrategia metodológica y didáctica, la cual el investigador cree que puede tener un buen fin al tratar de modelar la matemática del movimiento y que permita profundizar mucho más en la temática del artículo mencionado en estos párrafos.

1.4.4. M-learning y realidad aumentada, tecnologías integradas para apoyar la enseñanza del cálculo[19]

Este artículo trata del uso de dispositivos móviles (Moving Learning) como apoyo en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje en los cursos de cálculo. Mediante una propuesta de realidad aumentada se pretenden desarrollar los contenidos de los cursos de Cálculo, pero los autores indican que no se ha desarrollado para los contenidos de Cálculo Vectorial.

[18] Urrego, J. (2016). *Secuencia didáctica para la enseñanza del algebra vectorial a partir de la geometría Euclidiana y Analítica.* bdigital.unal.edu.co
[19] Pedraza, L. Valbuena, S. (2014). *M-learning y realidad aumentada, tecnologías integradas para apoyar la enseñanza del cálculo.* Revista de investigaciones - hemeroteca.unad.edu.co.

El investigador señala que tales apps existentes en la actualidad reflejan mucho de lo que este artículo pretende, pero ya llevado a otros contextos, tales como la matemática discreta y álgebras de Boole, y en el contexto de la investigación presente refleja la manera como la metodología ha venido cambiando por la aparición de tales herramientas tecnológicas.

También es importante destacar que la investigación en curso tomará tales herramientas tecnológicas y creará modelos pertinentes que sustenten el trabajo en el aula, esto con el fin de evidenciar un Pensamiento Vectorial inherente en los procesos de solución de un problema en contexto.

1.5. Conclusiones del capítulo 1

En este capítulo se abordaron algunas fuentes bibliográficas que existen en la literatura investigada y actual. Aunque se ha revisado de manera juiciosa diferentes revistas, artículos, congresos y páginas web, puede que haya otro tipo de resultados de relevancia que podrían encontrarse en el futuro, el cual será estudiado en detalle y se seleccionará lo que es o no de interés para la investigación en curso, más algún aporte al tema que beneficiará no solo a la investigación sino a la comunidad de Educación Matemática.

Las tendencias en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Cálculo Vectorial en general son muy formales, dado que todavía la didáctica de este curso se rige por un lenguaje poco flexible y hasta incomprensible dado por los formalismos de los axiomas, pasando por la tendencia del Pensamiento Visual requerido para abordar la mayoría de los temas del curso, sin dejar de lado los procesos y algoritmos propios de la asignatura, donde el paso de unión e interacción de tales concepciones parece ser algo intrincado. En este sentido el análisis desde la perspectiva del Pensamiento Vectorial servirá para mejorar y robustecer los conceptos del curso y hacer el empalme de estas tendencias.

En las diversas fuentes investigadas se trató de determinar el estado actual de cada una de ellas y su correspondiente pertinencia para el curso de Cálculo Vectorial y de la investigación en curso, más detalladamente si aparece y cómo se aborda el Pensamiento Vectorial, su tratamiento didáctico, la visualización (ya sea con el uso o no de las TIC´s) que toma cada texto o artículo seleccionado, cómo la resolución de problemas se involucra en la teoría y la manera en que se presentan los problemas propuestos y resueltos, y el nivel de abstracción y generalización desarrolladas en un análisis – síntesis.

Todo ello para determinar si existe una manera sólida de concatenar lo anterior en la base del proceso de caracterización del Pensamiento Vectorial, que permita al estudiante de Ingeniería adquirir los conceptos propios del curso y replicarlos en algún problema de su contexto específico.

Se estima que con el anterior estado del arte presentado se tendrá una buena base para empezar la investigación, cimentada por la experiencia del trabajo en el aula del investigador y de la formación que ha recibido.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se consideran los fundamentos teóricos y las bases que soportan esta investigación. Algunas se han nombrado anteriormente en el estado del arte, pero aquí se brindan las bases más cimentadas en cuanto a la Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial.

2.1. Referentes del Pensamiento Matemático Avanzado

El pensamiento matemático como tema de estudio se divide en dos partes fundamentalmente, que es el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Aunque se dan casos en los cuales no hay mucha claridad entre el uno y el otro de estos dos tipos de pensamiento, a continuación, se esboza sus similitudes y diferencias, haciendo énfasis en el PMA.

El PMA es aquel que involucra el uso de estructuras cognitivas producidas por un gran crisol de actividades matemáticas que permiten al individuo construir nuevas ideas que se continúan creando y extendiendo en un sistema creciente de teoremas demostrados. El PME será entonces aquel pensamiento intuitivo que se puede identificar algorítmicamente o con un proceso de reflexión en el trabajo matemático involucrado.

Para Tall (1990) el máximo representante de esta escuela, el paso del PME al PMA ocurre cuando se trasciende de describir a definir, se pasa de convencer a demostrar de forma lógica basada en esas definiciones, se progresa en la coherencia de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas basadas en entidades abstractas, que el individuo debe construir a través de definiciones formales y donde se requiere una reconstrucción cognitiva. El pensamiento matemático comienza con los objetos físicos y las operaciones sobre los objetos (Tall, 2013).

Por otra parte, Tall (2013) formula que los orígenes del pensamiento matemático están dados en *"cómo la mente a través de conceptos materializados en objetos da origen a las matemáticas"*[20]. El pensamiento matemático comienza en la percepción, con el apoyo de la acción sensorio - motora y se desarrolla a través del lenguaje y del simbolismo.

Para Dreyfus (1991) el PMA consiste en una gran variedad de procesos de componentes interactivos, tales como: representar, analizar, clasificar, verificar, manipular, traducir, modelar, visualizar, generalizar, conjeturar, inducir, sintetizar, abstraer y formalizar. Los procesos de representar y abstraer son los que más promueven avances en la comprensión y el manejo de situaciones matemáticas complejas. Afirma que la abstracción no es exclusiva del PMA. Se considera que una parte vital del PMA que aplica a esta investigación es la dada por este enfoque.

Como parte de los procesos de componentes interactivos está la visualización, la cual es fundamental para el desarrollo del PMA, en particular el Pensamiento Vectorial. Para De Guzmán (1993) la visualización en matemáticas no es sinónimo de lo que los psicólogos llaman visualización. La visualización en matemáticas adopta otra filosofía.

El trabajo en las formas adaptativas del Cálculo Vectorial requiere de alguna manera poder intuir, por lo menos de manera somera, algún tipo de geometría de la situación que se está resolviendo. Esto de por sí ya genera una herramienta importante en la resolución de problemas y una posible generalización de los resultados obtenidos, pues estos objetos permiten una manipulación, ya sea mental o visual que trasciende al concepto mismo que se estudia. Aquí recae la importancia de tener un contexto visual en el trabajo con el Cálculo Vectorial en el aula.

[20] Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge. Capítulo 13.

Según Presmeg (2006) cuando una persona crea un arreglo espacial existe una guía creativa y visual de tal arreglo que permite procesar, construir y moldear la naturaleza del concepto espacial que está inmerso en el trabajo matemático. Este criterio muestra la forma recíproca de la toma del objeto matemático de visualizarlo y transformarlo, criterios que son necesarios en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial.

Para Arcavi (2003) la visualización permite, además de las anteriores propuestas esbozadas, utilizar herramientas manuales o tecnológicas para alcanzar el propósito de una representación robusta y desarrollar las maneras de comunicación que se deducen de lo hecho en este proceso, lo cual es clave como fin del lenguaje matemático; el de poder expresar los resultados obtenidos de una manera clara y replicable que haga comprender y fortalecer el concepto tratado.

Los rasgos de estas definiciones son muy similares, en las cuales se evidencian las operaciones de las imágenes mentales y visuales, que se realizan mediante los procesos señalados y justifican plenamente el objetivo de esta investigación.

Una de las estrategias para desarrollar el PMA en el aula en el trabajo propuesto es enfatizar este cambio mental mediante el uso de las TIC, que a través de un software dinámico se permita el estudio de los conceptos propios de la asignatura y asumirlo en su parte geométrica y sus interpretaciones.

Sobre la base del PMA en el Cálculo Vectorial la idea que se tiene de la investigación va encaminada a:

- Ampliar la visión de la visualización más allá de sus aspectos semióticos.
- ¿Cómo se encarnan las ideas matemáticas?
- La conexión entre los diferentes entes matemáticos y su flexibilidad.

- La necesidad de dar consistencia a las teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro del estudio.
- El avance de la caracterización de un Pensamiento Vectorial, que permita entender los procesos cognitivos de los estudiantes para la construcción de significado de conceptos.

Es de destacar que el Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado son bases para el desarrollo del Pensamiento Vectorial.

2.2. Modos de pensamiento en Álgebra Lineal de Sierpinska

Como ya se mencionó anteriormente en el estado del arte, este marco teórico se basa en los modos de pensamiento que son:

- Sintético – Geométrico: Basado en el lenguaje de las figuras geométricas.
- Analítico – Aritmético: Basado en el lenguaje de los algoritmos.
- Analítico – Estructural: Basado en el lenguaje de las estructuras.

El marco de referencia sugiere que cualquier concepto y forma de resolución de un problema en esta asignatura tiende a sustentarse por alguno o varios modos de pensar, que pueden ser directos o indirectos, dependiendo de la estructura del concepto o del problema.

A efectos prácticos, los primeros conceptos de productos escalares y vectoriales se ven desde estas tres perspectivas directamente, y aplicado en el aula hay estudiantes que manifiestan algún tipo de pensamiento más que otro, que en general es el pensamiento Analítico – Aritmético.

Como un análisis epistemológico de estos tipos de pensamiento, la autora muestra que desde Descartes con su geometría analítica (aritmetización de la geometría) hasta la geometría intuitiva que existe en los espacios de Banach (desaritmetización de la geometría) la historia del Álgebra Lineal es vista por la interacción continua de estos cambios de perspectiva para poder tener una comprensión profunda de los conceptos, para así poder solucionar problemas.

En el pensamiento Sintético – Geométrico se distingue por sobretodo la forma geométrica deducida o interpretada de un concepto o problema, que a su vez puede que solo esa interpretación sea suficiente para poder analizar sus conexiones con otros conceptos o resolver el problema en cuestión.

Esto se asemeja a lo que actualmente se conoce como Pruebas Sin Palabras (Proof Without Words), en donde se destacan ciertos grupos de investigación muy fuertes que buscan hacer demostraciones de manera ya sea geométrica o por axiomas en forma de flechas (Teoría de la Demostración). Vale la pena decir que este tipo de pensamiento no es propio del Álgebra Lineal.

En el pensamiento Analítico – Aritmético se distingue la formulación y la manera de ver el concepto o problema como meramente procedimental y algorítmico. Este modo de pensar es siempre el más recurrido por los estudiantes en nivel de preparación, pues es una manera "segura" de obtener y llegar a los resultados propuestos.

En diferentes investigaciones basadas en este marco teórico, se concluye que el estudiante al no poder ver o asimilar otra forma de pensar el concepto o el problema, opta por hacer cálculos sobre este sin ver un objetivo u horizonte a donde llegar. Este es un punto de quiebre de estos artículos, donde se ha escrito desde muchas perspectivas, como desde la que la historia ha favorecido este tipo de pensamiento, hasta la de que no había herramientas teóricas disponibles para poder generar una interacción entre ellas, que a su vez conlleven a una solución elegante pero comprendida por el estudiante.

En el pensamiento Analítico – Estructural se distinguen los objetos matemáticos por un conjunto de axiomas o propiedades que las satisfacen. Para el Álgebra Lineal, estos objetos son los que se encuentran al final de la asignatura, referidos a los espacios vectoriales, sus diferentes conjuntos (núcleo e imagen) y las transformaciones lineales.

Históricamente se ha visto que estos conceptos no son de fácil comprensión por parte de los estudiantes, al tratar con un lenguaje puramente formal, donde también la forma como surgieron estas ideas no ha tenido una modificación substancial y es propensa a ser mejorada.

Desde un punto de vista matemático, este modo de pensar ha sido característico de la rama pura de las matemáticas, donde el estudiante que sale airoso en una asignatura es porque ha comprendido los esquemas de demostración y sus distintas conexiones que abarquen otros resultados y teorías. Esto genera una frontera teórica entre la matemática pura y la matemática aplicada, es por ello que no hay muchos estudiantes que opten por llegar a desarrollar este modo de pensar en Álgebra Lineal.

Pero desde cierto acercamiento, este modo de pensar es más elegante y más compacto ontosemioticamente hablando, pues los resultados se deducen de tipos de propiedades inherentes a los objetos matemáticos tratados. Es por ello que ciertos grupos de investigación están enfocados en tratar de esbozar caminos entre este modo de pensar con los otros modos generalmente desarrollados con anterioridad.

2.3. Fundamentos del modelo DNR de Harel

Este componente se concibe desde la fundamentación teórica realizada por Harel (2008 a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este trabajo, Harel (2008) a) plantea como propósito principal de la educación matemática desarrollar el razonamiento matemático del estudiante; razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. El DNR basa su fundamentación en tres componentes: La Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R).

Tal escuela de pensamiento surge de dar sentido a las respuestas de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas y de cómo se debería enseñar, para lo cual existen como guía de desarrollo la enseñanza, la integridad de los contenidos (integridad matemática) y la necesidad intelectual del estudiante.

Sobre la integridad matemática, hay que destacar que ella determinará las formas de entender y de pensar en el tiempo, pues ellas se transformarán y desarrollarán en el contexto de la práctica matemática, identificando, reconociendo y promoviendo estas formas en el pensamiento de los estudiantes que redundará en la elaboración e implementación de currículos que estarán basados en la demostración matemática, que es uno de los principales objetivos de la Educación Matemática Universitaria.

En cuanto a la necesidad intelectual del estudiante, será la forma como él entiende el cómo y el porqué de cierto conocimiento y el modo en el que acepta su existencia y quiere dominarlo. En esta interacción se evidencia la forma de entender del estudiante y la manera en la que nace la necesidad de realizar su descripción, junto a una justificación epistemológica que la validará y la hará avanzar a una forma de aprender.

Como estructura para el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la *Dualidad* (D) hace referencia a la dupla conformada por las formas de entender (el significado e interpretación particular que una persona da a un concepto y sus relaciones. Una solución particular a un problema y la evidencia particular que una persona ofrece para establecer o refutar una afirmación matemática) y formas de pensar (que involucra tres categorías que se interrelacionan: creencias, enfoques de solución de problemas y esquemas de demostración).

La existencia de una *Necesidad* (N) intelectual es ese “algo” encargado de orientar y motivar a los estudiantes durante el proceso de aprendizaje como origen de la construcción de nuevos conocimientos y el desarrollo de formas de entender y de pensar matemáticamente.

El *Razonamiento Repetido* (R) facilita la interiorización y organización del conocimiento en cada estudiante. En la propuesta DNR, Harel (2008) sostiene que a partir de la necesidad intelectual (situación matematizable) y el actuar del estudiante se tienen que dar primero las formas de entender, para luego desarrollar las formas de pensar.

En su segundo trabajo, Harel (2008, b) amplia de manera considerable su teoría del DNR del proceso de aprendizaje al proceso de enseñanza, viéndolo como una unidad en sí para la Educación Matemática.

En este sentido, el autor propone que el docente, en su calidad de actor principal del proceso de enseñanza, tenga suficiente dominio y claridad de la integridad matemática, discutida anteriormente, y que responde a la situación de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas.

Se muestra cómo el docente en sus prácticas de Enseñanza – Aprendizaje deba tener su propio modelo DNR enmarcado en sus principios fundamentales y que le permita planear, preparar, ejecutar y evaluar cada una de sus clases, que lo conduzcan a desarrollar el pensamiento matemático en sus estudiantes, respondiendo a la situación de cómo se debe enseñar la matemática en la escuela.

El modelo DNR tiene su desarrollo actuando en tres categorías generales de la Educación Matemática: cuatro premisas, seis conceptos y sus afirmaciones. Las premisas matemáticas son el conjunto de saberes disciplinares, junto a sus formas de entender y sus formas de pensar.

Las premisas del aprendizaje serán las que tienen la relación conocimiento – saber, que es el resultado de la solución de problemas asociados a una situación específica y que además tiene el proceso de transferencia de las formas de entender a las formas de pensar, que son independientes, pero se garantiza tal transferencia.

Las premisas de enseñanza son las que orientan el aprendizaje, pues no todos los conocimientos matemáticos se adquieren espontáneamente, sino que hace falta un instructor para tal fin.

Las premisas ontológicas son las que se ven influenciadas por algún punto de vista personal o alguna creencia propia de las matemáticas, que hacen tener una necesidad intelectual, permitiendo hacer las orientaciones e interpretaciones intrínsecas entre docente y estudiante.

Los conceptos que propone Harel (2008) son sobre los que se basa fundamentalmente su modelo DNR y que son los puntos de interrelación del proceso de Enseñanza – Aprendizaje que llevan al docente a tener las herramientas para realizar el seguimiento respectivo del aprendizaje de sus estudiantes.

El concepto de las acciones mentales son las respuestas a una causa, incitada por una necesidad intelectual que deriva en la representación del concepto de formas de entender, que generan un conjunto de características de cognición que dan pie al concepto de formas de pensar, relacionadas a la acción mental que se ha hecho.

El concepto del aprendizaje el autor la define como "… *el proceso continuo de desequilibrio, en las fases de equilibrio, manifestado en las necesidades intelectuales y psicológicas, y en las formas de entender o de pensar que se utilizan en la construcción de una nueva fase*"[21].

El concepto de la base de conocimientos del docente es la fundamentación y el dominio de los conocimientos disciplinares que el docente conoce y domina y que promoverá en sus estudiantes el aprendizaje (detección y corrección de problemas de cognición, junto a la organización y conservación de conocimientos), más la fundamentación pedagógica necesaria para planificar y ejecutar la clase.

El concepto de la práctica docente está basado en los conceptos de las acciones del docente, y como característica especial, de las formas de enseñar. Se puede pensar como el principio de dualidad reflejado en los recursos que el docente lleva al aula, los cuales le permitan interactuar con los estudiantes en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje.

Por último, la categoría de las afirmaciones corresponde al resultado de la implementación de los tres principios del modelo DNR. La interacción entre las formas de entender y las formas de pensar dan un contraste que resulta en dar una visión más amplia del pensamiento matemático y sugiere un cambio en las metodologías de enseñanza alternativas. Este tipo de pensamiento es clave para la implementación de las actividades programadas en el aula de esta investigación, pues resulta ser un excelente modelo que puede ser verificable en el tiempo.

[21] Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question*. University of California, San Diego.

2.4. Teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

La resolución de problemas se ha convertido en una teoría que ha ocupado a numerosos investigadores. Pochulu y Rodríguez (2012) expresan que son varios los investigadores que han realizado aportes a la resolución de problemas, entre los que se destacan: Polya (1945); Kilpatick (1967); Krulik y Rudnik (1987); Schoenfeld (1985,1992); Puig (1996); Koichu, Berman & Moore (2003a,b); Lesh & Harel (2003); Borasi (1986); Campistrous y Rizo (1996). También han enriquecido la teoría Silver & Cai, (1996), Cai (2000, 2007), de Guzmán (1993), English & Sriraman, (2010), entre otros.

Cada uno de estos investigadores aporta definiciones de lo que se entiende por "problema". Polya (1965) declara: *"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"*[22] Esta definición es la que se asume en la presente tesis, pues se ajusta a los objetivos de la investigación.

Por su parte Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema es *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[23]. Labarrere (1996) sostiene que se tiene un problema en determinada situación cuando existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar.

[22] George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp.

[23] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problemsolving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon. p. 4.

Otros investigadores también aportan definiciones de "problemas", compartiendo lo planteado por Pochulu y Rodríguez (2012) acerca de las características comunes a toda definición de problema:

- "Existe una persona que ha de resolver la actividad (un resolutor).
- Existe un punto de partida y una meta a alcanzar.
- Existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente"[24].

También se comparten los criterios de Pochulu y Rodríguez (2012) sobre las características que no forman parte de lo común a todas las definiciones, las se expresa en:

- "La motivación (que el estudiante se sienta motivado a resolver la actividad).
- Las herramientas matemáticas (explícitamente se pide que el estudiante disponga de las herramientas necesarias para resolver).
- El desafío (que resulte un desafío para quien resuelve)"[25].

Diferentes investigadores han abordado la resolución problemas: Restle y Davis (1962), Pölya (1965), Ballester et al. (1992), Schoenfeld (1994), Lesh y Zawojewski (2007), entre otros. Pölya (1965) por su parte, afirma que: "… *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados*"[26]. Estos son criterios que se asume en esta investigación.

---

[24] Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires. Argentina. p. 153.
[25] Ibídem.
[26] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas.

Por otra parte, Polya (1945) se apoya en la heurística durante el proceso de la resolución de problemas. Este autor considera el método heurístico como un instrumento que apoya y ofrece ayuda en las áreas del conocimiento con fundamento y desarrollo de los conocimientos previos de estudiantes y docentes. Su función es facilitar, a través de acciones mentales, las etapas de trabajo en la construcción del conocimiento en el proceso de interacción entre la teoría y el problema, a partir de criterios o instrumentos para buscar fuentes de información incluyendo la capacidad de apreciación y descripción del problema.

Uno de los principales objetivos por cumplir en el aula de matemáticas, es que los estudiantes sean diestros en la resolución de problemas. Distintos autores tienen como postura esta afirmación.

Schoenfeld (1985) por ejemplo, habla acerca de la enseñanza de las estrategias para la solución de problemas, y es una postura interesante, ya que numerosos estudios han mostrado que los estudiantes con competencias superiores en la resolución de problemas se caracterizan por utilizar un proceso estructurado, una estrategia definida o heurísticas que guían su acción y que les ayudan a visualizar las soluciones con el fin de encaminarse en alguna solución que le permita evadir los inconvenientes y caminos que no conducen a soluciones efectivas al problema. Cabe destacar que estas metodologías son aplicables a distintos problemas, dada su flexibilidad.

En la Universidad Antonio Nariño se ha considerado la resolución de problemas su emblema, y es por tanto un referente pertinente al marco teórico propuesto, pues se sugiere que todo problema planteado en matemáticas tiene una componente de esta teoría, la cual se evidencia a través de problemas retadores y un buen planteamiento de estos problemas, dada su trayectoria en Olimpiadas

Matemáticas. El investigador considera que lo anterior fomenta la curiosidad y la necesidad de enfrentar un problema de este estilo.

En cuanto al problema de la investigación en curso, los problemas retadores serán un objetivo importante para alcanzar su propósito. En este sentido se aduce lo planteado por Pérez (2004), al decir que los problemas retadores "… *invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento".* En cuanto a las fases o estrategia para la resolución de los problemas se asumen en la investigación las propuestas por Polya (1945). A continuación, se plantean estas fases con ciertas preguntas heurísticas a realizar en cada fase:

1. *Entender el problema*: esta fase se dirige a *"… la búsqueda del problema o motivación, el planteamiento del problema y la comprensión del problema"*[27]. Se deben plantear preguntas como: ¿cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Hay suficiente información? ¿Hay información extraña?

2. *Configurar un plan:* en esta fase es imprescindible lograr "… *la precisión del problema, el análisis del problema y la búsqueda de la solución"*[28]. Entorno al problema se busca trazar una ruta para abordarlo planteando preguntas como: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado con éste?, ¿Podría enunciar el problema de otra manera? ¿Ha empleado todos los datos?

Se presenta una estrategia preliminar para hallar un final, entre las que plantea: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, solucionar un problema similar más simple, hacer una figura o un diagrama, trabajar hacia atrás, etc.

---

[27] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 411.
[28] Ibídem.

3. *Ejecutar el plan*: en esta fase se valora *"… la realización del plan de solución y la representación de la solución"*[29]. Para lograr el éxito se debe realizar las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución? ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

4. *Mirar hacia atrás:* en esta fase se debe considerar la comprobación del problema. En este momento se le sugiere formular las siguientes interrogantes: ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar los razonamientos realizados? ¿Puede ver cómo extender su solución a un caso general?, o sea ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

La resolución de problemas en el Cálculo Vectorial para estudiantes universitarios se dirige a desarrollar el Pensamiento Vectorial de los estudiantes y tienen como fines:

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática".*[30]

De aquí viene el aporte más grande de la investigación, en cuanto a que se basará en diseñar las actividades enfocadas a la resolución de problemas retadores.

[29] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 420.
[30] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 15 de octubre de 2019 de http:www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

2.5. Referentes sobre la Modelación Matemática

Dada la fuerte interrelación entre las matemáticas y otras disciplinas del conocimiento, se podría pensar en cuál sería un buen camino de interconexión entre todas ellas. No cabe duda que las ciencias de la salud, por ejemplo, necesitan un recurso matemático que les permitan manejar y sacar conclusiones sobre los datos experimentales que son de vital importancia.

Según Chavarría e Hidalgo (2009) ignorar o despreciar las interrelaciones entre las ciencias, incluida la tecnología, alimenta una especie de polémica estéril que se transfiere al ámbito escolar. Luego será necesario contar con un equipo competente de profesores que sean capaces de ligar las distintas disciplinas con la ayuda de la matemática y las herramientas que ella ofrece, tanto a nivel conceptual como práctico, lo cual permite predecir, analizar y corroborar fenómenos a través del tiempo. Es aquí donde aparece la modelación matemática como punto de partida para tal objetivo intrínseco en la Enseñanza - Aprendizaje de la matemática

Según Blomhøj (2004) el proceso de modelación matemática consistente en los siguientes seis sub-procesos:

(a) "*Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelada.*

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. Del dominio de investigación resultante e idealización de los mismos para hacer posible una representación matemática.

(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

(e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida"[31].

Esta componente es fundamental en esta investigación que se basa en el aprendizaje del cálculo en los estudiantes de Ingeniería. La modelación matemática permite realizar preguntas como: ¿Qué modelo es apropiado para un problema en particular? ¿Qué es una simulación?, ¿Qué procesos se pueden simular?, ¿Cómo se puede validar un modelo?, preguntas que un estudiante de Ingeniería tendrá que realizar y llevar a la práctica en algún momento de su vida profesional.

Por otra parte, todo estudiante en proceso de formación tendrá que analizar detenidamente esas mismas preguntas, ya que es fundamental a la hora de resolver un problema de Ingeniería. Cabe destacar que los sub-procesos mencionados anteriormente no se siguen de manera lineal en la práctica, sino que cada uno se irá retroalimentando de los demás para robustecer el concepto cuyo significado se busca construir.

En cuanto al objeto de la investigación, es de extrema importancia este enfoque de modelación matemática, pues la base del aprendizaje de los conceptos del curso es que los estudiantes puedan tener un modelo, tanto mental como práctico, para poder basar su esquema mental en ellos. Más un aporte importante de este enfoque es que ellos también puedan aprender en su contexto respectivo de Ingenierías con ciertos problemas de su interés.

---

[31] Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling - A theory for practice*. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. &Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

2.6. Referentes sobre el Pensamiento Visual

La construcción de un pensamiento vectorial, por su complejidad necesita tomar como base un Pensamiento Visual. El término y concepto de pensamiento visual se le atribuye a Arnheim's (1969).

Los investigadores Arnheim's (1969), De Guzmán (1996), Presmeg (1999), Giaquinto (2007), Domenicantonio, Costa & Vacchino (2011), encaminan sus estudios a aportar definiciones características y estrategias asociadas al Pensamiento Visual, las cuales son referentes para el marco teórico de esta tesis.

El pensamiento visual es importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, pues para Díaz y Dircio (2010) este "… *puede convertirse en pensamiento abstracto, es decir también puede ser medio para la construcción de conocimiento*"[32]. Por otra parte, Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) plantean *"… que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas"*[33].

Los investigadores Presmeg (1999), Giaquinto (2007), Gutiérrez (2013), Urchegui (2015) dan todas definiciones acerca del Pensamiento Visual. Para Presmeg (1999) es resultado de procesos visuales, basado en generalizaciones y argumentos, necesarios para la enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para Gutiérrez (2013) el pensamiento visual es "… *volcar y manipular ideas a través de dibujos simples y fácilmente reconocibles, creando conexiones entre sí por medio de mapas mentales, con el objetivo*

[32] Díaz, M. y Dircio, L. (2010). El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME 2010). Recuperable el 23 de enero de 2010m en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf p.338

[33] Domenicantonio; Viviana Angélica Costa; María Cristina Vacchino. La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/27/union_027_010.pdf p.3

de entenderlas mejor, definir objetivos, identificar problemas, descubrir soluciones, simular procesos y generar nuevas ideas"[34].

Por su parte Urchegui (2015) afirma que "*El concepto o constructo de Pensamiento Visual plantea una forma específica de conocimiento y un estilo de comunicación. Una forma de recibir información a partir de la interpretación de imágenes y una manera de trasmitir información y comunicar a partir de la construcción de imágenes, desde el simple gesto gráfico hasta la utilización de diferentes recursos y TIC*"[35].

En la tesis se consideran los criterios de Urchegui (2015) y lo planteado por Giaquinto (2007), quien afirma que el Pensamiento Visual visto desde la matemática tiene un valor cognitivo, pues constituye una ayuda y un medio de descubrimiento para el contenido matemático.

Del análisis realizado a las definiciones abordadas se infieren los rasgos que caracterizan al pensamiento visual, estos son:

- Manipular dibujos simples y fácilmente reconocibles que expresan ideas.
- Establecer interrelaciones entre las ideas.
- Recibir información a partir de la interpretación de imágenes.
- Trasmitir información y comunicar a partir de la construcción de imágenes.
- Constituirse en una ayuda para el descubrimiento del contenido matemático.

[34] Gutiérrez, L. (2013). ¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo? Recuperable el 23 de enero de 2013 en la URL: https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/

[35] Urchegui, P. (2015).El pensamiento visual en la formación del profesorado: Análisis de los componentes del pensamiento viso-espacial y su importancia en la formación de los docentes de educación infantil y primaria. Tesis Doctoral. Departamento de Pedagogía. Facultad de Educación y Trabajo social, Universidad de Valladolid, España. p. 25.

El pensamiento visual tiene sus sustentos en la percepción, la atención y la memoria; estos a su vez constituyen los ejes cognitivos desde los que se aborda su estudio. Con respecto a la percepción de imágenes visuales o diagramas, Giaquinto (2007) afirma que estas "… *pueden ilustrar los casos de una definición, lo que nos da una idea más viva de sus aplicaciones; pueden ayudarnos a comprender la descripción de una situación matemática o los pasos de un razonamiento secuencial; pueden sugerir una propuesta de investigación o una idea para una demostración. Así representaciones visuales tienen un papel facilitador*"[36].

La naturaleza de los conceptos del Calculo Vectorial, su percepción visual, la manipulación geométrica y las imágenes mentales son una fuente importante para su comprensión, por ende, constituyen elementos básicos para el desarrollo del Pensamiento Visual en el estudiante (Giaquinto, 2007). Por otra parte, Roam (2008) argumenta que: "… *mirar mejor, ver más claro, imaginar más allá, constituyen herramientas y reglas de un buen pensamiento visual*"[37], aspectos estos necesarios para el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en las carreras de Ingeniería.

Investigadores como Pou (2002) entre otros, abordan las ventajas que tiene el Pensamiento Visual en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje. A pesar de que estas ventajas no se dirigen al ámbito propio de la enseñanza de la matemática, ellas pueden ser adaptadas y aprovechadas en este proceso para el Cálculo Vectorial y así lograr un robusto aprendizaje en los estudiantes. Pou (2002) afirma que el Pensamiento Visual:

- Mejora las capacidades deductivas y argumentativas de los estudiantes.

[36] Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford University press. Printed in Great Britain.
[37] Roam, D. (2008). *The back of the kapkin: solving problems and selling ideas.* New York, Penguin Group. p. 55.

- Favorece las interpretaciones basadas en las imágenes de menor a mayor complejidad.
- Fomenta una nueva relación profesor-estudiante, reafirmando el desarrollo personal del estudiante.
- Potencia el aprendizaje activo frente a la recepción pasiva tradicional.

Alsina y Nelsen (2006) plantean la relación entre la visualización y el Pensamiento Visual, al decir que "… *la visualización es cualquier proceso de producción de imágenes al servicio del desarrollo del pensamiento visual*"[38]. El investigador de esta tesis comparte este criterio, pues considera que tanto la visualización como el Pensamiento Visual son útiles para el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial y por ende constituyen procesos básicos para el desarrollo del Pensamiento Vectorial.

El pensamiento visual es pertinente en el ámbito del Cálculo Vectorial, dado que propicia la manipulación geométrica, la comprensión matemática, la habilidad de descubrimiento y la experiencia del estudiante de Ingeniería. Es de aclarar que los estudiantes deben poseer las nociones básicas de los conceptos del Cálculo Vectorial, para que con el apoyo del pensamiento espacial se contribuya al desarrollo del Pensamiento Vectorial (Giaquinto 2007). Estas ideas son consideradas para el desarrollo de las actividades propuestas en la presente investigación.

2.7. Conclusiones del capítulo 2

Los marcos teóricos tomados anteriormente permitirán al investigador dar pie a la articulación y triangulación de teorías para obtener un robusto cimiento en donde desembocar la investigación. En el

[38] C. Alsina, R.B., Nelsen (2006): Math Made Visual. Creating images for understandingmathematics. MAA, Washington.

transcurso de la investigación se podrá enriquecer el marco teórico, pues es analizado y puesto en consideración en pro de sustentar de mejor manera las tareas propuestas.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para lograr un proceso de Enseñanza – Aprendizaje que se dirige a la construcción robusta de los conceptos propios de la asignatura a través de la resolución de problemas se necesita de una metodología de la investigación pertinente en correspondencia a los objetivos trazados. A continuación, se presenta el tipo de investigación, el alcance del estudio, los métodos utilizados, las fases de la investigación y procedimiento para el trabajo en el aula.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

En la investigación se asume el paradigma cualitativo. Para Hernández, Fernández, & Baptista (2014) el paradigma cualitativo *"… puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo "visible", lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen)"*[39].

Por su parte "… el investigador cualitativo utiliza técnicas para recolectar datos, como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades"[40].

Hernández, Fernández, & Baptista (2014) informan que Creswell (2013b) y Neuman (1994) sintetizan las actividades principales que caracteriza a un investigador cualitativo. A continuación, se mencionan

[39] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. Sexta Edición. México*:* McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. p. 9.
[40] Ibídem.

algunas de estas características, las cuales se consideran en el desarrollo de la presente investigación, para lograr los objetivos previstos:

- *"Adquiere un punto de vista "interno" (desde dentro del fenómeno), aunque mantiene una perspectiva analítica o cierta distancia como observador externo.*
- *Utiliza diversas técnicas de investigación y habilidades sociales de una manera flexible, de acuerdo con los requerimientos de la situación.*
- *Entiende a los participantes que son estudiados y desarrolla una empatía hacia ellos; no sólo registra hechos "objetivos".*
- *Observa los procesos sin irrumpir, alterar ni imponer un punto de vista externo, sino tal como los perciben los actores del sistema social.*
- *Extrae significado de los datos y no necesita reducirlos a números ni debe analizarlos estadísticamente (aunque el conteo puede utilizarse en el análisis)"*[41].

También la presente investigación se basa en el enfoque de investigación - acción, pues *"constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[42].

La investigación acción permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente del profesor de Calculo Vectorial en las carreras de Ingeniería, pues los prepara para favorecer su proceso de Enseñanza – Aprendizaje. Este trabajo contextualizado al aula propicia despertar la motivación y el

---

[41] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. Sexta Edición. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. p. 9-10.
[42] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

interés en los estudiantes de Ingeniería, permitiéndole plantear, expresar y comprobar sus ideas, compartirlas y confrontarlas con los demás en cualquier contexto, y lograr en cada uno de ellos un aprendizaje significativo.

3.2. Alcance del estudio

Con la investigación se prevé elaborar una metodología sustentada en un modelo didáctico, donde se imbrique la visualización, la manipulación geométrica, la heurística y el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) como herramientas didácticas, para la resolución de problemas retadores; dirigido a fortalecer el proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la construcción robusta de los conceptos propios del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño. Los resultados esperados en el proceso investigativo propician la necesidad de concebir un currículo más retador.

3.3. Población y muestra

La investigación se desarrolla con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, lo cual constituye la población. La muestra está constituida por 35 estudiantes del curso de Calculo Multivariado y Álgebra Lineal, correspondiente a la asignación de los cursos ofrecidos en el semestre al profesor.

3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En el desarrollo de la tesis se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico-Lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y el desarrollo del proceso de

Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.

Análisis-Síntesis: presente en la investigación para el proceso de diagnóstico, análisis del estado del arte y en los fundamentos teóricos, del proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, propiciando interpretar y sintetizar los resultados, así como la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La **observación participante**: se utiliza en la observación de clases, para obtener información sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.

Encuesta: Se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes una vez concluida la aplicación del sistema de actividades.

3.5. Fases de la investigación

Para el logro de resultados satisfactorios en el proceso investigativo se han definido las siguientes fases. Estas fases son:

Fase 1. Preparatoria. Diseñar instrumentos: **observación participante**, encuesta a estudiantes y docentes, pretest. Aplicación de instrumentos. Recogida de datos arrojados por instrumentos. Triangulación de instrumentos para concretar el problema de investigación y el objetivo general. Establecer la metodología de investigación a seguir.

Fase 2. Revisión de la literatura. Determinar el estado del arte sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, para precisar las carencias presentes en las investigaciones, las cuales serán bases para el aporte teórico y determinar la unicidad del problema.

Fase 3. Construcción del marco teórico. El marco teórico está dado por el pensamiento matemático basado en la visualización, el modelo DNR, la teoría de la resolución de problemas y problemas retadores, referentes sobre la modelación matemática y el contenido matemático sobre el Cálculo Vectorial. El marco teórico propicia perfilar las categorías para la construcción del modelo didáctico.

Fase 4. Diseño de aportes teóricos y prácticos. En esta fase se elabora un modelo didáctico y el sistema de actividades.

Fase 5. Trabajo de campo. Esta fase se dirige a la aplicación del sistema de actividades por lo menos dos veces a través de un estudio piloto, lo cual propicia perfeccionar las actividades y mejorar el modelo didáctico.

Fase 6. Recogida, análisis de la información y evaluación. Recogida y procesamiento de la información, aplicación de encuesta de satisfacción, triangulación de resultados, elaboración de informes y publicación o socialización de resultados.

3.6. Cronograma de Actividades

Para llevar a cabo la investigación se muestra el cronograma de actividades en el Anexo 1.

3.7. Conclusiones del capítulo 3

En la presente tesis se asume el paradigma de investigación cualitativa, con un diseño de investigación acción, donde se emplean métodos del nivel teórico y empírico. La certeza de la aplicación de la metodología asumida propicia el logro de los objetivos propuesto en la investigación.

CAPÍTULO 4. ACTIVIDADES PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

En este capítulo se muestran los referentes para la caracterización del Pensamiento Vectorial y un sistema de actividades que permite avanzar en la caracterización de este pensamiento.

4.1. Referentes para la caracterización del Pensamiento Vectorial

Existen diferentes tipos de pensamiento matemático que se ven involucrados en la actividad matemática que se realiza. Algunos de ellos admiten una caracterización específica que varía según el tipo de pensamiento, o también algunas estrategias pedagógicas o metodológicas que permiten diferenciar uno de otro pensamiento.

En esta investigación se busca lograr avanzar en una caracterización de un tipo especial de pensamiento matemático (Pensamiento Vectorial), donde los otros tipos de pensamiento involucrados (numérico, espacial y variacional) no son suficientes para describir el proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Cálculo Vectorial, pues en esta asignatura se ven inmersos muchas teorías matemáticas que al unirlas crean un conglomerado de conocimiento que se escapa de un encasillamiento en alguna de ellas.

Se verá cómo, a través de actividades ajustadas, se puede sacar a la luz un tipo especial de pensamiento matemático que, además de ser distinto teóricamente a los demás, apoya el trabajo que se realiza en el aula para que los estudiantes formen robustamente los conceptos del curso.

4.2. Sistema de actividades para el aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería

Se diseñaron y elaboraron ocho actividades didácticas que se realizaron con la participación de los estudiantes del curso Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal – Grupo 4 de la Universidad Antonio Nariño. Antes de la implementación de estas actividades se realizó una prueba de entrada que indaga acerca del Pensamiento Vectorial que los estudiantes poseen previamente la cual se puede observar en el anexo n° 2 del documento.

La estructura de cada actividad está dada por: título, descripción, objetivos, contenidos, prerrequisitos, recursos a utilizar, resultados que se esperan, aspectos del Pensamiento Vectorial a desarrollar, antesala, metodología y desarrollo del contenido de las actividades. Es de destacar que para cada actividad se tiene en cuenta los distintos conocimientos previos a considerar por parte del estudiante para su buen desarrollo. Estas mismas se adelantan en forma grupal observando tanto su desarrollo como sus resultados.

Adicionalmente, se hizo la grabación de cada sesión a fin de analizar la ejecución de cada actividad, lo que sirvió para refinar y mejorar cada una de ellas. A continuación se mostrarán a detalle cada una de las 8 actividades.

4.2.1. Actividad 1: Explorando los vectores y sus operaciones

Tabla 1 Actividad 1: Explorando los vectores y sus operaciones

<u>**DESCRIPCIÓN:**</u> En esta primera actividad se presenta a los estudiantes el concepto de vector y sus operaciones; temática que se desarrollará bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del

pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.

OBJETIVOS:

- Establecer las operaciones de vectores desde sus facetas algorítmicas, geométricas y estructurales.
- Identificar la manera en cómo los estudiantes operan los vectores desde tales facetas.
- Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema donde se involucren los vectores en dos o tres dimensiones.
- Causar la necesidad en el estudiante de generalizar y cambiar el contexto de estas operaciones entre vectores.
- Motivar la definición y el uso de las medidas de área y volumen orientados como parte esencial en el pensamiento vectorial.
- Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase.
- Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura.
- Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.

CONTENIDOS:

- Sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones y concepto intuitivo de vector.
- Operaciones de vectores: Suma, producto por escalar, producto escalar y producto vectorial.
- Resolución de problemas de cada ítem anterior.

PRERREQUISITOS:

- Noción de vector.
- Operaciones de los números reales.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.
- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que es estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren vectores y sus operaciones para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de interpretar de manera óptima los conceptos de áreas y volúmenes orientados, que permite dar un contexto a futuras estructuras matemáticas que se

desarrollan posteriormente.

- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y permita consolidarlos de manera robusta.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren vectores.

ANTESALA:

Uno de los conceptos matemáticos más importantes en la ciencia tanto pura como aplicada es el de **VECTOR**, dada su faceta múltiple en la solución de problemas de distinta índole, como son la de dar sentido matemático a la fuerza, a los desplazamientos, a problemas de orden geométrico o a la construcción de ciertos espacios que permiten analizar de una nueva manera un modelo matemático, tan aplicado en las ciencias en general.

Desde que se propusieron formalmente en la década de 1840 con los trabajos de W. Hamilton y H. Grassmann se ha pasado de conceptos abstractos de ellos a herramientas que permiten cambiar el paradigma de darle solución a un problema concreto.

Como ejemplos de sus aplicaciones en la ciencia se encuentran la velocidad y la fuerza; conceptos de la Física de suma importancia y de los cuales se debe en gran parte su desarrollo, hasta llegar a la electrodinámica, electromagnetismo, etc.

Aplicaciones importantes actualmente vienen dadas por las redes neuronales e inteligencia artificial, entre muchas otras.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en dos sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

1. **Primera sesión: (Clase magistral)**

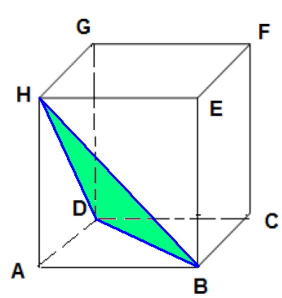
Sistema de coordenadas tridimensionales.

Está conformado por ejes coordenados x, y, z que forman un sistema rectangular (siguiendo la regla de la mano derecha), donde cada punto que pertenezca a este espacio está conformado por una tripleta de la forma (a, b, c), donde a, b y c son números reales.

Los planos coordenados en este sistema están conformados por los ejes coordenados que hacen parte de él. Las traslaciones de estos planos coordenados tendrán ecuaciones que dependen del valor de la

traslación.
Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 792.
Segunda sesión: (Clase magistral)
Vectores.
Entes matemáticos que poseen una magnitud y una dirección. Su representación geométrica es una flecha dirigida desde el origen del sistema de coordenadas utilizadas hasta un punto particular en ese sistema.
Su notación está dada por $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ si el sistema de coordenadas es plano o $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ si el sistema de coordenadas es espacial.
La magnitud del vector $\vec{u}$ esta dado por la fórmula: $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ y su dirección esta dada por el vector $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$. Caso análogo para vectores en el plano, donde se elimina la última componente del vector anterior.
Un vector dirigido del punto P al punto Q esta dado por $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ recordando hacer la traslación correspondiente para tener una comprensión visual más coherente.
En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.
Tercera sesión: (Clase magistral)
Se desea en esta sesión que el estudiante desarrolle su pensamiento visual a través de la comprensión del sistema de coordenadas rectangulares, más el significado empírico de vector como ente matemático que tiene una magnitud y una dirección, junto al proceso algorítmico que se sigue. Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.
Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando y darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: Sea el cubo de la figura. Si $\boldsymbol{A} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ y $\boldsymbol{C} = (-\mathbf{2}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$, determinar:

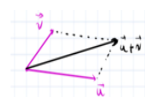
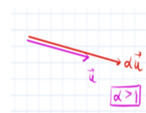
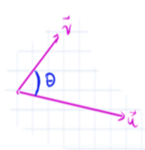
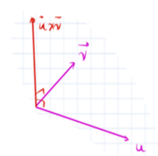
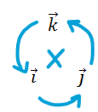


CARA	ECUACION PLANO
ABEH	
GDCF	
HGDA	
EFCB	
HEFG	
ABCD	

a. Las ecuaciones de los planos de cada cara del cubo. ¿Qué relación encuentra entre estas ecuaciones?

b. El perímetro del triángulo $\boldsymbol{BDH}$. ¿Qué tipo de triángulo es el que se está analizando?
c. El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{BH}}$.
d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

2. Cuarta sesión: (Clase magistral)
Operaciones con vectores:

OPERACIONES CON VECTORES			
Operación	**Forma numérica**	**Forma geométrica**	**Forma estructural**
Suma $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}$	$< a+d, b+e, c+f >$		$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
Producto por escalar $\boldsymbol{\alpha\vec{u}}$	$< \alpha\mathrm{a}, \alpha\mathrm{b}, \alpha\mathrm{c}, >$		$\alpha(\vec{u}+\vec{v})$ $= \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ $1\vec{u}=\vec{u}$ $\alpha(\beta\vec{u})$ $=(\alpha\beta)\vec{u}$
Producto escalar $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$	$ad+be+cf$		$\cos(\theta)$ $=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\Vert\vec{u}\Vert\Vert\vec{v}\Vert}$ Trabajo: $W=\vec{F}\cdot\vec{D}$
Producto vectorial $\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}$	$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$		 Área del paralelogramo $\Vert\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\Vert$ Volumen del paralelepipedo $\boldsymbol{u}\cdot(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{w}})$

Se tendrá en cuenta que cada operación mostrada en los productos de vectores tiene una versión geométrica asociada con una orientación indicada, lo que conlleva a definir áreas o volúmenes con signo.

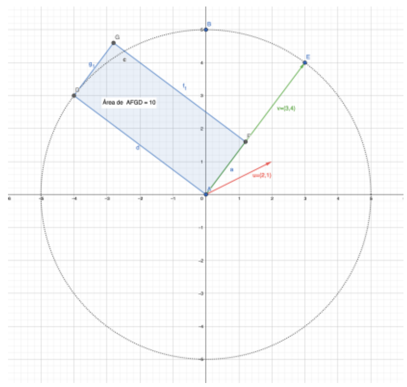
Quinta sesión: <u>TRABAJO COLABORATIVO:</u>
En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder construir el significado robusto del concepto de producto escalar de dos vectores y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados, dada la novedad de la plataforma.
Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la sexta sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMAS:

PRIMERA PARTE. Este problema muestra una forma alternativa de visualizar el producto escalar con su construcción geométrica.

Observe el siguiente dibujo hecho en Geogebra para el producto escalar de los vectores $\vec{u} = \langle 2,1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 3,4 \rangle$



Dada la anterior construcción, trate de imitarla para realizar el producto escalar de los vectores $\vec{u} = \langle -1,2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 5,1 \rangle$.

- ¿Qué observa al comparar el área obtenida con el producto escalar de los vectores?
- ¿La anterior construcción se puede conmutar y obtener el mismo resultado?
- Si se elimina el vector $\vec{v}$ de la construcción y se cambia por el vector $\vec{u}$, determine la figura que resulta. ¿Qué puede decir de la relación entre esta figura y la magnitud del vector $\vec{u}$?
- ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

SEGUNDA PARTE. Dados los puntos $\boldsymbol{A} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, \mathbf{5})$, $\boldsymbol{B} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, -\mathbf{3})$, $\boldsymbol{C} = (-\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ y $\boldsymbol{D} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{4})$ en el espacio tridimensional. Determinar:

a. El volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores que lo determinan al tomar como origen a algún punto anterior.
b. El área de las caras de los paralelogramos que conforman el paralelepípedo.

Mediante la plataforma Geogebra muestre las respectivas gráficas y compruebe los resultados anteriores.

- Se recomienda realizar una gráfica dinámica para trasladar los vectores de posición. Según esto, compruebe la igualdad de las rotaciones del triple producto escalar comentada en clase.
- ¿La anterior construcción se puede conmutar y obtener el mismo resultado?
- ¿Qué podría decir geométricamente sobre los vectores si su producto triple escalar resulta igual a cero?
- ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Sexta sesión: SOCIALIZACIÓN En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la cuarta sesión con el nombre de: **TRABAJO EXTRA-CLASE:** En este problema se pretende establecer las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema algebraico, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial y evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas. Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia. La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN. **PROBLEMA:** Demuestre que: Si para tres números reales a, b, c se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, entonces probar que $a = b = c$. ¿Cómo convencería usted a algún compañero que su solución mostrada es correcta?

Fuente: *autor (2021)*

4.2.2. Actividad 2: Estudiando curvas y superficies

Tabla 2 Actividad 2: Estudiando curvas y superficies

DESCRIPCIÓN: En esta segunda actividad se presenta a los estudiantes las curvas y superficies definidas sobre funciones vectoriales; temáticas que se desarrollará bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
OBJETIVOS: • Motivar el estudio de las curvas y superficies desde sus facetas vectoriales. • Determinar la manera en cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde tales facetas. • Empoderar al estudiante en el uso de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con curvas y superficies. • Provocar en el estudiante la necesidad de relacionar cada curva y superficie mediante un vector que proporcione información sobre cada ente geométrico estudiado.

- Establecer las diferentes coordenadas en el plano y en el espacio que permitan describir de manera óptima la superficie en cuestión.
- Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase.
- Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura.
- Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y cómo impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.

CONTENIDOS:

- Sistemas de coordenadas bidimensionales y tridimensionales alternativas a las rectangulares.
- Funciones vectoriales de uno o dos parámetros.

PRERREQUISITOS:

- Cálculo diferencial e integral en una variable.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.
- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren curvas y superficies para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de relacionar cada curva o superficie estudiada con un vector propio de la construcción intrínseca de cada objeto geométrico, que permite dar un contexto a futuras estructuras matemáticas que se desarrollan posteriormente.
- Que el estudiante determine que para describir una curva se requiere de un parámetro y para describir una superficie se requieren de dos parámetros, lo que conlleva al concepto de dimensión de estos entes matemáticos.
- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y permitir consolidar este manejo de manera robusta.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren curvas y superficies.

ANTESALA:

Las curvas y las superficies como objeto matemático han sido estudiadas desde la antigüedad con los griegos. Trabajos interesantes sobre las secciones y superficies cónicas pueden remontarse a los trabajos de Hiparía y Arquímedes. Estos objetos han sido estudiados de manera continuada con la aparición de la geometría analítica que les dio otro matiz, que culminaría con la rama de las matemáticas llamada geometría diferencial, cuyo nacimiento vio la luz recién entrado el siglo XIX con los importantes trabajos de Gauss.

Como ejemplo de sus aplicaciones están, entre otras, desde el estudio de las trayectorias de cuerpos en movimiento (en el caso de las curvas) hasta el diseño de estructuras que requerían una forma particular dada por una superficie, tan útil en Ingenierías. Además, estas superficies son utilizadas por los programadores de software para hacer animaciones de modelos tridimensionales, los cuales hacen uso también de las coordenadas cilíndricas y esféricas.

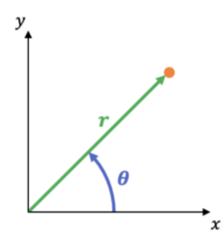
METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

3. **Séptima sesión: (Clase magistral)**
   Sistema de coordenadas polares (2D), cilíndricas y esféricas (3D).
   Para introducir las coordenadas polares en el plano, por favor ingresen al siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/ubhnujnk

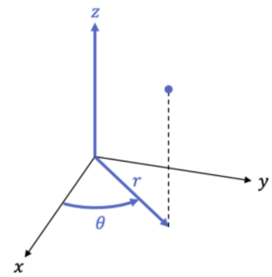


Encontrarán una descripción del cambio de coordenadas rectangulares a polares y viceversa usando las siguientes fórmulas:

$$\underbrace{\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}}_{(x,y)\to(r,\theta)} \qquad \underbrace{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}}_{(r,\theta)\to(x,y)}$$

Se puede apreciar que los rectángulos polares son sectores circulares en el plano polar, por lo las coordenadas polares resultan particularmente útiles para describir regiones que contienen partes circulares. Las descripciones de las regiones correspondientes son las siguientes:

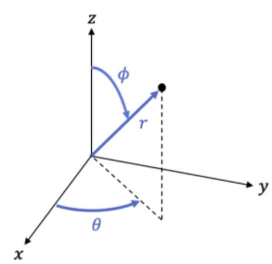
$\mathcal{R} = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \leftrightarrow \mathcal{R}_p = \{(r, \theta): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1 \leq r \leq r_2\}$
Análogamente para coordenadas cilíndricas en el espacio, se ingresa al siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/bceqcpcn



Se notará que hay una analogía con las coordenadas polares en el plano y cuya componente z varia libremente, por lo que las fórmulas descritas anteriormente para las coordenadas polares valen exactamente para estas coordenadas en el espacio, que en cuyo caso se tendrán estos cambios: $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$
La ecuación de un cilindro de radio constante k, que en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = k^2$, en estas nuevas coordenadas es $r = k$, cuya descripción es más simple y de la cual recibe el nombre estas coordenadas. Las descripciones de las regiones correspondientes son las siguientes:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\} \leftrightarrow$$
$$\mathcal{R}_c = \{(r, \theta, z): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1 \leq r \leq r_2, p \leq z \leq q\}$$

Para las coordenadas esféricas en el espacio, se ingresa al siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/dhYBnSHH



Se encontrará una descripción del cambio de coordenadas esféricas usando las siguientes fórmulas:

$$\underbrace{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}}_{(\rho,\varphi,\theta)\to(x,y,z)}$$

Estas mismas ecuaciones satisfacen la relación $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, que es la ecuación de una esfera de radio ρ. Si este radio es constante igual a k, entonces en estas nuevas coordenadas su ecuación sería $\rho = k$, cuya descripción es más simple y de la cual recibe el nombre estas coordenadas. Las descripciones de las regiones correspondientes son las siguientes:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z): a \leq x \leq b\ , c \leq y \leq d\ , p \leq z \leq q\} \leftrightarrow$$
$$\mathcal{R}_e = \{(\rho, \varphi, \theta): \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

Estas coordenadas son útiles cuando la región que se desea describir en el espacio contiene partes de esferas o conos, que es una de las superficies cuadráticas que se describen a continuación en el

siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/pdbrPrMz
En este enlace encontrarán las seis superficies cuadráticas con sus ecuaciones correspondientes y una evaluación que refuerza lo aprendido. Interesa en particular que el estudiante adquiera las destrezas para enfrentarse a problemas que se refieran a estas superficies al cambiar el centro y ejes de simetría, pues en la modelación de ciertas situaciones prácticas, el centro no siempre será en origen de coordenadas ni el eje de simetría será el eje z. Esto conllevará a desarrollar un pensamiento vecto-algorítmico esencial para futuros temas.
Como parte del proceso de enseñanza – aprendizaje de los temas tratados, se requiere que los estudiantes obtengan las expresiones de las anteriores ecuaciones de las superficies cuadráticas en cada una de las coordenadas espaciales que se introdujeron; donde se determine las ventajas, dificultades, facilidades de usar unas u otras coordenadas y conlleve para ellos deducir que hace falta variar dos de las tres variables para describir completamente las superficies.
Se propone como problema describir la región en el espacio que se encuentra encerrado por el cono con ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ en las tres coordenadas estudiadas anteriormente. Con esto se determinará cuál de ellas es más significativa para los cálculos futuros a realizar.
Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 1040.
Octava sesión: (Clase magistral)
Curvas paramétricas.
Se definen las curvas paramétricas como las imágenes de las funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores, es decir: $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$
Donde $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son las funciones componentes del vector $\vec{r}$ que dependen de la variable real t que es conocida como el parámetro de la curva.
La gráfica de esta función se obtiene al tomar las puntas de los vectores imágenes con diferentes valores de t y uniéndolos con una curva suave. Se nota que al incrementarse el valor de la variable t se genera una orientación de la curva realizada.
En cuanto a las operaciones del cálculo para estas funciones $\vec{r}$, tales como su dominio (común), su límite al tender t hacia algún valor, su derivada y su integral (tanto definida como indefinida) se realizan componente a componente, mostrando así una analogía con las operaciones de los vectores mostradas en la primera actividad.
Ejemplos importantes de estas son, por ejemplo, la parametrización de la recta que pasa por un punto A y tiene como vector director a $\vec{v}$ como: $\boxed{\mathbb{X} = A + t\vec{v}}$, donde el punto $\mathbb{X} = (x, y, z)$ es el que contiene las variables de la ecuación. Nótese la analogía con la ecuación de la recta en el plano cartesiano y la determinación de esta ecuación conociendo su vector director.
Otra parametrización en el plano xy es la de la circunferencia de centro en (a, b) y radio d, la cual es: $\vec{r}(t) = \langle a + d\cos(t), b + d\sin(t)\rangle$, donde $t \in [0,2\pi]$. Nótese que la orientación de esta curva es contraria a las manecillas del reloj, la cual se dirá que es la orientación positiva de cualquier curva cerrada.
También existe otra parametrización útil en muchos casos donde que se requiera ver la gráfica de una función $y = f(x)$, la cual se determina llamando la variable $x = t$, lo que resulta en: $\vec{r}(t) = \langle t, f(t)\rangle$, que además proporciona una orientación a la curva.

Estas funciones vectoriales nos ayudan a determinar, por ejemplo, las siguientes situaciones físicas que son útiles en la práctica y cuya descripción se muestra a continuación:

NOMBRE	FÓRMULA
Posición	$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$
Velocidad (vector tangente)	$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$
Aceleración	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t) = \langle x''(t), y''(t), z''(t)\rangle$
Rapidez	$\lVert\vec{r}'(t)\rVert$
Longitud de curva	$\int_a^b \lVert\vec{r}'(t)\rVert\, dt$

Vale la pena comentar que, de las fórmulas 2, 4 y 5 podemos definir lo siguiente (usando la notación de diferenciales): $d\vec{L} = d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt = \langle dx, dy, dz\rangle dt$, $dL = \lVert\vec{r}'(t)\rVert dt$,

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Novena sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento visual a través de la compresión de las coordenadas cilíndricas y esféricas en el análisis de las regiones que ocupan en el espacio. Además de parametrizaciones de curvas y la visualización de sus partes.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando y que adquieran herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: Considerar el paraboloide hiperbólico con ecuación $z = x^2 - y^2$ y el cilindro con ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

a. Mediante el uso de la plataforma Geogebra, realice un bosquejo de la intersección de estas dos superficies.
b. A partir de la visualización de las diferentes perspectivas de la curva en los planos coordenados, construya una parametrización adecuada para esta curva intersección. ¿Nota alguna diferencia en usar en esos planos las coordenadas rectangulares o polares?

c. ¿Qué puede decir acerca de la orientación de esta curva cerrada?
d. Por medio de la geometría dinámica, defina el vector tangente sobre un punto arbitrario escogido de la curva. ¿Observa alguna relación entre la orientación de la curva y la dirección del vector tangente elaborado? ¿Qué puede decir acerca de la longitud de estos vectores cuando se recorre la curva dinámicamente?
e. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Décima sesión: (Clase magistral)

Superficies paramétricas:

Análogamente como sucede con las curvas paramétricas, las superficies paramétricas se definen como las imágenes de las funciones cuyo dominio es un subconjunto de dos parámetros y cuyo rango es un conjunto de vectores, es decir:
$\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle = x(u,v)\hat{\imath} + y(u,v)\hat{\jmath} + z(u,v)\hat{k}$
Donde $x(u,v), y(u,v)$ y $z(u,v)$ son las funciones componentes del vector $\vec{r}$ que dependen de las dos variables reales u, v que son los parámetros de la superficie.
Existen dos familias de curvas especialmente útiles cuando se trata de analizar la superficie que son llamadas las curvas reticulares. Estas se dan cuando un parámetro escogido se mantiene constante y varía el otro. Esta visión de las superficies es compatible con la estudiada por los antiguos griegos, como la superficie formada por infinitas curvas.
Ejemplos importantes de estas parametrizaciones de superficies es la del plano que pasa por un punto A y contiene dos vectores no paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como: $\boxed{\mathbb{X} = A + u\vec{a} + v\vec{b}}$, donde el punto $\mathbb{X} = (x,y,z)$ es el que contiene las variables de la ecuación. Nótese que en esta superficie, un vector que sirve para determinarla es uno que sea perpendicular a todos los vectores contenidos en el plano, llamado el vector normal $\vec{n}$, por lo que haciendo uso de las operaciones de vectores llegamos a la ecuación $\boxed{\mathbb{X}\cdot\vec{n} = A\cdot\vec{n}}$
Las coordenadas vistas anteriormente también serán de suma importancia al momento de describir superficies cuadráticas o superficies que tengan parte de un cilindro o una esfera. En este sentido, las parametrizaciones de superficies no serán únicas y se requiere de un dominio de tales coordenadas para obtener descripciones simples.
También existe otra parametrización útil en muchos casos donde que se requiera ver la gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$, la cual se determina llamando las variables $x = u$ y $y = v$, lo que resulta en: $\vec{r}(u,v) = \langle u, v, f(u,v)\rangle$.
En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.
Undécima sesión: <u>TRABAJO COLABORATIVO:</u>
En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder construir el significado robusto del concepto de superficies paramétricas y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, para lo cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados, dada la novedad de la plataforma.
Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.
La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la

duodécima sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA: Considérese la superficie que consta del hemisferio norte de la esfera de radio 2 y su "tapa" de abajo.

a. Escriba las ecuaciones cartesianas para ambas partes de la superficie.
b. Con ayuda de estas ecuaciones, realice las parametrizaciones de las superficies usando las coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, indicando el intervalo de existencia de cada variable. ¿Nota alguna diferencia en cada parametrización?
c. Mediante el uso de la plataforma Geogebra, realice un bosquejo de las superficies con sus curvas reticulares.
d. Para cada parametrización realizada anteriormente determine las expresiones de sus curvas reticulares. Ahora derive cada expresión con respecto a su variable y dibuje estos vectores sobre un punto arbitrariamente escogido de la superficie.
e. Con ambos vectores tangentes dibujados, ¿cómo obtendría un vector que fuera perpendicular a esta superficie? ¿Qué puede decir acerca de este vector cuando se recorre la superficie dinámicamente? ¿A dónde deberá apuntar tal vector perpendicular para obtener una orientación que describa la superficie en cuestión?
f. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Duodécima sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la décima sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este problema se pretende establecer las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

PROBLEMA: (Tomado del libro Cálculo de varias variables. J Stewart)

La función posición de una nave espacial es: $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \langle \mathbf{3} + \boldsymbol{t};\ \mathbf{2} + \mathbf{ln}(\boldsymbol{t});\ \mathbf{7} - \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{t}^{2}+\mathbf{1}} \rangle$ y las coordenadas de una estación espacial son $(\mathbf{6}, \mathbf{4}, \mathbf{9})$. El capitan desea que la nave se deslice hasta la estación espacial. ¿En qué momento deberían apagarse los motores de la nave?

¿Cómo convencería usted a algún compañero que su solución mostrada es correcta?

Fuente: *autor (2021)*

4.2.3. Actividad 3: Funciones multivariables y sus derivadas

Tabla 3 Actividad 3: Funciones multivariables y sus derivadas

DESCRIPCIÓN: En esta tercera actividad se presenta a los estudiantes las funciones de varias variables y con ellas sus derivadas parciales; temáticas que se desarrollarán bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
OBJETIVOS: • Motivar el estudio de las funciones multivariables desde sus facetas algorítmicas, geométricas y estructurales. • Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde tales facetas. • Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con funciones multivariables y sus derivadas. • Incitar en el estudiante el manejo y comprensión de la herramienta tecnológica que le permita visualizar y entender las funciones multivariables desde sus conjuntos de nivel. • Establecer las derivadas parciales de funciones multivariables desde un punto de vista vectorial con sus reglas y propiedades para así poder generalizar estos conceptos en temas posteriores. • Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase. • Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura. • Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.
CONTENIDOS: • Funciones multivariables y sus conjuntos de nivel. • Derivadas parciales de las funciones multivariables, con énfasis en el vector gradiente.
PRERREQUISITOS: • Funciones reales y sus dominios. • Cálculo diferencial e integral en una variable. • Visualización de objetos en el plano o en el espacio. • Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)
RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren funciones multivariables para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de calcular y comprender el significado geométrico de las derivadas parciales de funciones multivariables que le permita resolver problemas desde el punto de vista vectorial.
- Que el estudiante tome conciencia de la importancia del vector gradiente como catalizador de los procesos vectoriales que se llevan a cabo en esta sección y que pueda generalizarlos a futuros temas.
- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y consolide este manejo de manera robusta.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vectorial puestos en práctica.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren funciones multivariables y sus derivadas parciales.

ANTESALA:

Muchos de los modelos matemáticos usados en la representación de distintos fenómenos dependen de más de una variable, en contraposición de las que dependen de una sola variable. Ejemplos tales como el volumen de sólidos, los valores en mercados bursátiles, el peso corporal, la contaminación de una fuente hídrica, nuestros propios estados de ánimo, son funciones que dependen de más de una variable, donde algunas variables son independientes u otras dependientes.

En ciertos casos es conveniente estudiar algunas gráficas para poder entender así el fenómeno descrito, por ejemplo, los mapas topográficos, cambios de temperaturas y esquemas de precipitaciones entre otros hacen parte del estudio de estas funciones y cuya aplicación a temas específicos son muy usados en Ingeniería y las ciencias en general. Las razones de cambio de estas funciones con respecto a las variables que la conforman motivan el estudio de las derivadas parciales.

Se presentará el vector gradiente como uno de los entes matemáticos más importantes del curso y del cual se verán sus aplicaciones. Este vector describe situaciones del cálculo que sin él sería muy complicado abordarlas, tales como las diferenciales o la regla de la cadena que, además de ayudar a consolidar el pensamiento vectorial del estudiante, muestra su faceta unificadora de los distintos fenómenos que trata el problema; como por ejemplo que el vector gradiente de una función contiene la información de las razones de cambio con respecto a las variables del problema. Aplicaciones modernas de este tema se ve en la inteligencia artificial (machine learning), en la economía y en general en todas las ramas de las ingenierías, las cuales se irán comentando en el transcurso de las clases.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

Decimotercera sesión: (Clase magistral)

Funciones multivariables. Conjuntos de nivel.

Desde un punto de vista general, las funciones multivariables están conformadas por variables independientes (que son más de una) y una variable dependiente de las otras variables. Es decir, el esquema puede pensarse así: $variable\ dependiente = f(variables\ independientes)$

Estas funciones también son llamadas funciones escalares (o campos escalares), dado que su rango está conformado por un escalar (variable dependiente).

La descripción de estas funciones puede darse mediante una fórmula explícita con una estructura como la dada anteriormente (lo que describe la función completamente), o por medio de una tabla de valores o una gráfica de sus conjuntos de nivel (la cual sugiere una descripción local de la función). En este sentido tenemos los ejemplos:

Forma explícita: $w = 3x^2 - \sec(z + 4u) + \sqrt{y}$

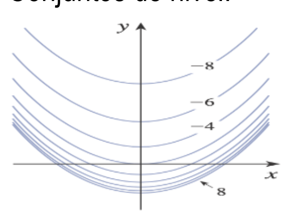
Tabla de valores:

Duración (horas)

Velocidad del viento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
30	1.2	1.3	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

(Tomado del libro Cálculo de Varias Variables. J. Stewart)

Conjuntos de nivel:



(Tomado del libro Cálculo de Varias Variables. J. Stewart)

En este sentido, los conjuntos de nivel para una función son los conjuntos de puntos donde la función permanece constante. En lenguaje de forma explícita, son el conjunto de puntos de la forma $f(variables) = k$.

Cuando las funciones son de dos variables, los conjuntos de nivel se llamarán curvas de nivel. Si las funciones son de tres variables, los conjuntos de nivel se llamarán superficies de nivel. Nótese la relación entre las dimensiones de los conjuntos de nivel y la gráfica de la función.

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 888.

Decimocuarta sesión: (Clase magistral)

Derivadas parciales y vector gradiente.

Se definen las derivadas parciales de una función multivariable con respecto a una variable independiente, de manera algorítmica, como la derivada con respecto a esa variable dejando las demás variables como si fueran constantes.

Las notaciones para estas derivadas son: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, ...

Para las segundas derivadas, sus notaciones son: $f_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, ...

El teorema de Clairaut afirma que $f_{xy} = f_{yx}$, es decir que sus derivadas mixtas son iguales si ellas son continuas en una región del plano xy.

Si la función a considerar se escribe como $w = f(x, y, z)$, interesa saber su razón de cambio respecto a sus variables independientes, por lo que se define *la diferencial total de* w como (Recordando lo aplicado en cálculo integral de una variable al hacer sustituciones):

$$\boxed{dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz}$$

Si se escribe lo anterior en forma vectorial se obtiene que:

$$\boxed{dw = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle}$$

Donde el primer vector que aparece en esta forma se conoce como el vector gradiente de $f(x, y, z)$, el cual se escribe $\nabla f(x, y, z) = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$.

Este vector gradiente de una función multivariable nos permite definir un operador diferencial (∇) aplicado a un campo escalar (f) que sirve, entre otras muchas cosas, para determinar la ecuación de un plano tangente a una superficie que se define mediante una función de dos variables. Es decir que si $z = f(x, y)$ y al tomar un punto (x_0, y_0, z_0) de la gráfica, entonces esta ecuación está dada por:

$$z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0 \rangle$$

Nótese la analogía de su forma con la ecuación de la recta tangente en el plano cartesiano. De manera intuitiva motivada por su geometría, la superficie dada y el plano tangente a la superficie en un punto parecen “fundirse”, por lo que tiene sentido decir que una aproximación lineal de $f(x, y)$ en cercanías del punto (x_0, y_0, z_0) de la gráfica está dada por: $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0 \rangle$

Donde se puede estimar errores de medición usando los diferenciales junto con estas aproximaciones lineales.

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Decimoquinta sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento visual a través de la comprensión de las funciones multivariables y sus derivadas parciales, junto con la primera aplicación del vector gradiente y su visualización.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: Sea $z = (ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2}$ una función multivariable.

a. Con ayuda de la plataforma Geogebra, investigue cómo varia la forma de las gráficas al variar los parámetros a y b mostrados en la función.
b. Determine la diferencial total de z y escríbala en forma vectorial. ¿Puede factorizar alguna expresión en el vector gradiente?
c. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie asociada a la función anterior en términos de a y b en el punto $(1,1)$ mostrando su respectivo vector gradiente. Compruebe sus resultados con el uso de la geometría dinámica. ¿Habrá algun valor de a y b para los que el plano tangente en el punto $(1,1)$ sea horizontal?
d. Mediante el uso de la plataforma Geogebra, trace distintas curvas de nivel de la función ($z = k$ con $k > 0$) prefijando valores de a y b escogidos por usted. Partiendo del punto $(1,1)$ ¿qué signo tendrá cada derivada parcial?
e. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Decimosexta sesión: (Clase magistral)

Regla de la cadena:

Recordando lo que acontece con las funciones de una variable, la regla de la cadena indicará cómo se debe proceder cuando se debe derivar una función compuesta. En este caso multivariable, cada variable intermedia dependerá de otras variables. En un modo más preciso se tiene que sí $w = f(x, y, z)$ es una función derivable de x, y y de z, y además x, y y z son funciones derivables que dependen de las variables t y s, entonces w es una función derivable de t y s. Se tiene además que (tomando la definición de diferencial total):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = f_x \dfrac{\partial x}{\partial t} + f_y \dfrac{\partial y}{\partial t} + f_z \dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} = f_x \dfrac{\partial x}{\partial s} + f_y \dfrac{\partial y}{\partial s} + f_z \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{cases}$$

Notemos que si llamamos $\vec{r}(s,t) = \langle x(s,t), y(s,t), z(s,t) \rangle$ al vector que reúne las funciones derivables x, y y z, entonces podemos escribir el sistema anterior en la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \nabla f\big(\vec{r}(s,t)\big) \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} = \nabla f\big(\vec{r}(s,t)\big) \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s} \end{cases}$$

O sin la dependencia de las variables t y s, queda convertido en $\boxed{\partial w = \nabla f(\vec{r}) \cdot \partial \vec{r}}$, lo que se asemeja a lo que ocurre en el cálculo de una variable.

Como un caso particular de esta regla de la cadena, tenemos que si $F(x,y,z) = 0$ define a z implícitamente como una función de x y de y, entonces la derivada parcial de z con respecto a x (derivada implícita) está dada por: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$

Análogamente para la derivada parcial de z con respecto a y. Mostraremos que si se dibuja una curva paramétrica en una superficie, el vector tangente de esa curva tiene una relación con el vector gradiente de la superficie.

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Decimoséptima sesión: TRABAJO COLABORATIVO:

En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder construir el significado robusto del concepto de funciones multivariables y sus derivadas parciales, para así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados, dada la novedad de la plataforma.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la decimoctava sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA:

Por la estructura de los materiales que conforman una caja, su longitud, su ancho y su altura varían con el tiempo. En cierto instante las medidas de la caja son de dos metros su longitud y de tres metros su ancho y su altura. Se observa que la longitud y el ancho de la caja aumentan a razón de 2 m/h y que su altura disminuye a razón de 1m/h.

a. Realice un bosquejo en una plataforma computacional donde se muestre dinámicamente el experimento anterior. ¿En qué momento el volumen de la caja es de un metro cúbico?
b. En el momento que se tomaron las variaciones de las medidas, determine las razones a las que cambian:
   - El volumen de la caja
   - El área lateral de la caja
   - La suma de las aristas de la caja
   - La longitud de una diagonal de la caja
c. Interprete los números obtenidos anteriormente. ¿Alguno de estos valores disminuirá con el tiempo?
d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Decimoctava sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la decimosexta sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

PROBLEMA: (Tomado con variaciones del libro Notas de clase. ECDI)

Suponga que el movimiento de un objeto en el espacio está dado por $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \langle \mathbf{cos}(\boldsymbol{t}), \mathbf{sin}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \rangle$ y que la temperatura de un punto cualquiera $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ del espacio está dada por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 - 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

a. Mediante el uso de la plataforma tecnológica, trace la curva dada por el movimiento descrito, mostrando en él su vector tangente unitario. ¿Qué podría decir este vector sobre la temperatura de los puntos en la curva descrita?
b. Determine si existe un punto del recorrido del objeto en el cual la temperatura es igual a cero.
c. Determine la razón de cambio de la temperatura del objeto cuando $\boldsymbol{t} = \frac{7\pi}{3}$.

Fuente: *autor (2021)*

4.2.4. Actividad 4: Derivadas con dirección y optimización

Tabla 4 Actividad 4: Derivadas con dirección y optimización

<u>DESCRIPCIÓN:</u> En esta cuarta actividad se presenta a los estudiantes las derivadas direccionales de funciones multivariables y el estudio de la optimización de ellas con o sin restricciones; temáticas que se desarrollarán bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
<u>OBJETIVOS:</u> • Aplicar los temas del cálculo diferencial en varias variables con la ayuda del vector gradiente. • Motivar el estudio de la optimización en varias variables desde sus facetas algorítmicas, geométricas y estructurales. • Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde tales facetas. • Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con derivadas direccionales y de optimización. • Incitar en el estudiante el manejo y comprensión de la herramienta tecnológica que le permita visualizar y entender los resultados mostrados de derivadas direccionales y de los dos métodos para optimización. • Establecer las conexiones del cálculo en una variable al cálculo multivariable desde un punto de vista vectorial, lo que permite generalizar las ideas y métodos descritos usando el álgebra lineal. • Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase. • Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura. • Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.
<u>CONTENIDOS:</u> • Derivadas direccionales y su optimización. • Valores extremos de una función, con o sin restricciones.
<u>PRERREQUISITOS:</u> • Derivadas parciales y vectores. • Criterio de la segunda derivada en el cálculo de una variable. • Visualización de objetos en el plano o en el espacio.

- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren derivadas direccionales para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad encontrar los valores extremos de una función con o sin restricciones, que le permita resolver problemas desde el punto de vista vectorial.
- Que el estudiante demuestre su ingenio al aplicar los conceptos del álgebra lineal para poder resolver problemas de optimización que pueden aparecer en su entorno profesional.
- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y consolide este manejo de manera robusta

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren derivadas direccionales y optimización.

ANTESALA:

Las aplicaciones del vector gradiente son muy útiles en muchas áreas de las ciencias, en especial para las ingenierías, como los son las derivadas direccionales y la optimización de funciones de varias variables.

Muchos de los modelos dependientes de varias variables que se presentan en las aplicaciones tienen como datos iniciales las razones de cambio que existen entre una y otras variables del modelo, por lo que es importante estudiar tales variaciones para poder describir el modelo de una manera más completa, del cual se basa los fundamentos prácticos de las ecuaciones diferenciales. Estas variaciones no solo pueden darse siguiendo direcciones estándares, sino en cualquier dirección.

Veremos los métodos de Hess y de Lagrange para la optimización de funciones multivariables, los cuales se generalizaron y adquirieron una forma importante en las aplicaciones. Por ejemplo, en la primera y segunda guerra mundial se desarrollaron métodos de optimización que generalizaban lo realizado en cálculo de una variable, lo cual implicaba optimizar recursos de distinta índole. Estas ideas de optimización son bastante usadas en la actualidad en contextos tan diversos que van desde la economía hasta la ingeniería agrícola, donde el vector gradiente sobre isotermas describe la razón de cambio de la temperatura en diversas épocas del año.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

Decimonovena sesión: (Clase magistral)

Derivadas direccionales y su optimización.

Refiérase al siguiente enlace para visualizar a través de la herramienta tecnológica el concepto de derivadas direccionales: https://www.geogebra.org/m/ZTttemYc

Al observar la definición de las derivadas parciales se nota la dependencia de las direcciones $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ en las cuales se calculan. Por ello, si se toma cualquier dirección $\vec{u}$ se obtiene la definición de la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección del vector $\vec{u} = \langle a, b\rangle = \langle \cos(\theta), \sin(\theta)\rangle$ como: $D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y)+h(a,b)\big)-f(x,y)}{h}$

De donde haciendo algunos cálculos por la regla de la cadena se obtiene la forma vectorial:

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot \vec{u}}$$

Recordando la definición del producto escalar de dos vectores relacionado con el ángulo entre ellos, se tiene que $D_{\vec{u}} f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \cos(\theta)$

De allí se sigue que el valor máximo de esta derivada direccional es $\|\nabla f(x,y)\|$, y se obtiene cuando el vector $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente (máximo de $\cos(\theta) = 1 \leftrightarrow \theta = 0$). Caso opuesto para el mínimo valor de la derivada direccional.

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 946.

Vigésima sesión: (Clase magistral)

Valores extremos de funciones multivariables.

Análogamente con lo que sucede en el cálculo de una variable, para estas funciones multivariables también existe un criterio de la segunda derivada.

Para visualizar los diferentes puntos críticos que puede tener una función multivariable, refiérase al enlace: https://www.youtube.com/watch?v=UfDIeygpNJs

Según lo anterior, existen tres clases de puntos críticos, los cuales se pueden deducir usando el Hessiano de una función de dos variables:

$$\mathcal{H}f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Para hallar tales puntos críticos debemos resolver el sistema de ecuaciones $\nabla f(x,y) = \langle 0,0 \rangle$ y así obtener puntos de la forma (a,b) que satisfacen tales ecuaciones.

Después de ello, se evalúan los puntos críticos obtenidos en el Hessiano de la función $f(x,y)$ y pueden ocurrir los siguientes casos:

- Si $\mathcal{H}f(a,b) > 0$ y además $f_{xx} > 0$, entonces en el punto (a,b) se alcanza un mínimo local de $f(x,y)$.
- Si $\mathcal{H}f(a,b) > 0$ y además $f_{xx} < 0$, entonces en el punto (a,b) se alcanza un máximo local de $f(x,y)$.
- Si $\mathcal{H}f(a,b) < 0$, entonces en el punto (a,b) se alcanza un punto silla de $f(x,y)$.
- Si $\mathcal{H}f(a,b) = 0$, entonces el criterio no permite decidir sobre el punto crítico (a,b)

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Vigesimoprimera sesión: (Clase magistral)

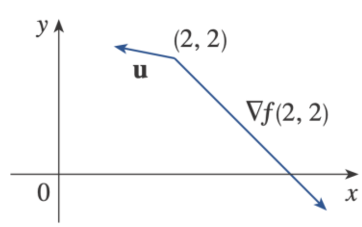
En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento visual a través de la comprensión de las derivadas direccionales, junto con el método del Hessiano para valores extremos y su visualización.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase

PROBLEMAS: **(PRIMERA PARTE) (Tomados con variaciones del libro Cálculo en varias variables. J Stewart)**

Se tiene la siguiente figura donde se da el vector dirección y el gradiente de una función $f(x,y)$.



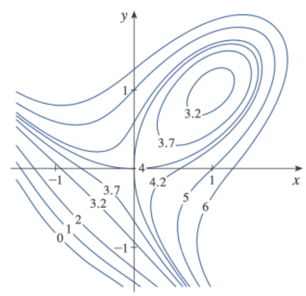
a. Con ayuda de la herramienta tecnológica, use la figura para estimar $D_{\vec{u}} f(2,2)$.
b. Estime la dirección de máximo crecimiento y de mínimo crecimiento de la función $f(x,y)$.
c. ¿Cuál es el valor de la máxima derivada direccional? ¿Coinciden sus respuestas con lo resuelto en el ítem a?

d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

(SEGUNDA PARTE)

Use las curvas de nivel en la figura para predecir la ubicación de los puntos críticos de $\boldsymbol{f}$ y si $\boldsymbol{f}$ tiene un máximo o mínimo local o punto de silla en cada punto crítico. Use después el Hessiano para confirmar sus predicciones. Por último, compruebe sus resultados con Geogebra.

$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



Vigesimosegunda sesión: (Clase magistral)

Multiplicadores de Lagrange:

Cuando se desea optimizar una función (objetivo) sujeto a una restricción (condición) inherente al problema, este método es conveniente para dar solución al problema.

Para entender y visualizar un ejemplo dado del tema, refiérase al enlace: https://www.youtube.com/watch?v=sSofq9PTm-s

El método para obtener estos valores óptimos de la función $f(x, y, z)$ junto con la restricción $g(x, y, z) = k$, consiste en resolver el sistema de ecuaciones dado de manera vectorial como:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

Donde se deducen puntos críticos de la forma (a, b, c). Para determinar si son máximos o mínimos de la función $f(x, y, z)$ se debe tomar un punto que satisfaga la restricción del problema, llamémoslo (m, n, p). Después de evaluarlo en la función $f(x, y, z)$ se comparan los valores obtenidos:

- Si $f(a, b, c) > f(m, n, p)$ entonces (a, b, c) es un punto máximo de la función $f(x, y, z)$.
- Si $f(a, b, c) < f(m, n, p)$ entonces (a, b, c) es un punto mínimo de la función $f(x, y, z)$.

Si en el problema existe más de una restricción, por ejemplo $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = m$, entonces el sistema de ecuaciones a resolver viene dado de manera vectorial como:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = k \\ h(x,y,z) = m \end{cases}$$

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Vigesimotercera sesión: TRABAJO COLABORATIVO:

En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder contribuir a construir el significado robusto del concepto de multiplicadores de Lagrange y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados, dada la novedad de la plataforma.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la vigesimocuarta sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA: (Tomado con variaciones del libro Análisis vectorial. J. Marsden & A. Tromba)

La planta de Baraboo, Wisconsin, de la Compañía Internacional de Chucherías, S.A. usa aluminio, hierro y magnesio para producir chucherías de alta calidad. La cantidad de chucherías que puede producir usando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x,y,z) = xyz$. El costo de la materia prima es: aluminio, $\$6$ dólares por tonelada; hierro, $\$4$ dólares por tonelada; y magnesio, $\$8$ dólares por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deberán usarse para manufacturar 1000 chucherías al menor costo posible?

Vigesimocuarta sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la vigesimosegunda sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.
PROBLEMA: Demuestre que el valor mínimo de la función $f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{(ax+by+c)^2}$ esta dado por $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Fuente: *autor (2021)*

4.2.5. Actividad 5: Hacia la integración múltiple de campos escalares

Tabla 5 Actividad 5: Hacia la integración múltiple de campos escalares

<u>DESCRIPCIÓN:</u> En esta quinta actividad se presenta a los estudiantes el concepto de integración múltiple de funciones multivariables (también conocidas como campos escalares); temática que se desarrollará bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
<u>OBJETIVOS:</u> • Introducir el concepto de integral múltiple como generalización de la integral definida estudiada en el curso anterior, con la ayuda de las parametrizaciones de curvas, superficies y sólidos. • Motivar el estudio de la integración múltiple desde sus facetas algorítmica, geométrica y estructural. • Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde tales facetas. • Incitar en el estudiante el manejo y comprensión de la herramienta tecnológica, la cual le permitirá desarrollar e intuir formas de resolver problemas relacionados con la integración múltiple. • Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con integrales de línea, de superficie y triples. • Establecer las conexiones del cálculo en una variable al cálculo multivariable desde un punto de vista vectorial, lo que permite generalizar las ideas y métodos descritos usando el álgebra lineal. • Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase. • Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura. • Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial

CONTENIDOS:

- Integrales múltiples e iteradas de campos escalares.
- Integrales múltiples sobre dominios especiales.

PRERREQUISITOS:

- Cálculo integral de una variable.
- Parametrizaciones de curvas y superficies. Coordenadas.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.
- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren integrales múltiples para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de reproducir y utilizar las coordenadas vistas en la Actividad 2 que le permita resolver problemas de integración múltiple desde el punto de vista vectorial.
- Que el estudiante demuestre su ingenio al aplicar los conceptos del álgebra lineal para poder resolver problemas de integración múltiple que aparezcan en su quehacer profesional.
- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y consolide este manejo de manera robusta.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.

Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren integrales múltiples

ANTESALA:

La integración múltiple de funciones multivariables es uno de los conceptos más utilizados por la ciencia actual. Desde la concepción del principio de Cavalieri para determinar volúmenes por secciones transversales hasta el concepto de la integral definida de una variable como un área bajo la curva de una función. Al generalizar este concepto a más dimensiones se encuentran inesperadas aplicaciones, aparte de calcular volúmenes, con conceptos físicos de alto impacto como lo son el cálculo de masas dada la densidad variable del objeto, centros de masa en dos o tres dimensiones, cargas eléctricas y hasta momentos de inercia. En la estadística tiene interés este concepto en cuanto ayuda a estudiar las funciones de densidad de probabilidad conjunta de variables aleatorias simultáneamente.

Como una aplicación interesante de la integral múltiple como herramienta para encontrar volúmenes, podemos citar que en medicina al hacer el estudio de extirpación de un tumor maligno se recurre al modelamiento en tres dimensiones del tumor con sus conexiones al órgano afectado, del cual se necesitará saber cómo es que el tumor está creciendo o ganando volumen para tomar correctivos médicos para que el tumor pierda volumen y así poder extirparlo. En este sentido las coordenadas rectangulares que se usan ya no son suficientes para describir completamente el fenómeno y se hace necesario el uso de las coordenadas polares, cilíndricas o esféricas dependiendo de la naturaleza del objeto de estudio.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

Vigesimoquinta sesión: (Clase magistral)

Integrales múltiples sobre n- intervalos.

Refiérase al siguiente enlace para visualizar a través de la herramienta tecnológica el concepto de integración doble: https://www.geogebra.org/m/cnq4ASVc

Las integrales iteradas que se presentarán tienen inmerso los conceptos de integral definida como límite de sumas de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo. Luego la generalización de estas ideas a más dimensiones trae consigo la definición de n- intervalos (si $n = 2$ entonces queda $[a, b] \times [c, d]$ y si $n = 3$ entonces queda $[a, b] \times [c, d] \times [e, h]$) y de las integrales iteradas, que correspondientemente son:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Donde la última igualdad de estas dos integrales iteradas se conoce como el teorema de Fubini.

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx = \cdots$$

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 988 y página 1029.

Vigesimosexta sesión: (Clase magistral)

Integrales múltiples sobre objetos geométricos generales.

Recordando lo realizado en la Actividad 2 sobre las parametrizaciones de curvas y superficies junto a lo estudiado en la Actividad 1 sobre el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo, se pueden definir las siguientes integrales:

- Integral de línea: Parametrización de la curva C: $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$

$$\int_C f(x,y,z)\,dL = \int_{[a,b]} f\big(\vec{r}(t)\big)\,\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

- Integral de superficie: Parametrización de la superficie S: $\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$

$$\int_S f(x,y,z)\,dA = \int_{[a,b]\times[c,d]} f\big(\vec{r}(u,v)\big)\,\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|dvdu$$

- Integral triple: Parametrización del solido E: $\vec{r}(u,v,w) = \langle x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\rangle$

$$\int_E f(x,y,z)\,dV = \int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f\big(\vec{r}(u,v,w)\big)\,|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\cdot\vec{r}_w|dwdvdu$$

Se mostrará que cuando se manejan las distintas coordenadas estudiadas en la Actividad 2, los elementos diferenciales de cada integral son:

- Coordenadas polares: $dA = \|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta\|drd\theta = (r)drd\theta$
- Coordenadas cilíndricas: $dV = |(\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta)\cdot\vec{r}_z|dzdrd\theta = (r)dzdrd\theta$
- Coordenadas esféricas: $dV = \left|(\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\phi)\cdot\vec{r}_\theta\right|d\rho d\phi d\theta = \rho^2\sin(\phi)\,d\rho d\phi d\theta$

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Vigesimoséptima sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento visual a través de la comprensión de las integrales múltiples sobre campos escalares junto con su visualización.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: **(PRIMERA PARTE)**

Se define la superficie S_1 como la esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$ y la superficie S_2 como la superficie cónica con ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

a. Parametrice cada uno de los objetos geométricos del espacio para que la parametrización quede definida sobre un 1- intervalo, 2- intervalos, 3- intervalos según la naturaleza del objeto:
   - (C) La curva intersección de las dos superficies.
   - (S) La parte de la superficie S_1 que está dentro de la superficie cónica S_2.
   - (E) El sólido delimitado por S_1 que está por fuera de S_2.

b. Con ayuda de la herramienta tecnológica grafique cada uno de los objetos anteriores. ¿Alguna curva o superficie es cerrada?

c. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

(SEGUNDA PARTE)

Escriba cada integral dada como una integral iterada sobre un 1- intervalo, 2- intervalos, 3- intervalos según la naturaleza del objeto geométrico de la primera parte del problema:

- $\int_C (x - y + z)\, dL$
- $\int_S (x - y + z)\, dA$
- $\int_E (x - y + z)\, dV$

Vigesimoctava sesión: (Clase magistral)

Integrales múltiples sobre regiones especiales.

Se estudiarán los tipos de regiones que están acotadas por las gráficas de dos funciones, tanto de una variable como de dos variables, junto a las integrales iteradas que proceden de estas regiones. Esto se sigue de la parametrización especial dada en la Actividad 2 al realizar los cálculos de sus elementos diferenciales.

En el plano: Región Tipo I: $\mathcal{R}_1 = \{(x, y): a \leq x \leq b\,, g(x) \leq y \leq h(x)\}$

$$\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Región Tipo II: $\mathcal{R}_2 = \{(x, y): c \leq y \leq d\,, g(y) \leq x \leq h(y)\}$

$$\int_{\mathcal{R}_2} f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

En el espacio: Región Tipo I: $\mathcal{R}_1 = \{(x, y, z): (x, y) \in S\,, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$

$$\int_{\mathcal{R}_1} f(x, y, z)\, dV = \int_S \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dA$$

Región Tipo II: $\mathcal{R}_2 = \{(x, y, z): (y, z) \in S\,, g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\}$

$$\int_{\mathcal{R}_2} f(x,y,z)\,dV = \int_S \left(\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA$$

Región Tipo III: $\mathcal{R}_3 = \{(x,y,z) : (x,z) \in S\,, g(x,z) \leq y \leq h(x,z)\}$

$$\int_{\mathcal{R}_3} f(x,y,z)\,dV = \int_S \left(\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dA$$

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Vigesimonovena sesión: TRABAJO COLABORATIVO:

En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder contribuir a construir el significado robusto del concepto de integrales sobre regiones especiales y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados, dada la novedad de la plataforma.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la trigésima sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA:

Suponga que se tiene un tanque esférico con centro en el origen y de radio 1m y que dentro de él hay un líquido que tiene un nivel dado por un plano con ecuación $z = m$, determinando dos sólidos.

a. Por medio de la plataforma tecnológica muestre dinámicamente la simulación descrita en el problema.
b. Encuentre los valores de m para el cual la razón entre los volúmenes de los dos sólidos es de 3.
c. Compruebe la anterior solución en la plataforma tecnológica, mostrando el volumen encontrado en ambas partes.

Trigésima sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la vigesimoctava sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados

para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas. Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia. La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.
PROBLEMA: (Tomado del libro Cálculo de varias variables. J Stewart) Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores constantes, $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ es el vector de posición y E está dada por las desigualdades $0 \leq \vec{a} \cdot \vec{r} \leq \alpha$, $0 \leq \vec{b} \cdot \vec{r} \leq \beta$, $0 \leq \vec{c} \cdot \vec{r} \leq \gamma$, demuestre que: $$\int_E (\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})(\vec{c} \cdot \vec{r})\, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8\left\|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right\|}$$

Fuente: *autor (2021)*

4.2.6. Actividad 6: Hacia la integración múltiple de campos vectoriales

Tabla 6 Actividad 6: Hacia la integración múltiple de campos vectoriales

<u>DESCRIPCIÓN:</u> En esta sexta actividad se presenta a los estudiantes el concepto de integración múltiple de campos vectoriales; temáticos que se desarrollará bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
<u>OBJETIVOS:</u> • Introducir el concepto de integral múltiple sobre campos vectoriales como concepto intrínseco para estudiar fenómenos físicos relacionados, con la ayuda de curvas y superficies orientables. • Incitar en el estudiante el manejo y comprensión de la herramienta tecnológica, la cual le permitirá desarrollar e intuir formas de resolver problemas relacionados con la integración de campos vectoriales. • Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde tales facetas. • Establecer las conexiones del cálculo en una variable al cálculo de integrales de línea y de superficie sobre campos vectoriales, lo que permite generalizar las ideas y métodos descritos en el curso de Cálculo Integral. • Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la

resolución de un problema relacionado con integrales de línea y de superficie sobre campos vectoriales.

- Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase.
- Fundamentar las bases estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de la asignatura.
- Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.

CONTENIDOS:

- Campos vectoriales en el plano y en el espacio.
- Integrales múltiples sobre campos vectoriales.

PRERREQUISITOS:

- Cálculo integral de una variable.
- Parametrizaciones de curvas y superficies. Coordenadas.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.
- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren integrales múltiples sobre campos vectoriales para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de reproducir y utilizar las coordenadas vistas en la Actividad 2 que le permita resolver problemas de integración múltiple sobre campos vectoriales desde el punto de vista vectorial.
- Que el estudiante demuestre su ingenio al aplicar los conceptos del álgebra lineal para poder resolver problemas de integración múltiple que aparezcan en su quehacer profesional.
- Que el estudiante maneje las plataformas tecnológicas disponibles para visualizar las distintas situaciones geométricas involucradas con los conceptos establecidos y consolide este manejo de manera robusta.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren integrales múltiples sobre campos vectoriales.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

Trigésima primera sesión: (Clase magistral)

Campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Refiérase a los siguientes enlaces para visualizar a través de la herramienta tecnológica el concepto de campos vectoriales en el plano y en el espacio:

- https://www.geogebra.org/m/V9Afznt5
- https://www.geogebra.org/m/SGSasuSB
- https://www.geogebra.org/m/hffmkfhd

Un campo vectorial bidimensional en una función $\vec{\mathbb{F}}$ que asigna a cada punto (x, y) de una región plana un vector bidimensional $\vec{\mathbb{F}}(x, y)$. La notación del campo en términos de sus funciones componentes es:

$$\vec{\mathbb{F}}(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

Un campo vectorial tridimensional en una función $\vec{\mathbb{F}}$ que asigna a cada punto (x, y, z) de una región espacial un vector tridimensional $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z)$. La notación del campo en términos de sus funciones componentes es: $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$

Se define las líneas de flujo de un campo vectorial como las trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidad es el campo dado. Luego los vectores del campo serán tangentes a las líneas de flujo.

Recordando el concepto del gradiente de una función escalar $f(x, y, z)$, se tiene que su gradiente es un ejemplo de un campo vectorial tridimensional, pues $\nabla f(x, y, z) = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle P, Q, R \rangle = \vec{\mathbb{F}}(x, y, z)$.

A estos campos se les suelen llamar campos gradientes o conservativos. A la función escalar $f(x, y, z)$ se le suele llamar la función potencial de $\vec{\mathbb{F}}$, nombres que son usados en física reiteradamente.

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro guía (Stewart. J: Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas. Octava edición) en la página 1068.

Trigésima segunda sesión: (Clase magistral)

Integrales de línea sobre campos vectoriales.

Recordando lo realizado en la Actividad 5 sobre la integral de línea de funciones escalares, se define la integral de línea de campos vectoriales por analogía. Esta integral se conoce también como la circulación del campo $\vec{\mathbb{F}}$ a lo largo de la curva C y también calcula el trabajo requerido por una partícula que se mueve sobre la curva C inmersa en el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}$:

Integral de línea: Parametrización de la curva C: $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$

$$\int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot \vec{T}\, dL = \int_{[a,b]} \vec{\mathbb{F}}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{L} = \int_{[a,b]} Pdx + Qdy + Rdz$$

Cuando la integral de línea anterior se calcula sobre un campo vectorial conservativo se obtiene un resultado análogo al teorema fundamental del cálculo para estas integrales: $\int_C \nabla f \cdot d\vec{L} = \int_{[a,b]} \frac{d}{dt} f(\,\vec{r}(t))dt = f\big(\vec{r}(t)\big)\Big|_a^b = f\big(\vec{r}(b)\big) - f(\vec{r}(a))$

Lo que implica que la circulación de un campo gradiente de una función escalar únicamente depende de los valores de la función escalar en los puntos inicial y final de la curva C.

Cabe destacar que si se invierte la orientación de la curva C entonces la integral de línea del campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}$ sobre esa curva cambiará de signo, caso contrario de lo que sucede en la integral de línea de funciones escalares.

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Trigésima tercera sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento algorítmico a través de la comprensión de las integrales múltiples sobre campos vectoriales junto con su visualización.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de la plataforma tecnológica, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: **(PRIMERA PARTE)**

Se define el campo vectorial bidimensional como $\vec{\mathbb{F}}(x, y) = \langle 1, x\rangle$.

a. Con ayuda de la herramienta tecnológica trace un diagrama del campo vectorial dado y sobre él dibuje algunas líneas de flujo. ¿Podría conjeturar qué forma tienen esas líneas de flujo?
b. Por medio de la definición de líneas de flujo deduzcan las ecuaciones diferenciales que satisface

cada componente del campo vectorial. ¿Qué podrían decir de la expresión $\frac{dy}{dx}$?

c. ¿Cuál sería la ecuación de la trayectoria que sigue una partícula que sale del origen en el campo dado? Compruebe su respuesta con la herramienta tecnológica.
d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

(SEGUNDA PARTE)

Dado el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}(x,y,z) = \langle x + y\ , x\ , z^2 \rangle$ y las trayectorias con parametrización: $\vec{r}(t) = \langle 3 - t^2, t^3, 2 + t \rangle, t \in [-1,2]$ y $\vec{s}(t) = \langle 2 - 3t, -1 + 9t, 1 + 3t \rangle, t \in [0,1]$

a. Con ayuda de la herramienta tecnológica trace cada una de las trayectorias. ¿Nota algo en particular sobre ellas?
b. Calcule la integral de línea del campo vectorial dado sobre cada una de las trayectorias. Compare las respuestas obtenidas en ambas integrales.
c. Respecto a la respuesta anterior, ¿sería posible que el campo vectorial sea conservativo? Si lo es, dé una conjetura de su función potencial.
d. ¿Qué utilizó para dar tal conjetura anterior? ¿Podría generalizar ese resultado? Evalúe la integral de línea usando tal función potencial.
e. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Trigésima cuarta sesión: (Clase magistral)

Integrales de superficie sobre campos vectoriales.

Recordando lo realizado en la Actividad 5 sobre la integral de superficie de funciones escalares, se define la integral de superficie de campos vectoriales por analogía. Esta integral se conoce también como el flujo del campo $\vec{\mathbb{F}}$ a través de la superficie S:

Integral de superficie: Parametrización de la superficie S: $\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$

$$\int_S \vec{\mathbb{F}} \cdot \vec{N}\, dA = \int_{[a,b]\times[c,d]} \vec{\mathbb{F}}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dvdu = \int_S \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{[a,b]\times[c,d]} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Donde el vector $\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ es el vector normal unitario a la superficie dada y es el que le da a la superficie la orientación natural dada por la parametrización $\vec{r}(u,v)$.

Si la superficie S esta dada por la gráfica de una función de dos variables, por ejemplo, $z = g(x,y)$ se puede trabajar con x y con y como los parámetros de la superficie, lo que resulta en la fórmula: $\int_S \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{A} = \int_{[a,b]\times[c,d]} (-P\, g_x - Q\, g_y\ + R)\, dA$

En esta parte se verá la herramienta tecnológica Geogebra para explorar la faceta dinámica de la representación vectorial.

Trigésima quinta sesión: TRABAJO COLABORATIVO:

En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder contribuir a construir el significado robusto del concepto de integrales de superficie sobre campos vectoriales y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la trigésima sexta sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA:

Dado el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle 0 , -y , z \rangle$ y la superficie dada por el paraboloide con ecuación $y = x^2 + z^2$ con $0 \leq y \leq 4$ y el disco con ecuación $x^2 + z^2 \leq 4, y = 4$.

a. Por medio de la plataforma tecnológica muestre la superficie descrita en el problema ubicando dinámicamente algunos vectores normales unitarios exteriores.
b. Con la ayuda de la herramienta tecnológica, grafique el campo vectorial sobre la superficie dada. ¿Qué podría conjeturar acerca del flujo del campo vectorial por la superficie?
c. Calcule el flujo del campo vectorial por la superficie. ¿Es coherente su respuesta con lo obtenido en el ítem anterior?
d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

Trigésimo sexta sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la trigésimo cuarta sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

PROBLEMA:

Sea C una curva parametrizada por una función vectorial diferenciable $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ con $t \in [a, b]$ y $\vec{\mathbb{F}}$ un campo vectorial continuo definido sobre C. Mostrar que: a. Si $\vec{\mathbb{F}}(\vec{r}(t))$ es ortogonal a $\vec{r}'(t)$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{L} = 0$. b. Si $\vec{\mathbb{F}}(\vec{r}(t))$ es paralelo a $\vec{r}'(t)$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{L} = \pm \int_C \lVert\vec{\mathbb{F}}\rVert\, dL$.

Fuente: *autor (2021)*

4.2.7. Actividad 7: Introducción a las formas diferenciales

Tabla 7 Actividad 7: Introducción a las formas diferenciales

<u>DESCRIPCIÓN:</u> En esta séptima actividad se presenta a los estudiantes el concepto de las formas diferenciales; temáticas que se desarrollará bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan.
<u>OBJETIVOS:</u> • Introducir el concepto de las formas diferenciales con sus operaciones y propiedades, la cual se realizará desde un punto de vista vectorial. • Incitar en el estudiante el modo de pensamiento vecto-estructural de las formas diferenciales, lo que le permitirá desarrollar e intuir formas de resolver problemas relacionados con la temática en cuestión. • Motivar la analogía íntimamente estrecha entre los conceptos vistos en el curso desde el punto de vista de las formas diferenciales como un capítulo de los cursos de Cálculo vistos anteriormente. • Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con las formas diferenciales. • Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde las facetas del pensamiento vectorial. • Fundamentar las bases vecto-estructurales que permitan la comprensión de los temas posteriores de su ejercicio profesional. • Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.
<u>CONTENIDOS:</u> • Formas diferenciales y su álgebra exterior. • Derivación de formas diferenciales. Correspondencia fundamental.

PRERREQUISITOS:

- Álgebra de vectores.
- Cálculo diferencial e integral de funciones multivariables.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.

RECURSOS A UTILIZAR:

Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren formas diferenciales para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de reproducir y utilizar la correspondencia fundamental entre estas formas diferenciales que permite desarrollar la teoría desde un punto de vista vectorial.
- Que el estudiante demuestre su ingenio al aplicar los conceptos del álgebra lineal para poder resolver problemas de formas diferenciales que aparezcan en su quehacer profesional.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren formas diferenciales.

ANTESALA:

Las formas diferenciales nacen de la necesidad práctica de calcular integrales múltiples sobre campos vectoriales para la resolución de problemas de aplicación. Como dijo H. Flanders: "Esas son las cosas que ocurren bajo los signos de integración", de las cuales se trataron en la actividad pasada y de las cuales se conlleva a un cálculo tedioso en la mayoría de problemas.

El gran matemático Élie Cartan en 1902 definió de manera abstracta el concepto de formas diferenciales como herramienta unificadora, generalizadora y computacional de ciertos entes matemáticos que aparecen en el estudio físico de algunos fenómenos electrodinámicos, electromagnéticos, de campo de fuerzas, termodinámicos, de la relatividad general, etc. Esto condujo a algunos autores a redefinir estos conceptos abstractos para el estudio del Cálculo Vectorial de una forma accesible a los estudiantes de las demás ciencias que pueden aplicar y modelar estos conceptos. Muy pocos textos del curso tienen este énfasis para el estudio de los teoremas fundamentales y demás temas. En este escrito se pretende aportar de una manera coherente el uso y la aplicación del concepto de forma diferencial en el plano o en el espacio.

Aunque es un concepto relativamente nuevo y estéticamente hablando muy bello matemáticamente por su formulación breve y el alcance teórico que tienen, se desea en esta actividad mostrar el álgebra y derivación de estas formas diferenciales para así poder utilizarlas en las aplicaciones del curso, y junto a los objetos geométricos descritos en las actividades pasadas se tiene un arsenal matemático que permite robustecer el aprendizaje de los teoremas fundamentales que cierran este curso. Lo más interesante de este acercamiento es poder apropiarse de las herramientas dadas de los vectores, en particular de su producto vectorial, junto con sus esquemas de rotación para tal fin de empoderamiento del concepto de formas diferenciales.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.
- Trabajo extra-clase.

DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:

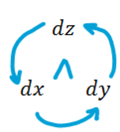
Trigésima séptima sesión: (Clase magistral)

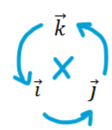
Formas diferenciales y su álgebra.

Se definen las n - formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$ como siguen, siendo f, P, Q, R funciones de (x, y, z):

a. Una 0- forma es una función escalar $\boxed{\omega = f}$
b. Una 1- forma es una combinación de dx, dy, dz : $\boxed{\omega = Pdx + Qdy + Rdz}$
c. Una 2- forma es una combinación de $dydz, dzdx, dxdy$: $\boxed{\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy}$
d. Una 3- forma es una combinación de $dxdydz$: $\boxed{\omega = fdxdydz}$

La suma y el producto de una función escalar por formas diferenciales se realiza de manera análoga como se hace en los vectores de una misma dimensión. El producto cuña $(\wedge)$ de una k- forma diferencial por otra l- forma diferencial dará una $k + l$- forma diferencial $(k + l \leq 3)$ la cual se basa en un esquema de rotación análogo al mostrado en la Actividad 1 para el producto vectorial de vectores:





Este producto cuña es asociativo y distributivo con respecto a la suma de formas diferenciales. Cabe destacar que el esquema de rotación mostrado anteriormente también aplica para el orden de una 3-forma, recordando lo visto anteriormente con el orden del triple producto escalar de vectores. Se muestra que este producto en general no es conmutativo para formas diferenciales.

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro de Marsden. J. y Tromba A.: Cálculo Vectorial. Tercera edición, en la página 566.

Trigésima octava sesión: (Clase magistral)

Derivación exterior de formas diferenciales.

Si $\omega = f$ es una 0- forma diferencial, se define su derivada exterior como la 1- forma:

$$d\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Lo que hace recordar a la diferencial total definida en la Actividad 3. En general para k- formas su derivada exterior es una $k+1$- forma que se obtiene al derivar a cada una de las funciones que componen la forma y teniendo en cuenta la regla de formación dada en el esquema de rotación anterior.

Esta derivada exterior cumple con las siguientes propiedades:

a. $d(d\omega) = 0$ para cualquier n- forma.
b. Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ es una 1- forma, entonces

$$\boxed{\begin{array}{c} d\omega = \left(R_y - Q_z\right)dydz + (P_z - R_x)dzdx \\ +(Q_x - P_y)dxdy \end{array}}$$

Donde las componentes de esta 2- forma se obtienen de manera análoga así:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle \times \langle P, Q, R \rangle = \nabla \times \vec{\mathbb{F}} := \text{rot}(\vec{\mathbb{F}})$$

c. Si $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ es una 2- forma, entonces $\boxed{d\omega = (P_x + Q_y + R_z)dxdydz}$

Donde la componente de esta 3- forma se obtiene con: $\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle = \nabla \cdot \vec{\mathbb{F}} := \text{div}(\vec{\mathbb{F}})$

d. Si $\omega = f dxdydz$ es una 3- forma, entonces $d\omega = 0$

Si ω es una forma diferencial tal que $d\omega = 0$, entonces ω es llamada una forma *cerrada*.

Si ω es una forma diferencial y existe otra forma diferencial η tal que $\omega = d\eta$, entonces ω se llama forma *exacta*.

Nótese la analogía con los campos vectoriales gradientes y su función potencial. Se prueba que toda forma diferencial exacta es cerrada. El recíproco es verdadero únicamente en el caso que las formas diferenciales estén definidas sobre regiones estrelladas. (Lema de Poincaré)

Si dos formas diferenciales ω_1 y ω_2 cumplen que $d\omega_1 = d\omega_2$ entonces $\omega_1 = \omega_2 + \varphi$, donde φ es una forma cerrada. Este resultado se asemeja a lo visto anteriormente en el curso de Cálculo Integral e indica que una "antiderivada exterior" de ω no es única.

Trigésima novena sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento algorítmico y estructural a través de la comprensión de las formas diferenciales y su álgebra junto con su derivación.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de las reglas que conforman estos entes matemáticos, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: **(PRIMERA PARTE)**

Se definen las siguientes formas diferenciales:

$$f = xy^2 - e^z,$$
$$\omega = y^2 dx + (xz - 1)dz,$$
$$\eta = (xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z)dxdy,$$
$$\psi = (2xz^2)dxdydz$$

a. Encuentre las formas diferenciales $f \wedge \omega$, $\omega \wedge \eta$ y $\eta \wedge \omega$. ¿Qué puede decir de estos dos últimos productos?
b. Evalué $\omega \wedge \omega$. ¿Qué podría conjeturar acerca de este producto y de la dimensión de esta forma diferencial?
c. Según el esquema de rotación mostrado para el producto cuña, dé los otros ordenes de la 3 - forma ψ. ¿Concuerda esto con lo visto anteriormente en el triple producto escalar de vectores? Justifiquen.
d. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

(SEGUNDA PARTE)

Se definen las siguientes formas diferenciales:

$$\omega = \sin(y)\, dx + (x\cos(y) + \cos(z))dy - y\sin(z)\, dz$$
$$\eta = (6x^2z^3 + 4x)dzdx$$
$$\psi = (4xy^2z^3 + 6x^2y^3z - 8x^3yz^2)dxdydz$$

a. Verifique que cada forma diferencial es cerrada. ¿En qué conjunto numérico máximo se aplicaría el lema de Poincaré?
b. Por el lema de Poincaré se tiene que cada forma anterior es exacta. ¿Qué procedimiento podrían conjeturar para la obtención de tal forma diferencial cuya derivada sea cada una de las formas dadas?
c. Según lo anteriormente escrito, muestren esas formas encontradas y comprueben que su derivada exterior es cada una de las formas dadas en el problema. ¿Este método funcionaría para cualquier forma diferencial?

Cuadragésima sesión: (Clase magistral)

La correspondencia fundamental

De la definición de las n- formas diferenciales se detecta una analogía con las funciones escalares y los campos vectoriales en cuanto a su presentación y la de sus componentes. En este sentido con el operador ∇ anterior que define el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}$ se hace corresponder lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 0-formas & \leftarrow - \rightarrow & función\ escalar \\ d\ \downarrow & & \downarrow\ \nabla \\ 1-formas & \leftarrow - \rightarrow & campo\ vectorial \\ d\ \downarrow & & \downarrow\ \text{rot} \\ 2-formas & \leftarrow - \rightarrow & campo\ vectorial \\ d\ \downarrow & & \downarrow\ \text{div} \\ 3-formas & \leftarrow - \rightarrow & función\ escalar \end{array}$$

Con ayuda de estas nuevas expresiones para el rotacional y divergencia de un campo vectorial se obtienen expresiones conocidas en el ámbito de la teoría de electromagnetismo, de las cuales se está dando una forma más unificada de las ecuaciones de Maxwell para esta teoría.

Cuadragésima primera sesión: <u>TRABAJO COLABORATIVO:</u>

En este problema se requiere de un razonamiento intuitivo y conjetural con herramientas del Cálculo Vectorial para resolverlo y así darles a los estudiantes bases sólidas para poder solucionar problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la cuadragésima segunda sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA:

1. Dado el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}(x,y,z) = \langle y^2 z\,, x - z^2\,, x^2 + y\rangle$, obtenga rot($\vec{\mathbb{F}}$) y div($\vec{\mathbb{F}}$) de manera directa y después haciendo uso de la correspondencia fundamental. Compare ambos métodos. ¿Cuál sería el óptimo?
2. La 2-forma $\omega = (2x^2y^2)dydz + (3xz^2)dzdx - (4xy^2z)dxdy$ es exacta. Encuentre una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$. ¿Qué argumento utilizó para encontrar tal función?
3. En la teoría de electromagnetismo se tienen las siguientes cantidades:
   $\vec{\mathbb{E}} = \langle E_1, E_2, E_3\rangle$ Campo eléctrico, $\vec{\mathbb{H}} = \langle H_1, H_2, H_3\rangle$ campo magnético, $\vec{\mathbb{B}} = \langle B_1, B_2, B_3\rangle$ inducción magnética, $\vec{\mathbb{J}} = \langle J_1, J_2, J_3\rangle$ densidad de corriente eléctrica, $\vec{\mathbb{D}} = \langle D_1, D_2, D_3\rangle$ desplazamiento dieléctrico y ρ la densidad de carga. Todas las anteriores son funciones de x, y, z, t. c es la velocidad de la luz.

   Las ecuaciones de Maxwell en lenguaje vectorial son: $\begin{cases} \text{rot}(\vec{\mathbb{E}}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} & \text{div}(\vec{\mathbb{D}}) = 4\pi\rho \\ \text{rot}(\vec{\mathbb{H}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbb{J}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbb{D}}}{\partial t} & \text{div}(\vec{\mathbb{B}}) = 0 \end{cases}$

Con ayuda de la correspondencia fundamental, se definen las formas diferenciales:

$$\omega_1 = E_1dx + E_2dy + E_3dz, \omega_2 = B_1dydz + B_2dzdx + B_3dxdy$$

$$\omega_3 = H_1dx + H_2dy + H_3dz, \omega_4 = D_1dydz + D_2dzdx + D_3dxdy$$

$$\omega_5 = J_1dydz + J_2dzdx + J_3dxdy$$

Mostrar en el lenguaje de estas formas diferenciales las ecuaciones de Maxwell dadas anteriormente. Nótese la simpleza de la formulación anterior.

Cuadragésima segunda sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la cuadragésima sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

PROBLEMA:

Pruebe las siguientes identidades definidas sobre el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}$ y una función escalar f:

$$\text{rot}\left(f\vec{\mathbb{F}}\right) = f\text{rot}\left(\vec{\mathbb{F}}\right) + (\nabla f) \times \vec{\mathbb{F}}$$

$$\text{div}\left(f\vec{\mathbb{F}}\right) = f\text{div}\left(\vec{\mathbb{F}}\right) + (\nabla f) \cdot \vec{\mathbb{F}}$$

Fuente: *autor (2021)*

4.2.8. Actividad 8: Variedades orientadas y teoremas fundamentales

Tabla 8 Actividad 8: Variedades orientadas y teoremas fundamentales

DESCRIPCIÓN:

En esta octava actividad se presenta a los estudiantes el concepto de las variedades orientadas junto a los teoremas fundamentales que culminan la asignatura; temáticas que se desarrollarán bajo el marco de los modos del pensamiento vectorial. Estos modos de pensamiento serán importantes en el momento de empezar a avanzar en una caracterización del pensamiento vectorial de los estudiantes y de cómo ellos abordan los problemas mostrados para darle una solución satisfactoria, además que se genere una discusión científica que permita evidenciar las formas de pensar vectorialmente que ellos generan

OBJETIVOS:

- Introducir el concepto de las variedades orientadas como una generalización de los objetos geométricos vistos, la cual se realizará desde un punto de vista vectorial.
- Motivar desde el punto de vista de las variedades orientadas la relación que existe entre los objetos geométricos y las integrales definidas sobre ellas.
- Incitar en el estudiante los modos de pensamiento vectorial de las variedades orientadas, lo que le permitirá desarrollar e intuir formas de resolver problemas relacionados con los teoremas fundamentales.
- Establecer las conexiones de las integrales de línea, de superficie y de sólidos de campos vectoriales con el teorema generalizado de Stokes, lo que permite generalizar las ideas y métodos descritos en el curso de Cálculo Integral.
- Empoderar al estudiante de las herramientas del pensamiento vectorial para desarrollar la resolución de un problema relacionado con las integrales de formas diferenciales sobre variedades orientadas.
- Determinar la manera cómo los estudiantes argumentan sus ideas desde las facetas del pensamiento vectorial.
- Introducir el manejo de herramientas tecnológicas como parte complementaria hacia el aprendizaje robusto de los conceptos establecidos en clase.
- Fundamentar las bases del pensamiento vectorial que permitan la comprensión de los temas posteriores de su ejercicio profesional.
- Interpretar las relaciones entre los modos de pensar vectorialmente y como impactan el aprendizaje del estudiante para evidenciar la construcción de significado de los conceptos del Cálculo Vectorial.

CONTENIDOS:

- Variedades orientadas e integrales definidas sobre ellas.
- Teorema generalizado de Stokes y sus corolarios.

PRERREQUISITOS:

- Formas diferenciales y su álgebra.
- Cálculo diferencial e integral de funciones multivariables.
- Visualización de objetos en el plano o en el espacio.
- Construcción con herramientas tecnológicas. (Geogebra)

RECURSOS A UTILIZAR:

- Hojas, lápices, computador, celular, plataforma Geogebra, WhatsApp.

RESULTADOS QUE SE ESPERAN:

- Que el estudiante sea competente en la resolución de problemas que involucren variedades orientadas y las integrales definidas sobre ellas para así poder caracterizar el tipo de pensamiento que él ha desarrollado.
- Que el estudiante adquiera la habilidad de reproducir y utilizar la correspondencia entre campos vectoriales y formas diferenciales, lo que permite desarrollar la teoría desde un punto de vista vectorial.
- Que el estudiante demuestre su ingenio al aplicar los conceptos de formas diferenciales para poder resolver problemas de integrales sobre variedades orientadas que aparezcan en su quehacer profesional.

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VECTORIAL A DESARROLLAR:

- Modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico, vecto-estructural, de orientabilidad y de generalización.
- Algebrización, geometrización, estructuralización, orientabilidad y generalización de los conceptos definidos para así ser capaz el estudiante de resolver problemas que involucren el teorema generalizado de Stokes.

ANTESALA:

En el transcurso de las actividades desarrolladas hasta el momento se han estudiado una serie de resultados tanto teóricos como prácticos de los distintos conceptos de la asignatura desde un punto de vista vectorial, lo cual ha llegado a su culminación con el teorema generalizado de Stokes, que delimita una aplicación muy interesante en la resolución de los problemas descritos anteriormente en las actividades pasadas.

Las formas diferenciales estudiadas en la actividad anterior dieron una fuerte herramienta teórica que, junto a la correspondencia fundamental desarrollada y las variedades orientadas descritas a continuación, permiten generalizar y describir fenómenos en Física e Ingeniería que antes eran complicados y tediosos, en especial en el ámbito de sus algoritmos y visualización. Un ejemplo de lo anterior está dado en la Teoría de la relatividad general al tomar las métricas de Minkowsky y los marcos de referencia de Lorenz, cuyo lenguaje y álgebra es puramente de formas diferenciales.

Vale la pena destacar que el Teorema fundamental del cálculo visto en el curso de Cálculo Integral es un simple corolario del Teorema generalizado de Stokes que se desarrollará en esta actividad, lo cual permite objetar que las matemáticas son susceptibles a generalizaciones y mejoras en todos sus aspectos y que es trabajo de sus estudiosos el ser partícipes de estos acontecimientos que van a redundar en optimizar el trabajo de aplicaciones futuras de tales conceptos.

METODOLOGÍA:

La actividad se desarrollará en seis sesiones en total de una sesión por clase, que se divide en:

- Clases magistrales.
- Trabajo colaborativo.

- Trabajo extra-clase.

<u>DESARROLLO DEL CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD:</u>

Cuadragésima tercera sesión: (Clase magistral)

Variedades orientadas en $\mathbb{R}^3$.

Se definen las n – variedades en $\mathbb{R}^3$ localmente como una "trozo" de $\mathbb{R}^n$ con $n \leq 3$. Es decir:

a. Una 0- variedad es una colección de puntos aislados. (Cero parámetros)
b. Una 1- variedad es una unión de curvas. (Un parámetro)
c. Una 2- variedad es una unión de superficies. (Dos parámetros)
d. Una 3- variedad es una unión de sólidos. (Tres parámetros)

Una n – variedad se dice *compacta* si ella es cerrada y acotada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Cada n – variedad tiene asociada una *frontera* (cuya notación es dada por ∂) que será una $(n-1)$ – variedad, la cual puede ser vacía.

A estas n – variedades se les define una orientación determinada, la cual induce una orientación de su frontera correspondiente. Si M es una n – variedad orientada, entonces $-M$ será una n – variedad con orientación opuesta.

Se tiene que si M es una n – variedad con frontera ∂M, entonces $\boxed{\partial(\partial M) = \emptyset}$ y que existe una $(n-1)$ – variedad N tal que $\boxed{N = \partial M}$. Nótese la analogía del operador ∂ con la derivada exterior definida anteriormente.

Para complementar la teoría desarrollada en esta sesión, refiérase al libro de Marsden. J. y Tromba A.: Cálculo Vectorial. Tercera edición, en la página 566.

Cuadragésima cuarta sesión: (Clase magistral)

Integración de formas diferenciales sobre variedades orientadas.

Estas integrales sobre formas diferenciales son análogas a las realizadas en la Actividad 6, usando la correspondencia fundamental vista en la Actividad 7 y las parametrizaciones de los objetos geométricos (llamados ahora $n -$ variedades) estudiadas en la Actividad 2.

Si φ es una $n -$ forma y M es una $n -$ variedad, la integral de la forma sobre la variedad se escribe como $\int_M \varphi$.

Cabe destacar las siguientes propiedades de esta integración:

a. El valor de $\int_M \varphi$ no depende de la parametrización de la $n -$ variedad M.
b. $\int_{-M} \varphi = -\int_M \varphi$
c. Si M es una $n -$ variedad y $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_p$ entonces

$$\int_M \varphi = \int_{M_1} \varphi + \int_{M_2} \varphi + \cdots + \int_{M_p} \varphi$$

Nótese la analogía con las propiedades de la integral definida estudiadas en el curso de Cálculo Integral.

Cuadragésima quinta sesión: (Clase magistral)

En esta sesión se desea que el estudiante desarrolle su pensamiento algorítmico, geométrico y estructural a través de la comprensión de las variedades orientadas y las integrales de formas diferenciales definidas sobre ellas.

Lo anterior se abordará desde la exposición del docente hasta el manejo por parte de los estudiantes de las reglas que conforman estos entes matemáticos, junto con la revisión de los conceptos mostrados en videos de YouTube sobre la temática tratada.

Se propondrá el siguiente problema, donde se espera que los estudiantes participen activamente para darle solución y robustecer los conceptos que se han venido trabajando, además de darles herramientas para poder desarrollar problemas con más conexiones temáticas. Esta participación activa será tomada de los grupos de trabajo que se instauraron al comienzo de la semana (tres personas), donde un monitor de cada grupo será el encargado de mostrar los resultados y procesos con el tablero compartido para toda la clase.

PROBLEMA: **(PRIMERA PARTE)**

Mediante el uso de la herramienta tecnológica realice un bosquejo de la $n-$ variedad dada, indicando su frontera y su dimensión, junto con la orientación estándar para que se recorra dinámicamente.

a. La gráfica en $\mathbb{R}^2$ de la función $y = 2x^2$ con $-1 \leq x \leq 0$ junto con la gráfica de $x = 3\sin(y)$ con $0 \leq y \leq \pi$.
b. Parte de la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ acotada por $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$. ¿La superficie es cerrada?
c. Sólido cuya gráfica está acotada por las superficies cuyas ecuaciones son: $y = -2 + \sqrt{x^2 + z^2}$ con $-2 \leq y \leq 0$ y $y = 4 - x^2 - z^2$ con $0 \leq y \leq 4$.
d. ¿Cómo son los vectores que definen la orientación estándar requerida en cada problema anterior? ¿Es coherente su respuesta con lo desarrollado en la Actividad 2?
e. ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

(SEGUNDA PARTE)

Se definen las siguientes formas diferenciales:

$$\omega = (z - x)dx + (x - y)dy + 4dz$$

$$\eta = dydz + xdzdx + (y^2 - 2)dxdy$$

$$\psi = 3y^2dxdydz$$

a. Calcule $\int_M \omega$, donde $M: \vec{r}(t) = \langle (t+1)^2, 1 - t, t^2 + 1 \rangle, t \in [-1,2]$
b. Calcule $\int_M \eta$, donde M es la gráfica de $z = x^2 - 2xy$ sobre la región triangular acotada por las rectas $y = 0, x = 1$ y $y = 2x$.
c. Calcule $\int_M \psi$, donde M es el cuerpo sólido acotado por las gráficas de $x = y^2z^2 - y^2 - z^2$ y

$x = -1$.

d. Realice un bosquejo de las variedades orientadas anteriores por medio de la herramienta tecnológica. ¿Qué contexto tiene cada una de las integrales anteriores en la aplicación?

Cuadragésima sexta sesión: (Clase magistral)

Teorema generalizado de Stokes y sus corolarios.

El teorema siguiente relaciona las integrales sobre variedades orientadas y sus fronteras. Se ha de recordar el paralelo entre la derivada exterior (la cual gana dimensión) y el operador frontera (el cual pierde dimensión). Su bello enunciado dice:

Sea M una $k-$ variedad orientada y compacta con frontera ∂M, la cual esta inducida por la orientación de M. Sea φ una $(k-1)-$ forma diferencial definida sobre M. Entonces:

$$\int_{M} d\varphi = \int_{\partial M} \varphi$$

Como corolarios de este teorema se tienen los conocidos teoremas clásicos dados a continuación y de los cuales se usa la correspondencia fundamental realizada en la Actividad 7:

- (Teorema Fundamental del Cálculo) $\int_a^b F'(x)\,dx = \boxed{\int_{[a,b]} dF = \int_{\{b\}\cup\{a\}} F} = F(b) - F(a)$
- (Teorema fundamental para las integrales de línea): Si f es una función escalar definida sobre una curva C, entonces: $\int_C \nabla f \cdot d\vec{L} = \boxed{\int_C df = \int_{\{q\}\cup\{p\}} f} = f(q) - f(p)$
- (Teorema de Green) Si $\vec{\mathbb{F}} = \langle P, Q \rangle$ un campo vectorial definido sobre una región plana R, entonces: $\iint_R (Q_x - P_y)\,dA = \boxed{\int_R d\varphi = \int_{\partial R} \varphi} = \int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{L}$
- (Teorema de Stokes) Si $\vec{\mathbb{F}} = \langle P, Q, R \rangle$ un campo vectorial definido sobre una superficie S, entonces: $\iint_s \text{rot}(\vec{\mathbb{F}}) \cdot d\vec{A} = \boxed{\int_S d\varphi = \int_{\partial S} \varphi} = \int_C \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{L}$
- (Teorema de Gauss) Si $\vec{\mathbb{F}} = \langle P, Q, R \rangle$ un campo vectorial definido sobre una sólido E, entonces: $\iiint_E \text{div}(\vec{\mathbb{F}})\,dV = \boxed{\int_E d\varphi = \int_{\partial E} \varphi} = \iint_s \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{A}$

Con ayuda de este teorema generalizado, se pueden probar algunos hechos relevantes para la teoría:

Sea M una $k-$ variedad orientada y compacta y φ una $k-$ forma diferencial exacta definida sobre M. Entonces: $\int_M \varphi = 0$

Sea M una $k-$ variedad orientada y compacta y ψ una $(k-1)-$ forma diferencial cerrada definida sobre M. Entonces: $\int_{\partial M} \psi = 0$

Cuadragésima séptima sesión: <u>TRABAJO COLABORATIVO:</u>

En este problema se requiere del uso de la plataforma tecnológica Geogebra para poder contribuir a construir el significado robusto del Teorema generalizado de Stokes y así darles a los estudiantes herramientas para poder resolver problemas que involucren esta temática, del cual se necesita del apoyo de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será dada a los estudiantes al empezar esta sesión y entregada al docente en la cuadragésima octava sesión, luego de ser socializada por un monitor asignado de cada grupo vía Google Meet de la plataforma de la UAN. Los estudiantes deberán desarrollar su solución escribiendo todos los procesos involucrados en ella y los cálculos debidamente argumentados.

PROBLEMA:

En cada campo vectorial asignado verificar el Teorema generalizado de Stokes, realizando el bosquejo correspondiente de la variedad orientada dada.

a. $\vec{\mathbb{F}}(x, y) = \langle y, -x \rangle$ y M es el círculo con centro en el origen y de radio 2.
b. $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle -2yz, y, 3x \rangle$ y M es parte del cono con ecuación $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que está sobre el plano $z = 1$.
c. $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle 0, y^3, 2y^2 z \rangle$ y M es el cuerpo sólido acotado por las gráficas $x = y^2 z^2 - y^2 - z^2$ y $x = -1$.

Cuadragésima octava sesión: SOCIALIZACIÓN

En esta sesión se hará la respectiva socialización de los problemas propuestos a los estudiantes, junto con la discusión del siguiente problema, propuesto a los estudiantes en la cuadragésima sexta sesión con el nombre de:

TRABAJO EXTRA-CLASE:

En este ejercicio se pretende determinar las conexiones preestablecidas de los conceptos estudiados para responder a un problema, que permita identificar la presencia del pensamiento vectorial en sus múltiples facetas para así evidenciar su potencia en el ámbito de la resolución de problemas.

Se realizará en grupos de tres personas, los cuales deberán tener un grupo de WhatsApp común para poder comunicarse y discutir el desarrollo de la actividad, de la cual se pedirá evidencia.

La actividad será entregada al finalizar esta sesión y socializada por un monitor asignado de cada grupo, vía Google Meet de la plataforma de la UAN.

PROBLEMA:

Si $\vec{a}$ es un vector constante, $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ es el vector de posición y S es una superficie orientada por una curva frontera cerrada y simple con orientación positiva C, demuestre que:

$$\int_S 2\vec{a} \cdot d\vec{A} = \int_C (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{L}$$

Fuente: *autor (2021)*

Posteriormente se presenta la rúbrica de caracterización para el Pensamiento Vectorial representada en la Tabla 9 y presentada a continuación, en la cual se basan los análisis de las anteriores actividades, constituyéndose en un aporte teórico de esta investigación.

Esta rúbrica fue concebida después de los análisis de los modos de Pensamiento Vectorial involucrados en las soluciones de los problemas establecidos por parte de los estudiantes, basados inicialmente en los modos de pensamiento en Álgebra Lineal de Sierpinska, donde posteriormente se ajustaron y se generaron dos modos de pensamiento propios para el Cálculo Vectorial, los cuales son los modos de orientabilidad y de generalización.

Es de remarcar que los modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico y vecto-estructural fueron categorías propias derivadas de esta investigación que muestran una evolución frente a las categorías de Sierpinska, modificadas al curso de Cálculo Vectorial, lo que representa un componente diferenciable de las primeras.

Tabla 9 Rúbrica para la caracterización del Pensamiento Vectorial

RÚBRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL					
	1. Modo vecto-algorítmico	***2.*** Modo vecto-dinámico	***3.*** Modo vecto-estructural	***4.*** Modo de orientabilidad	***5.*** Modo de generalización
	PARÁMETROS DE EVALUACIÓN				
PARÁMETROS DE EVALUACIÓN	***1.1.*** Recurre a una estrategia algorítmica eficiente y efectiva para resolver un problema.	***2.1.*** Por medio de herramientas tecnológicas visualiza completamente la situación problema.	***3.1.*** Reconoce la estructura vectorial implícita en un problema.	***4.1.*** Aplica la orientación del objeto geométrico subyacente a la solución de un problema.	***5.1.*** Propone algún algoritmo vectorial alternativo al desarrollado en clases.
	1.2. Presenta el desarrollo de la actividad con el proceso algorítmico correcto.	***2.2.*** Utiliza los vectores elaborados con geometría dinámica para dar solución a un problema.	***3.2.*** Propone una manera vectorial para formular la solución de un problema.	***4.2.*** Reconoce la orientación como factor determinante en una solución.	***5.2.*** Muestra otro tipo de construcción geométrica para visualizar un problema.
	1.3. Demuestra dominio de los procesos algorítmicos vistos con antelación a la actividad desarrollada.	***2.3.*** Construye situaciones geométricas que involucran vectores.	***3.3.*** Recurre a esquemas vectoriales para dar solución a un problema.	***4.3.*** Muestra una orientación al análisis de un esquema vectorial dado.	***5.3.*** Modifica una estructura vectorial dada que sirva para dar solución a un problema.
	1.4. Utiliza los algoritmos vectoriales para construir una solución de un problema.	***2.4.*** Conceptualiza el cálculo vectorial desde su faceta dinámica.	***3.4.*** Transforma un problema dado para resolverlo con estructuras vectoriales.	***4.4.*** Entiende la relación entre la orientación y una estructura vectorial dada.	***5.4.*** Conjetura diversos tipos de orientación distinta a la estándar.
	CALIFICACIÓN				
2	**Cumple con 1 parámetro**	**Cumple con 1 parámetro**	**Cumple con 1 parámetro**	**Cumple con 1 parámetro**	**Cumple con 1 parámetro**
3	**Cumple con 2 parámetros**	**Cumple con 2 parámetros**	**Cumple con 2 parámetros**	**Cumple con 2 parámetros**	**Cumple con 2 parámetros**
4	**Cumple con 3 parámetros**	**Cumple con 3 parámetros**	**Cumple con 3 parámetros**	**Cumple con 3 parámetros**	**Cumple con 3 parámetros**
5	**Cumple con 4 parámetros**	**Cumple con 4 parámetros**	**Cumple con 4 parámetros**	**Cumple con 4 parámetros**	**Cumple con 4 parámetros**

Fuente: *autor (2021)*

4.3. Conclusiones del capítulo 4

Con base en las observaciones realizadas en cada una de las actividades implementadas, se corrigen y se aplican al grupo mencionado de estudiantes a quien va dirigida esta investigación.

Con respecto a la propuesta metodológica de las anteriores actividades cabe destacar que fueron concebidas con el objetivo de fomentar la formación y desarrollo robusto de los conceptos propios del Cálculo Vectorial que pueda ser replicable en el tiempo.

Los problemas indicados en cada actividad mostraron la necesidad de sugerir de manera coherente cada uno de los aspectos propios del Pensamiento Vectorial y de sus modos de pensamiento, plasmados en la rúbrica de caracterización obtenida.

Cabe mencionar que los temas y el planteamiento conceptual de las Actividades 7 y 8 cambian el paradigma de la teoría esbozada en un curso tradicional de Cálculo Vectorial al presentar las formas diferenciales y las variedades orientables como parte de una sola teoría en vez de mostrar las integrales de superficie y los teoremas clásicos de manera disconexa.

Con lo anterior se espera responder a la pregunta científica formulada de manera satisfactoria y avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial de los estudiantes.

CAPÍTULO 5. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

5.1. Resultados de la validación del sistema de actividades

Para este análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes se realizó una descripción de cada una de las acciones llevadas a cabo por ellos y clasificándolas según la rúbrica de caracterización mostrada anteriormente.

Así, se determinó si los estudiantes en su estrategia de solución utilizaron métodos clásicos de cálculo conocidos o de manera ingeniosa, si usó argumentos geométricos que permitieran visualizar el problema de manera dinámica, si su respuesta se basó en la formulación de ciertas estructuras vectoriales que dieran paso a una nueva concepción de problema, si se tomó en cuenta la orientabilidad del problema para justificar, por ejemplo, un signo u una construcción geométrica o estructural, y si sus resultados podrían generar otro tipo de preguntas más generales. Esto con el fin de, fundamentado en el análisis realizado en cada actividad, llegar a dar avances en la caracterización del Pensamiento Vectorial mostrado por los estudiantes.

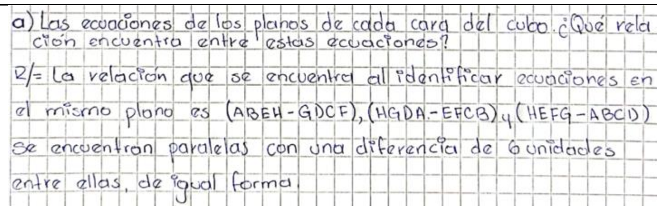
5.2. Análisis de los resultados del sistema de actividades para el aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.

Los análisis completos de cada una de las actividades desarrolladas se encuentran a continuación.

5.2.1. Análisis Actividad 1: Explorando los vectores y sus operaciones

Tabla 10 Análisis problema 1 Actividad 1

• **Sea $\mathbf{ABCDEFGH}$ el cubo de la figura. Si $\boldsymbol{A} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ y $\boldsymbol{C} = (\mathbf{-2}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$, determinar**
a) Las ecuaciones de los planos de cada cara del cubo. ¿Qué relación encuentra entre estas ecuaciones?

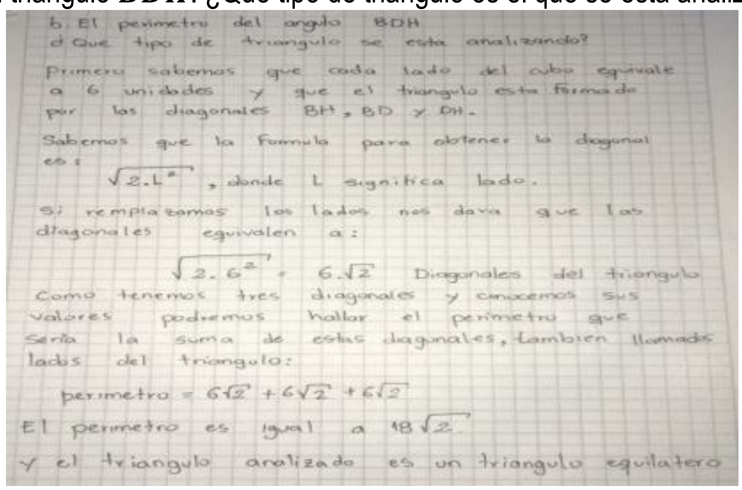


a) Las ecuaciones de los planos de cada cara del cubo. ¿Qué relación encuentra entre estas ecuaciones?

R/= La relación que se encuentra al identificar ecuaciones en el mismo plano es (ABEH-GDCF), (HGDA-EFCB) y (HEFG-ABCD) se encuentran paralelas con una diferencia de 6 unidades entre ellas, de igual forma.

Los estudiantes ven reflejados los movimientos que se hacen entre planos coordenados para obtener las ecuaciones de las caras del cubo, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 90**

b) El perímetro del triángulo $\boldsymbol{BDH}$. ¿Qué tipo de triángulo es el que se está analizando?



b. El perimetro del angulo BDH
¿Que tipo de triangulo se esta analizando?

Primero sabemos que cada lado del cubo equivale a 6 unidades y que el triangulo esta formado por las diagonales BH, BD y DH.

Sabemos que la formula para obtener la diagonal es:

$\sqrt{2 \cdot L^2}$, donde L significa lado.

Si remplazamos los lados nos dara que las diagonales equivalen a:

$\sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$ Diagonales del triangulo

Como tenemos tres diagonales y conocemos sus valores podemos hallar el perimetro que sería la suma de estas diagonales, tambien llamados lados del triangulo:

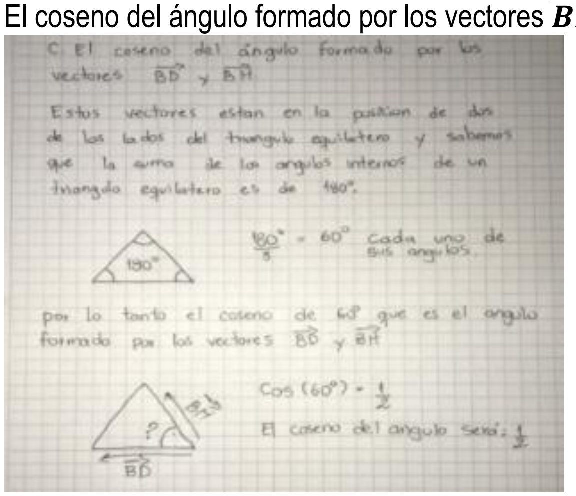
perimetro $= 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

El perimetro es igual a $18\sqrt{2}$

y el triangulo analizado es un triangulo equilatero

Los estudiantes analizan el tríangulo inscrito en el cubo y encuentran el perímetro usando la geometría de triángulos rectángulos, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

c) El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$ $\boldsymbol{y}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{BH}}$.



C. El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BH}$

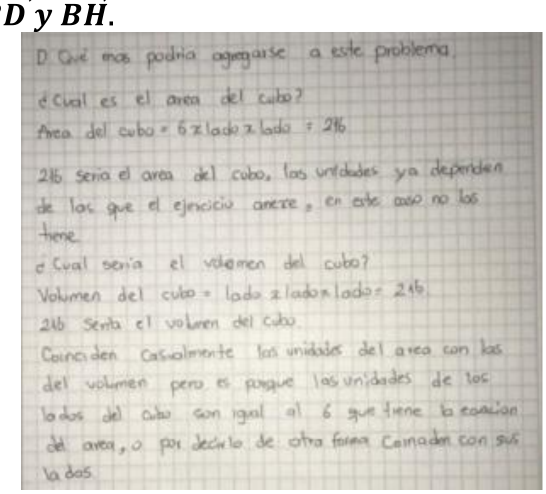
Estos vectores estan en la posicion de dos de los lados del triangulo equilatero y sabemos que la suma de los angulos internos de un triangulo equilatero es de 180°.

$\frac{180°}{3} = 60°$ cada uno de sus angulos.

por lo tanto el coseno de 60° que es el angulo formado por los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BH}$

$\text{Cos}(60°) = \frac{1}{2}$

El coseno del angulo será: $\frac{1}{2}$



D Qué mas podria agregarse a este problema

¿Cual es el area del cubo?

Area del cubo = 6 x lado x lado = 216

216 seria el area del cubo, las unidades ya dependen de las que el ejercicio anexe, en este caso no las tiene

¿Cual seria el volumen del cubo?

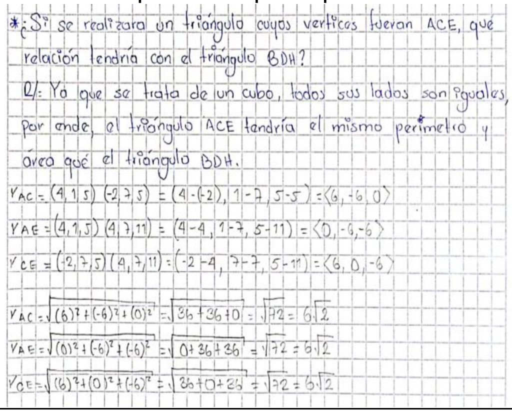
Volumen del cubo = lado x lado x lado = 216

216 seria el volumen del cubo.

Coinciden casualmente las unidades del area con las del volumen pero es porque las unidades de los lados del cubo son igual al 6 que tiene la ecuacion del area, o por decirlo de otra forma coinciden con sus lados

Los estudiantes muestran el coseno del ángulo entre dos lados del triángulo de manera geométrica, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.2, aunque hay vestigios del uso de la propiedad del producto punto entre los vectores, todavia están adquiriendo esa destreza en su uso para resolver problemas a posteriori. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?



*¿Si se realizara un triángulo cuyos vertices fueran ACE, qué relación tendría con el triángulo BDH?

R/: Ya que se trata de un cubo, todos sus lados son iguales, por ende, el triángulo ACE tendría el mismo perimetro y área qué el triángulo BDH.

$V_{AC} = (4,1,5)\ (-2,7,5) = (4-(-2), 1-7, 5-5) = \langle 6,-6,0\rangle$

$V_{AE} = (4,1,5)\ (4,7,11) = (4-4, 1-7, 5-11) = \langle 0,-6,-6\rangle$

$V_{CE} = (-2,7,5)\ (4,7,11) = (-2-4, 7-7, 5-11) = \langle 6,0,-6\rangle$

$V_{AC} = \sqrt{(6)^2+(-6)^2+(0)^2} = \sqrt{36+36+0} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$V_{AE} = \sqrt{(0)^2+(-6)^2+(-6)^2} = \sqrt{0+36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$V_{CE} = \sqrt{(6)^2+(0)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+0+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

En esta pregunta los estudiantes ya advierten el uso de los vectores para resolver un problema propio de su autoría el cual refleja la necesidad de volver a las fórmulas vectoriales de segmento de recta y magnitud, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. También se nota la necesidad de darle una orientación a esta diferencia de puntos mostrados en el problema, por lo que se evidencia la rúbrica 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

Análisis: En la solución de este problema los estudiantes realizaron la descripción del cubo donde algunos describen los vértices del mismo para así poder obtener las ecuaciones de las caras del cubo y analizar lo requerido para el triángulo inscrito en él.

Detallando las soluciones dadas por los estudiantes en este problema y basados en los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial expuestos en la rúbrica de evaluación, ellos recurren a un enfoque algorítmico racional para resolver el problema dado mediante las fórmulas vectoriales de sistemas de coordenadas tridimensionales de segmento de recta y magnitud vistas en clase. Así es como sugieren algoritmos para sustituir los desarrollados durante las clases proponiendo ideas, ejercicios y reconociendo la importancia de la orientación en estas soluciones. De esta forma se observa que los estudiantes están utilizando más la faceta vecto-algorítmica, ya que basan sus respuestas y justificaciones en la aritmética junto con un análisis geométrico.

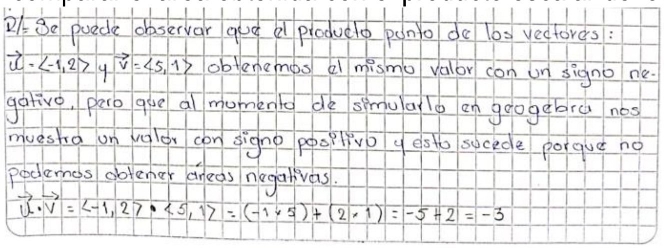
Con esto se puede concluir que en ellos no se encontró mayor dificultad al momento de dar solución a los problemas, excepto en la parte d) donde se identificó que la dificultad radica en que los estudiantes creen no poseer un lenguaje matemático aceptable y no proponen otro tipo de problemas. Se insistirá en dar paso a esta confianza fundamentando sus bases y la óptima comprensión del tema, desarrollando esa parte del pensamiento vectorial.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 11 Análisis problema 2 Actividad 1

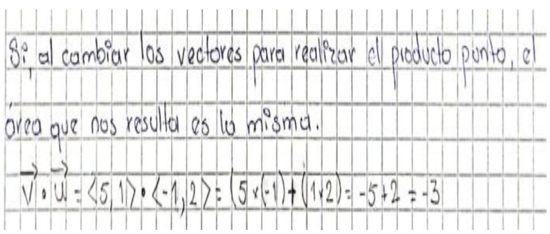
- **Dada la anterior construcción, trate de imitarla para realizar el producto escalar de los vectores $\vec{u} = \langle -1,2\rangle$ y $\vec{v} = \langle 5,1\rangle$.**

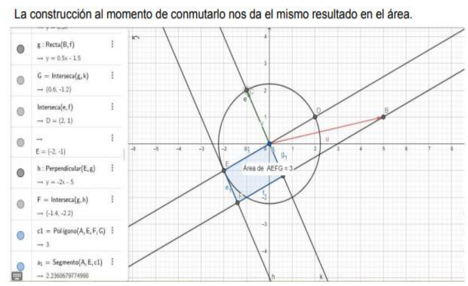
a) ¿Qué observa al comparar el área obtenida con el producto escalar de los vectores?



Los estudiantes ven en la construcción geométrica la necesidad de asignarle un signo al área obtenida con la herramienta tecnológica, lo cual refleja el modo de orientabilidad, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

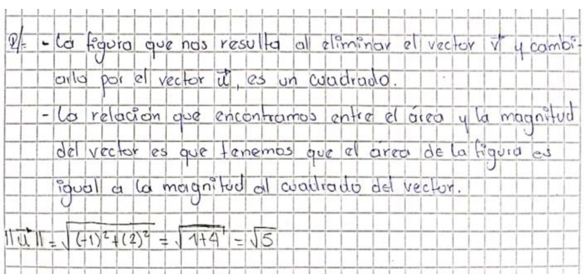
b) ¿La anterior construcción puede conmutar y obtener el mismo resultado?

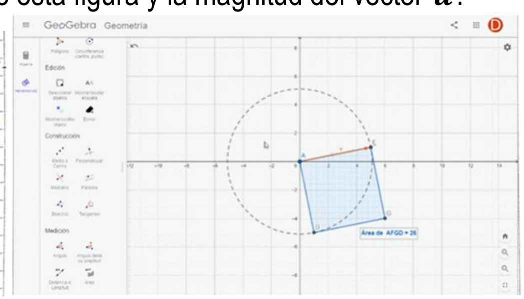




Los estudiantes comprueban la propiedad conmutativa del producto escalar y en la construcción con la herramienta tecnológica comprueban sus resultados teniendo en cuenta la orientación de cada vector, mostrando así evidencia de las rúbricas 1.3 y 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

c) Si se elimina el vector $\vec{v}$ de la construcción y se cambia por el vector $\vec{u}$, determine la figura que resulta. ¿Qué puede decir de la relación entre esta figura y la magnitud del vector $\vec{u}$?





La herramienta tecnológica muestra que el estudiante se empodera de ella para darle significado robusto al concepto de producto escalar y dinámicamente prueba lo que ocurre cuando se hace el producto escalar de un vector por si mismo, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria? Los estudiantes realizan en la socialización algunas sugerencias de vectores en el plano para obtener las mismas construcciones hechas en este problema. Se explora la faceta dinámica de la herramienta

tecnológica, pero en esencia es el mismo trabajo solo que se cambian los vectores, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 50**
Análisis: En este problema los estudiantes usaron la herramienta tecnológica para comprender el significado geométrico del producto escalar entre vectores, y usando la geometría dinámica exploraron las diferentes propiedades de este producto junto con la forma del mismo para un área negativa, la cual profundiza su sentido de orientabilidad de los objetos geométricos. Con las respuestas presentadas por los estudiantes en este problema, se observa que estos están utilizando el pensamiento vectorial en tres de sus facetas, el vecto-algorítmico, el vecto-dinámico y en el modo de orientabilidad. Apoyándose en los parámetros establecidos en la rúbrica de caracterización y como se mencionó anteriormente, los estudiantes, mediante las herramientas tecnológicas plasman y reflejan desde otra perspectiva la situación del problema utilizando vectores y las diferentes operaciones de estos, tal como lo es el producto escalar de dos vectores, e involucrándolos en la construcción de situaciones. Asimismo, estos conocen y establecen la orientación como un elemento fundamental en el análisis y solución de los diversos problemas mediante la construcción geométrica distinta a la presentada en el desarrollo del curso. Retomando lo mencionado en el punto anterior, los estudiantes traen conocimientos previos que fortalecen el pensamiento vecto-algorítmico en la solución de estas preguntas siendo más eficientes en las fórmulas y procedimientos presentados. En cuanto al modo vecto-dinámico, es una faceta que están descubriendo para la solución de manera gráfica teniendo una gran habilidad tecnológica donde el estudiante analiza y organiza los datos para la construcción de la geometría en el software matemático "Geogebra" y ver lo aplicado en sus fórmulas desde otra perspectiva.

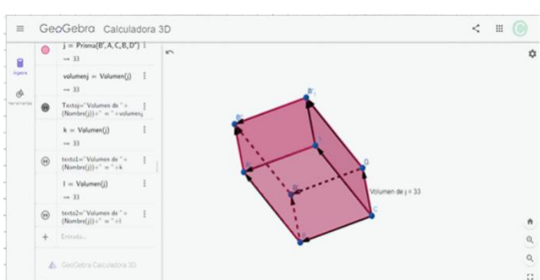
Fuente: *autor (2021)*

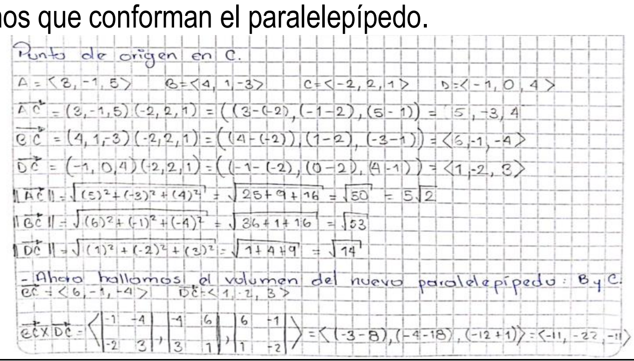
Tabla 12 Análisis problema 3 Actividad 1

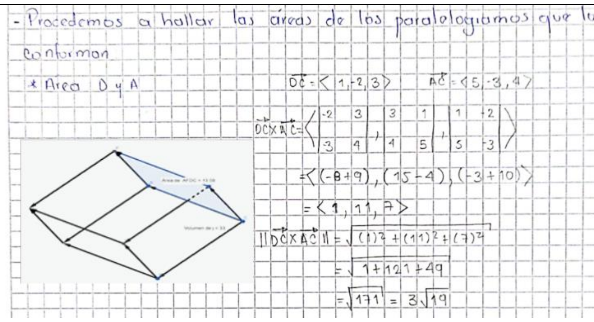
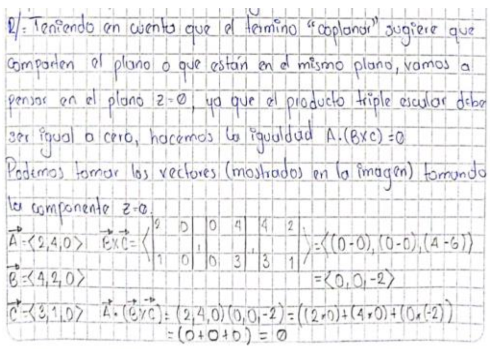
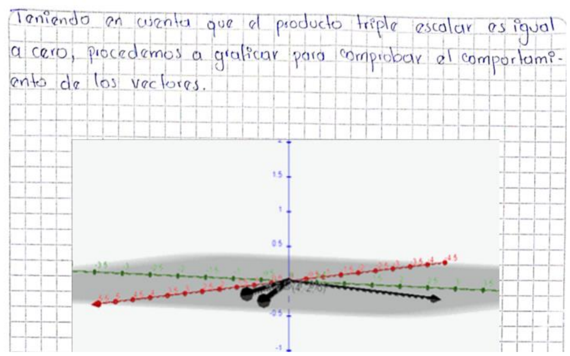
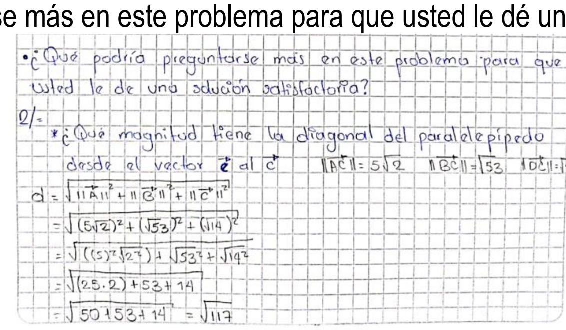
- **Dados los puntos $\boldsymbol{A} = (3, -1, 5)$, $\boldsymbol{B} = (4, 1, -3)$, $\boldsymbol{C} = (-2, 2, 1)$ y $\boldsymbol{D} = (-1, 0, 4)$ en el espacio tridimensional. Determinar:**

  El volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores que lo determinan al tomar como origen a algún punto anterior.

  El área de las caras en forma de paralelogramos que conforman el paralelepípedo.





 - Procedemos a hallar las áreas de los paralelogramos que lo conforman * Área D y A $\quad \vec{DC} = \langle 1,-2,3\rangle \quad \vec{AC} = \langle 5,-3,4\rangle$ $\vec{DC}\times\vec{AC} = \left\langle \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \right\rangle$ $= \langle (-8+9), (15-4), (-3+10) \rangle$ $= \langle 1, 11, 7 \rangle$ $\lVert \vec{DC}\times\vec{AC} \rVert = \sqrt{(1)^2+(11)^2+(7)^2}$ $= \sqrt{1+121+49}$ $= \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$ Los estudiantes muestran dos construcciones distintas para los mismos puntos que conforman un paralelepípedo. Se muestra que con la herramienta tecnológica las dos construcciones tienen el mismo volumen. El área del paralelogramo de cada cara tambien se realiza mostrando así evidencia de las rúbricas 1.4 y 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**
a) ¿Qué podría decir geométricamente sobre los vectores si su producto triple escalar resulta igual a cero?  R/= Teniendo en cuenta que el término "coplanar" sugiere que comparten el plano o que están en el mismo plano, vamos a pensar en el plano $z=0$, ya que el producto triple escalar debe ser igual a cero, hacemos la igualdad $A\cdot(B\times C)=0$ Podemos tomar los vectores (mostrados en la imagen) tomando la componente $z=0$. $\vec{A} = \langle 2,4,0\rangle \quad \vec{B}\times\vec{C} = \left\langle \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\rangle = \langle (0-0), (0-0), (4-6) \rangle$ $\vec{B} = \langle 4,2,0\rangle \quad = \langle 0,0,-2 \rangle$ $\vec{C} = \langle 3,1,0\rangle \quad \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (2,4,0)(0,0,-2) = ((2\cdot 0)+(4\cdot 0)+(0\cdot(-2)))$ $= (0+0+0) = 0$  Teniendo en cuenta que el producto triple escalar es igual a cero, procedemos a graficar para comprobar el comportamiento de los vectores. En este ejercicio los estudiantes muestran que el uso de la herramienta tecnológica hace comprender y generalizar un resultado de volumen cero que de por sí es puramente analítico, pero una gráfica del fenómeno descrito hace ver la coplanaridad de los vectores involucrados, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**
b) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?  • ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le de una solución satisfactoria? R/= * ¿Qué magnitud tiene la diagonal del paralelepípedo desde el vector $\vec{e}$ al $\vec{c}$ $\quad \lVert\vec{AC}\rVert = 5\sqrt{2} \quad \lVert\vec{BC}\rVert = \sqrt{53} \quad \lVert\vec{DC}\rVert = \sqrt{14}$ $d = \sqrt{\lVert\vec{A}\rVert^2 + \lVert\vec{B}\rVert^2 + \lVert\vec{C}\rVert^2}$ $= \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{53})^2 + (\sqrt{14})^2}$ $= \sqrt{((5)^2\sqrt{2}^2) + \sqrt{53}^2 + \sqrt{14}^2}$ $= \sqrt{(25\cdot 2)+53+14}$ $= \sqrt{50+53+14} = \sqrt{117}$ Con lo realizado por los estudiantes en los ejercicios anteriores, este nuevo problema refleja que se tiene una comprensión tanto geométrica de la situación como algorítmica que permite darle solución en el marco del pensamiento vectorial desde la generalización, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 70**

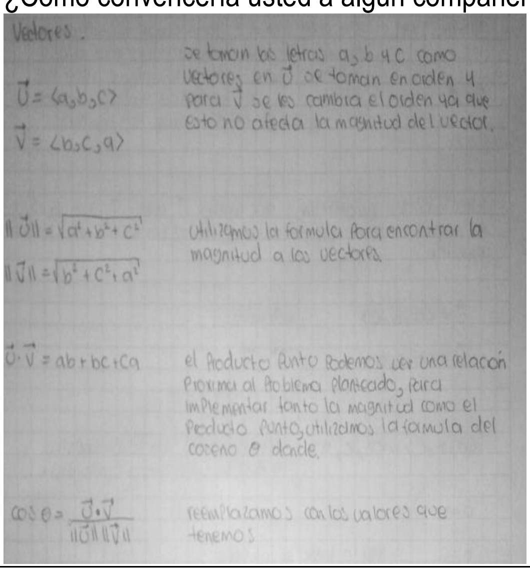
Análisis: Los estudiantes realizan para la solución de este problema un análisis tridimensional de la herramienta tecnológica basado en la construcción de paralelepípedos y su correspondiente faceta dinámica, lo que permite dar la forma, de nuevo, de dar sentido a los volúmenes negativos, lo cual refiere una orientación de los mismos. Los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial expuestos en la rúbrica de evaluación muestran cómo los algoritmos vectoriales dan una resolución de problemas mediante diversos softwares matemáticos que permiten moldear y analizar la situación implementando vectores teniendo en cuenta su orientabilidad y su importancia desde su faceta dinámica, además de generalizar otro tipo de construcción vectorial desde un determinado punto. Se observa además cómo los estudiantes entablan una relación entre las dos facetas del pensamiento vectorial; el vecto-algorítmico y el vecto-dinámico, donde las respuestas obtenidas en el método aritmético son llevadas al software matemático "Geogebra" para la construcción de la geometría, con el fin de analizar gráficamente los resultados teóricos obtenidos. Se nota una mejoría en la realización del ítem de preguntas libres, lo que muestra que ellos están teniendo una mayor comprensión y análisis en estas facetas del pensamiento que se pueden aplicar a otros fenómenos similares.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 13 Análisis problema 4 Actividad 1

- **Demuestre que: Si para tres números reales a, b, c se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, mostrar que $a = b = c$.**

c) ¿Cómo convencería usted a algún compañero que su solución mostrada es correcta?



Vectores.

$\vec{U} = \langle a, b, c \rangle$

$\vec{V} = \langle b, c, a \rangle$

se toman las letras a, b y c como vectores en $\vec{U}$ se toman en orden y para $\vec{V}$ se les cambia el orden ya que esto no afecta la magnitud del vector.

$\|\vec{U}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{b^2+c^2+a^2}$

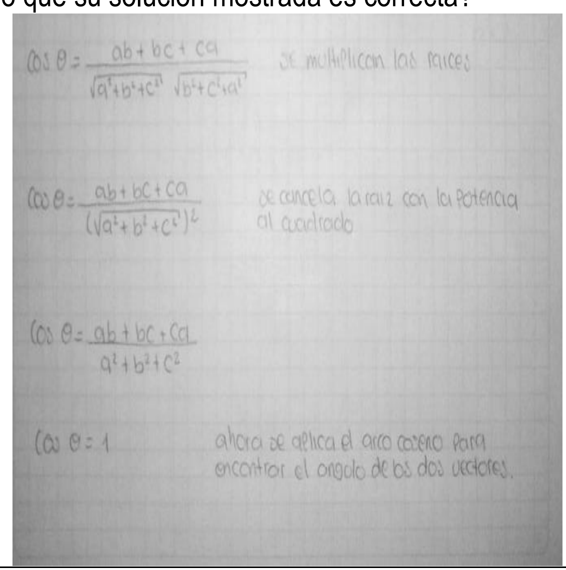
utilizamos la formula para encontrar la magnitud a los vectores.

$\vec{U} \cdot \vec{V} = ab + bc + ca$

el Producto Punto podemos ver una relacion Proxima al Problema planteado, para implementar tanto la magnitud como el Producto Punto, utilizamos la formula del coseno θ donde.

$\cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}$

reemplazamos con los valores que tenemos



$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}}$

se multiplican las raices

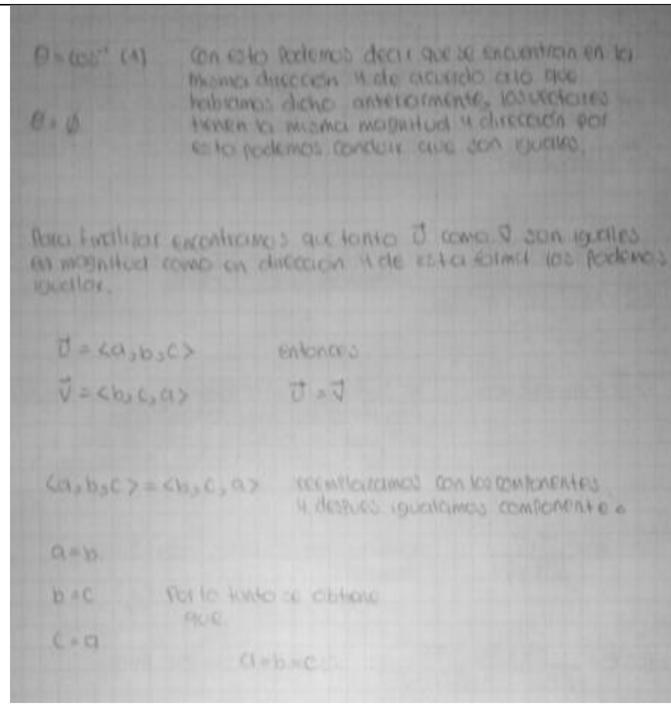
$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2}$

se cancela la raiz con la potencia al cuadrado

$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

$\cos\theta = 1$

ahora se aplica el arco coseno para encontrar el angulo de los dos vectores.



$\theta = \cos^{-1}(1)$ Con esto podemos decir que se encuentran en la misma dirección y de acuerdo a lo que habíamos dicho anteriormente, los vectores tienen la misma magnitud y dirección por esto podemos concluir que son iguales.

$\theta = 0$

Para finalizar encontramos que tanto $\vec{U}$ como $\vec{V}$ son iguales en magnitud como en dirección y de esta forma los podemos igualar.

$\vec{U} = \langle a, b, c \rangle$ entonces

$\vec{V} = \langle b, c, a \rangle$ $\vec{U} = \vec{V}$

$\langle a, b, c \rangle = \langle b, c, a \rangle$ reemplazamos con las componentes y después igualamos componentes

$a = b$

$b = c$ Por lo tanto se obtiene que

$c = a$

$a = b = c$

Los estudiantes aplican las propiedades de la magnitud y el producto escalar de dos vectores inventados por ellos que hacen funcionar la hipótesis del problema, lo que refleja un pensamiento vecto-estructural para darle solución al problema, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

Análisis: En este último problema se muestra una demostración alternativa de este hecho algebraico utilizando las propiedades vistas y trabajadas en clase. El desafío de los estudiantes era utilizar su pensamiento vecto-estructural buscando una solución al problema presentado, teniendo en cuenta las estructuras de los teoremas y de las propiedades de las operaciones mostradas en clase.

En esta faceta del pensamiento se evidenció en unos estudiantes un poco más de complejidad al momento de presentar una solución, mientras que en otros se presentó un avance importante relacionando las facetas del pensamiento vectorial para dar una solución con el fin de analizar las estructuras propuestas y los diversos esquemas vectoriales que pueden formular los estudiantes.

Además de identificar su conocimiento intuitivo y teniendo la capacidad de transformar fórmulas y estructuras con el fin de dar solución a los problemas presentados. En la solución de este problema se nota la confluencia de los distintos modos del pensamiento vectorial y se refleja un entendimiento y empoderamiento de las herramientas de tipo vectorial que no se esbozaba antes en la solución de los problemas anteriores. En general no son muchas las correcciones a realizar pero se sigue trabajando para lograr una óptima demostración y argumentación del porqué de sus respuestas, buscando resultados

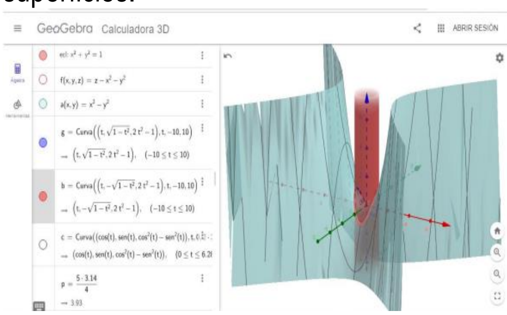
Fuente: *autor (2021)*

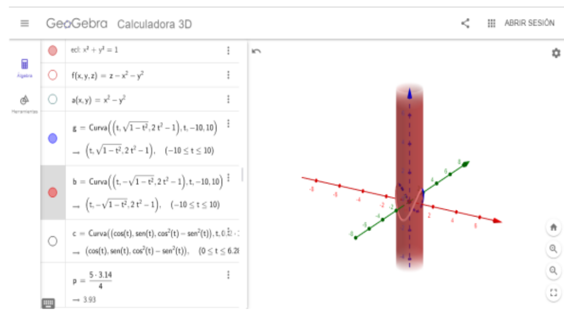
5.2.2. Análisis Actividad 2: Estudiando curvas y superficies

Tabla 14 Análisis problema 1 Actividad 2

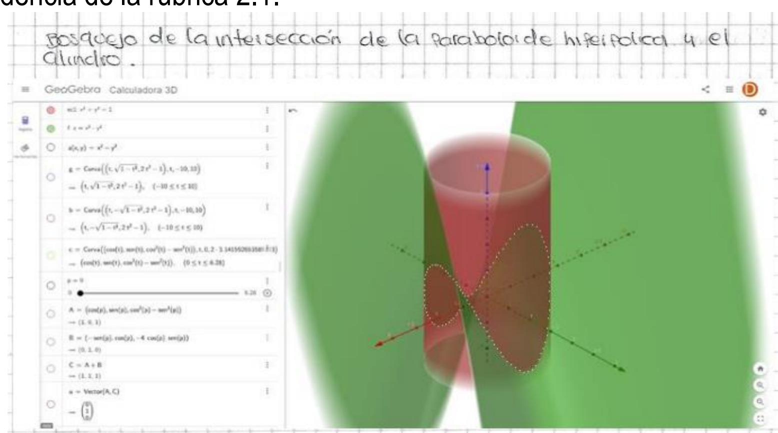
- **Sea el paraboloide hiperbólico con ecuación $z = x^2 - y^2$ y el cilindro con ecuación $x^2 + y^2 = 1$**

a) Mediante el uso de la plataforma Geogebra, realice un bosquejo de la intersección de estas dos superficies.





Los estudiantes muestran las gráficas de las dos superficies junto a una posible parametrización de la curva intersección de ambas superficies. Ellos deben definir dos curvas que cumplan con este objetivo, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1.



En esta gráfica los estudiantes notan que al aplicar las coordenadas polares en el plano pueden definir la curva intersección con una sola parametrización, para que los vectores definidos sobre ellas sean tomados de manera continua, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

b) A partir de la visualización de las diferentes perspectivas de la curva en los planos coordenados, construya una parametrización adecuada para esta curva intersección. ¿Nota alguna diferencia en usar en esos planos las coordenadas rectangulares o polares?

(b)

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 1 \qquad z = x^2 - y^2$$

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad z = t^2 - \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad z = 2t^2 - 1$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \\ z = 2t^2 - 1 \end{cases} \qquad \vec{r}(t) = \langle t ; \sqrt{1-t^2} ; 2t^2 - 1 \rangle$$

$$\vec{r}(t) = \langle t ; -\sqrt{1-t^2} ; 2t^2 - 1 \rangle$$

$$t \in [-1, 1] \qquad -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \cos t \\ y = 1 \operatorname{sen} t \\ z = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad \vec{r}(t) = \langle \cos t ; \operatorname{sen} t ; \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \rangle$$

$$t \in [0, 2\pi] \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

No se evidencia alguna diferencia entre las coordenadas rectangulares o polares, puesto a que la curva pasa por los mismos puntos.

• Ecuaciones paramétricas con coordenadas rectangulares.

Se llama a una de las variables t, en este caso sera x

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ z = x^2 - y^2 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{1-t^2} \\ z = 2t^2 - 1 \end{cases}$$

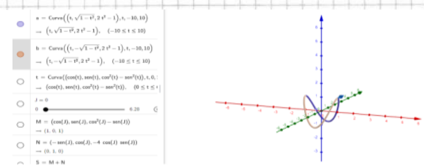
$$t^2 + y^2 = 1 \qquad z = t^2 - \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

$$y^2 = 1 - t^2 \qquad z = t^2 - 1 + t^2$$

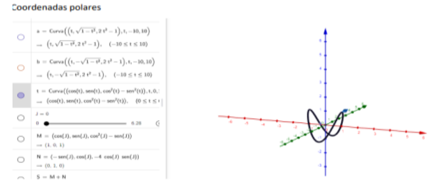
$$y = \pm\sqrt{1-t^2} \qquad z = 2t^2 - 1$$

Primero despejamo y a partir de la ecuacion 1, teniendo en cuenta que x=t, luego despejamos z de la ecuación 2.

Graficamente no hay ninguna diferencia entre las coordenadas rectangulares y las polares, se grafica la misma curva, y esta a su vez pasa por los mismos puntos y tiene la misma orientación. Sin embargo al momento de realizar las graficas las coordenadas rectangulares implican un poco mas de concentracion y esfuerzo debido a que su grafica consta de dos coordenadas (una con la raiz positiva y otra con la raiz negativa), para que dicha grafica salga completa. Mientras que con la parametrizacion de las coordenadas polares al no incluir raíces permite graficar con una sola ecuacion.



Coordenadas polares



$$\vec{r}(t) = \langle t ; \pm\sqrt{1-t^2} ; 2t^2 - 1 \rangle$$

$$t \in [-1, 1]$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

Se ponen las coordenadas rectangulares y su dominio queda en -1 a 1.

• Ecuaciones paramétricas con coordenadas polares.

Se tiene una circunferencia con centro en (a,b) y un radio d la ecuacion parametrica es.

$$x = a + d \cdot \cos(t)$$
$$y = b + d \cdot \operatorname{sen}(t)$$

la circunferencia al tener su centro en el origen (0,0), nos quedaria como.

$$a = 0 ; b = 0 ; d = 1.$$

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \cos(t) \\ y = 0 + 1 \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \langle \cos(t) ; \operatorname{sen}(t) ; \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) \rangle$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

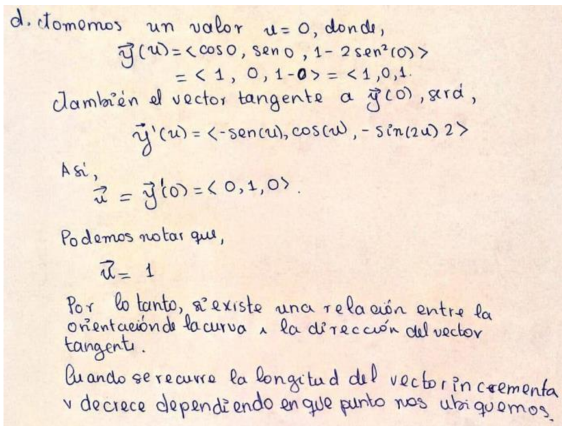
Los estudiantes muestran su destreza en manipular expresiones algebraicas que involucran las diferentes coordenadas en el plano al visualizar las perspectivas de la curva intersección en los planos coordenados. Concluyen lo comentado con anterioridad en cuanto al uso de las coordenadas polares y su utilidad para los posteriores cálculos, mostrando así evidencia de las rúbricas 1.4 y 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

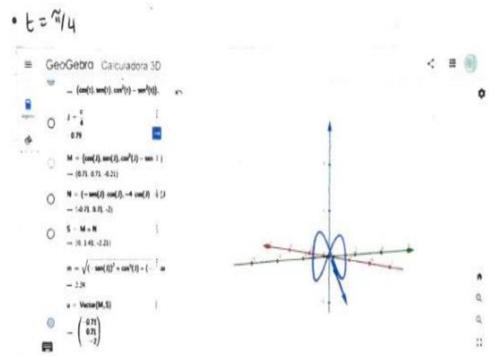
c) Al graficar la curva parametrizada anteriormente, ¿qué puede decir acerca de la orientación de esta curva cerrada?

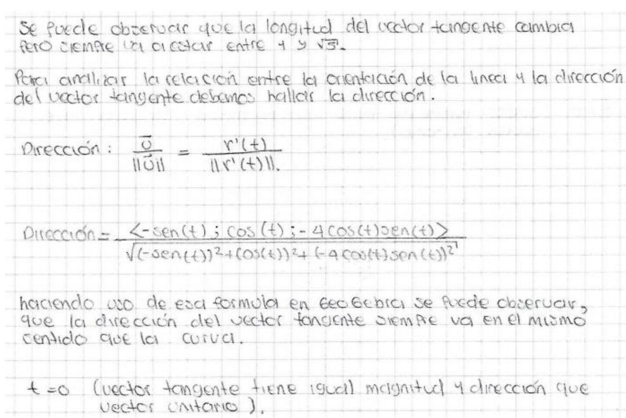
(c) Evidenciamos que en la curva cerrada a medida que t aumenta su movimiento es antihorario, por lo tanto su orientación es positiva.

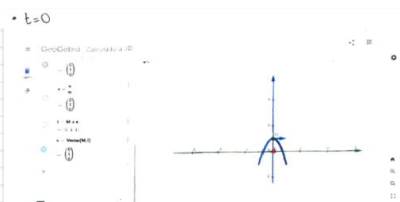
Los estudiantes muestran una faceta distinta a los modos de pensar en Cálculo Vectorial, pues sus respuestas reflejan este “sentido” que tienen los puntos al recorrer la curva, lo cual lo muestran con la plataforma tecnológica. Para dar esta respuesta asocian el incremento en los valores del parámetro con cómo es que se recorre la curva, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 70**

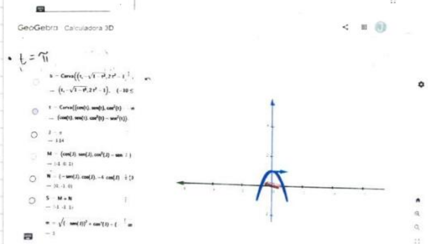
d) Por medio de la geometría dinámica, defina el vector tangente sobre un punto arbitrario escogido de la curva. ¿Observa alguna relación entre la orientación de la curva y la dirección del vector tangente elaborado? ¿Qué puede decir acerca de la longitud de estos vectores cuando se recorre la curva dinámicamente?

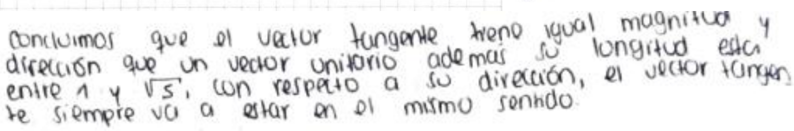

d. Tomemos un valor $u = 0$, donde,
$\vec{y}(u) = \langle \cos 0, \text{sen}\, 0, 1 - 2\,\text{sen}^2(0) \rangle$
$= \langle 1, 0, 1-0 \rangle = \langle 1, 0, 1$.
También el vector tangente a $\vec{y}(0)$, será,
$\vec{y}'(u) = \langle -\text{sen}(u), \cos(u), -\sin(2u)\, 2 \rangle$
Así,
$\vec{u} = \vec{y}'(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$.
Podemos notar que,
$\vec{u} = 1$
Por lo tanto, sí existe una relación entre la orientación de la curva y la dirección del vector tangente.
Cuando se recorre la longitud del vector incrementa y decrece dependiendo en que punto nos ubiquemos.




Se puede observar que la longitud del vector tangente cambia pero siempre va a estar entre 1 y $\sqrt{5}$.
Para analizar la relación entre la orientación de la línea y la dirección del vector tangente debemos hallar la dirección.
Dirección: $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$.
Dirección $= \dfrac{\langle -\text{sen}(t); \cos(t); -4\cos(t)\text{sen}(t) \rangle}{\sqrt{(-\text{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-4\cos(t)\text{sen}(t))^2}}$
haciendo uso de esa fórmula en GeoGebra se puede observar, que la dirección del vector tangente siempre va en el mismo sentido que la curva.
$t = 0$ (vector tangente tiene igual magnitud y dirección que vector unitario).

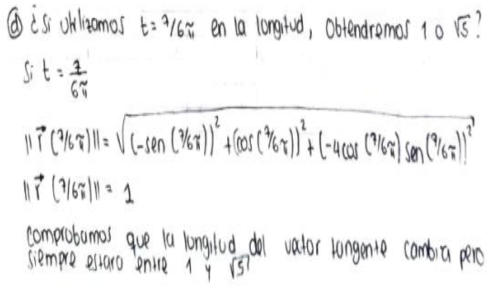





Concluimos que el vector tangente tiene igual magnitud y dirección que un vector unitario además su longitud está entre 1 y $\sqrt{5}$, con respecto a su dirección, el vector tangente siempre va a estar en el mismo sentido.

Los estudiantes asocian la dirección del vector tangente de la curva paramétrica con esa orientación que le proporciona la misma parametrización a la curva. Muestran distintas vistas para distintos valores del parámetro. Además, estiman la variación de su longitud del vector tangente, mostrando así evidencia de las rúbricas 1.4 y 2.4. Ellos mismos envían los archivos en la plataforma tecnológica para su posterior revisión y observación de la dinámica del problema. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 50**

e) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?

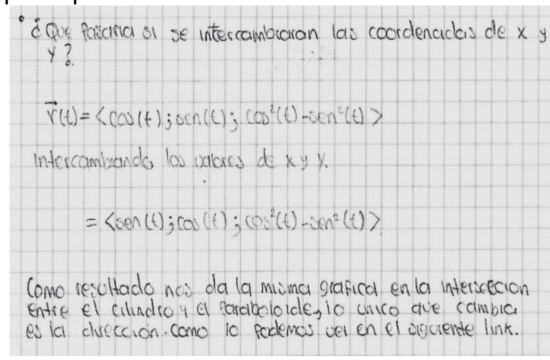

d) ¿Si utilizamos $t = 7/6\pi$ en la longitud, Obtendremos 1 o $\sqrt{5}$?

Si $t = \frac{7}{6\pi}$

$$\|\vec{r}\,'(7/6\pi)\| = \sqrt{(-sen(7/6\pi))^2 + (cos(7/6\pi))^2 + (-4cos(7/6\pi)\,sen(7/6\pi))^2}$$

$$\|\vec{r}\,'(7/6\pi)\| = 1$$

Comprobamos que la longitud del vector tangente cambia pero siempre estará entre 1 y $\sqrt{5}$


¿Qué pasaría si se intercambiaran las coordenadas de x y y?

$\vec{r}(t) = \langle cos(t); sen(t); cos^2(t) - sen^2(t) \rangle$

Intercambiando los valores de x y y.

$= \langle sen(t); cos(t); cos^2(t) - sen^2(t) \rangle$

Como resultado nos da la misma gráfica en la intersección entre el cilindro y el paraboloide, lo único que cambia es la dirección. Como lo podemos ver en el siguiente link.

Los estudiantes muestran su ingenio al proponer problemas de la misma temática. Observemos en la segunda imagen que ellos mismos tratan de darle sentido a esa orientación de la curva y relacionarla con la posición de las funciones componentes en la parametrización de la curva, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.2. En los archivos enviados muestran efectivamente que cambia esa orientación de la curva. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este primer punto de la actividad 2 se evidencia en los estudiantes un equilibrio en las facetas vecto-algorítmica y vecto-dinámica en relación a la actividad 1, lo cual es favorable a su proceso de adaptación y asimilación de los nuevos entes mostrados y la necesidad de utilizarlos en la resolución de problemas.

Los estudiantes siguen basando sus respuestas y justificaciones de manera teórica y práctica mediante las fórmulas presentadas durante las clases y el manejo de la plataforma tecnológica sin ir más allá de la faceta vecto-estructural del pensamiento vectorial. Cabe destacar que los estudiantes utilizando los modos de pensar vecto-algorítmico y vecto-dinámico intuyen y se preocupan por la orientación de estos objetos geométricos, lo cual relacionan con el recorrido del vector tangente sobre la curva e indica una relación implícita entre los modos de pensar de Sierpinska que trasciende a ellos, pues va mucho más allá de la parte algorítmica, de la geométrica y la estructural que se profesa en esta teoría.

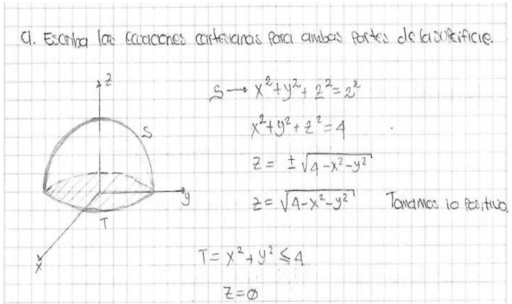
Con esto se puede seguir concluyendo que en ellos no se encuentra mayor dificultad al momento de dar solución al problema, salvo la parte d) que, de nuevo, apela a resolver un problema de la autoría de ellos, en la socialización se sigue insistiendo en pasar esa dificultad con el manejo de la plataforma tecnológica y de utilizar las facetas del pensamiento vectorial en la solución de cada uno de los problemas presentados, junto con la presencia de un tipo de pensamiento que queremos caracterizar.

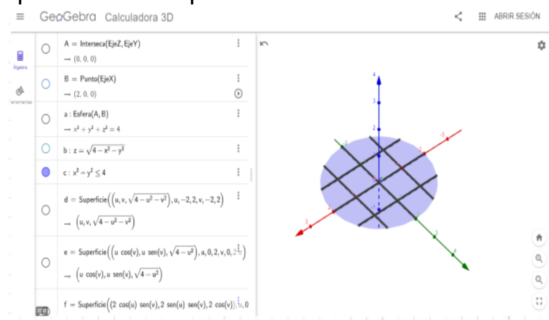
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 15 Análisis problema 2 Actividad 2

- **Considérese la superficie que consta del hemisferio norte de la esfera de radio 2 y su "tapa" de abajo.**

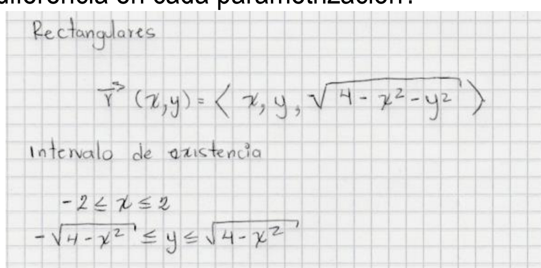
a) Escriba las ecuaciones cartesianas para ambas partes de la superficie.



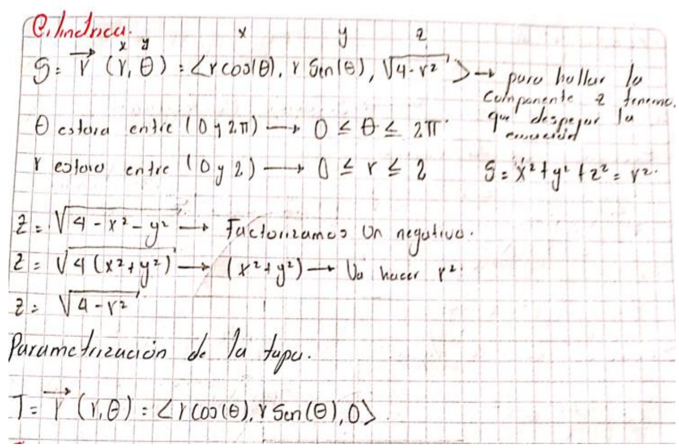


Los estudiantes muestran la parte algorítmica y geométrica de las dos superficies que se piden en el problema. Hacen un análisis de ambas partes utilizando las coordenadas rectangulares, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

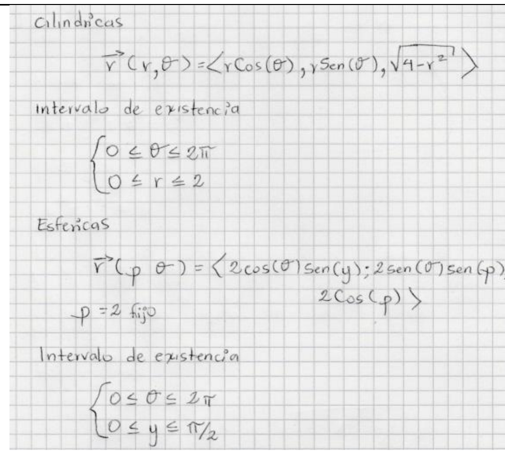
b) Con ayuda de estas ecuaciones, realice las parametrizaciones de las superficies usando las coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, indicando el intervalo de existencia de cada variable. ¿Nota alguna diferencia en cada parametrización?



Los estudiantes realizan el análisis de las parametrizaciones usando coordenadas rectangulares, notando que el intervalo de existencia de un parámetro depende de una función de alguna variable, en este caso tomaron funciones de la variable x.



En esta imagen realizan las parametrizaciones de ambas superficies usando las coordenadas cilíndricas teniendo en cuenta las ecuaciones cartesianas halladas en el punto a, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1.



Cilíndricas

$$\vec{r}(r,\theta) = \langle r\cos(\theta), r\,\mathrm{Sen}(\theta), \sqrt{4-r^2} \rangle$$

intervalo de existencia

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

Esféricas

$$\vec{r}(p\ \theta) = \langle 2\cos(\theta)\,\mathrm{Sen}(y); 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(p); 2\cos(p) \rangle$$

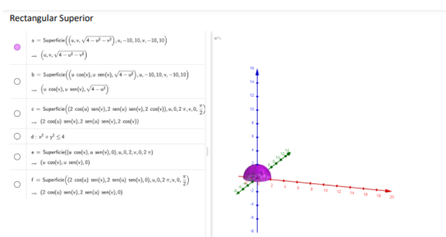
$p = 2$ fijo

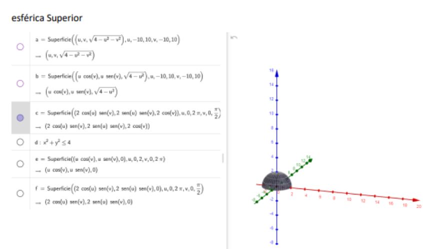
Intervalo de existencia

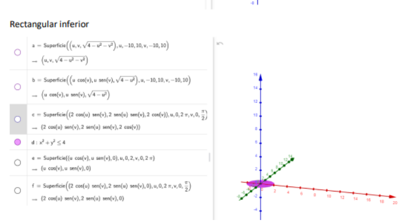
$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le y \le \pi/2 \end{cases}$$

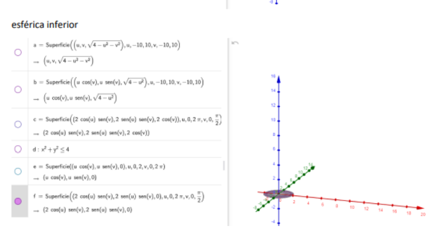
En esta imagen se muestran todas las parametrizaciones requeridas en las coordenadas indicadas. Los estudiantes notan la necesidad de definir tales parametrizaciones con ayuda de dos variables de las tres que indican las fórmulas de las coordenadas usadas, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.2 que generaliza el uso de tales coordenadas. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

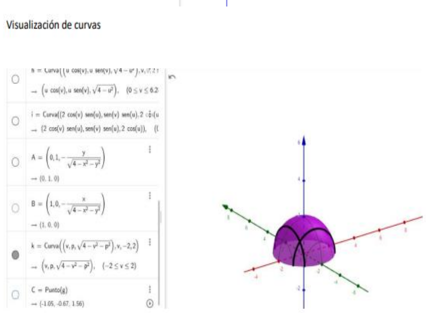
c) Mediante el uso de la plataforma Geogebra, realice un bosquejo de las superficies con sus curvas reticulares.

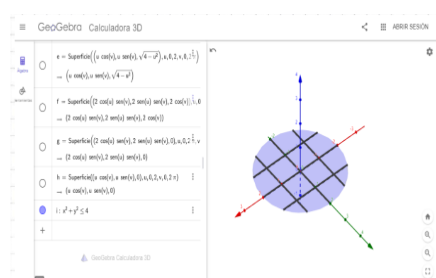


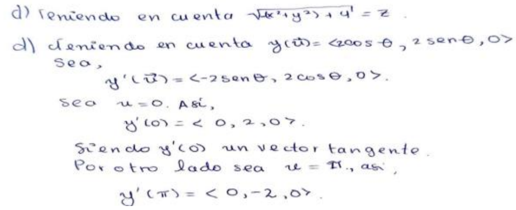
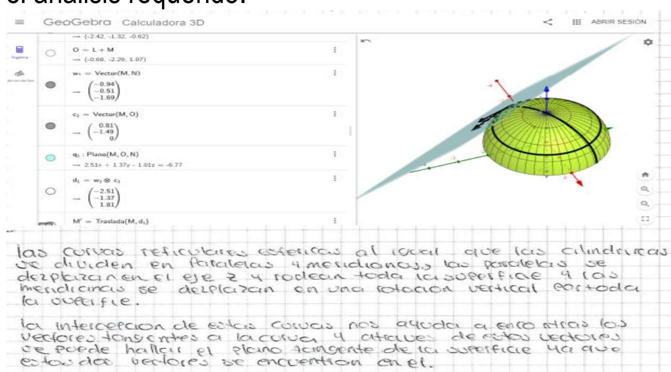
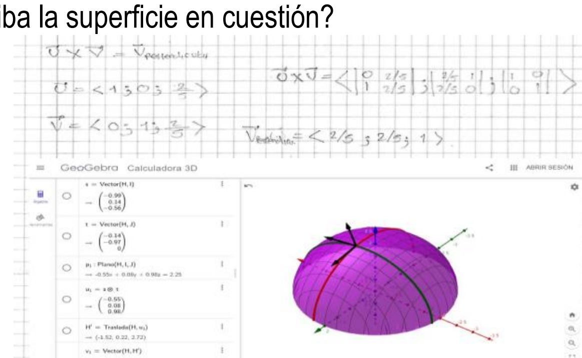




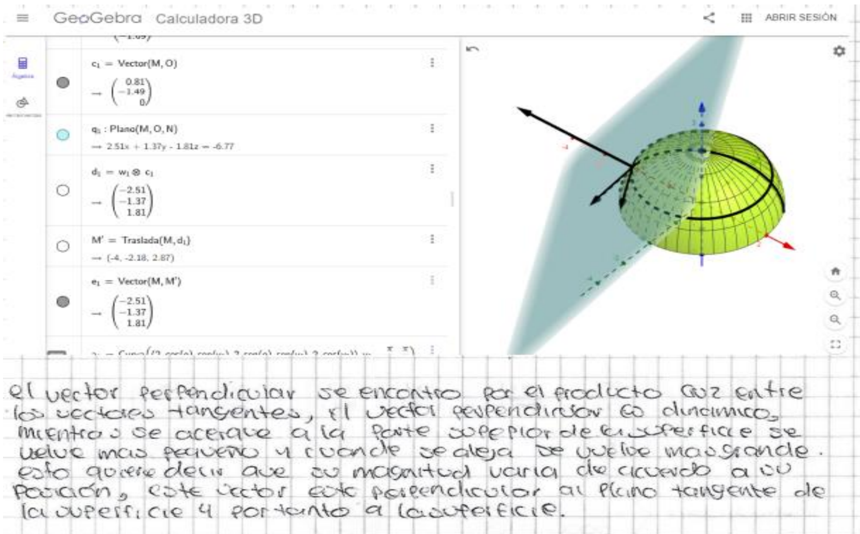






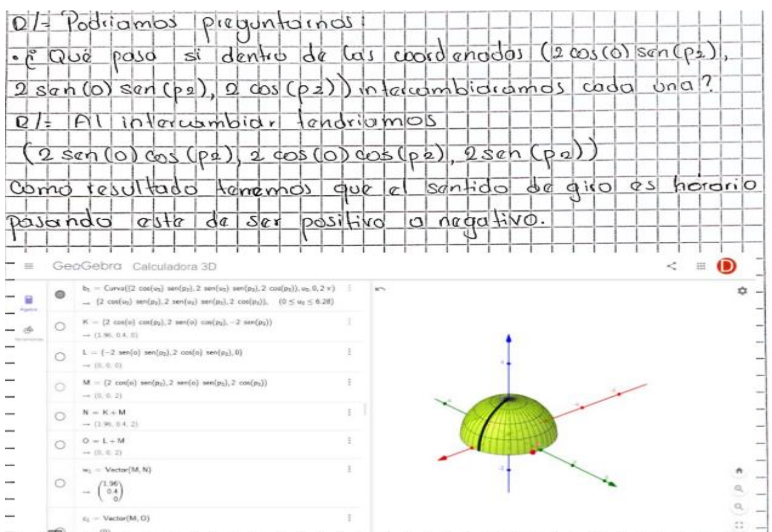
Los estudiantes realizan en la plataforma tecnológica los bosquejos de las diferentes parametrizaciones obtenidas anteriormente junto con sus curvas reticulares, notando una diferencia entre estas curvas dibujadas en las superficies al utilizar diferentes coordenadas, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**
d) Para cada parametrización realizada anteriormente determine las expresiones de sus curvas reticulares. Ahora derive cada expresión con respecto a su variable y dibuje estos vectores sobre un punto arbitrario escogido de la superficie.  Los estudiantes muestran la forma de una curva reticular en coordenadas cilíndricas y eligen un punto de la superficie para hacer el análisis requerido.  En la imagen se muestra la superficie junto con los dos vectores tangentes obtenidos al derivar las expresiones de las curvas reticulares en el punto escogido. Se da el análisis de las formas de tales curvas y se muestra dinámicamente su plano tangente, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**
e) Con ambos vectores tangentes dibujados, ¿cómo obtendría un vector que fuera perpendicular a esta superficie? ¿Qué puede decir acerca de este vector cuando se recorre la superficie dinámicamente? ¿A dónde deberá apuntar tal vector perpendicular para obtener una orientación que describa la superficie en cuestión? 

Los estudiantes muestran que el vector requerido es el producto vectorial de los dos vectores tangentes obtenidos anteriormente, los cuales se dibujan en la plataforma tecnológica y se intuye la orientación de tal vector perpendicular dinámicamente realizado, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.1.



Los estudiantes dan una descripción y relación entre el vector perpendicular del plano tangente y de la superficie, analizando su longitud al recorrer dinámicamente la superficie esférica, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

f) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?



En este problema propuesto por los estudiantes se nota de nuevo como el orden de las funciones componentes influye en esa orientación de la superficie al tomarse con los vectores tangentes a cada curva reticular y con la ley de la mano derecha, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 50**

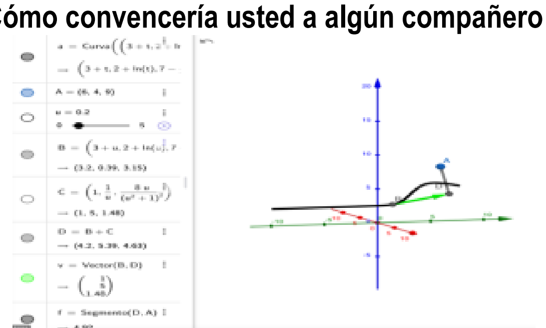
Análisis: En este punto de la actividad con las respuestas presentadas por los estudiantes se muestra cómo la plataforma tecnológica ayuda al empoderamiento de los conceptos dados en el curso y la manera en la que interactúan las facetas vecto-algorítmica y vecto-dinámica de los modos de pensar vectorialmente. La orientación de las superficies es un punto crucial en este problema, del cual los estudiantes sienten curiosidad y muestran un empalme de los modos del pensamiento vectorial descritos en la rúbrica de caracterización del mismo. Lo que se nota en cada solución es que esta orientación caracteriza a una superficie con ayuda de un vector perpendicular a ella, lo que sucedía análogamente con las curvas en el problema anterior y su vector tangente, pero ahora se hace necesario el uso de dos vectores para describir tal orientación. Se observa que los estudiantes van guiados con la curiosidad de usar esa orientabilidad para aplicarla a diversos problemas, lo cual se motivó desde esta actividad y que se esperan resultados favorables en este proceso de caracterización del pensamiento vectorial.

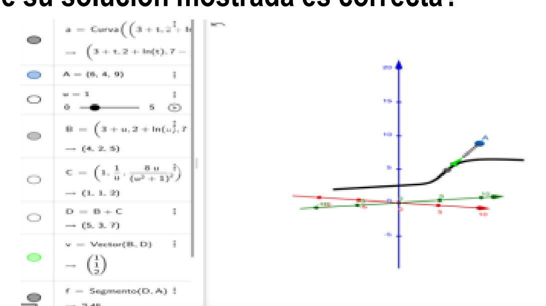
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 16 Análisis problema 3 Actividad 2

(Tomado del libro Cálculo de varias variables. J Stewart) La función posición de una nave espacial es: $\vec{r}(t) = \langle 3 + t;\ 2 + ln(t);\ 7 - \frac{4}{t2+1} \rangle$ y las coordenadas de una estación espacial son $(6,\ 4,\ 9)$. El capitán desea que la nave se deslice hasta la estación espacial. ¿En qué momento deberían apagarse los motores de la nave?

¿Cómo convencería usted a algún compañero que su solución mostrada es correcta?





Los estudiantes hacen un esquema de la situación geométrica del problema para intuir una forma de solución del mismo. Se analiza la relación existente entre la trayectoria seguida por la nave y su trayectoria tangente, la cual es la que desea el capitán para que la nave se deslice, notando que en el tiempo u=1 se obtiene la solución del mismo, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.2.

Solución:

Sea $\vec{r}(t) = \langle 3+t; 2+\ln(t); 7-\frac{4}{t^2+1} \rangle$; también se sabe que $\vec{V}(t) = \vec{r}\,'(t)$; entonces,

$$V(t) = \langle 1; \frac{1}{t}; \frac{8t}{(t^2+1)^2} \rangle$$

Sea $s \neq 0$, también $s \in \mathbb{R}$. Así,

$$r(t) + sV(t) = (6,4,9)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r(t)+sV(t) &= \langle 1; \frac{1}{t}; \frac{8t}{(t^2+1)^2} \rangle s + \langle 3+t; 2+\ln(t); 7-\frac{4}{t^2+1} \rangle \\ &= \langle s; \frac{s}{t}; \frac{8ts}{(t^2+1)^2} \rangle + \langle 3+t; 2+\ln(t); 7-\frac{4}{t^2+1} \rangle \\ &= \langle s+3+t; 2+\ln(t)+\frac{s}{t}; 7-\frac{4}{t^2+1}+\frac{8ts}{(t^2+1)^2} \rangle \\ &= \langle 6,4,9 \rangle. \end{aligned}$$

Así,

i) $s+3+t = 6 \rightarrow s = 6-3-t = 3-t$.

ii) $2+\ln(t)+\frac{s}{t} = 4$.

iii) $7-\frac{4}{t^2+1}+\frac{8ts}{(t^2+1)^2} = \frac{7(t^2+1)^2-4(t^2+1)+8ts}{(t^2+1)^2} = 9$

Como $s = 3-t$; entonces,

$$\frac{7(t^2+1)^2-4(t^2+1)+8t(3-t)}{(t^2+1)^2} = 9 \Rightarrow \frac{-4(t^2+1)+8t(3-t)}{(t^2+1)^2} = 9-7 = 2.$$

$$\frac{-12t^2+24t-4}{(t^2+1)^2} = 2.$$

$$-12t^2+24t-4 = 2(t^2+1).$$

$$t^4+8t^2-12t+3 = 0.$$

$$(t-1)(t^3+t^2+9t-3) = 0.$$

Por lo tanto, $t = 1 \vee t \approx 0,31847$.

Al igualar componentes de cada vector, se resuelve para la variable t el momento en el que se deben apagar los motores de la nave. Se nota por parte de los estudiantes el uso de herramientas de cálculo para poder resolver las ecuaciones deducidas del problema, pero se obtiene el valor requerido y se muestra dinámicamente con el uso de la plataforma tecnológica, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este último punto se busca que el estudiante desarrolle al máximo su faceta vecto-estructural que, como se ha mencionado anteriormente deben tener en cuenta las estructuras de los teoremas y de las propiedades de las operaciones mostradas en clase.

En esta faceta del pensamiento se sigue observando como algunos estudiantes siguen teniendo una dificultad mayor que otros que si se mantienen en ese nivel presentado en la actividad 1, mientras que en otros se presentó un avance importante con relación a la actividad pasada. Tal avance se nota en la utilización de recursos teóricos como lo son la suma de vectores desde el punto de vista conmutativo y la resultante de tales sumas, más que la derivada de vectores mantiene su forma vectorial respetando sus operaciones y propiedades.

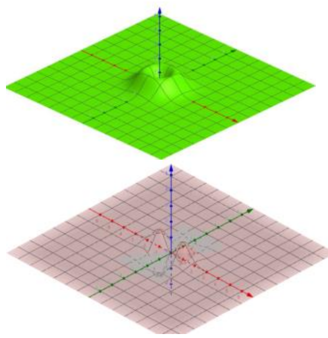
En general se observa como los estudiantes siguen avanzando de forma satisfactoria en su proceso de relacionar las facetas del pensamiento vectorial para dar una solución a determinados problemas, en las cuales se espera que se caractericen las formas de pensamiento vectorial mostradas en ellos.

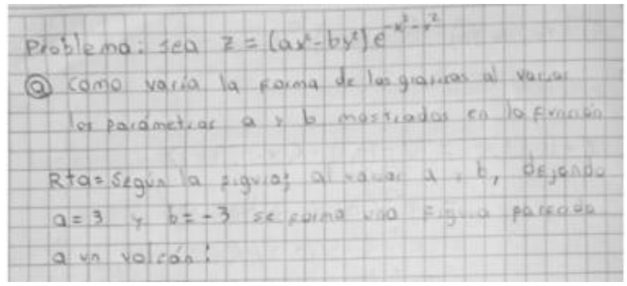
Fuente: *autor (2021)*

5.2.3. Análisis Actividad 3: Funciones multivariables y sus derivadas

Tabla 17 Análisis problema 1 Actividad 3

• **Sea $z = (ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2}$ una función multivariable.**
a) Con ayuda de la plataforma Geogebra, investigue cómo varia la forma de las gráficas al variar los parámetros a y b mostrados en la función.





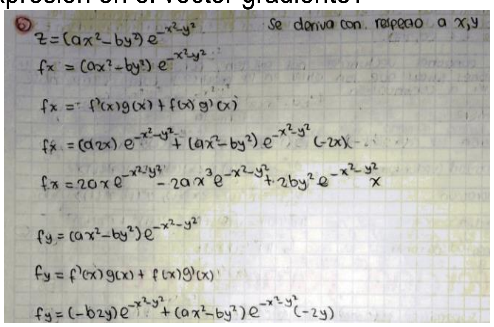
Problema: sea $z=(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}$

a) Cómo varía la forma de las gráficas al variar los parámetros a y b mostrados en la función

Rta= Según la gráficas al variar a, b, dejando a=3 y b=-3 se forma una figura parecida a un volcán!

Los estudiantes muestran las diferentes formas de las superficies cuando varian los parámetros de la función, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

b) Determine la diferencial total de z y escríbala en forma vectorial. ¿Puede factorizar alguna expresión en el vector gradiente?



Se deriva con respecto a x,y

$z=(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}$

$fx=(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}$

$fx=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

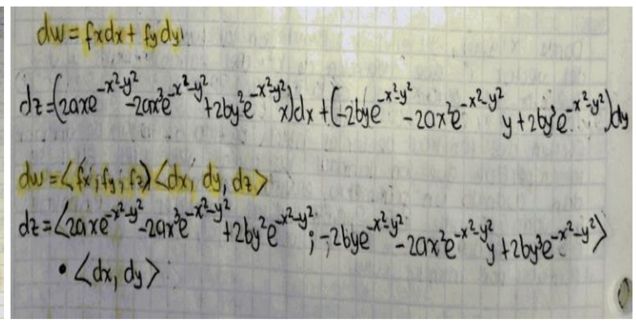
$fx=(a2x)e^{-x^2-y^2}+(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)$

$fx=2axe^{-x^2-y^2}-2ax^3e^{-x^2-y^2}+2by^2e^{-x^2-y^2}x$

$fy=(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}$

$fy=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$fy=(-b2y)e^{-x^2-y^2}+(ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2}(-2y)$



$dw=fxdx+fydy$

$dz=(2axe^{-x^2-y^2}-2ax^3e^{-x^2-y^2}+2by^2e^{-x^2-y^2}x)dx+(-2bye^{-x^2-y^2}-2ax^2e^{-x^2-y^2}y+2by^3e^{-x^2-y^2})dy$

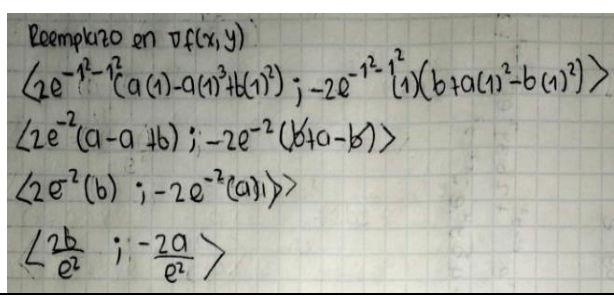
$dw=\langle fx, fy, fz\rangle\langle dx, dy, dz\rangle$

$dz=\langle 2axe^{-x^2-y^2}-2ax^3e^{-x^2-y^2}+2by^2e^{-x^2-y^2} ; -2bye^{-x^2-y^2}-2ax^2e^{-x^2-y^2}y+2by^3e^{-x^2-y^2}\rangle$

$\bullet\langle dx, dy\rangle$

En estas diferentes operaciones algorítmicas, los estudiantes muestran las derivadas parciales de la función para mostrar la diferencial total y su forma vectorial correspondiente, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie asociada a la función anterior en términos de a y b en el punto (1,1) mostrando su respectivo vector gradiente. Compruebe sus resultados con el uso de la geometría dinámica. ¿Habrá algún valor de a y b para los que el plano tangente en el punto (1,1) sea horizontal?



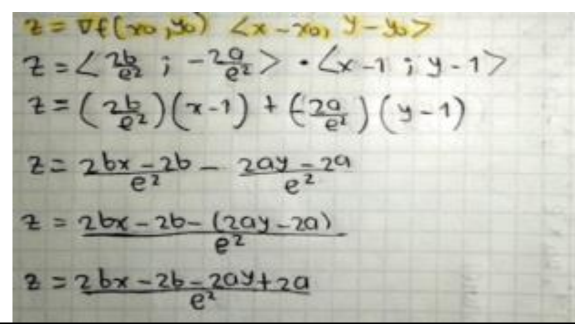
Reemplazo en $\nabla f(x,y)$

$\langle 2e^{-1^2-1^2}(a(1)-a(1)^3+b(1)^2) ; -2e^{-1^2-1^2}(1)(b+a(1)^2-b(1)^2)\rangle$

$\langle 2e^{-2}(a-a+b) ; -2e^{-2}(b+a-b)\rangle$

$\langle 2e^{-2}(b) ; -2e^{-2}(a)\rangle$

$\langle \frac{2b}{e^2} ; -\frac{2a}{e^2}\rangle$



$z=\nabla f(x_0,y_0)\langle x-x_0, y-y_0\rangle$

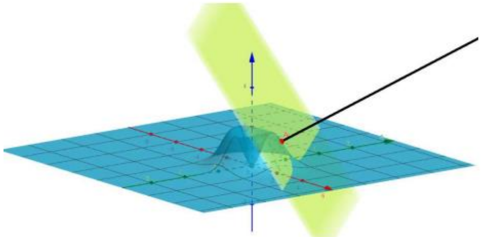
$z=\langle \frac{2b}{e^2} ; -\frac{2a}{e^2}\rangle\cdot\langle x-1 ; y-1\rangle$

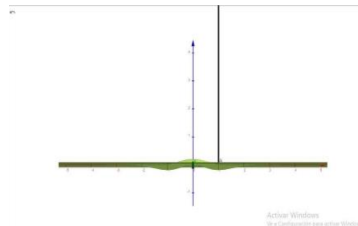
$z=\left(\frac{2b}{e^2}\right)(x-1)+\left(-\frac{2a}{e^2}\right)(y-1)$

$z=\frac{2bx-2b}{e^2}-\frac{2ay-2a}{e^2}$

$z=\frac{2bx-2b-(2ay-2a)}{e^2}$

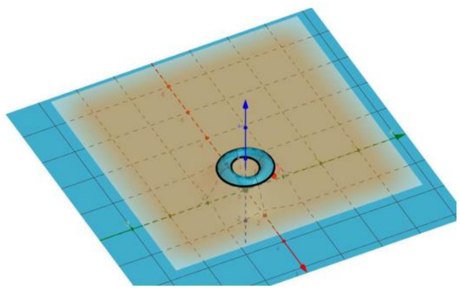
$z=\frac{2bx-2b-2ay+2a}{e^2}$

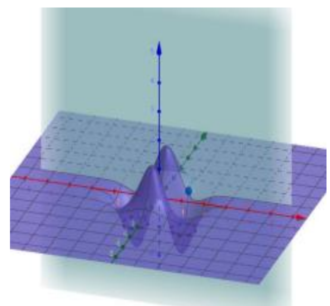




Los estudiantes realizan los algoritmos de manera que puedan verlos reflejados en la herramienta tecnológica dinámicamente. Además se muestra el caso cuando el plano tangente a la superficie es horizontal, relacionando este hecho con que su vector normal es vertical, evidenciando así las rúbricas 1.3 y 2.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

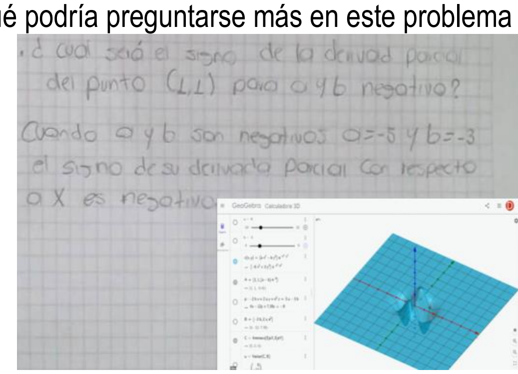
a) Mediante el uso de la plataforma Geogebra, trace distintas curvas de nivel de la función ($\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}\ \mathrm{con}\ \boldsymbol{k} > \mathbf{0}$) prefijando valores de a y b escogidos por usted. Partiendo del punto (1,1) ¿qué signo tendrá cada derivada parcial?

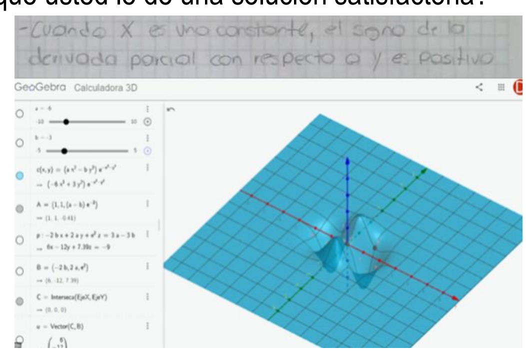




Los estudiantes determinan diferentes curvas de nivel de la función y las relacionan con la forma de su gráfica. En la última figura, se trazan planos paralelos a los planos coordenados que pasan por el punto dado para determinar el signo de la derivada parcial requerida al ver el decrecimiento de la curva intersección, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

b) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?





Aquí los estudiantes proponen valores de los parámetros que determinen el signo de la derivada parcial correspondiente. Se muestra el tipo de orientación que debe estar presente en el momento de aseverar el signo dado cuando se recorre cada eje positivamente, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

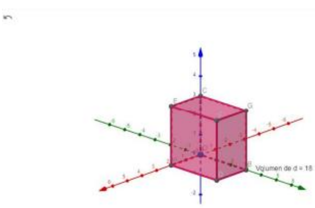
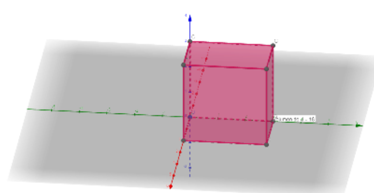
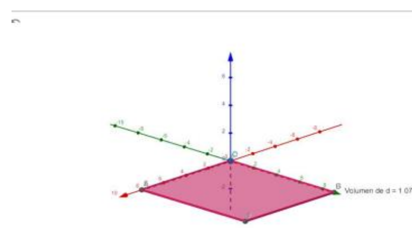
Análisis: En este punto de la tercera actividad los estudiantes en su mayoría utilizaron el software matemático "Geogebra" para comprender el significado geométrico de las curvas de nivel y sus diferentes propiedades. Con las respuestas presentadas por los estudiantes en este problema, y basado en la rúbrica de caracterización del pensamiento vectorial, se evidencia que ellos se valen de fórmulas y algoritmos que son representados gráficamente mediante herramientas tecnológicas, en este caso Geogebra, empleando planos y vectores con el fin de visualizar, determinar y relacionar la orientación en la solución del problema presentado con los vectores establecidos en este.
Además, que se utiliza el pensamiento vectorial en su faceta vecto-dinámica, vecto-algorítmica y el modo de orientabilidad como se había evidenciado en las actividades pasadas. Asimismo, los estudiantes siguen fortaleciendo sus conocimientos adquiridos en el área de las matemáticas y relacionando las diferentes facetas del pensamiento vectorial siendo más eficientes en las soluciones de los problemas presentados.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 18 Análisis problema 2 Actividad 3

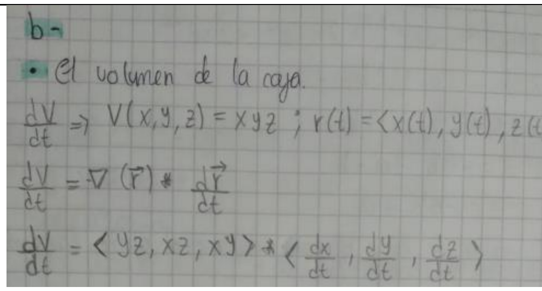
- **Por la estructura de los materiales que conforman una caja, su longitud, su ancho y su altura varían con el tiempo. En cierto instante las medidas de la caja son de dos metros su longitud y de tres metros su ancho y su altura. Se observa que la longitud y el ancho de la caja aumentan a razón de 2 m/h y que su altura disminuye a razón de 1m/h.**

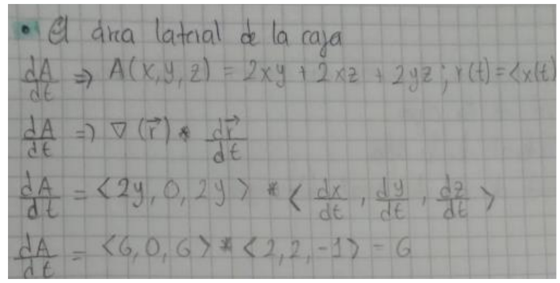
Realice un bosquejo en una plataforma computacional donde se muestre dinámicamente el experimento anterior. ¿En qué momento el volumen de la caja es de un metro cúbico?

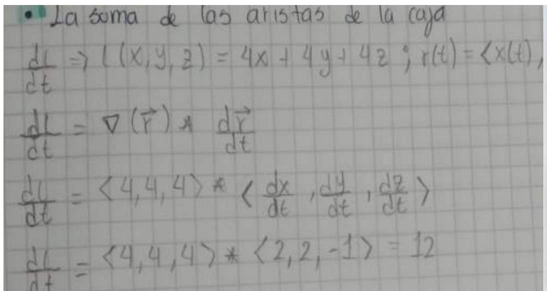




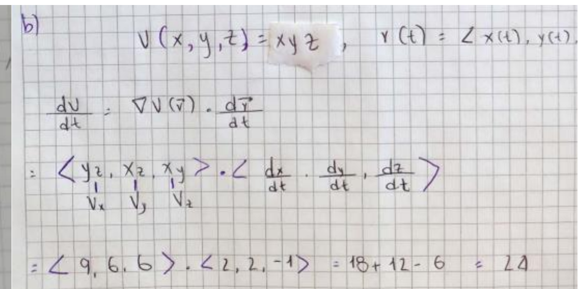
Los estudiantes proceden con la dinámica de este problema primero computando las diferentes posibilidades de las medidas de la caja cuando el tiempo avanza y al final mostrando la caja deformada cuyo volumen sea 1 metro cúbico, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

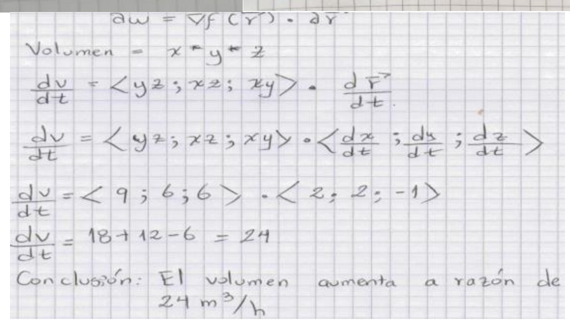
a) En el momento que se tomaron las variaciones de las medidas, determine las razones a las que cambian: El volumen de la caja, el área lateral de la caja, la suma de las aristas de la caja y la longitud de na diagonal de la caja


b-
• El volumen de la caja.
$\frac{dV}{dt} \Rightarrow V(x,y,z) = xyz \; ; \; r(t) = \langle x(t), y(t), z(t)$
$\frac{dV}{dt} = \nabla(\vec{r}) * \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\frac{dV}{dt} = \langle yz, xz, xy \rangle * \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$


• El área lateral de la caja
$\frac{dA}{dt} \Rightarrow A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz \; ; \; r(t) = \langle x(t)$
$\frac{dA}{dt} \Rightarrow \nabla(\vec{r}) * \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\frac{dA}{dt} = \langle 2y, 0, 2y \rangle * \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$
$\frac{dA}{dt} = \langle 6, 0, 6 \rangle * \langle 2, 2, -1 \rangle = 6$

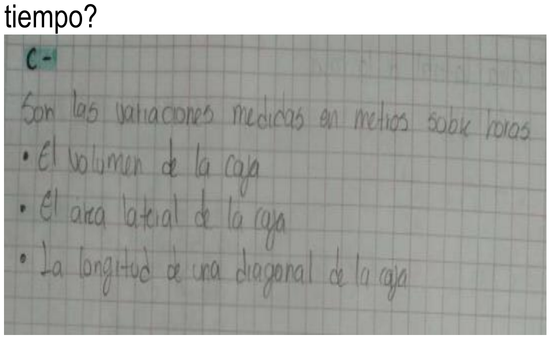

• La soma de las aristas de la caja
$\frac{dL}{dt} \Rightarrow L(x,y,z) = 4x + 4y + 4z \; ; \; r(t) = \langle x(t),$
$\frac{dL}{dt} = \nabla(\vec{r}) * \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\frac{dL}{dt} = \langle 4,4,4 \rangle * \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$
$\frac{dL}{dt} = \langle 4,4,4 \rangle * \langle 2,2,-1 \rangle = 12$

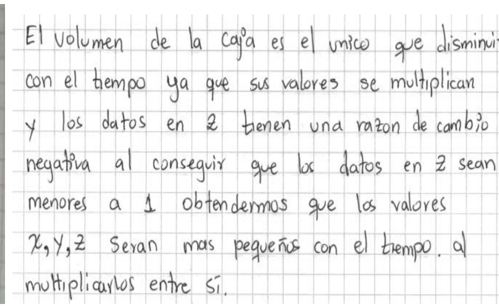

b)
$V(x,y,z) = xyz \; , \; r(t) = \langle x(t), y(t),$
$\frac{dV}{dt} = \nabla V(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$
$= \langle \underset{V_x}{yz}, \underset{V_y}{xz}, \underset{V_z}{xy} \rangle \cdot \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$
$= \langle 9, 6, 6 \rangle \cdot \langle 2, 2, -1 \rangle = 18 + 12 - 6 = 24$


$dw = \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$
Volumen $= x * y * z$
$\frac{dv}{dt} = \langle yz; xz; xy \rangle \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\frac{dv}{dt} = \langle yz; xz; xy \rangle \cdot \langle \frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt} \rangle$
$\frac{dv}{dt} = \langle 9; 6; 6 \rangle \cdot \langle 2; 2; -1 \rangle$
$\frac{dv}{dt} = 18 + 12 - 6 = 24$
Conclusión: El volumen aumenta a razón de $24 \, m^3/h$

Los estudiantes realizan los correspondientes cálculos requeridos usando la notación mostrada para la regla de la cadena, la cual conlleva a una mejor interpretación de los resultos obtenidos sin incurrir a muchos procesos algorítmicos, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

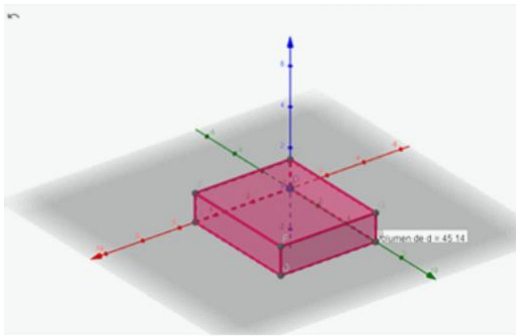
b) Interprete los números obtenidos anteriormente. ¿Alguno de estos valores disminuirá con el tiempo?


C-
Son las variaciones medidas en metros sobre horas
• El volumen de la caja
• El área lateral de la caja
• La longitud de una diagonal de la caja


El volumen de la caja es el unico que disminuira con el tiempo ya que sus valores se multiplican y los datos en z tienen una razon de cambio negativa al conseguir que los datos en z sean menores a 1 obtendermos que los valores x, y, z seran mas pequeños con el tiempo al multiplicarlos entre si.

Se muestra que los estudiantes interpretan mejor los resultados anteriores al notar los signos de esas razones de cambio, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

c) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?



Se podría preguntar la distancia recorrida en cada uno de los planos en el momento que obtenemos un metro cúbico en el volumen de la caja y con esto sería mas sencillo encontrar el tiempo que se recorre en cada plano, siendo los recorridos los siguientes:

$x = 7{,}97$ m
$y = 8{,}97$ m
$z = 0{,}015$ m

Se muestra que los estudiantes utilizan el modo dinámico del pensamiento vectorial para dar una tentativa solución al problema propuesto al inicio de esta actividad, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

Análisis: En este segundo problema y basados en la rúbrica de caracterización se muestra que los estudiantes aplican las formulas y algoritmos aprendidos en las clases previas al desarrollo de la actividad. Asimismo, apoyándose en las herramientas tecnológicas sugeridas con el fin de observar imágenes de las posibles soluciones y utilizando vectores y planos tridimensionales para entender las relaciones existentes y dar una posible solución al problema volvemos a evidenciar la relación de las facetas vecto-algorítmica y vecto-dinámica.

Se contempla al máximo la gran habilidad tecnológica que posee el estudiante, el cual analiza y organiza los datos para la construcción de la geometría y da solución de manera teórico-visual a este problema; un análisis tridimensional basado en la construcción y su correspondiente faceta dinámica, lo que permite dar la forma gráfica correspondiente. Esto muestra que estos están teniendo una mayor comprensión y análisis en estas facetas del pensamiento vectorial.

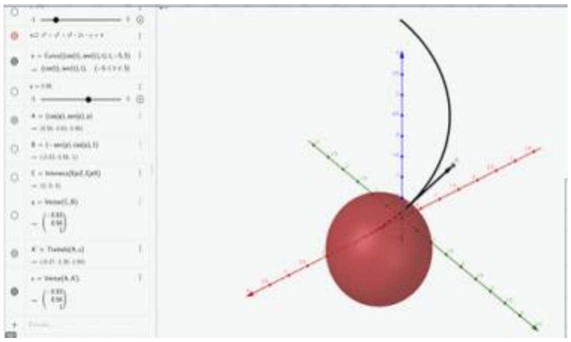
Una dificultad presentada en los estudiantes fue la de no interpretar correctamente las derivadas y sus signos, por lo que en la socialización se logró avanzar en la superación de este obstáculo al presentar por parte de ellos algunos ejemplos de funciones multivariables con su respectiva derivada y el análisis de sus signos. Esto con el fin de generar en el estudiante una aptitud que pueda ser captada por el modo de generalización del pensamiento vectorial. Se seguirá avanzando en esta tarea.

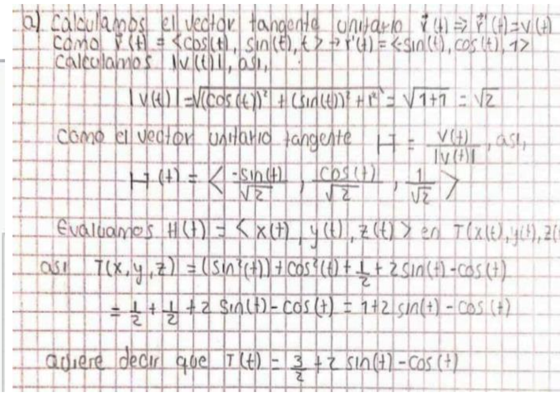
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 19 Análisis problema 3 Actividad 3

- **(Tomado con variaciones del libro Notas de clase. ECDI) Suponga que el movimiento de un objeto en el espacio está dado por $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$ y que la temperatura de un punto cualquiera (x, y, z) del espacio está dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y$.**

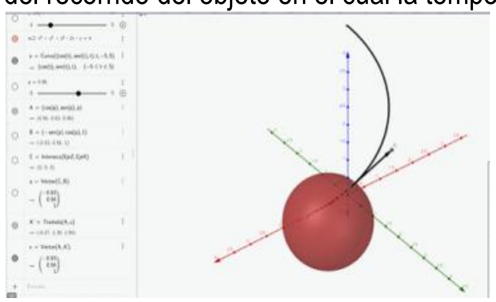
a) Mediante el uso de la plataforma tecnológica, trace la curva dada por el movimiento descrito, mostrando en él su vector tangente unitario. ¿Qué podría decir este vector sobre la temperatura de los puntos en la curva descrita?





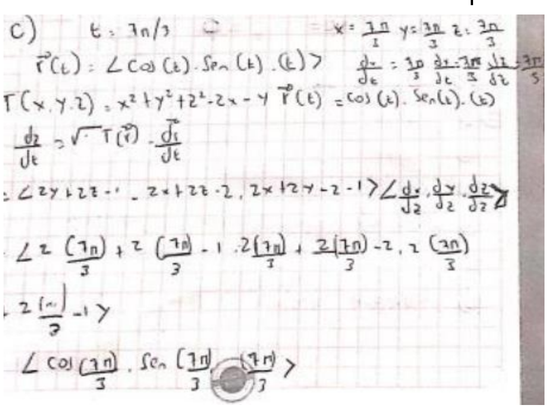
Se muestra por parte de los estudiantes la interacción de la plataforma tecnológica y los algoritmos involucrados en el problema, lo cual se traduce en su comprensión y resolución, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

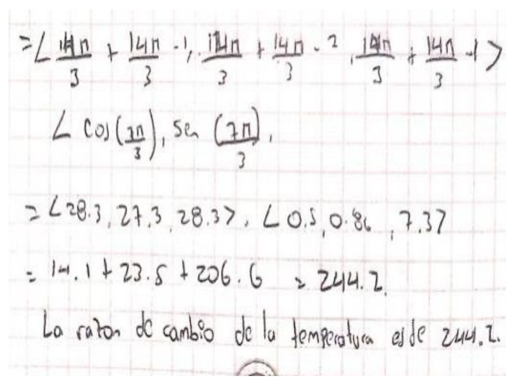
b) Determine si existe un punto del recorrido del objeto en el cual la temperatura es igual a cero.



Los estudiantes muestran sobre esta gráfica que deberá existir un punto de la trayectoria descrita que intersecte la esfera que será la superficie de nivel de la temperatura cuando vale cero, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

c) Determine la razón de cambio de la temperatura del objeto cuando $\boldsymbol{t = \frac{7\pi}{3}}$.





Se muestra que los estudiantes ya adquieren un empoderamiento de la notación vectorial mostrada para la regla de la cadena, lo que redunda en el cálculo de la razón de cambio requerida, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este último punto de la actividad 3 los estudiantes debían utilizar su pensamiento vecto-estructural buscando solución al problema, utilizando las propiedades vistas y trabajadas en clase.

Se muestra una dificultad inherente al problema y es la de no poder visualizarlo completamente al no poseer una gráfica de la temperatura, por lo que en la socialización se mostró una manera efectiva de ver esta función escalar multivariable mediante colores, lo que al margen de los cálculos resultó ser una gran ayuda a los estudiantes en la obtención de la solución.

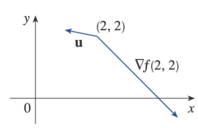
En esta solución se evidencia un gran avance con relación a las actividades pasadas; los estudiantes están relacionando las facetas del pensamiento vecto-algorítmica y vecto-dinámica, donde la función obtenida en la parte algorítmica es llevada al software “Geogebra” y observar los recorridos de los vectores, todo esto con el fin de desarrollar de forma óptima su faceta vecto-estructural utilizando sus conocimientos previos, las herramientas tecnológicas, los teoremas y los esquemas aprendidas para dar soluciones coherentes y eficaces.

Fuente: *autor (2021)*

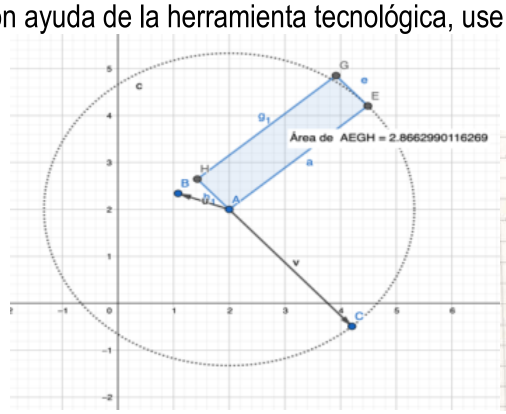
5.2.4. Análisis Actividad 4: Derivadas con dirección y optimización

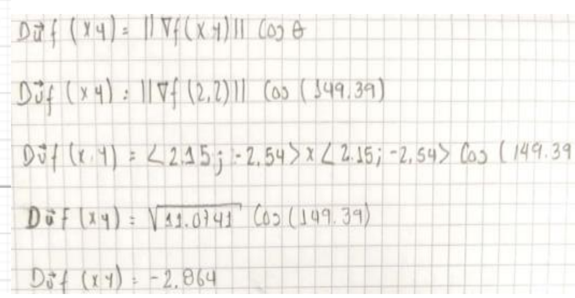
Tabla 20 Análisis problema 1 Actividad 4

- **Se tiene la siguiente figura donde se da el vector dirección y el gradiente de una función $f(x, y)$.**



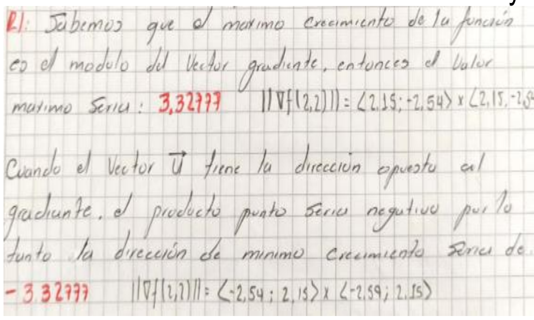
a) Con ayuda de la herramienta tecnológica, use la figura para estimar $D_{\vec{u}}f(2,2)$.

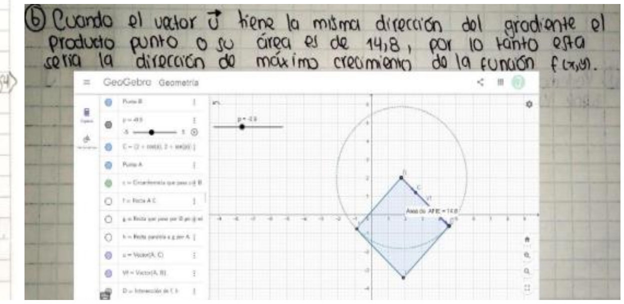




En este problema los estudiantes muestran la derivada direccional como un producto punto, reconociendo la construcción geométrica del mismo trabajada en la Actividad 1, además de notar la orientabilidad de esta construcción, la cual arroja un signo negativo a la operación, mostrando así evidencia de las rúbricas 2.2 y 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

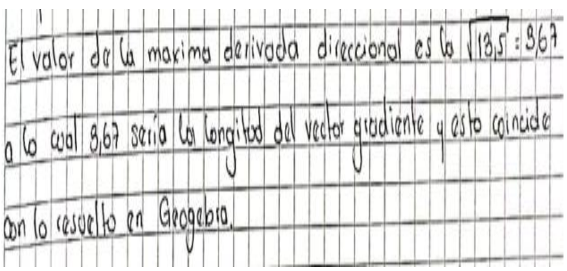
b) Estime la dirección de máximo crecimiento y de mínimo crecimiento de la función $\boldsymbol{f(x, y)}$.

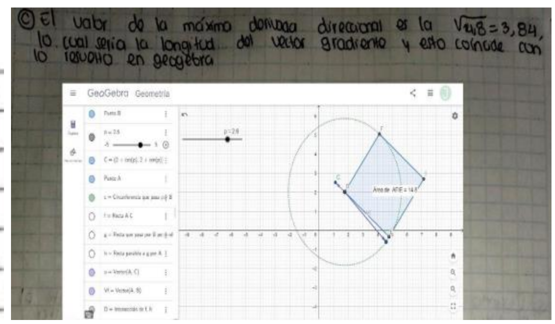




Los estudiantes muestran la comparación algorítmica de la derivada direccional con la construcción del rectángulo con área máxima para responder al problema. Ellos confunden la dirección de un vector con su mágnitud, pero el problema está resuelto de buena manera, mostrando así evidencia parcial de la rúbrica 1.4 y evidencia de la rúbrica 5.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 90**

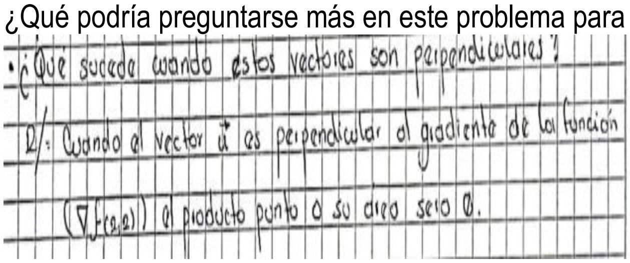
c) ¿Cuál es el valor de la máxima derivada direccional? ¿Coinciden sus respuestas con lo resuelto en el ítem a?

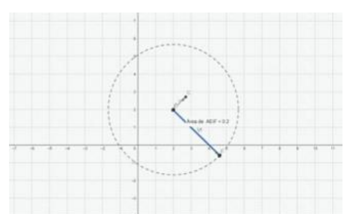




Los estudiantes muestran efectivamente que los cálculos algorítmicos y la interpretación geométrica conducen a la respuesta del valor de la máxima derivada direccional. En la imagen izquierda los estudiantes mostraron que ese valor encontrado es el máximo valor comparándolo con el encontrado en la parte a) coincidiendo las respuestas, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 90**

d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?





Los estudiantes muestran la dinámica del problema para darle solución a otro problema de su autoria, observando que el ángulo entre los dos vectores determina el valor de esa derivada direccional, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

Análisis: En este primer problema de la cuarta actividad, en las respuestas dadas por los estudiantes se observa que estos continúan avanzando en la relación de la faceta vecto-algorítmica y vecto-dinámica utilizando el software matemático "Geogebra" para esta conexión y siguen descubriendo y afianzando esta habilidad tecnológica para ver lo aplicado en sus fórmulas de una manera práctica.

Detallando las soluciones dadas por los estudiantes en este problema y basados en los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial expuestos en la rúbrica de evaluación, se evidencia que se recurre aún a los algoritmos para resolver el problema dado mediante las fórmulas vectoriales vistas en clase. Así es, como ellos sugieren ideas geométricas y algoritmos sustituyendo las desarrolladas durante las clases.

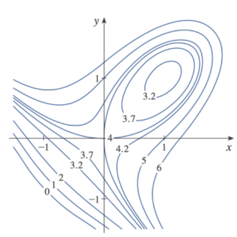
En este problema se muestra, entre otras, que el modo de orientabilidad es un factor determinante en la resolución del problema, pues la herramienta tecnológica no arroja áreas de rectángulos negativos, pero ellos fijan su atención en la relación del ángulo entre los vectores involucrados y tal derivada direccional. Se espera que se corrijan algunos errores detectados en los cálculos y en la notación para avanzar en la caracterización del pensamiento vectorial desarrollado por ellos.

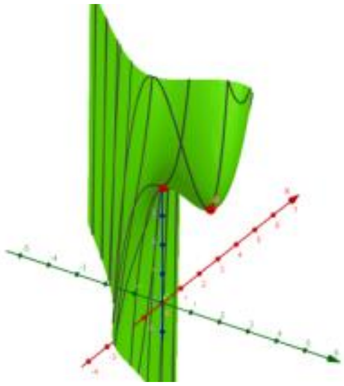
Fuente: *autor (2021)*

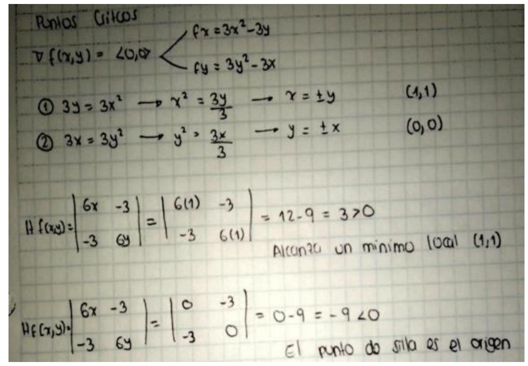
Tabla 21 Análisis problema 2 Actividad 4

- **Use las curvas de nivel en la figura para predecir la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un máximo o mínimo local o punto de silla en cada punto crítico. Use después el Hessiano para confirmar sus predicciones. Por último, compruebe sus resultados con Geogebra.**

$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$







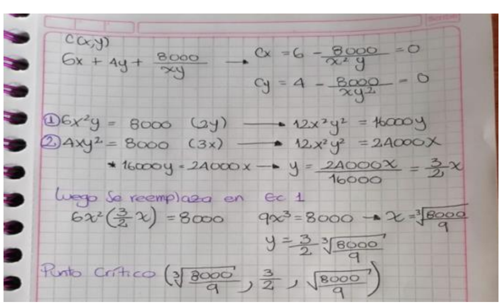
Los estudiantes muestran algorítmicamente las predicciones que se hicieron de los puntos criticos de la función dada con sus curvas de nivel y comprueban de manera gráfica sus resultados, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 90**

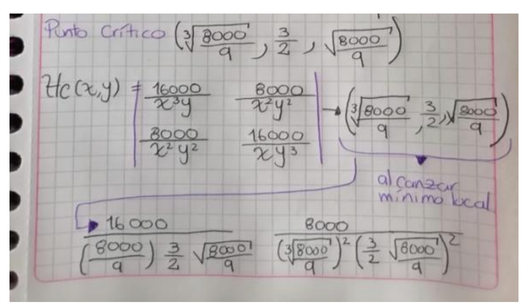
Análisis: En este problema los estudiantes siguen usando la herramienta tecnológica "Geogebra" para comprender el significado geométrico de las curvas de nivel de una función multivariable. En cuanto a la rúbrica de caracterización del pensamiento vectorial se realizó el análisis bajo el criterio del modo vecto-algorítmico y con las respuestas presentadas por los estudiantes en este problema se observa que ellos continúan indagando en todos los beneficios que este software trae para su conocimiento y la forma en la que aprenden. Es una faceta que continúan descubriendo para la solución de manera gráfica implementando una gran habilidad tecnológica para el análisis y organización de datos.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 22 Análisis problema 3 Actividad 4

La planta de Baraboo, Wisconsin, de la Compañía Internacional de Chucherías, S.A. usa aluminio, hierro y magnesio para producir chucherías de alta calidad. La cantidad de chucherías que puede producir usando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x,y,z) = xyz$. El costo de la materia prima es: aluminio, $6 dólares por tonelada; hierro, $4 dólares por tonelada; y magnesio, $8 dólares por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deberán usarse para manufacturar 1000 chucherías al menor costo posible?





Los estudiantes realizan el problema por uno de los métodos de optimización descritos en la clase, a saber el método del criterio de la segunda derivada visto de manera vectorial al usar los determinantes, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**
Análisis: Este tercer problema está planteado para que los estudiantes evolucionen aún más en su faceta vecto-algorítmica del pensamiento vectorial. En cuanto al análisis con relación a la rúbrica de caracterización los estudiantes muestran la aplicación de sus conocimientos previos y de nuevos algoritmos a los aprendidos en las clases para la solución. Asimismo, algunos de los estudiantes consultan otros algoritmos vectoriales que sean aplicables a los problemas. Se observa el no uso del otro método de optimización mostrado en clase, a saber, el método de los multiplicadores de Lagrange. En la socialización se motivó a algunos grupos a realizarlo en la sesión de clase lo cual resultó en la misma solución del problema mediante otro enfoque. Con las respuestas dadas por ellos se evidencia la facilidad que han adquirido para relacionar los conocimientos previos, las formulas, los teoremas y así buscar soluciones objetivas a los problemas presentados. Igualmente, estos están mostrando un avance significativo con relación a las actividades pasadas, fortaleciendo sus conocimientos previos al curso y los adquiridos a lo largo de este.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 23 Análisis problema 4 Actividad 4

Demuestre que el valor mínimo de la función $f(x,y)=\frac{x^2+y^2+1}{(ax+by+c)^2}$ esta dado por $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

$f_x=\emptyset$

$$\frac{-2a(x^2+y^2+1)+2x(ax+by+c)}{(ax+by+c)^3}=\emptyset$$

$$-2a(x^2+y^2+1)+2x(ax+by+c)=\emptyset$$

$$a(x^2+y^2+1)=ax^2+bxy+cx$$

$$ax^2+ay^2+a=ax^2+bxy+cx$$

$$ay^2+a=bxy+cx$$

$$a\cdot(y^2+1)=x\cdot(by+c)$$

$$x=\frac{a\cdot(y^2+1)}{by+c}$$

$f_y=\emptyset$

$$\frac{2y\cdot(ax+by+c)-2b(x^2+y^2+1)}{(ax+by+c)^3}=\emptyset$$

$$2y\cdot(ax+by+c)=2b\cdot(x^2+y^2+1)=\emptyset$$

$$axy+by^2+cy=bx^2+by^2+b$$

$$axy+cy=bx^2+b$$

$$y\cdot(ax+c)=bx^2+b$$

$$y=\frac{bx^2+b}{ax+c}$$

$$y=\frac{b(x^2+1)}{ax+c}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}{\left(a\cdot\left(\frac{a}{c}\right)+b\cdot\left(\frac{b}{c}\right)+c\right)^2}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{c^2}}{\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+c\right)^2}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}}{\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+c\cdot\frac{c}{c}\right)^2}$$

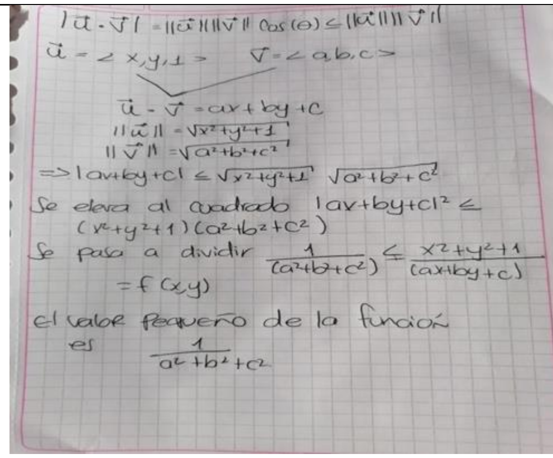
$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}}{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{c}\right)^2}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}}{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{c^2}}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\boxed{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}}$$

así se demuestra que el valor mínimo de la $f(x,y)$ es $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.



Los estudiantes muestran un algorítmo efectivo para resolver el problema planteado. La última imágen muestra cómo los vectores hacen resolver el problema de manera más óptima y clara que con los métodos de optimización vistos en clase, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 30**

Análisis: En este problema se determina la manera cómo el estudiante ataca el problema y utiliza los recursos vistos tanto en clase como los desarrollados de manera vectorial implícita en la forma del mismo.

Se hace presencia de un pensamiento vecto-estructural en la solución del problema en la medida que se toman estructuras vectoriales vistas con anterioridad en la clase que permitan empoderarse de ellas y resolver un problema que inicialmente no parecería tener un tipo de solución de esta manera. Por lo que se muestra una faceta distinta del pensamiento vectorial al momento de la toma de decisión para una resolución. Es claro que no todos los grupos de trabajo llegan a este nivel deseado, pero se sigue motivando el pensamiento vectorial.

Esta novedosa faceta que ya fue evidenciada en al último problema de la Actividad 1 es la que iremos explorando en el transcurso de las demás actividades. Por el momento se va por un buen camino en la caracterización de este tipo especial de pensamiento mostrado por los estudiantes, aunque sería deseable que todos lo tuvieran, por ahora se van haciendo avances en tal meta.

Fuente: *autor (2021)*

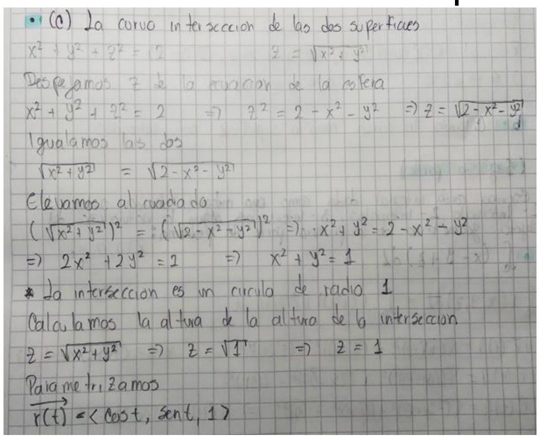
5.2.5. Análisis Actividad 5: Hacia la integración múltiple de campos escalares

Tabla 24 Análisis problema 1 Actividad 5

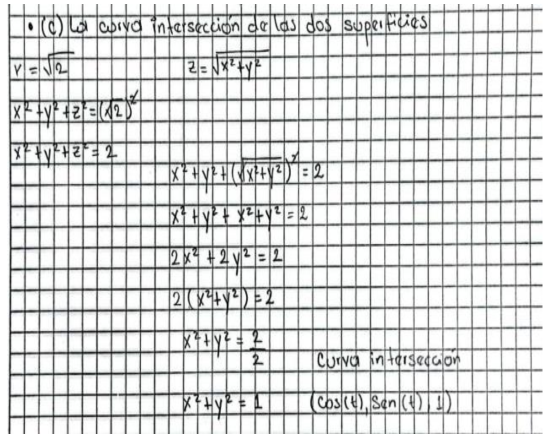
- **Se define la superficie S_1 como la esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$ y la superficie S_2 como la superficie cónica con ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$**

a) Parametrice cada uno de los objetos geométricos del espacio para que la parametrización quede definida sobre un 1- intervalo, 2- intervalos, 3- intervalos según la naturaleza del objeto	

(C) La curva intersección de las dos superficies.



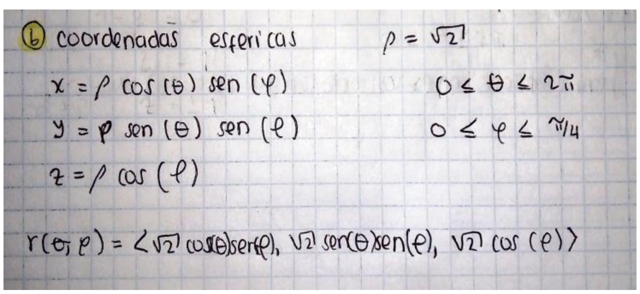
(c) La curva intersección de las dos superficies
$x^2+y^2+z^2=2$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$
Despejamos z de la ecuación de la esfera
$x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow z^2=2-x^2-y^2 \Rightarrow z=\sqrt{2-x^2-y^2}$
Igualamos las dos
$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2-x^2-y^2}$
Elevamos al cuadrado
$(\sqrt{x^2+y^2})^2=(\sqrt{2-x^2-y^2})^2 \Rightarrow x^2+y^2=2-x^2-y^2$
$\Rightarrow 2x^2+2y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$
La intersección es un círculo de radio 1
Calculamos la altura de la altura de la intersección
$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z=\sqrt{1} \Rightarrow z=1$
Parametrizamos
$\vec{r}(t)=\langle \cos t, \operatorname{sen} t, 1\rangle$



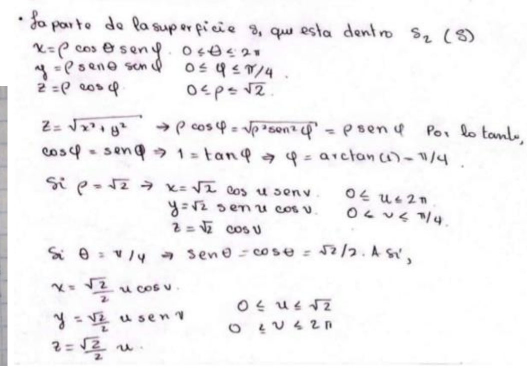
(c) La curva intersección de las dos superficies
$r=\sqrt{2}$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$
$x^2+y^2+z^2=(\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2=2$
$x^2+y^2+(\sqrt{x^2+y^2})^2=2$
$x^2+y^2+x^2+y^2=2$
$2x^2+2y^2=2$
$2(x^2+y^2)=2$
$x^2+y^2=\frac{2}{2}$ Curva intersección
$x^2+y^2=1$ $(\cos(t), \operatorname{Sen}(t), 1)$

Los estudiantes muestran la parametrización requerida usando las coordenadas polares para describir la circunferencia intersección de las dos superficies, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

(S) La parte de la superficie S_1 que está dentro de la superficie cónica S_2.



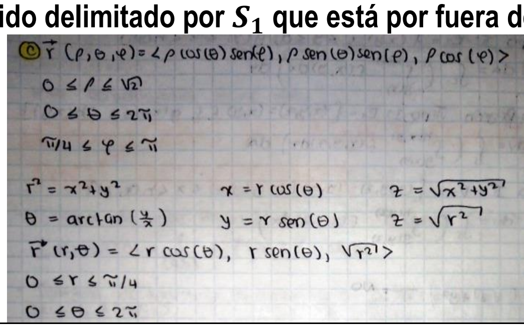
(b) coordenadas esféricas $\rho=\sqrt{2}$
$x=\rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$ $0\le\theta\le 2\pi$
$y=\rho\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$ $0\le\varphi\le\pi/4$
$z=\rho\cos(\varphi)$
$r(\theta,\varphi)=\langle\sqrt{2}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \sqrt{2}\cos(\varphi)\rangle$



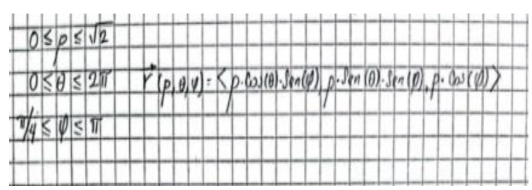
La parte de la superficie S_1 que está dentro S_2 (S)
$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$ $0\le\theta\le 2\pi$
$y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ $0\le\varphi\le\pi/4$
$z=\rho\cos\varphi$ $0\le\rho\le\sqrt{2}$
$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\rho\operatorname{sen}\varphi$ Por lo tanto,
$\cos\varphi=\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow 1=\tan\varphi \Rightarrow \varphi=\arctan(1)=\pi/4$
Si $\rho=\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}\cos u\operatorname{sen} v$ $0\le u\le 2\pi$
$y=\sqrt{2}\operatorname{sen} u\cos v$ $0\le v\le\pi/4$
$z=\sqrt{2}\cos v$
Si $\theta=\pi/4 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\cos\theta=\sqrt{2}/2$. Así,
$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u\cos v$
$y=\frac{\sqrt{2}}{2}u\operatorname{sen} v$ $0\le u\le\sqrt{2}$
$z=\frac{\sqrt{2}}{2}u$ $0\le v\le 2\pi$

Los estudiantes utilizan las coordenadas esféricas para describir la superficie en cuestión, observando una habilidad algorítmica para encontrar el ángulo de intersección, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

(E) El sólido delimitado por S_1 que está por fuera de S_2.



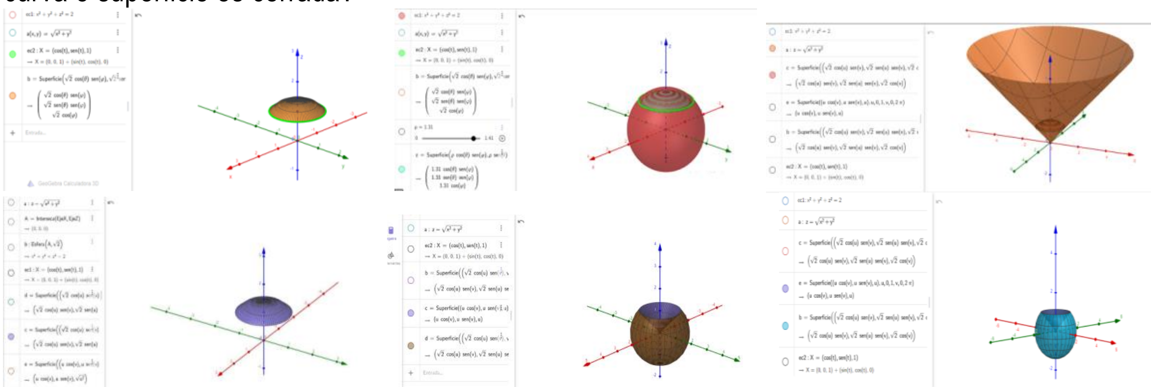
(c) $\vec{r}(\rho,\theta,\varphi)=\langle\rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \rho\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \rho\cos(\varphi)\rangle$
$0\le\rho\le\sqrt{2}$
$0\le\theta\le 2\pi$
$\pi/4\le\varphi\le\pi$
$r^2=x^2+y^2$ $x=r\cos(\theta)$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$
$\theta=\arctan(\frac{y}{x})$ $y=r\operatorname{sen}(\theta)$ $z=\sqrt{r^2}$
$\vec{r}(r,\theta)=\langle r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), \sqrt{r^2}\rangle$
$0\le r\le\pi/4$
$0\le\theta\le 2\pi$



$0\le\rho\le\sqrt{2}$
$0\le\theta\le 2\pi$ $\vec{r}(\rho,\theta,\varphi)=\langle\rho\cdot\cos(\theta)\cdot\operatorname{Sen}(\varphi), \rho\cdot\operatorname{Sen}(\theta)\cdot\operatorname{Sen}(\varphi), \rho\cdot\cos(\varphi)\rangle$
$\pi/4\le\varphi\le\pi$

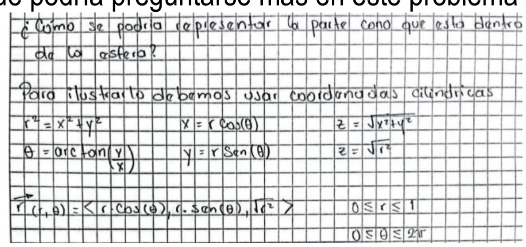
Los estudiantes siguen mostrando habilidad en la utilización de las coordenadas espaciales vistas con antelación, analizando el ángulo que describe la parte del sólido requerido, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

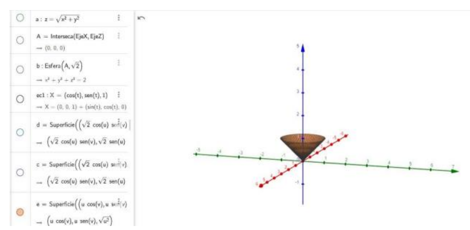
b) Con ayuda de la herramienta tecnológica grafique cada uno de los objetos anteriores. ¿Alguna curva o superficie es cerrada?



Los estudiantes muestran de manera geométrica los objetos descritos en el item anterior, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

c) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?





Los estudiantes siguen mostrando habilidad en el manejo de la plataforma tecnológica que redunda en la obtención de otro problema que se soluciona con geometría dinámica y con el uso adecuado de las coordenadas espaciales, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

Análisis: En este primer problema de la actividad se evidencia un importante progreso por parte de los estudiantes en los modos vecto-algorítmico y vecto-dinámico teniendo en cuenta para este análisis la rúbrica de evaluación con los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial. Se observa cómo ellos utilizan fórmulas y algoritmos para su solución y que posteriormente son representadas mediante herramientas tecnológicas gráficas, en este caso Geogebra, con el fin de visualizar y así reconocer la importancia de esta herramienta para su proceso de aprendizaje.

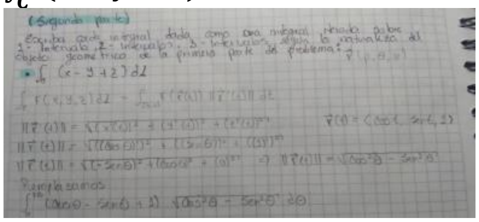
Con esto se puede concluir que ellos han avanzado en el desarrollo de estas dos facetas del pensamiento vectorial mencionadas anteriormente debido a que no tienen gran dificultad al momento de dar solución ya que aplican sus conocimientos previos y los vistos durante el desarrollo de las clases.

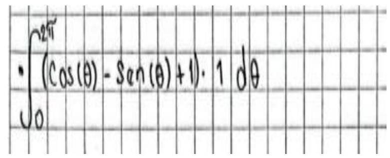
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 25 Análisis problema 2 Actividad 5

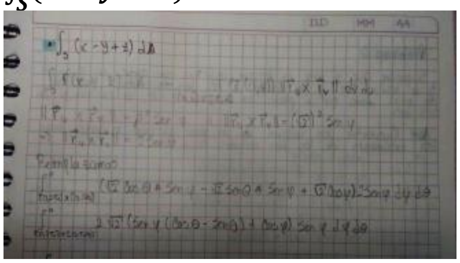
- **Escriba cada integral dada como una integral iterada sobre un 1- intervalo, 2- intervalos, 3- intervalos según la naturaleza del objeto geométrico de la primera parte del problema:**

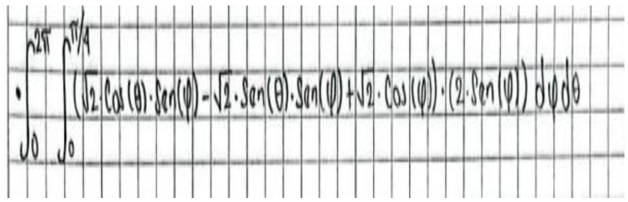
- $\int_C (x - y + z)dL$



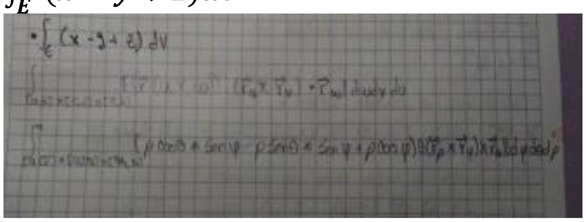


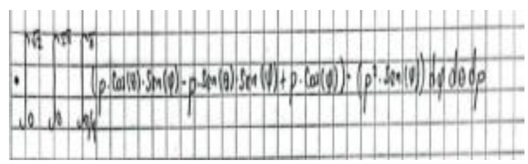
- $\int_S (x - y + z)dA$





- $\int_E (x - y + z)dV$





Los estudiantes utilizan las parametrizaciones obtenidas en el ítem anterior para escribir las integrales correspondientes, realizando los elementos de longitud, área y volumen respectivamente, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

Análisis: En este problema de la actividad se debe tomar en consideración que su faceta es netamente algorítmica, por lo que es aplicable en su totalidad el modo de pensamiento vecto-algorítmico, por lo que no hay mucho que comentar con respecto a las soluciones mostradas por los estudiantes.

Cabe resaltar el dominio en el manejo de las coordenadas planas y espaciales vistas en la Actividad 2, las cuales tienen una repercusión importante en esta y las demás actividades futuras de la asignatura. Se augura buenos resultados en las posteriores actividades, lo que será un insumo fundamental para caracterizar el pensamiento vectorial en los estudiantes.

Fuente: *autor (2021)*

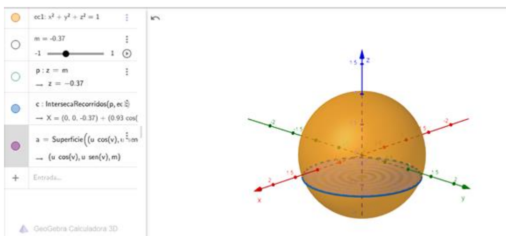
Tabla 26 Análisis problema 3 Actividad 5

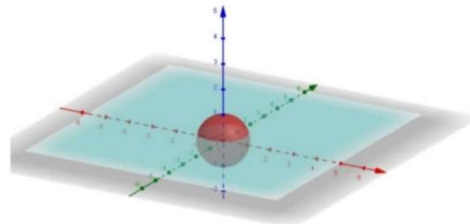
<table>
<tr><td>

- **Suponga que se tiene un tanque esférico con centro en el origen y de radio 1m y que dentro de él hay un líquido que tiene un nivel dado por un plano con ecuación $z = m$, determinando dos sólidos.**

</td></tr>
<tr><td>

a) Por medio de la plataforma tecnológica muestre dinámicamente la simulación descrita en el problema.

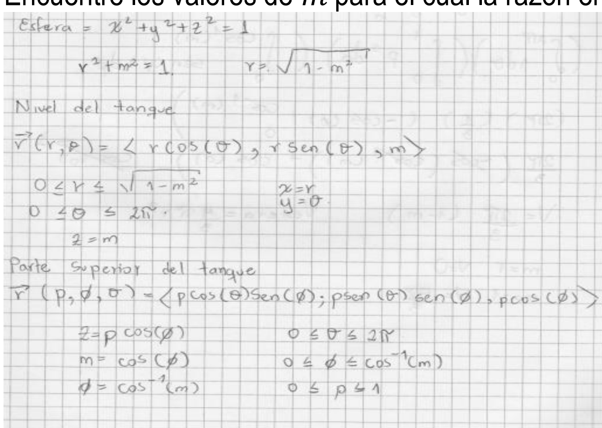


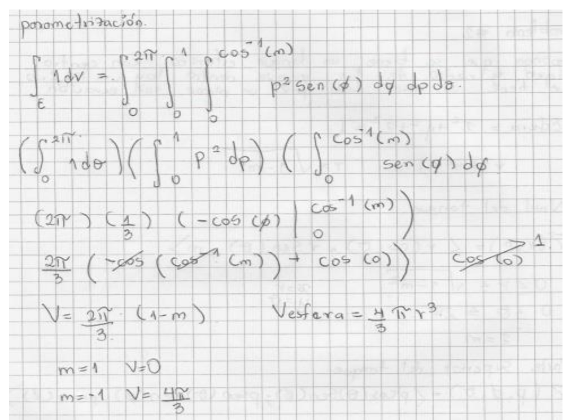


Los estudiantes de nuevo utilizan coherentemente la herramienta tecnológica para visualizar dinámicamente el problema. En los archivos enviados por ellos se determina la dinámica de la situación física planteada, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

</td></tr>
<tr><td>

b) Encuentre los valores de m para el cual la razón entre los volúmenes de los dos sólidos es de 3.



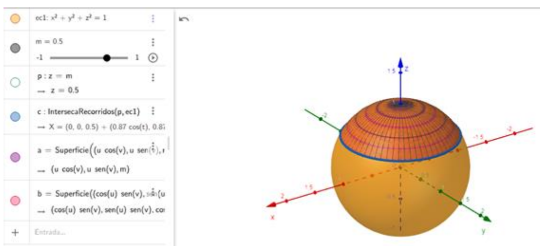
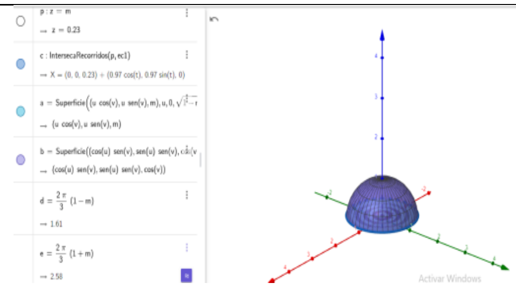


Los estudiantes hacen uso de las coordenadas esféricas, analizando la obtención del valor del ángulo que determina ese nivel m requerido. Utilizan el teorema de Fubini para separar las integrales descritas y comprueban sus resultados, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

</td></tr>
<tr><td>

c) Compruebe la anterior solución en la plataforma tecnológica, mostrando el volumen encontrado en ambas partes.

</td></tr>
</table>

Los estudiantes muestran el volumen de ambas partes obtenidas del tanque esférico mediante la herramienta tecnológica, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

Análisis: En este problema de la presente actividad, se vuelve a evidenciar por parte de los estudiantes los pensamientos vecto-algorítmico y vecto-dinámico en un gran desarrollo, teniendo en cuenta los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial expuestos en la rúbrica de evaluación que aplican a este problema están definidos algoritmos y dinámicas vectoriales estudiadas con anterioridad durante las clases o de forma independiente apoyándose en las herramientas tecnológicas gráficas para determinar y observar imágenes de volúmenes mediante la modelación tridimensional.

La observación de la dificultad que presentaron algunos estudiantes fue la de encontrar los límites de integración para la integral que define el volumen del tanque. En la socialización los otros grupos de trabajo expusieron sus ideas y mostraron a los compañeros que no pudieron realizar la solución la manera algorítmica que desarrollaron. Otros grupos mostraron la dinámica del tanque y el volumen requerido en el problema.

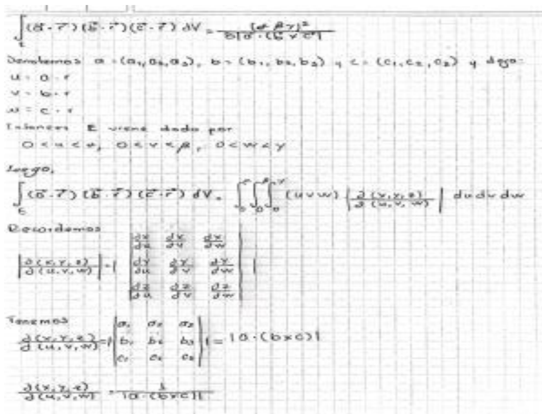
Como se ha mencionado en actividades anteriores, se busca fortalecer la fase vecto-dinámica en los estudiantes, con el fin que sean más eficientes y tengan soluciones eficaces en los problemas matemáticos presentados y sean vistos desde otra perspectiva.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 27 Análisis problema 4 Actividad 5

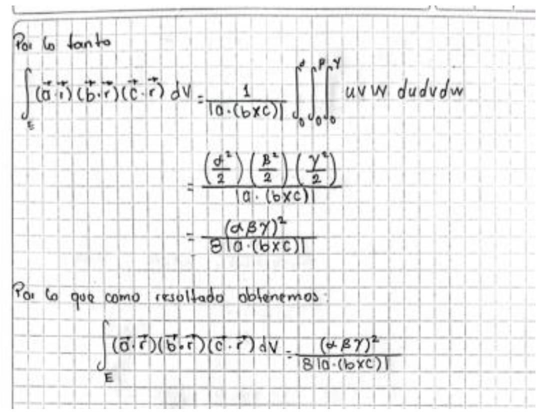
PROBLEMA: (Tomado del libro Cálculo de varias variables. J Stewart) Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores constantes, $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ es el vector de posición y E está dada por las desigualdades $0 \leq \vec{a} \cdot \vec{r} \leq \alpha$, $0 \leq \vec{b} \cdot \vec{r} \leq \beta$, $0 \leq \vec{c} \cdot \vec{r} \leq \gamma$, demuestre que:

$$\int_E (\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})(\vec{c} \cdot \vec{r})\, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8\,|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}$$



$$\int_E (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{c}\cdot\vec{r})\,dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}$$

Denotemos $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$ y $c=(c_1,c_2,c_3)$ y sea:
$u = a\cdot r$
$v = b\cdot r$
$w = c\cdot r$
Entonces E viene dado por
$0<u<\alpha,\ 0<v<\beta,\ 0<w<\gamma$
Luego,
$$\int_E (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{c}\cdot\vec{r})\,dV = \int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}\int_0^{\gamma}(uvw)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$
Recordemos
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{matrix}\right|$$
Tenemos
$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \left|\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}\right| = |a\cdot(b\times c)|$$
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{|a\cdot(b\times c)|}$$



Por lo tanto
$$\int_E (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{c}\cdot\vec{r})\,dV = \frac{1}{|a\cdot(b\times c)|}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} uvw\ du\,dv\,dw$$
$$= \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\frac{\beta^2}{2}\right)\left(\frac{\gamma^2}{2}\right)}{|a\cdot(b\times c)|}$$
$$= \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|a\cdot(b\times c)|}$$
Por lo que como resultado obtenemos:
$$\int_E (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{c}\cdot\vec{r})\,dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|a\cdot(b\times c)|}$$

Los estudiantes muestran la solución del problema haciendo uso de coordenadas al cambiar de variables en el problema y tomando el elemento de volumen de una manera interesante usando el Jacobiano de esa transformación, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: Este problema fue inspirado en un hecho interesante que fusiona todo lo visto con estructuras vectoriales en el curso y este concepto nuevo de integrales múltiples. Algunos estudiantes fueron capaces de reconocer la estructura del problema y decidieron atacarlo mediante sustituciones vectoriales, como el mostrado anteriormente, otros conjeturaron el resultado reemplazando algunos valores para las constantes y las variables, pero no conllevo a alguna solución correcta.

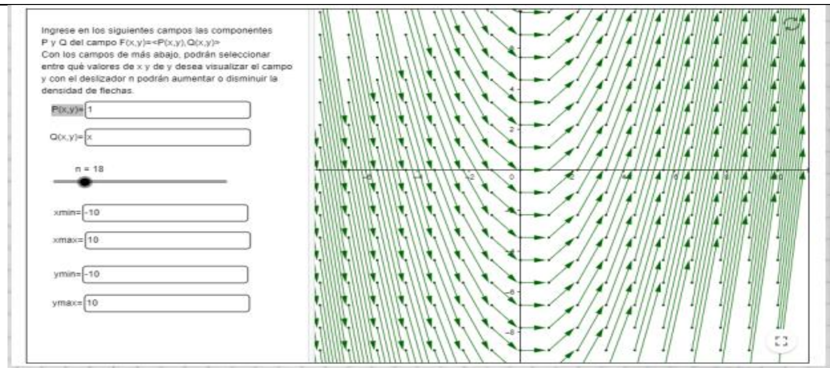
Para destacar se determinó otra faceta del pensamiento vectorial en cuanto al modo de generalización, pues los estudiantes deciden resolver el problema de manera que no importen los valores dados en el problema sino mostrando para todos los casos posibles, algo que de por si se caracteriza tomando la rúbrica correspondiente, esperando que ellos se empoderen de esta manera formal de ver la matemática que les puede servir para futuros cursos y posibles aplicaciones en su respectiva carrera.

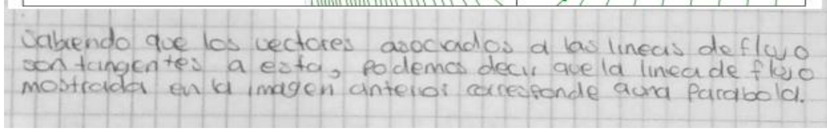
Fuente: *autor (2021)*

5.2.6. Análisis Actividad 6: Hacia la integración múltiple de campos vectoriales

Tabla 28 Análisis problema 1 Actividad 6

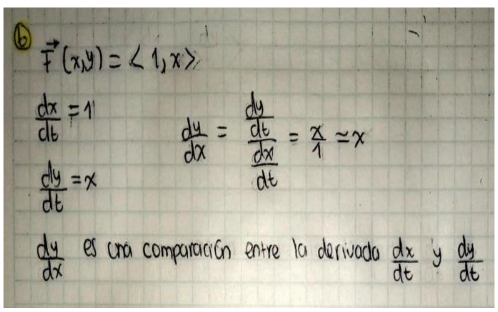
Se define el campo vectorial bidimensional como $\vec{\mathbb{F}}(x,y) = \langle 1, x\rangle$.	
a)	Con ayuda de la herramienta tecnológica trace un diagrama del campo vectorial dado y sobre él dibuje algunas líneas de flujo. ¿Podría conjeturar qué forma tienen esas líneas de flujo?

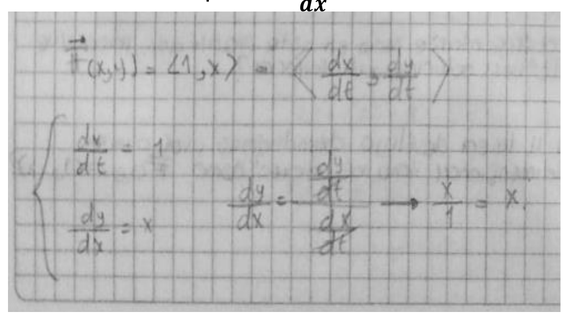




Los estudiantes trazan el campo vectorial usando la herramienta tecnológica con varios números de flechas para visualizar mejor el campo, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

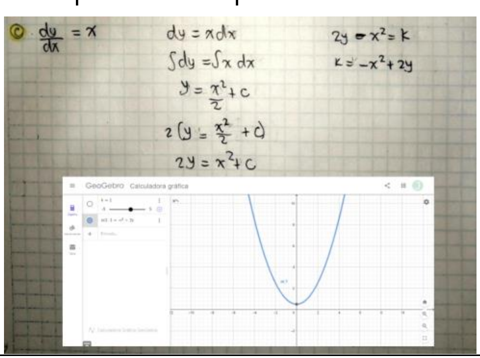
b) Por medio de la definición de líneas de flujo deduzcan las ecuaciones diferenciales que satisface cada componente del campo vectorial. ¿Qué podrían decir de la expresión $\frac{dy}{dx}$?

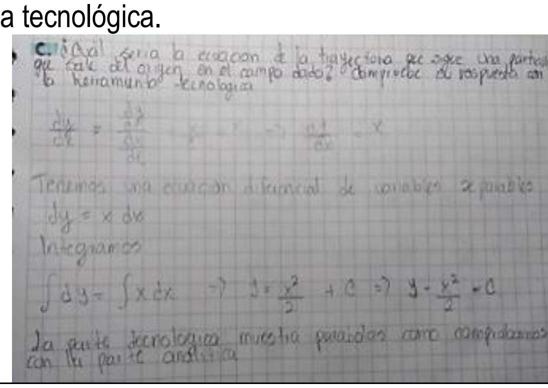


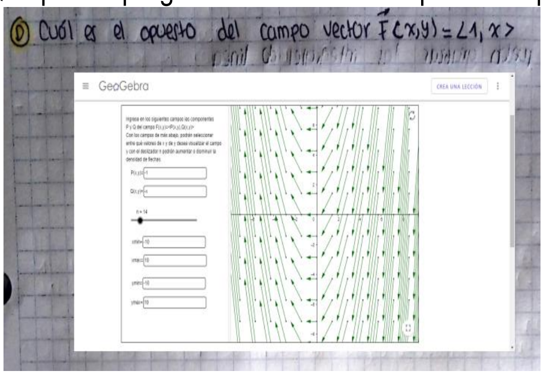
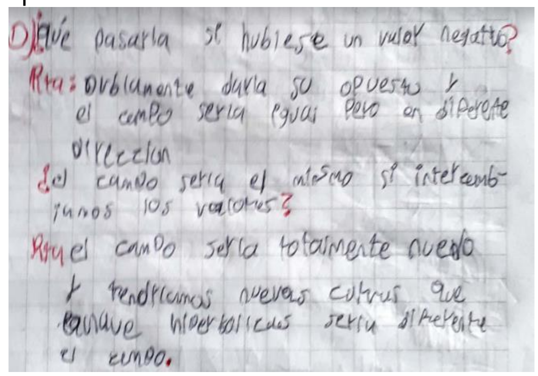


Los estudiantes deducen las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del problema, por lo que deducen una expresión que les servirá para hallar la trayectoria que siguen las lineas de flujo, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.4 donde se hace de manera contraria al tomar la estructura vectorial y separar cada componente correspondiente. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

c) ¿Cuál sería la ecuación de la trayectoria que sigue una partícula que sale del origen en el campo dado? Compruebe su respuesta con la herramienta tecnológica.



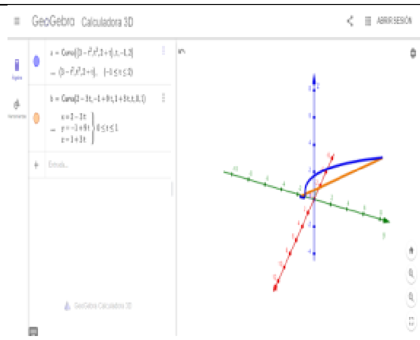


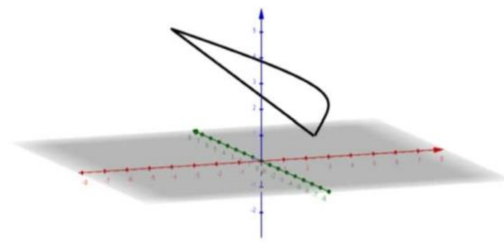
Los estudiantes resuelven la ecuación diferencial comprobandola con la forma de las lineas de flujo conjeturada en la parte a, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**
d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?   Los estudiantes notan la importancia de la orientación de un campo vectorial al cambiar el signo de sus componentes, lo cual sale a la luz usando la herramienta tecnológica, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**
Análisis: En este primer punto de la actividad 6 los estudiantes demuestran el uso correcto del software matemático para comprender el significado geométrico de los campos vectoriales y las diferentes propiedades de este. Con las respuestas presentadas por los estudiantes en este problema y con base en la rúbrica de calificación del pensamiento se evidencia que estos se valen de fórmulas y algoritmos que son representadas gráficamente mediante herramientas tecnológicas, empleando vectores con el fin de visualizar, determinar y relacionar la orientación en la solución del problema presentado con los vectores establecidos en este. Se observa que ellos están evidenciando el pensamiento vectorial en su faceta vecto-dinámica y vecto-algorítmica y su respectiva relación, observada en las actividades pasadas. Asimismo, los estudiantes interactúan y siguen fortaleciendo sus conocimientos adquiridos en la asignatura y relacionando las diferentes facetas del pensamiento vectorial siendo más eficientes en las soluciones de los problemas presentados.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 29 Análisis problema 2 Actividad 6

• **Dado el campo vectorial** $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle x + y\ , x\ , z^2 \rangle$ **y las trayectorias con parametrización:** $\vec{r}(t) = \langle 3 - t^2, t^3, 2 + t \rangle, t \in [-1, 2]$ **y** $\vec{s}(t) = \langle 2 - 3t, -1 + 9t, 1 + 3t \rangle, t \in [0, 1]$
a) Con ayuda de la herramienta tecnológica trace cada una de las trayectorias. ¿Nota algo en particular sobre ellas?





Los estudiantes trazan las trayectorias que se muestran, notando que tienen los puntos iniciales y finales iguales, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

b) Calcule la integral de línea del campo vectorial dado sobre cada una de las trayectorias. Compare las respuestas obtenidas en ambas integrales

b. Sabemos $F(x,y,z) = \langle x+y, x, z^2 \rangle$,

• $\vec{r}(t) = \langle 3-t^2, t^3, 2+t \rangle$, $t \in [-1,2]$. Así,

$W = \int_{-1}^{2} F(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)$.

Así, $\vec{r}\,'(t) = \langle -2t, 3t^2, 1 \rangle$, reemplazando,

$\int_{-1}^{2} \langle 3-t^2+t^3, 3-t^2, (2+t)^2 \rangle \langle -2t, 3t^2, 1 \rangle\, dt$

$\int_{-1}^{2} (-2t(3-t^2+t^3) + 3t^2(3-t^2) + (2+t)^2)\, dt$

$\int_{-1}^{2} (-6t + 2t^3 - 2t^4 + 3(3t^2) - 3t^4 + 4 + 4t + t^2)\, dt$

$\int_{-1}^{2} (-5t^4 + 2t^3 + 10t^2 + (-2t) + 4)\, dt$

$-t^5\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{2} + 10\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - t^2\Big|_{-1}^{2} + 4t\Big|_{-1}^{2}$

$-32 + 1 + \frac{1}{2}(16-1) + \frac{10}{3}(8-1) - 4 + 1 + 8 - 4$

$\frac{27}{2}$

• $\vec{s}(t) = \langle 2-3t, -1+9t, 1+3t \rangle$, $t \in [0,1]$.

$\vec{s}\,'(t) = \langle -3, 9, 3 \rangle$, al calcular integral,

$\int_0^1 F(\vec{s}(t))\, \vec{s}\,'(t)\, dt$

Al reemplazar,

$\int_0^1 \langle 2-3t-1+9t, 2-3t, (1+3t)^2 \rangle \langle -3, 9, 3 \rangle\, dt$

$\int_0^1 \langle 1+6t, 2-3t, 1+6t+t^2 \rangle \langle -3, 9, 3 \rangle\, dt$

$\int_0^1 (-3 - 18t + 18 - 27t + 3 + 18t + t^2)\, dt$

$\int_0^1 (t^2 - 27t + 18)\, dt$

$\left(\frac{t^3}{3} - 27\frac{t^2}{2} + 8\right)\Big|_0^1$

$\frac{27}{2}$

Los estudiantes realizan el algoritmo correspondiente a cada integral de linea, plasmando un buen uso de la notación y terminología, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

c) Respecto a la respuesta anterior, ¿sería posible que el campo vectorial sea conservativo? Si lo es, dé una conjetura de su función potencial.

c. Diremos que F es conservativo $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}(F) = 0$. Así,

$$\mathrm{Rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ x+y & x & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ x+0 & z^2 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ x+y & z^2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ x+y & x \end{vmatrix}$$

$= \vec{i}(0-0) + \vec{j}(0-0) + \vec{k}(1-1) = 0$.

Como $\mathrm{rot}(F) = 0 \rightarrow$ es conservativo

Para hallar la función potencia, como $\nabla f = F$. Así,

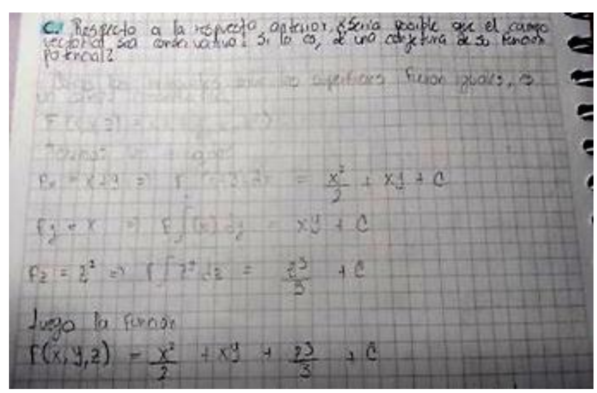
$f_x = x+y \rightarrow f = \frac{x^2}{2} + yx + k(y,z)$.

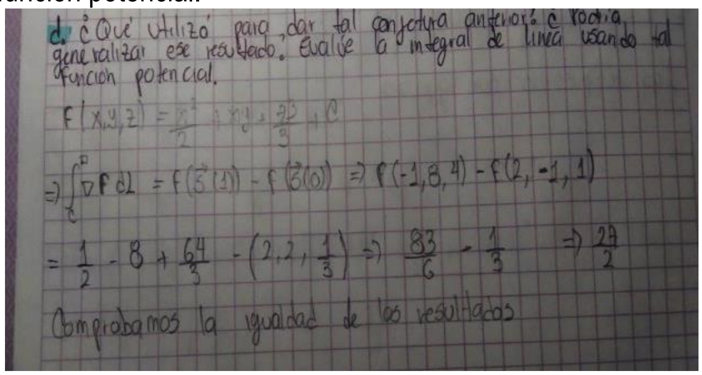
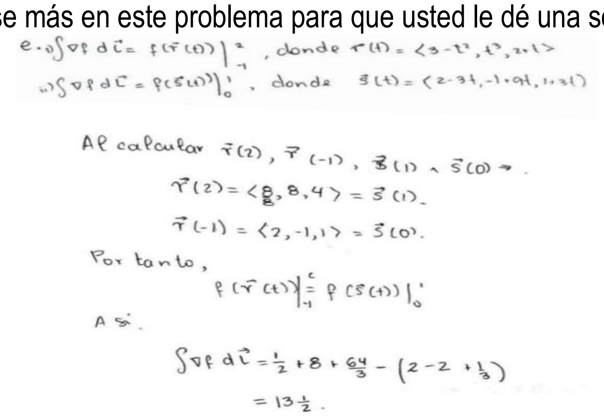
$f_y = x \rightarrow f = xy + h(x,z)$.

$f_y = x + \frac{\partial k}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \Rightarrow k(y,z) = 0$

$f = \frac{x^2}{2} + yx + h(x,z)$.

$f_z = z^2 \rightarrow \frac{\partial h(x,z)}{\partial z} = z^2 \Rightarrow h = \frac{z^3}{3}$



Los estudiantes resuelven el problema de dos maneras distintas. En la primera imagen usando la teoría clásica mostrada comunmente en los textos y en la segunda imagen usando una conjetura de integración parcial sobre cada componente del campo, lo que resulta correcto de ambas maneras, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 30**
d) ¿Qué utilizó para dar tal conjetura anterior? ¿Podría generalizar ese resultado? Evalúe la integral de línea usando tal función potencial.  Los estudiantes usan el Teorema fundamental del cálculo para integrales de linea y corroboran el mismo resultado obtenido anteriormente, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.1. Aunque todavía se les dificulta escribir sus ideas con argumentos no algorítmicos, se espera que ellos justifiquen mejor sus ideas y procesos. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 30**
e) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?  Los estudiantes conjeturan otras trayectorias para calcular la integral de linea sobre el mismo campo vectorial del problema anterior, comprobando que las integrales de linea no dependen de la parametrización de la trayectoria que una dos puntos en el espacio, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**
Análisis: En este punto de la actividad 6 los estudiantes siguen basando sus respuestas y justificaciones de manera teórica mediante las formulas presentadas durante las sesiones de clase. En cuanto al análisis con relación a la rúbrica de caracterización, las respuestas de ellos muestran que están aplicando sus conocimientos previos al desarrollo de esta guía de trabajo y algunos buscan

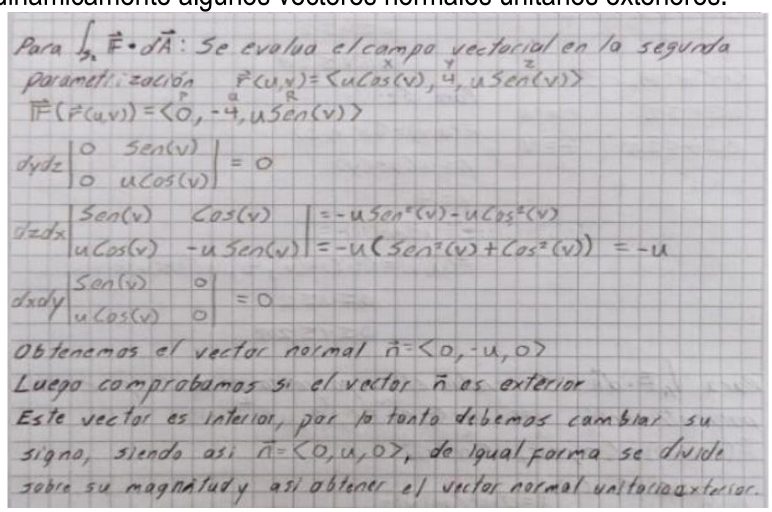
nuevos algoritmos para la solución de los problemas presentados. Asimismo, muestran que la orientación de las trayectorias juega un rol importante en las soluciones y aplican la relación entre orientación y estructura de los mismos para la ejecución de graficas por medio de herramientas tecnológicas. Cabe resaltar que en el transcurso de la socialización de la actividad los estudiantes que tuvieron dificultades al presentar el desarrollo del problema c) se confrontaron en cuanto a que si el método desarrollado por un grupo era correcto o no y determinando así una discusión científica entre la eficiencia de cada método mostrado por ellos y de cómo ellos justificaban su método a los demás compañeros. La conclusión se guía en la pluralidad de métodos de demostración en matemáticas y la riqueza de aprender de cada uno de ellos.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 30 Análisis problema 3 Actividad 6

- **Dado el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}(x,y,z) = \langle \mathbf{0}\ , -y\ , z\rangle$ y la superficie dada por el paraboloide con ecuación $y = x^2 + z^2$ con $0 \le y \le 4$ y el disco con ecuación $x^2 + z^2 \le 4, y = 4.$**

a) Por medio de la plataforma tecnológica muestre la superficie descrita en el problema ubicando dinámicamente algunos vectores normales unitarios exteriores.


Para $\int_{S_1} \vec{\mathbb{F}} \cdot d\vec{A}$: Se evalua el campo vectorial en la segunda parametrización $\vec{r}(u,v) = \langle \overset{x}{u\cos(v)}, \overset{y}{4}, \overset{z}{u\,Sen(v)} \rangle$

$\mathbb{F}(\vec{r}(u,v)) = \langle \overset{P}{0}, \overset{Q}{-4}, \overset{R}{u\,Sen(v)} \rangle$

$dydz \begin{vmatrix} 0 & Sen(v) \\ 0 & u\cos(v) \end{vmatrix} = 0$

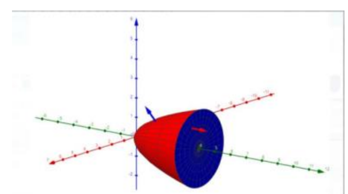
$dzdx \begin{vmatrix} Sen(v) & \cos(v) \\ u\cos(v) & -u\,Sen(v) \end{vmatrix} = -u\,Sen^2(v) - u\cos^2(v) = -u(Sen^2(v) + \cos^2(v)) = -u$

$dxdy \begin{vmatrix} Sen(v) & 0 \\ u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = 0$

Obtenemos el vector normal $\vec{n} = \langle 0, -u, 0 \rangle$

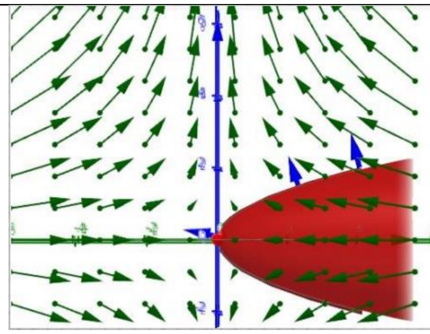
Luego comprobamos si el vector $\vec{n}$ es exterior

Este vector es interior, por lo tanto debemos cambiar su signo, siendo así $\vec{n} = \langle 0, u, 0 \rangle$, de igual forma se divide sobre su magnitud y así obtener el vector normal unitario exterior.



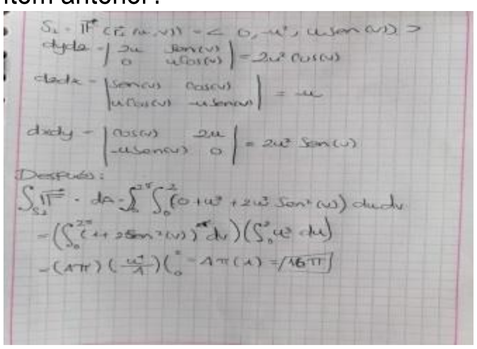
Los estudiantes usan las parametrizaciones estudiadas en la Actividad 2 para describir la superficie en cuestión. Analizan los vectores que le dan una orientación estandar a la superficie de manera dinámica, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

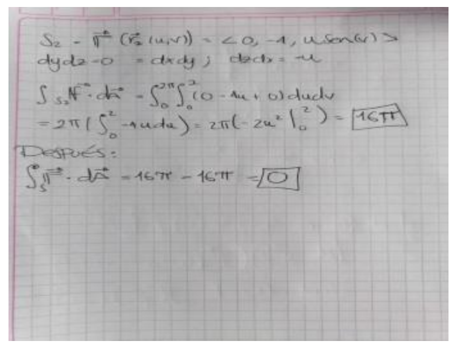
b) Con la ayuda de la herramienta tecnológica, grafique el campo vectorial sobre la superficie dada. ¿Qué podría conjeturar acerca del flujo del campo vectorial por la superficie?



Los estudiantes muestran la dinámica entre el campo vectorial dado con la superficie del problema, notando que el flujo del campo sobre el paraboloide es positivo (interacción entre vectores azules y verdes) y sobre "la tapa" del mismo en negativo, lo cual se determina usando lo que probaron en el ítem anterior, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**

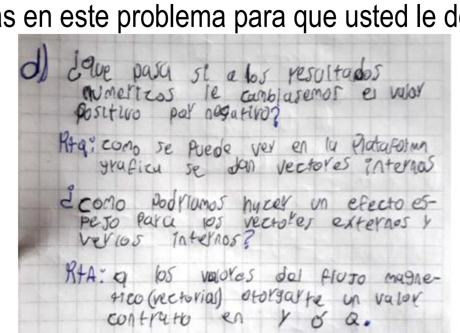
c) Calcule el flujo del campo vectorial por la superficie. ¿Es coherente su respuesta con lo obtenido en el ítem anterior?





Los estudiantes realizan las respectivas integrales sobre cada superficie, determinando que el flujo total resulta cero, lo que corresponde a lo evidenciado en el ítem anterior, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?



Los estudiantes siguen persistiendo en analizar las orientaciones tanto de la superficie como del campo vectorial dado, lo que dimensiona el modo de orientabilidad de manera superior en las inquietudes del estudiante, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este problema los estudiantes realizan un análisis tridimensional mediante la herramienta tecnológica, lo que permite mostrar la utilidad del mismo y aplicar lo visto en la Actividad 2 sobre el tema de superficies. Se está evidenciando los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial expuestos en la rúbrica para la resolución del problema mediante diversos softwares matemáticos que permiten moldear y analizar la situación implementando vectores.

Se determina una dificultad inherente al uso de la plataforma tecnológica en cuanto a la visualización del flujo del campo vectorial sobre la superficie en cuestión, pues no es tan claro el valor numérico que se obtuvo de las integrales que lo calculaba, pero en la socialización se instó a volver a determinar los vectores normales unitarios exteriores y corroborar la nulidad del flujo.

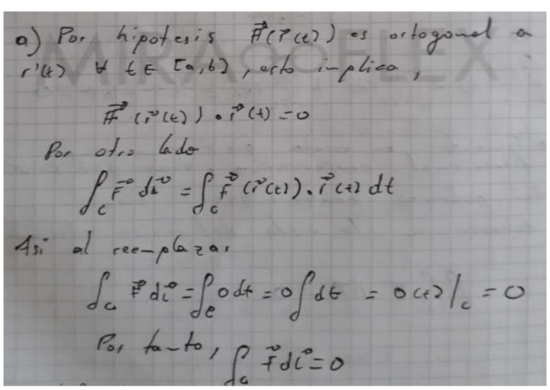
Además, se observan cómo los estudiantes interrelacionan las facetas del pensamiento vectorial en su conjunto para dar diversas maneras de entender, aplicar y conjeturar otros problemas. Esto muestra que estos están teniendo un mayor aprovechamiento de estas facetas del pensamiento que se puede aplicar a otros fenómenos similares.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 31 Análisis problema 4 Actividad 6

- **PROBLEMA: Sea C una curva parametrizada por una función vectorial diferenciable $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ con $t \in [a, b]$ y $\vec{\mathbb{F}}$ un campo vectorial continuo definido sobre C. Mostrar que:**
  a) Si $\vec{\mathbb{F}}(\vec{r}(t))$ es ortogonal a $\vec{r}'(t)$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_C \mathbb{F} \cdot d\vec{L} = 0$.

  Si $\vec{\mathbb{F}}(\vec{r}(t))$ es paralelo a $\vec{r}'(t)$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_C \mathbb{F} \cdot d\vec{L} = \pm \int_C \|\vec{\mathbb{F}}\| \, dL$.



a) Por hipotesis $\vec{F}(\vec{r}(t))$ es ortogonal a $\vec{r}'(t)$ $\forall t \in [a,b]$, esto implica,

$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$

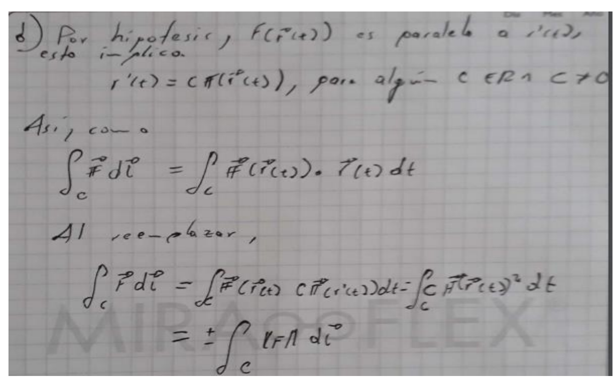
Por otro lado

$\int_C \vec{F}\, d\vec{L} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$

Asi al reemplazar

$\int_C \vec{F}\, d\vec{L} = \int_C 0\, dt = 0 \int dt = 0(t)\Big|_C = 0$

Por tanto, $\int_C \vec{F}\, d\vec{L} = 0$



b) Por hipotesis, $F(\vec{r}(t))$ es paralelo a $r'(t)$, esto implica

$r'(t) = c\vec{F}(\vec{r}(t))$, para algún $c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0$

Asi, como

$\int_C \vec{F}\, d\vec{L} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$

Al reemplazar,

$\int_C \vec{F}\, d\vec{L} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t))\, c\vec{F}(\vec{r}(t))\, dt = \int_C c\, \vec{F}(\vec{r}(t))^2\, dt$

$= \pm \int_C \|F\|\, d\vec{L}$

Los estudiantes muestran la relación entre hechos geométricos vectoriales con integrales de linea sobre campos vectoriales. Aunque la parte a) esta realizada correctamente, la parte b) no lo está, pues no se llega al resultado requerido, lo que evidencia en parte la rúbrica 3.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este problema se trata de determina en el estudiante su modo de pensar vectorialmente para darle solución. Se evidencia según los parámetros de caracterización del pensamiento vectorial en parte la presencia del modo vecto-estructural al recurrir al hecho de la perpendicularidad de los vectores. En la sesión de socialización se sugirió a los estudiantes seguir el camino de la relación entre el producto punto y las magnitudes de dos vectores, lo cual en conjunto se pudo llegar a una solución óptima al problema dada por ellos y de la cual se espera que se genere un modo de pensamiento vectorial. Se pretende que los modos de pensamiento vectorial se evidencien en las próximas actividades basadas en el trabajo realizado en esta actividad y que se puedan caracterizar de una manera satisfactoria.

Fuente: *autor (2021)*

5.2.7. Análisis Actividad 7: Introducción a las formas diferenciales

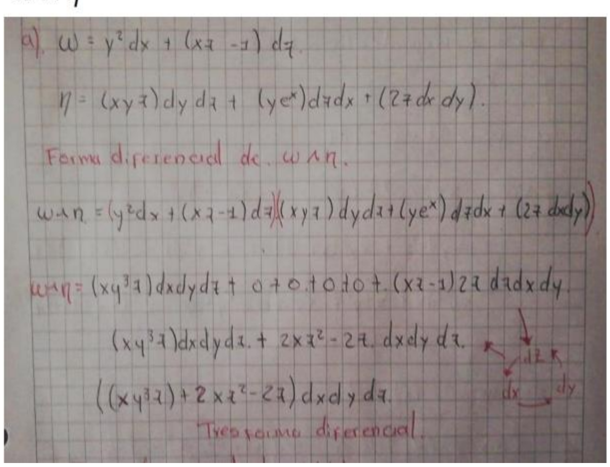
Tabla 32 Análisis problema 1 Actividad 7

- Se definen las siguientes formas diferenciales:

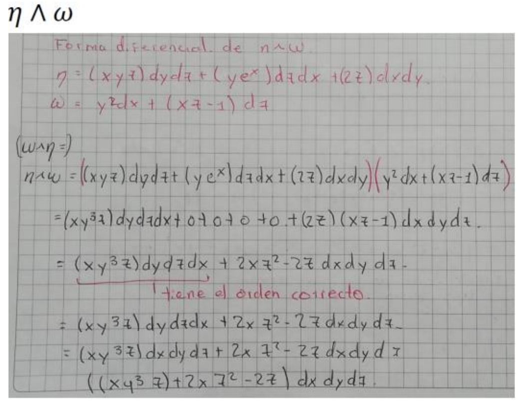
$$\boldsymbol{f = xy^2 - e^z},$$
$$\boldsymbol{\omega = y^2dx + (xz-1)dz},$$
$$\boldsymbol{\eta = (xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z)dxdy},$$
$$\boldsymbol{\psi = (2xz^2)dxdydz}$$

a) Encuentre las formas diferenciales $\boldsymbol{f \wedge \omega}$, $\boldsymbol{\omega \wedge \eta}$ y $\boldsymbol{\eta \wedge \omega}$. ¿Qué puede decir de estos dos últimos productos?

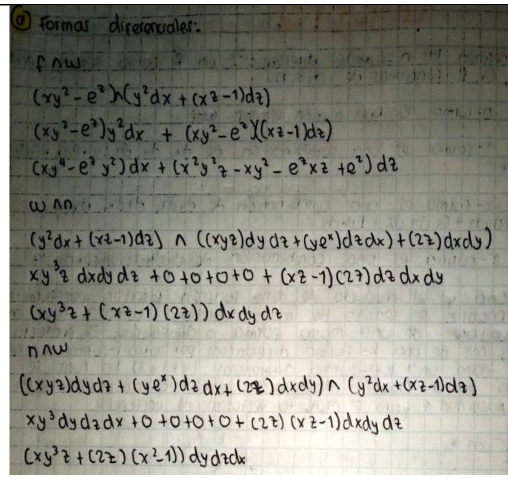
$\omega \wedge \eta$


a) $\omega = y^2dx + (xz-1)dz$
$\eta = (xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z\,dx\,dy)$.
Forma diferencial de $\omega \wedge \eta$.
$\omega \wedge \eta = (y^2dx + (xz-1)dz)((xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z\,dxdy))$
$\omega \wedge \eta = (xy^3z)dxdydz + 0 + 0 + 0 + 0 + (xz-1)2z\,dzdxdy$.
$(xy^3z)dxdydz + 2xz^2 - 2z\,dxdy\,dz$.
$((xy^3z) + 2xz^2 - 2z)dxdydz$.
Tres forma diferencial.

$\eta \wedge \omega$

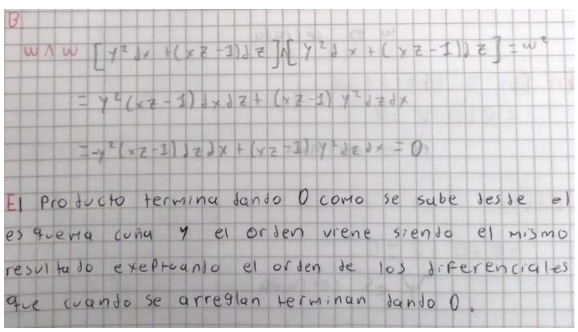

Forma diferencial de $\eta \wedge \omega$
$\eta = (xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z)dxdy$.
$\omega = y^2dx + (xz-1)dz$
$(\omega \wedge \eta =)$
$\eta \wedge \omega = ((xyz)dydz + (ye^x)dzdx + (2z)dxdy)(y^2dx + (xz-1)dz)$
$= (xy^3z)dydzdx + 0 + 0 + 0 + 0 + (2z)(xz-1)dxdydz$.
$= (xy^3z)dydzdx + 2xz^2 - 2z\,dxdy\,dz$.
tiene el orden correcto.
$= (xy^3z)dydzdx + 2xz^2 - 2z\,dxdy\,dz$
$= (xy^3z)dxdydz + 2xz^2 - 2z\,dxdydz$
$((xy^3z) + 2xz^2 - 2z)dx\,dy\,dz$.

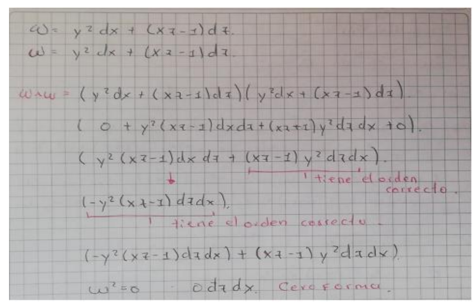
RTA// Podemos concluir que entre la forma diferencial n∧w y w∧n ambos tienes igual resultado dando una tres forma diferencial.



Los estudiantes realizan los respectivos algorítmos del producto de formas diferenciales usando el esquema de rotación desarrollado en clase, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

b) Evalué $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$. ¿Qué podría conjeturar acerca de este producto y de la dimensión de esta forma diferencial?

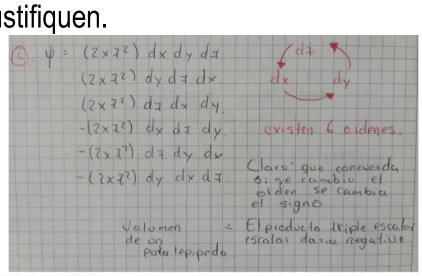




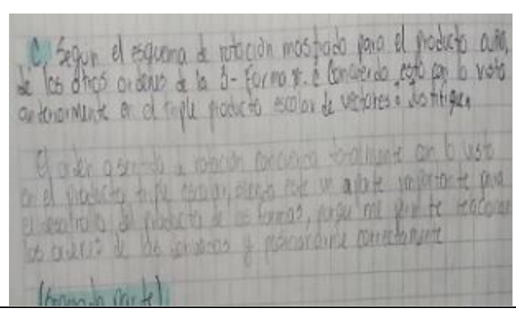
RTA// W^2 = da 0. Da como resultado una dos forma con resultado 0

Los estudiantes muestran el algorítmo correcto para la solución del problema. También se observa que ellos relacionan este producto cuña de 1-formas diferenciales con lo que ocurre con el producto vectorial (cruz) entre vectores, dando el mismo resultado, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

c) Según el esquema de rotación mostrado para el producto cuña, dé los otros ordenes de la 3 - forma ψ. ¿Concuerda esto con lo visto anteriormente en el triple producto escalar de vectores? Justifiquen.

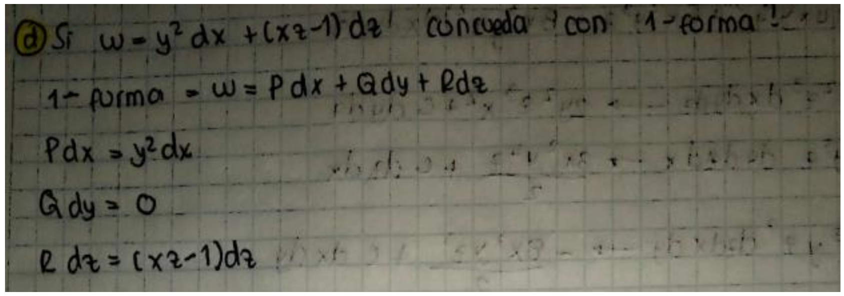


RTA// Existen 6 órdenes, y claro que si concuerda si se cambia el orden se cambia el signo, el producto triple escalar (que da volumen de un paralelepípedo) daría negativo.



Los estudiantes hacen una relación entre una de las propiedades de los vectores vistas anteriormente y el esquema mostrado para las formas diferenciales. Se nota de gran manera la presencia del modo de orientabilidad en cada una de sus justificaciones, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

d) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?



Los estudiantes conectan las componentes de un campo vectorial con la 1-forma dada en el problema. Esto da una clara notoriedad de la generalización deseada en el curso y un modo característico del pensamiento vectorial, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este primer problema de la actividad 7 los estudiantes utilizan la faceta vecto-algorítmica en su totalidad ya que todas sus respuestas están basadas en fórmulas y algoritmos usando el esquema dado para apoyar estas respuestas en análisis gráficos. En cuanto a la rúbrica de caracterización del pensamiento vectorial estos recurren a un enfoque algorítmico racional para resolver el problema dado mediante las fórmulas vectoriales vistas en clase.

En esta parte de la actividad no hay gran dificultad presentada, pero si es de destacar la gran aceptación por parte de los estudiantes hacia el modo de pensamiento vecto-algorítmico de esta parte del curso, la cual se creía que iba a ocasionar grandes obstáculos epistemológicos, lo que fue una sorpresa grata. Se espera que fundamentando estas bases en la óptima comprensión del tema y desarrollando esa parte del pensamiento vectorial se llegue sólidamente a la comprensión y desarrollo de los temas posteriores.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 33 Análisis problema 2 Actividad 7

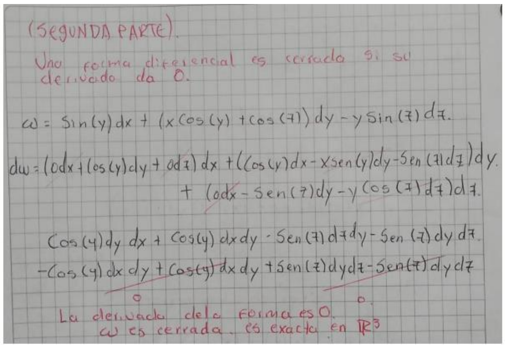
- **Se definen las siguientes formas diferenciales:**

$$\boldsymbol{\omega = \sin(y)\,dx + (x\cos(y) + \cos(z))dy - y\sin(z)\,dz}$$

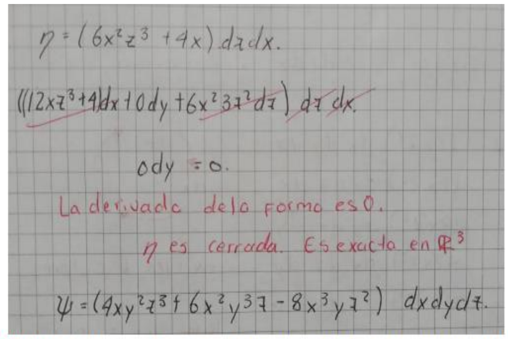
$$\boldsymbol{\eta = (6x^2z^3 + 4x)dzdx}$$

$$\boldsymbol{\psi = (4xy^2z^3 + 6x^2y^3z - 8x^3yz^2)dxdydz}$$

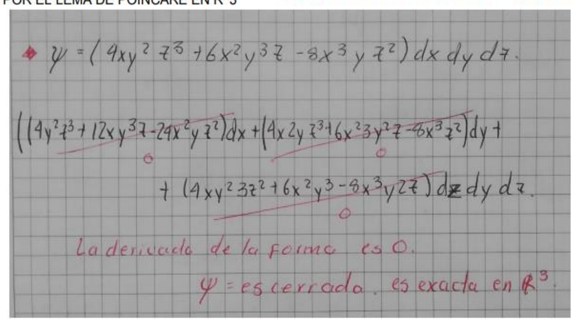
a) Verifique que cada forma diferencial es cerrada. ¿En qué conjunto numérico máximo se aplicaría el lema de Poincaré?



RTA// W ES CERRADA Y EXACTA POR EL LEMA DE POINCARÉ EN R^3



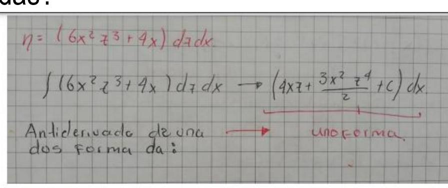
RTA// N ES CERRADA Y EXACTA POR EL LEMA DE POINCARÉ EN R^3

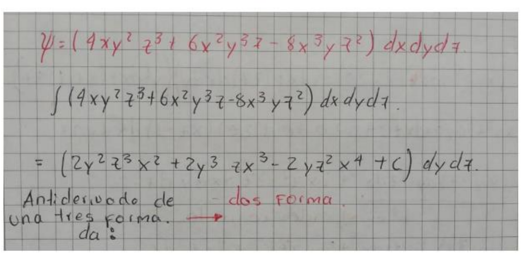


RTA// Ψ ES CERRADA Y EXACTA POR EL LEMA DE POINCARÉ EN R^3

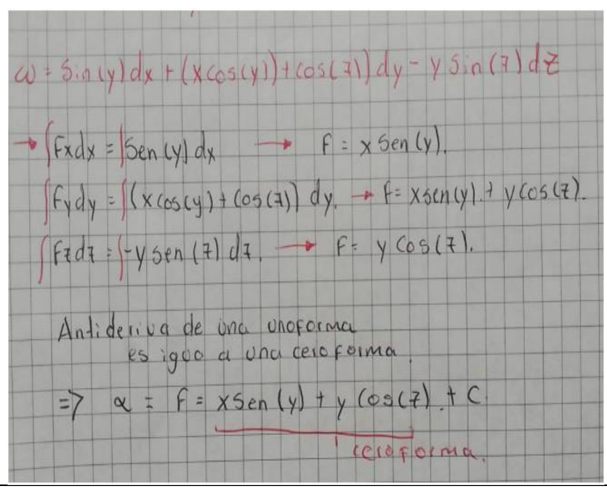
Los estudiantes verifican la cerradura de cada forma diferencial dada. Se nota más la aceptación de ellos hacia esta nueva álgebra de formas y sus algorítmos, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

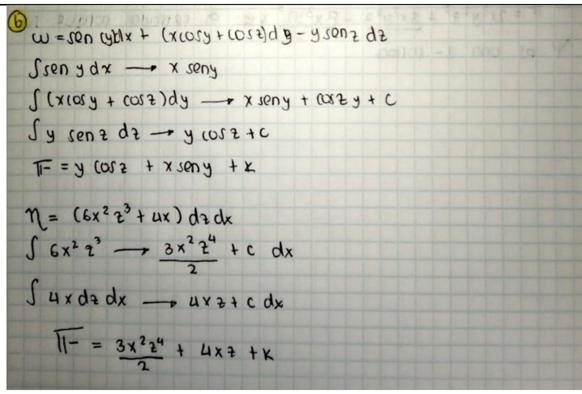
b) Por el lema de Poincaré se tiene que cada forma anterior es exacta. ¿Qué procedimiento podrían conjeturar para la obtención de tal forma diferencial cuya derivada sea cada una de las formas dadas?





RTA// SE UTILIZO EL PROCESO DE ANTIDERIVADA O INTEGRAR PARA QUE LA DERIVADA DE LA FORMA DIFERENCIAL DIERA LA FORMA DADA





⑥ $\omega = \operatorname{sen}(y)dx + (x\cos y + \cos z)dy - y \operatorname{sen} z\, dz$

$\int \operatorname{sen} y\, dx \longrightarrow x \operatorname{sen} y$

$\int (x\cos y + \cos z)dy \longrightarrow x \operatorname{sen} y + \cos z\, y + C$

$\int y \operatorname{sen} z\, dz \longrightarrow y \cos z + C$

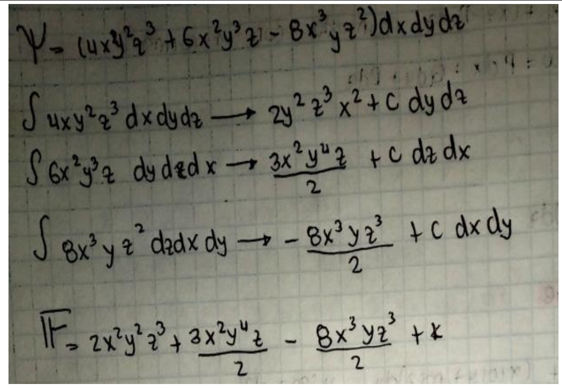
$F = y\cos z + x \operatorname{sen} y + K$

$\eta = (6x^2z^3 + 4x)\, dz\, dx$

$\int 6x^2z^3 \longrightarrow \frac{3x^2z^4}{2} + C\; dx$

$\int 4x\, dz\, dx \longrightarrow 4xz + C\; dx$

$F = \frac{3x^2z^4}{2} + 4xz + K$



$\psi = (4xy^2z^3 + 6x^2y^3z - 8x^3yz^2)\, dx\, dy\, dz$

$\int 4xy^2z^3\, dx\, dy\, dz \longrightarrow 2y^2z^3x^2 + C\; dy\, dz$

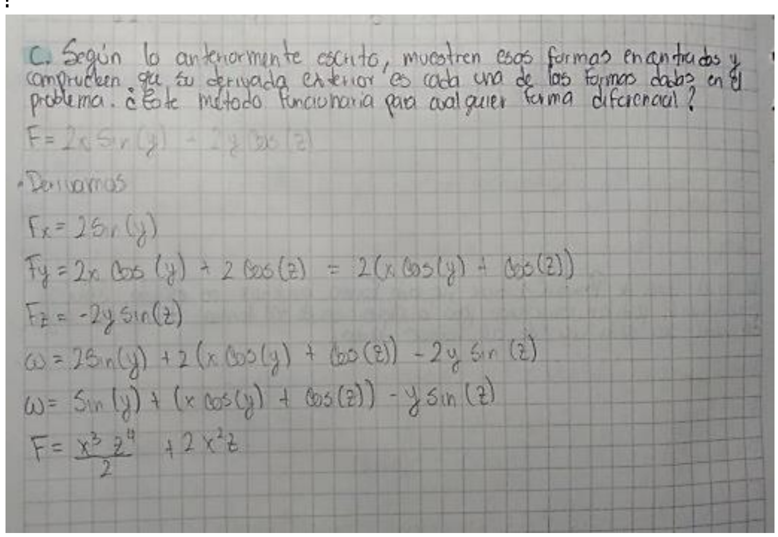
$\int 6x^2y^3z\; dy\, dz\, dx \longrightarrow \frac{3x^2y^4z}{2} + C\; dz\, dx$

$\int 8x^3yz^2\, dz\, dx\, dy \longrightarrow -\frac{8x^3yz^3}{2} + C\; dx\, dy$

$F = 2x^2y^2z^3 + \frac{3x^2y^4z}{2} - \frac{8x^3yz^3}{2} + K$

Los estudiantes conjeturan la solución de una “antiderivada exterior” usando lo aprendido de cálculo integral multivariable al problema. Aunque la solución mostrada de la 2-forma requerida no está bien escrita, la respuesta es correcta y verificada en clase por ellos, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

c) Según lo anteriormente escrito, muestren esas formas encontradas y comprueben que su derivada exterior es cada una de las formas dadas en el problema. ¿Este método funcionaría para cualquier forma diferencial?



c. Según lo anteriormente escrito, muestren esas formas encontradas y comprueben que su derivada exterior es cada una de las formas dadas en el problema. ¿Este método funcionaría para cualquier forma diferencial?

$F = 2x\operatorname{Sin}(y) + 2y\operatorname{Cos}(z)$

Derivamos

$F_x = 2\operatorname{Sin}(y)$

$F_y = 2x\operatorname{Cos}(y) + 2\operatorname{Cos}(z) = 2(x\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(z))$

$F_z = -2y\operatorname{Sin}(z)$

$\omega = 2\operatorname{Sin}(y) + 2(x\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(z)) - 2y\operatorname{Sin}(z)$

$\omega = \operatorname{Sin}(y) + (x\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(z)) - y\operatorname{Sin}(z)$

$F = \frac{x^3z^4}{2} + 2x^2z$

Los estudiantes verifican solamente la 1-forma mostrada en el problema mediante derivada exterior pero olvidandose de colocar los diferenciales respectivos. Esta salvedad fue corregida en la socialización junto a la verificación de los demas problemas. Además se mostraron ejemplos donde tal conjetura no se puede usar, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

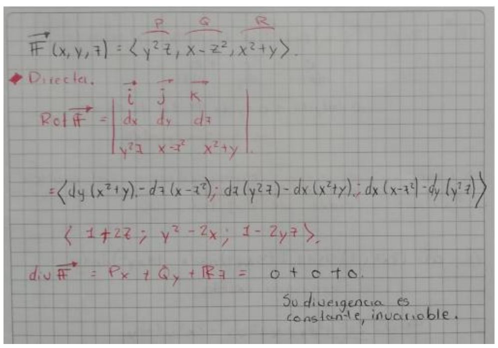
Análisis: En este problema como en el anterior se utiliza en su totalidad el modo de pensamiento vecto-algorítmico, los estudiantes siguen basando sus respuestas y justificaciones de manera teórica mediante las formulas presentadas durante las clases y sus conocimientos previos a estos. En cuanto al análisis con la rúbrica de calificación evidencia en las respuestas, los estudiantes buscan nuevos algoritmos y procesos a los aprendidos en las clases para la solución de los problemas presentados.

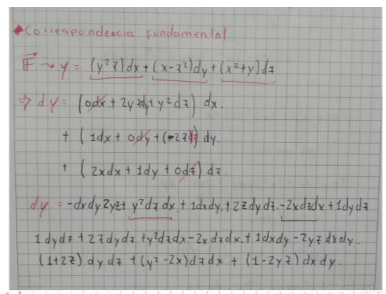
Se destaca con gran notoriedad el modo de generalización en el proceso del pensamiento vectorial mostrado por los estudiantes en la elaboración de conjeturas que permitan deducir nuevas formas diferenciales “anti derivadas” a partir de otras dadas, las cuales algunas son correctas y susceptibles de perfeccionar estos métodos, inspirados en la búsqueda de funciones potenciales de la Actividad 6 y distintos a los métodos desarrollados en los textos sobre la temática. Aunque el tiempo es un gran impedimento, se realizó un trabajo óptimo y de buenos resultados.

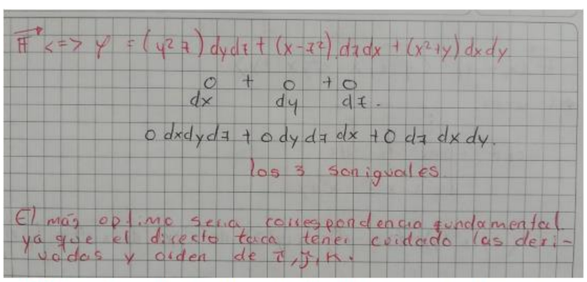
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 34 Análisis problema 3 Actividad 7

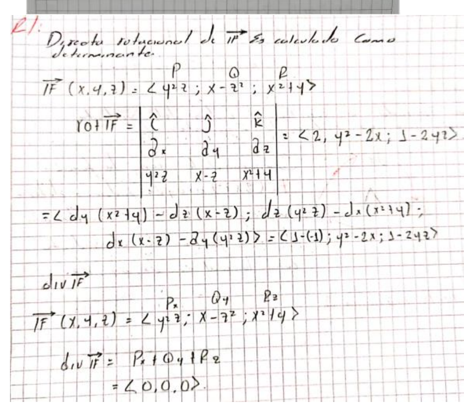
Dado el campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \langle \boldsymbol{y^2 z}\,, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z^2}\,, \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y}\rangle$, obtenga rot($\vec{\mathbb{F}}$) y div($\vec{\mathbb{F}}$) de manera directa y después haciendo uso de la correspondencia fundamental. Compare ambos métodos. ¿Cuál sería el óptimo?







RTA// EL MAS OPTIMO SERIA CORRESPONDECIA FUNDAMENTAL TA QUE EL DIRECTO TOCA TENER CUIDADO CON LAS DERIVADA Y LOS ORDENES DE i, j, k.



Los estudiantes realizan la comparación entre los algorítmos clásicos y los de formas diferenciales para obtener etos operadores diferenciales. Se nota una diferencia entre ellos en cuanto a extensión de cada proceso, pero una diferencia substancial en cuanto a un solo método a aplicar sin recurrir a formulaciones especificas para tal propósito, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

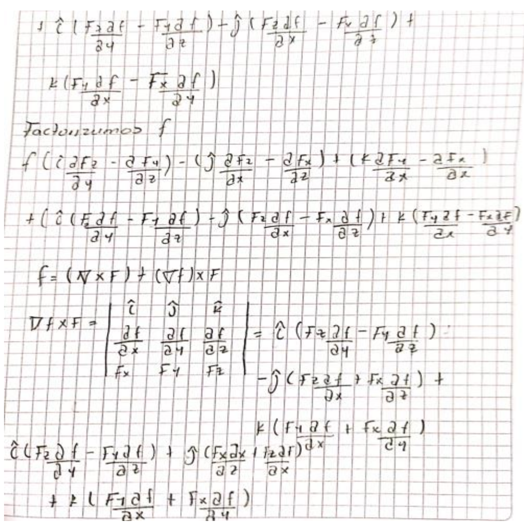
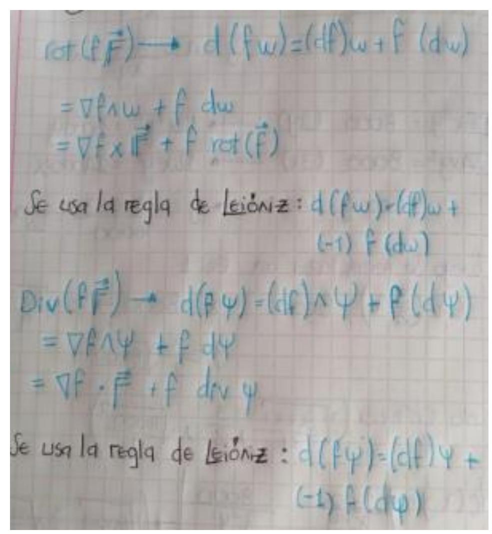
Análisis: En este problema hubo variadas preguntas enfocadas en la correspondencia fundamental desarrollada en las sesiones de clase y de la cual es la clave para conectar los hechos de las funciones vistas en el curso con las formas diferenciales presentadas en esta actividad.

En cuanto a la rúbrica de caracterización del pensamiento vectorial los estudiantes siguen recurriendo

a un enfoque algorítmico, sin dejar atrás los demás modos propios del pensamiento, lo que permite suponer que esta temática es pertinente a los objetivos propuestos en la tesis, pues se nota la confluencia entre todos los modos del pensamiento con el trabajo expuesto por los estudiantes y las preguntas referentes a la temática que crean en ellos conexiones entre las teorías vistas en física y las estudiadas en este curso. Se espera que ellos sean partícipes en un cambio de paradigma teórico aplicado en sus respectivas ingenierías la cual traerá muchos beneficios, como el trabajo científico lo ha demostrado a través del tiempo. (Ver Feynman)

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 35 Análisis problema 4 Actividad 7

• **PROBLEMA: Pruebe las siguientes identidades definidas sobre el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\vec{\mathbb{F}}$ y una función escalar $\boldsymbol{f}$:** $\text{rot}\left(f\vec{\mathbb{F}}\right) = f\text{rot}\left(\vec{\mathbb{F}}\right) + (\nabla f) \times \vec{\mathbb{F}}$ $\text{div}\left(f\vec{\mathbb{F}}\right) = f\text{div}\left(\vec{\mathbb{F}}\right) + (\nabla f) \cdot \vec{\mathbb{F}}$
  Los estudiantes muestran la solución del problema mediante la forma clásica por la definición de los operadores correspondientes y usando el lenguaje de formas diferenciales, lo que nota una gran reducción de cálculos y comprensión de los temás tratados, mostrando así evidencia de la rúbrica 3.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**
Análisis: En este problema se muestra de una manera determinante el poder de las formas diferenciales y su uso en la resolución de problemas. Esto permite dar paso, además de otras formas de pensar, al modo de generalización descrito en la rúbrica de caracterización del pensamiento vectorial y tomar este nuevo concepto como estandarte en la demostración de

teoremas de Cálculo Vectorial y cómo estas formas diferenciales interactúan con los objetos descritos en el curso.

Hasta esta actividad se nota un gran avance en los demás modos de pensamiento, lo que se reflejará en la posterior caracterización del mismo y su correspondiente llevada a la práctica por otros docentes y estudiantes en la obtención de objetivos específicos de la asignatura en cuestión.

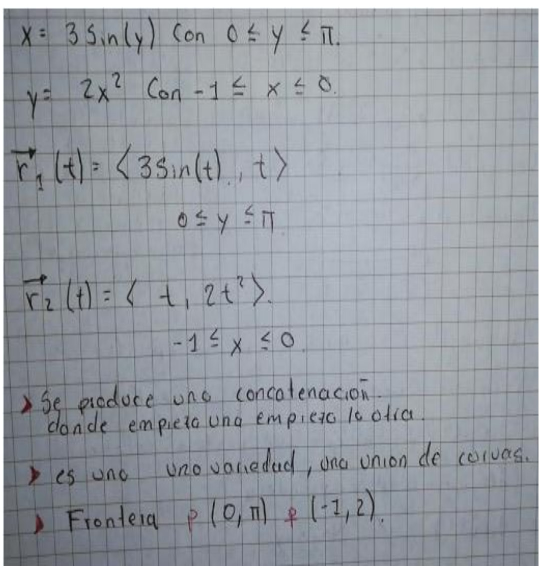
Fuente: *autor (2021)*

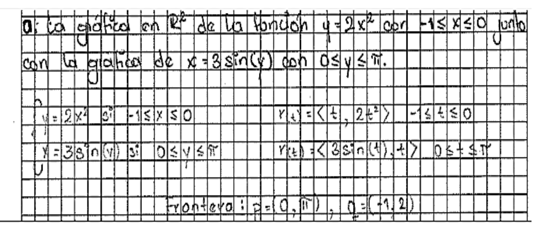
5.2.8. Análisis Actividad 8: Variedades orientadas y teoremas fundamentales

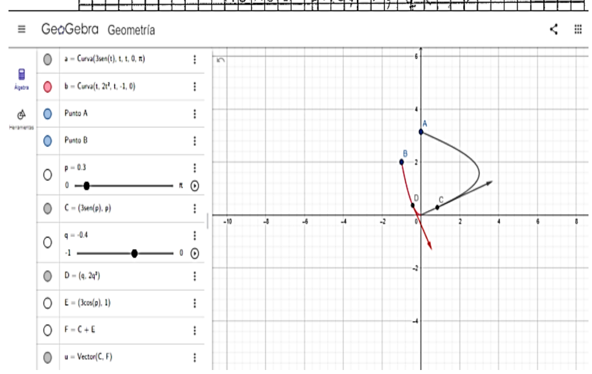
Tabla 36 Análisis problema 1 Actividad 8

- **(PRIMERA PARTE) Mediante el uso de la herramienta tecnológica realice un bosquejo de la $n-$ variedad dada, indicando su frontera y su dimensión, junto con la orientación estándar para que se recorra dinámicamente.**

a) La gráfica en $\mathbb{R}^2$ de la función $y = 2x^2$ con $-1 \leq x \leq 0$ junto con la gráfica de $x = 3\sin(y)$ con $0 \leq y \leq \pi$.

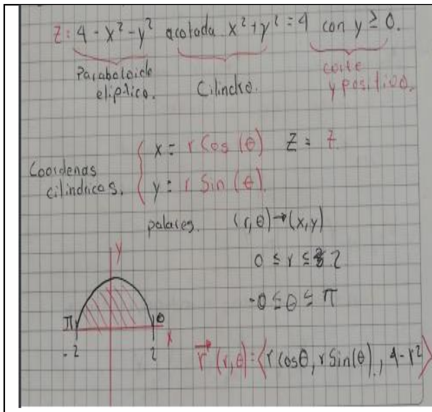


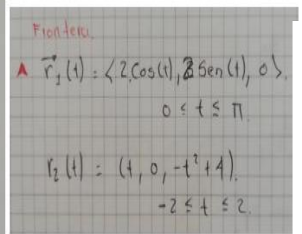


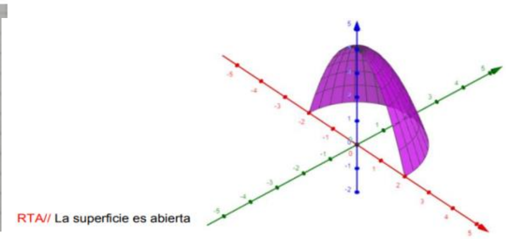


Los estudiantes muestran la gráfica de la 1-variedad dinámicamente al obtener la orientación estándar y los vectores tangentes a las curvas junto a su frontera, mostrando así evidencia de las rúbricas 2.3 y 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 100**

b) Parte de la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ acotada por $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$. ¿La superficie es cerrada?

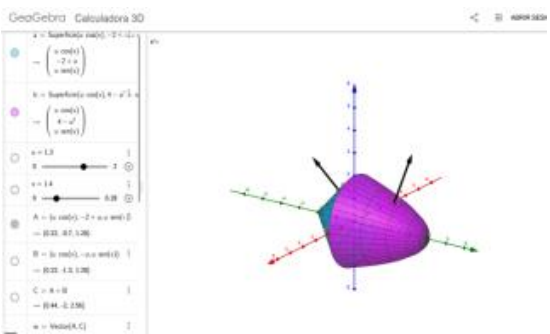


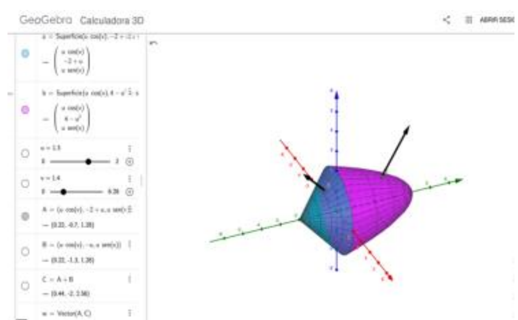




Los estudiantes muestran la gráfica de la 2-variedad iniciando con un bosquejo y luego usando las coordenadas cilíndricas para dar una parametrización de la superficie. Se nota también el uso de deslizadores que permiten mostrar la orientación de la curva frontera y de la propia superficie, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3 y 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

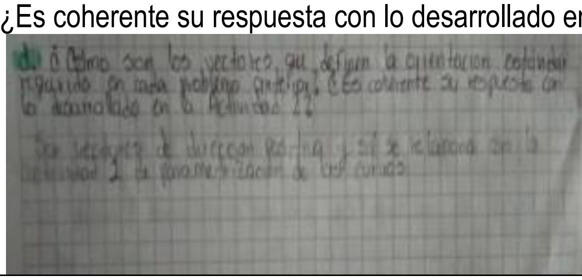
c) Sólido cuya gráfica está acotada por las superficies cuyas ecuaciones son: $\boldsymbol{y = -2 + \sqrt{x^2 + z^2}}$ con $\boldsymbol{-2 \leq y \leq 0}$ y $\boldsymbol{y = 4 - x^2 - z^2}$ con $\boldsymbol{0 \leq y \leq 4}$.

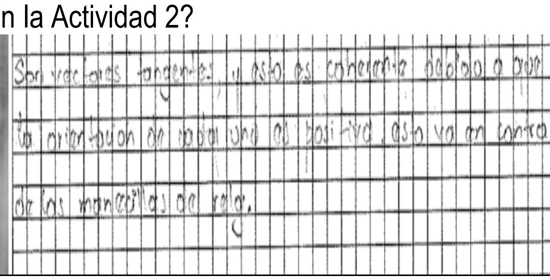


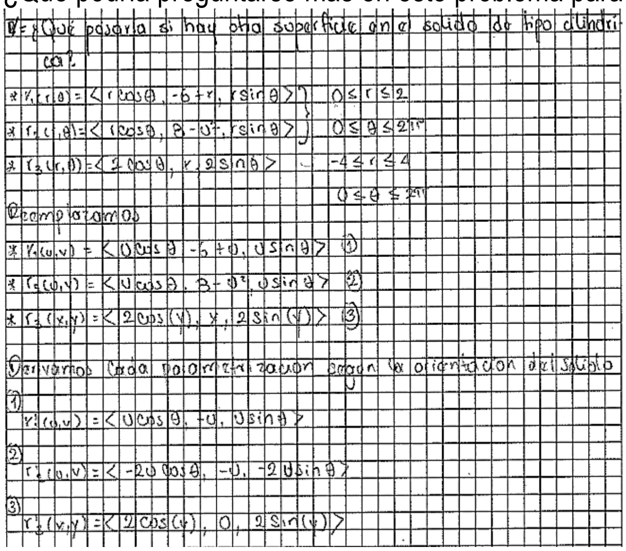
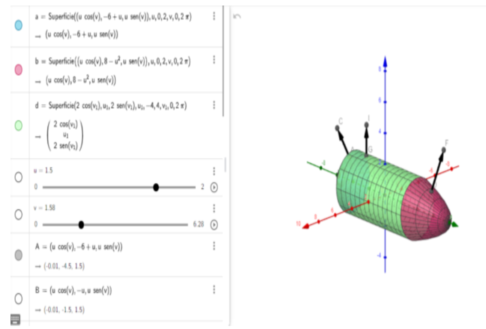


Los estudiantes muestran la gráfica de la 3-variedad graficando sus superficies frontera, esbozando dinámicamente algunos vectores normales unitarios exteriores, la cual le dan al sólido su orientación estándar, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.3 y 4.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

d) ¿Cómo son los vectores que definen la orientación estándar requerida en cada problema anterior? ¿Es coherente su respuesta con lo desarrollado en la Actividad 2?





Los estudiantes asocian la orientación de las variedades descritas con lo realizado en la Actividad 2 en cuanto a los vectores que las caracterizan. Se ha de notar la presencia de un tipo de orientación informal utilizando la mano derecha, mostrando así evidencia de la rúbrica 4.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**
e) ¿Qué podría preguntarse más en este problema para que usted le dé una solución satisfactoria?   Los estudiantes desarrollan un problema de su autoría al esbozar otro tipo de sólido que consta de tres superficies tomando las descritas en el problema. Se muestra cómo ellos determinan los vectores normales exteriores al sólido, dando lugar a la orientación estándar intrínseca en él, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.2. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**
Análisis: En la solución este problema se evidencia en los estudiantes de manera general los modos de pensamiento vectorial descritos en la rúbrica de caracterización propia, con especial énfasis en el modo vecto-dinámico que juega un rol destacado en la construcción de las diferentes n-variedades señaladas. Se nota un gran avance en cuanto al manejo de la plataforma tecnológica junto a los algorítmos realizados para trasladarlos a ella y mostrar de manera coherente sus gráficas. Los estudiantes manifiestan que si fue mejor haber estudiado antes los temas tratados en la Actividad 2 y no haberlo pospuesto a esta actividad, pues era necesario tener práctica de la herramienta tecnológica para atacar los problemas generados en esta temática. La dificultad que se nota en este problema es el de realizar los vectores asociados a las variedades, los cuales les dan la orientación requerida. En la socialización se mostró por parte de algunos grupos la forma de hacerlos y su posible generalización. Se espera que este modo de pensamiento influya en el posterior trabajo de los estudiantes tanto en sus asignaturas como en su quehacer profesional, donde pueden aplicar estas construcciones.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 37 Análisis problema 2 Actividad 8

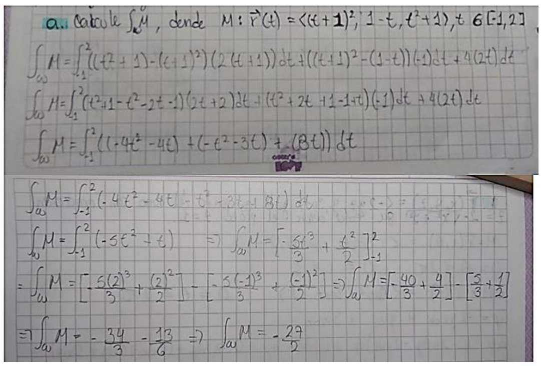
- **(SEGUNDA PARTE) Se definen las siguientes formas diferenciales:**

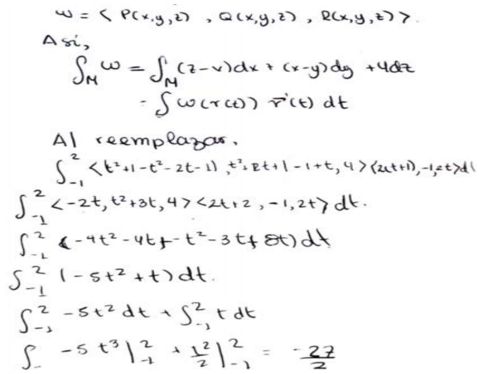
$$\boldsymbol{\omega = (z-x)dx + (x-y)dy + 4dz}$$

$$\boldsymbol{\eta = dydz + xdzdx + (y^2-2)dxdy}$$

$$\boldsymbol{\psi = 3y^2 dxdydz}$$

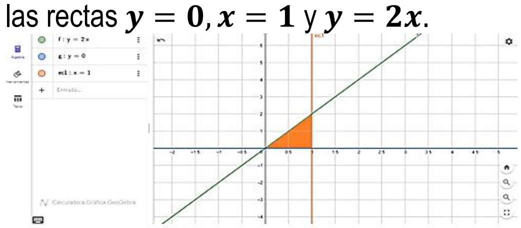
a) Calcule $\int_{M} \boldsymbol{\omega}$, donde $\boldsymbol{M}: \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \langle (\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{1}-\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{1}\rangle, \boldsymbol{t} \in [-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}]$

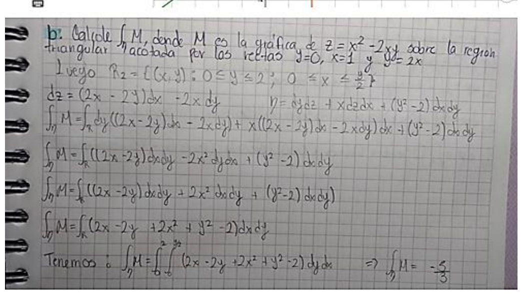


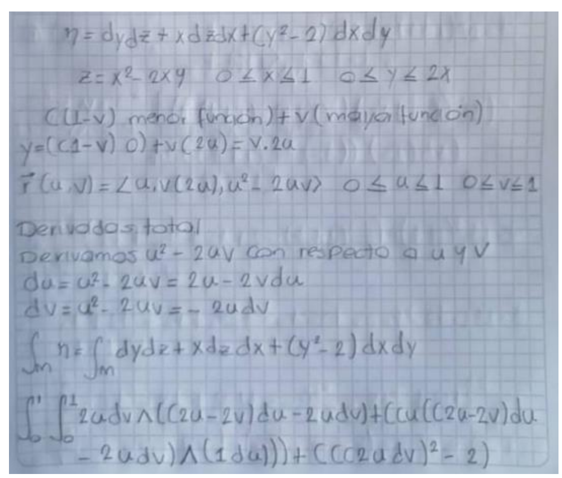


Los estudiantes muestran el algorítmo de la integral de la 1-forma sobre una 1-variedad. Se ha de destacar en la última imagen la notación vectorial usada para resolver el problema, mostrando así evidencia de las rúbricas 1.2 y 1.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 80**

b) Calcule $\int_{M} \boldsymbol{\eta}$, donde $\boldsymbol{M}$ es la gráfica de $\boldsymbol{z = x^2 - 2xy}$ sobre la región triangular acotada por las rectas $\boldsymbol{y = 0}, \boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{y = 2x}$.

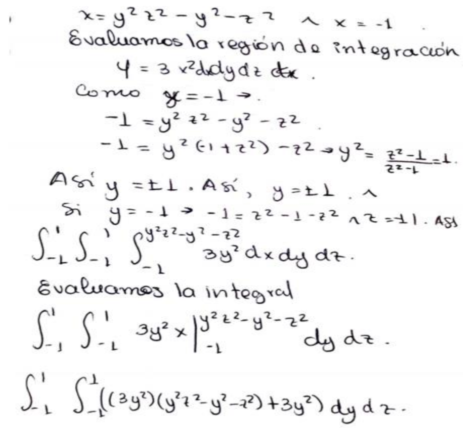






Los estudiantes muestran el algorítmo de la integral de la 2-forma sobre la 2-variedad, no sin antes visualizar la región plana donde se efectúa la integración y desarrollando el álgebra de las formas diferenciales estudiadas en la actividad anterior, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 70**

c) Calcule $\int_{M} \psi$, donde M es el cuerpo sólido acotado por las gráficas de $x = y^2z^2 - y^2 - z^2$ y $x = -1$.



$x = y^2 z^2 - y^2 - z^2 \wedge x = -1$

Evaluamos la región de integración,

$\psi = 3x^2 dx dy dz \cancel{dx}$.

Como $\cancel{y}\, x = -1 \Rightarrow$

$-1 = y^2 z^2 - y^2 - z^2$

$-1 = y^2(-1 + z^2) - z^2 \Rightarrow y^2 = \frac{z^2-1}{z^2-1} = 1$.

Así $y = \pm 1$. Así, $y = \pm 1$. $\wedge$

Si $y = -1 \Rightarrow -1 = z^2 - 1 - z^2 \wedge z = \pm 1$. Así

$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{y^2z^2-y^2-z^2} 3y^2 \, dx\, dy\, dz$.

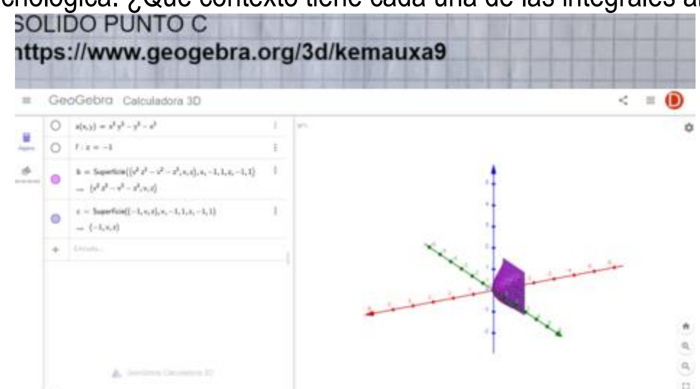
Evaluamos la integral

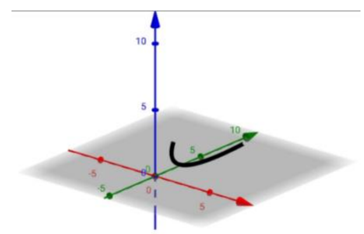
$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} 3y^2 x \Big|_{-1}^{y^2z^2-y^2-z^2} dy\, dz$.

$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} ((3y^2)(y^2z^2-y^2-z^2)+3y^2)\, dy\, dz$.

Los estudiantes muestran el algorítmo de la integral de la 3-forma sobre la 3-variedad, primero determinando el dominio de integración y desarrollando el álgebra correspondiente, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

d) Realice un bosquejo de las variedades orientadas anteriores por medio de la herramienta tecnológica. ¿Qué contexto tiene cada una de las integrales anteriores en la aplicación?





Los estudiantes muestran las gráficas realizadas de cada variedad anterior, donde en la clase se discute sobre su orientación y su contexto correspondiente, por lo que el problema está resuelto desde diferentes aristas, mostrando así evidencia de la rúbrica 2.1. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

Análisis: Los estudiantes desarrollan la solución de los problemas de manera vecto-algorítmica y vecto-dinámica en gran medida evidenciando los modos de pensamiento vectorial descritos en la rúbrica de caracterización. Ellos están mostrando grandes avances en cuanto a los procesos algorítmicos de los problemas que se requieren para su solución.

Los procesos algorítmicos son los de relevancia en la dificultad presentada por los estudiantes tanto en las integrales como en la obtención de las parametrizaciones correspondientes a las variedades. En la socialización se expuso por parte de algunos grupos la forma para realizarlas.

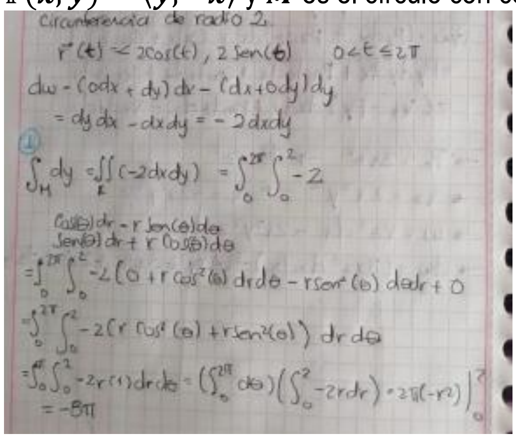
Para resaltar está el hecho de "volver hacia atrás" en el proceso de integración involucrado en esta temática y el desarrollado en el curso anterior de Cálculo Integral, ya que, para estas integrales de línea, superficie y de sólidos se trabaja como lo hecho en el curso pasado al tomar sustituciones simples, que ahora serán coordenadas espaciales, y aplicar el álgebra de las formas diferenciales para ellas, lo que conlleva a la misma solución de una manera más óptima.

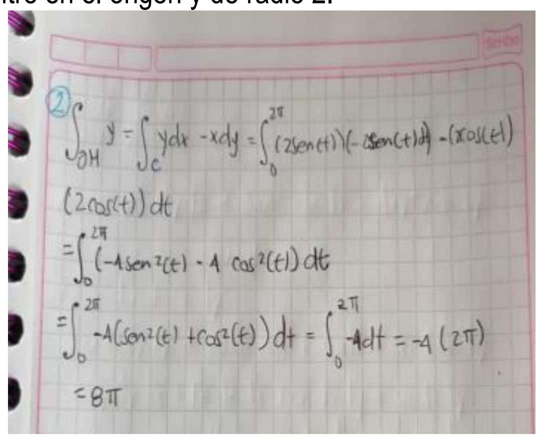
Fuente: *autor (2021)*

Tabla 38 Análisis problema 3 Actividad 8

- **En cada campo vectorial asignado verificar el Teorema generalizado de Stokes, realizando el bosquejo correspondiente de la variedad orientada dada.**

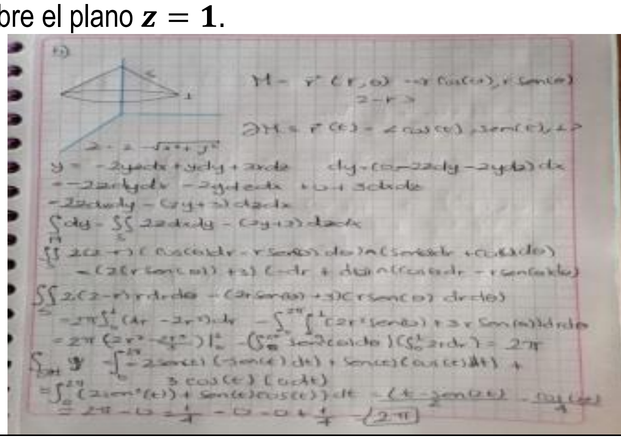
a) $\vec{\mathbb{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x} \rangle$ y $\boldsymbol{M}$ es el círculo con centro en el origen y de radio 2.

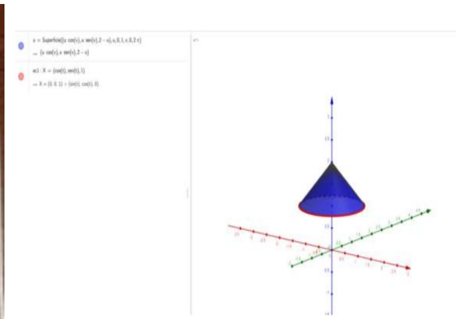


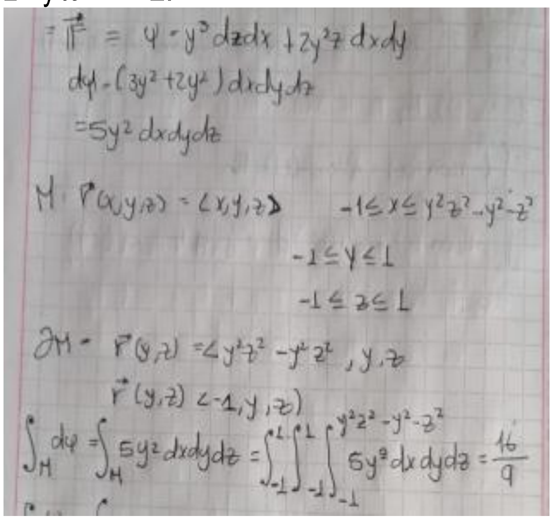
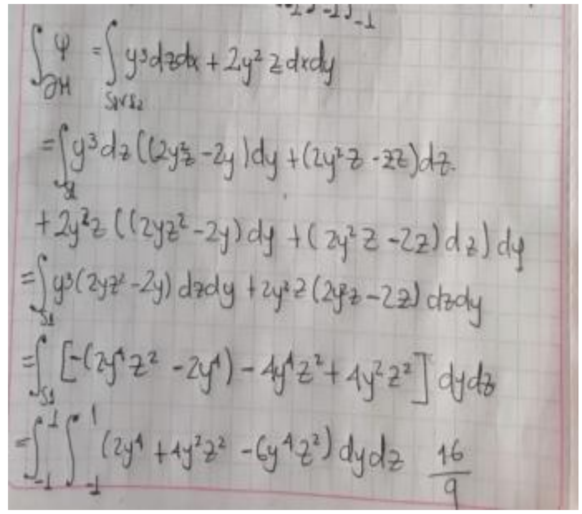


Los estudiantes comprueban el Teorema, que se llamará ahora de Green, para el campo correspondiente graficando la variedad, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**

b) $\vec{\mathbb{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \langle -2\boldsymbol{yz}, \boldsymbol{y}, 3\boldsymbol{x} \rangle$ y $\boldsymbol{M}$ es parte del cono con ecuación $\boldsymbol{z} = \mathbf{2} - \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$ que está sobre el plano $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$.





Los estudiantes comprueban el Teorema, que se llamará ahora de Stokes, para el campo correspondiente graficando la variedad, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 60**
c) $\vec{\mathbb{F}}(x, y, z) = \langle 0, y^3, 2y^2z \rangle$ y M es el cuerpo sólido acotado por las gráficas $x = y^2z^2 - y^2 - z^2$ y $x = -1$.   Los estudiantes comprueban el Teorema, que se llamará ahora de Gauss, para el campo correspondiente graficando la variedad, mostrando así evidencia de la rúbrica 1.4. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 40**
Análisis: Los estudiantes desarrollan la verificación del Teorema destacando el modo de generalización del pensamiento vectorial descritos en la rúbrica de caracterización, junto a las gráficas de las variedades con sus fronteras correspondientes. En este problema se ratifica el buen uso de los algoritmos y la orientación mostrada en clase y que permite determinar la forma como ellos piensan vectorialmente para dar solución al problema. En la socialización de la actividad quedo enfatizada la importancia de este Teorema no solo a nivel de aplicabilidad sino de manera operacional, donde no haya una división explícita entre los teoremas vistos tanto en este curso como en el anterior, sino que con una estructura general se puede empoderar al estudiante de las herramientas ofrecidas por las formas diferenciales definidas sobre variedades orientadas y aplicarlas en la obtención de resultados pertinentes de la teoría estudiada. Se creó una discusión por la no utilización masiva de estas bellas herramientas en problemas particulares. Se espera que ellos diseminen estas ideas y que puedan recoger los frutos de las mismas al aplicarlas en sus trabajos de grado o en la publicación de artículos o en el mejoramiento de ciertos modelos matemáticos que describen fenómenos asociados.

Fuente: *autor (2021)*

Tabla 39 Análisis problema 4 Actividad 8

- **Si $\vec{a}$ es un vector constante, $\vec{r} = \langle x, y, z\rangle$ es el vector de posición y S es una superficie orientada por una curva frontera cerrada y simple con orientación positiva C, demuestre que:**

$$\int_{S} 2\vec{a} \cdot d\vec{A} = \int_{C} (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{L}$$

Problema 4.

Por hipotesis $\vec{a}$ es un vector constante $\wedge$ $\vec{r}$ es el vecto posición $\wedge$ S una superficie cerrada

Ahora como queremos evaluar

$$\int_S 2\vec{a}\, d\vec{A}.$$

Haciendo uso de la definición

$$\int_S 2\vec{a}\, d\vec{A} = 2\vec{a} \int_S d\vec{A}.$$

$$= 2\vec{a} \int_{\partial S} \vec{A}.$$

Ahora como $\partial S = C$, así.

$$2\vec{a} \int_{\partial S} \vec{A} = 2\vec{a} \int_C \vec{A}.$$

Evaluamos $\vec{A}$, sabiendo que

$$\vec{r} = \langle x, y, z\rangle \to \vec{A} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{2}.$$

Obteniendo

$$2\vec{a} \int_C \vec{A} = 2\vec{a} \int \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}}{2} = 2\int_C \vec{a} \times \frac{\vec{r}}{2}\, d\vec{l}$$

$$= \int \vec{a} \times \vec{r} \cdot d\vec{l}$$

Los estudiantes muestran un esbozo de la prueba del problema al aplicar el Teorema mostrado en esta actividad. Hay un abuso de la notación y de los conceptos de elementos de área de superficie y de longitud de una curva en la imagen, pero en esencia ellos muestran el resultado satisfactoriamente al corregirles estos fallos, mostrando así evidencia de la rúbrica 5.3. **Porcentaje de los grupos que lo realizaron correctamente: 20**

Análisis: En este problema se pretendía que los estudiantes hicieran uso de las formas diferenciales definidas sobre variedades orientadas para resolverlo. Parcialmente se obtuvo la demostración, pero quedo en evidencia que las herramientas dadas en este curso les ayudaron a plantear una prueba que está sujeta a mejoras, que al final se pudo concretar.

En cuanto a los modos de pensamiento vectorial descritos en la rúbrica de caracterización se hace especial énfasis a la rúbrica 3.1, donde en la socialización se determinó que el problema tiene una estructura vectorial intrínseca que permite resolverlo de la manera de formas diferenciales y del cual se logró el resultado, dándoles a los estudiantes nuevas formas de atacar una solución a un problema de manera vectorial.

Fuente: *autor (2021)*

5.3. Avances de la caracterización del Pensamiento Vectorial en estudiantes de Ingeniería

Los estudiantes para dar solución a problemas de alguna temática particular de Cálculo Vectorial acuden a alguno de los modos de Pensamiento Vectorial desarrollados a lo largo de la implementación de las actividades. La caracterización de este pensamiento se basa en la toma de decisión del estudiante al momento de dar una solución de un problema, del cual se destaca:

- La justificación y argumentación de cada paso de la solución, que puede darse de manera vectorial.
- La no memorización de fórmulas o esquemas que permiten un dinamismo en este pensamiento.
- La adquisición de habilidades propias para tal solución.
- El manejo de una notación adecuada que reduzca en número de pasos en una solución.
- La generalización de los resultados obtenidos al actuar sobre soluciones realizadas.
- El proceso de visualización que se refuerza con el uso de la herramienta tecnológica.
- El recurrir a otro tipo de solución distinta del mismo problema.
- Que la orientación geométrica o estructural incide en tal solución.
- El uso de entes matemáticos no tradicionales que mejoran y unifican la teoría.

Como resultados obtenidos de la implementación de las actividades se destaca:

- Que el 35% de los estudiantes que resolvieron los problemas extra-clase mostraron nuevas formas de pensar algunos problemas propuestos desde el enfoque del Pensamiento Vectorial, dando así una oportunidad de mejora en este sentido.
- Que el 83% de los estudiantes usaron adecuadamente las herramientas y plataformas tecnológicas para la visualización de los problemas y sus soluciones, trabajando desde la práctica.

- Que el 74% de los estudiantes desarrollaron notaciones del Cálculo Vectorial que permitió optimizar las formas de entender y las formas de pensar de un problema particular.
- Que el 92% de los estudiantes se empoderó de las herramientas del Pensamiento Vectorial para la modelación de un problema específico, dando otro énfasis en la solución de los mismos.
- Que el 74% de los estudiantes notaron un cambio de paradigma de enseñanza – aprendizaje del Cálculo Vectorial a través del Pensamiento Vectorial y sus rúbricas de caracterización, lo cual se llevó a cabo mostrando el trabajo clásico de los libros de texto y contrastándolo con los modos de Pensamiento Vectorial.
- Que el 82% de los estudiantes captaron el nivel de cohesión de la teoría de las formas diferenciales a los conceptos propios del curso de Cálculo Vectorial, cohesionando los cinco modos del Pensamiento Vectorial generados por ellos.

5.4. Conclusiones del capítulo 5

Se ha logrado identificar en los análisis de las actividades desarrolladas la confluencia entre los modos de pensar vectorialmente que se generan en los estudiantes y que están plasmados en la rúbrica de caracterización mostrada anteriormente.

Como viene siendo recurrente en las matemáticas estudiadas en un nivel universitario, los estudiantes basan sus respuestas mayormente en procesos algorítmicos, pero como se ha demostrado en los análisis respectivos, existe en el estudiante diversas formas de pensar vectorialmente que conlleven a otra clase de solución y de la cual se obtenga un modo particular de pensamiento.

El hecho de que los estudiantes pudieran enunciar problemas relacionados con la temática y darle su solución, evidencia la robustez de Pensamiento Vectorial que ellos lograron a través de la resolución de las actividades propuestas. Además, que la solución de los problemas extra clase indica el abordaje para la construcción de los conceptos del curso de manera vectorial y no únicamente de una manera tradicional.

CONCLUSIONES

Las TIC permiten avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial

Los modos de pensar vectorialmente muestran la necesidad de un cambio de paradigma entre lo que se imparte en un curso de Cálculo Vectorial y lo que se viene realizando actualmente con las herramientas tecnológicas disponibles, ya que se ha evidenciado el empoderamiento del estudiante en la formación de los conceptos del curso y su posterior aplicación.

La orientabilidad es un rasgo característico del Pensamiento Vectorial

En muchas investigaciones sobre la Enseñanza – Aprendizaje del Álgebra Lineal se hace una extrapolación entre sus modos de pensar y los que existen para el Cálculo Vectorial. En esta investigación se evidenció otro modo de pensar vectorialmente que induce una orientación geométrica o estructural, que, si bien se puede analizar desde el Álgebra Lineal, en el curso de Cálculo Vectorial adquiere una relevancia importante al analizarse desde su faceta dinámica, y que los estudiantes construyen el significado de muchos conceptos del curso, donde algunos generalizan resultados estudiados en cursos anteriores, como lo es, por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo.

El Pensamiento Vectorial facilita la transición de los cursos de Cálculo

Es bien sabido por la comunidad matemática la dificultad inherente entre la transición de un curso de Cálculo a otro, donde esta diferencia se hace remarcable en el curso de Cálculo Vectorial, sobre todo en los métodos y la notación. Se pudo evidenciar con certeza un tránsito óptimo al utilizar elementos vectoriales desarrollados en las actividades para robustecer el significado de conceptos de diferenciación e integración multivariable, lo que va de acuerdo con lo propuesto por Harel (2021) al tomar estructuras matriciales e implementarlas en el desarrollo de conceptos del cálculo multivariable.

En esta investigación se realizó una caracterización de los modos de pensar vectorialmente que encierra lo propuesto por Harel y lo generaliza, lo cual es el tema central de un artículo científico desarrollado por el investigador de esta tesis y del que saldrá pronto.

Las formas diferenciales como catalizador del Pensamiento Vectorial

Se pudo constatar a lo largo de la implementación de las actividades que el concepto de las formas diferenciales facilita la adquisición de los demás conceptos del curso de Cálculo Vectorial y que su utilización encapsula fielmente los modos de pensar vectorialmente, pues los estudiantes resolvieron problemas no rutinarios que envolvían este concepto y catapultó un abordaje vectorial a las estrategias de sus soluciones, lo cual potencia el desarrollo del Pensamiento Vectorial.

El modo de generalización explora un horizonte distinto para el Cálculo Vectorial

El trabajo mostrado por los estudiantes permite concluir que mediante la resolución de problemas propios de su autoría y con la ayuda de la plataforma tecnológica y de otros recursos disponibles, se llegó a lograr una cohesión estructurada del trabajo en equipo y de la participación en las clases que robusteció y refinó la comprensión de los conceptos de la asignatura, dando solución a una de las hipótesis de investigación.

A esta conclusión se llega luego de analizar la confluencia de los otros modos del Pensamiento Vectorial en las soluciones de los problemas desarrollados y sustentadas en las actividades sugeridas. Esto diferencia la manera de generalizar en matemáticas como un rasgo propio de ella a tener disponible un modo de pensar matemáticamente acorde a las necesidades de la resolución de problemas propuestos en el aula por parte de los estudiantes.

RECOMENDACIONES

En los cursos de Cálculo Vectorial o Cálculo Multivariable Colombianos se nota en el tiempo que se continúa enseñando bajo los mismos planteamientos de la educación tradicional, lo que conlleva a que los estudiantes no aprensan a razones ni mucho menos a construir significado de un concepto particular. Lo que propone esta investigación es una transformación del enfoque que incide en el modo de pensar vectorialmente de los estudiantes y que los convierta en individuos más creativos y dinámicos, pasando por la informalidad de muchos términos estudiados que redunda en respuestas correctas y coherentes.

En este sentido, se recomienda plantear un trabajo articulado en las instituciones educativas que promuevan el Pensamiento Vectorial a través de actividades que inciten el aprendizaje autónomo, lo cual podría hacerse mediante la difusión de los resultados de esta investigación para hacer llegar los métodos de enseñanza incluidos y de esta manera hacer un cambio de orientación hacia un currículo más retador en los cursos mencionados.

Se propone explorar la posibilidad de incluir las formas diferenciales como eje central de los cursos mencionados para la construcción de significado propios de ellos.

Además, se recomienda avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial que permita incidir en el diseño del curso de Variable Compleja y cursos afines, donde se sugiere implementar varias de las ideas contenidas en esta investigación, ya que histórica y epistemológicamente estos cursos son acordes al Pensamiento Vectorial.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Acosta, E. y Aldana, B. (2013). *Cálculo Vectorial*. Notas de clase. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

Arcavi, A. (2003). *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241. doi: 10.1023/A:1024312321077

Arnheim, R. (1969). *Visual Thinking*. London: Faber and Faber.

Ballester, P. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y Educación.

Beer, F. P., Johnston, E. R., Eisenberg, E. R. (2010). *Vector Mechanics for Engineers. Statics and Dynamics*. [9] edition. Mc Graw Hill

Bell, E. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling - A theory for practice*. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. &Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

Bohórquez, L. & Yepes, C. (2014). *Una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de espacio vectorial con ayuda del WINPLOT y WX-MÁXIMA.* Repositorio, Universidad Sergio Arboleda.

Borasi, R. (1986), *“On the nature of problems”,* Educational Studies in Mathematics,vol. 17, núm. 2

C. Alsina, R.B., Nelsen (2006). *Math Made Visual. Creating images for understanding mathematics.* MAA, Washington.

CAEDI IX. (2016). *Libro de actas*. Ciudad de Resistencia- Chaco- Argentina: Gala Convenciones.

Cai, J. (2000). *Mathematical thinking involved in US and Chinese students' solving of process-constrained and process-open problems*. Mathematical Thinking and Learning, 2(4), 309-340.

Cai, J., & Nie, B. (2007). *Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice*. ZDM, 39(5-6), 459-473.

Cartan, H. (1966). *Formes Différentielles. Applications Élémentaires au Calcul des Variations et a la théorie des Courbes et des Surfaces*. Hermann Collection. Paris.

Chavarría, J., & Mora, R.H. (2009). *La historia e interdisciplinariedad en la Educación Matemática: Una experiencia con profesores de secundaria.*

Cheng, D. K. (1993). *Fundamentals of Engineering Electromagnetics.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Costa, V. A. & Arlego M. (2011). *Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – ICIECyM. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática - II ENEM. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, pp. 88-94.

Crowe, J. M. (1985). *A history of Vector Analysis. The Evolution of the Ideas of a Vectorial System.* New York: Dover pub.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* EDIPUBLI S.A., Argentina.

Díaz, M. y Dircio, L. (2010). *El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME 2010). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf

Domenicantonio, R., Costa, V & Vacchino, M. (2011). *La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. pp. 27, 75-87.

Donevska-Todorova, A. (2016). *Thinking modes, with or without technology?* Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Donevska-Todorova, A. (2015). *Conceptual Understanding of Dot Product of Vectors in a Dynamic Geometry Environment*. The Electronic Journal of Mathematics & Technology 9(3).

Dorier, J. L. (1995). *A general outline of the genesis of vector Space theory*. Historia Mathematica*, 22* (3), 227-261.

Dray, T & Manogue, C. (2003). *Using differentials to bridge the vector calculus gap*, College Math. J. 34 283–290

Dray, T & Manogue, C. (2010). *Putting Differentials Back into Calculus*, College Math. J. 41 No. 2

Edwards, H, (1994). *Advanced Calculus. A Differential Forms Approach*. Springer Science+Business Media, LLC.

EMCI XIX Encuentro Nacional, XI Internacional. (2015). *Libro de actas*. Ciudad Autónoma de buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

English, L., & Sriraman, B. (2010). *Problem solving for the 21 st century*. In Theories of mathematics education (pp. 263-290). Springer, Berlin, Heidelberg.

Flanders, H. (1989). *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York, 1963; reprinted by Dover, Mineola NY.

Guerra, R. & Parraguez, M. (2019). *Comprensión del producto vectorial desde los modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial.* Comunicación. XV CIAEM-IACME, Medellin, Colombia.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford University press. Printed in Great Britain.

Gravemeijer, K & Doorman, M. (1999). *Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example.* Educational Studies in Mathematics. Volume 39, pp 111–129.

Gol Tabaghi, S. & Sinclair, N. (2013). *Using Dynamic Geometry Software to Explore Eigenvectors: The Emergence of Dynamic-Synthetic-Geometric Thinking*. Tech Know Learn **18,** 149–164. doi: 10.1007/s10758-013-9206-0

Gutiérrez, L. (2013). *¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo?* Recuperado de https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/

Harel, G. (2008 b). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II, ZDM*— The International Journal on Mathematics Education, 893-907. Recuperado de http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRII.pdf

Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question*. University of California, San Diego harel@math.ucsd.edu.

Harel, G. (2021). *The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective*, ZDM—Mathematics Education, Springer.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta Edición. México: McGRAW-HILL/ INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. p. 9.

Hillel, J. (2000). *Modes of description and the problem of representation in linear algebra*. In On the teaching of linear algebra (pp. 191-207). Springer Netherlands.

Kilpatrick, W. (1967b). *"La filosofía de la educación desde el punto de vista experimentalista"* en KILPATRICK, W. H.; BREED, F. S.;

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 2. New Ed Edition.

Koichu, B., Berman, A. and Moore, M. (2003a). *Changing teachers' beliefs about students' heuristics in problem solving*. Electronic proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Recuperado de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG12/TG12_Koichu_cerme3.pdf

Krulik, S., Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Krulik, S. Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Labarrere, F. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. La Habana: Pueblo y Educación.

Lakatos, I. (1978b). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.

Lakatos, I. (1978c). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). *Problem solving and modeling*. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. pp. 763-804.

Malakhaltsev, M y Arteaga, J, (2013). *Cálculo Vectorial*. Universidad De Los Andes.

Marsden, J. E. & Tromba, A. J. (2004). *Cálculo vectorial*. Edición 5, Addison Wesley.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Moreno, L. (2014). *An essential tension in mathematics education*. ZDM Mathematics Education, 46, 621-633.

Moreno, L. Hegedus, S.J. & Kaput, J.J. (2008). *From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives*. Educational Studies in mathematics, 68(2), 99-111.

Neuman, W.L. (1994). *Social Research Methods. Qualitative and Quantitative Approaches*. Needham Heights (Massachusetts): Allyn and Bacon.

Pedraza, L. Valbuena, S. (2014). *M-learning y realidad aumentada, tecnologías integradas para apoyar la enseñanza del cálculo.* Revista de investigaciones - hemeroteca.unad.edu.co.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria. 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pochulu, M. (2017). *La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*. GIDED. Argentina.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires. Argentina.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley

Pou, C. (2002). *El programa educativo "Mira" del Laboratorio de las artes: un instrumento para la escuela primaria* (Texto sin publicar, investigación financiada por la Fundación "la Caixa").

Presmeg, N. (1999). *Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. pp (32), 17-22.

Presmeg, N. (2006). *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236). Rotterdam: Sense.

Proceedings of the Tenth ERME TOPIC CONFERENCE (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA) (2020). Linz School of Education.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. España. Editorial Comares.

Restle, F., & Davis, J. H. (1962). *Success and speed of problem solving by individuals and groups*. Psychological Review, 69(6), 520–536. doi: 10.1037/h0043862

Roam, D. (2008). *The back of the kapkin: solving problems and selling ideas.* New York, Penguin Group. p. 55.

Schoenfel, A. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*. Notices of the AMS, Volume 47, Number 6; June/July 2000.

Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically.* New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1994). *Reflections on Doing and Teaching Mathematics*. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 53-72). Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2009). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Colección Digital Eudoxus, (7).

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students´ thinking in Linear Algebra*. En Dorier, J.L. (Eds.), The teaching of Linear Algebra in question (pp. 209-246). Netherlands:Kluwer Academic Publishers.

Sriraman, B. & English, L (2010). *Theories of Mathematics Education*. Springer.

Sharipov, R. A. (2004). *Quick Introduction to Tensor Analysis*. Bashkir State University, Ufa, Russia.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). *An analysis of arithmetic problem posing by middle school students*. Journal for research in mathematics education, 521-539.

Sjamaar, R. (2017). *Manifolds and Differential Forms.* Cornell University. Recuperado de http://www.math.cornell.edu/~sjamaar

Spivak, M. (1988). *Cálculo en variedades.* Universidad de Brandeis. EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Tait, G. P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions.* País: Oxford.

Tall, D. (2003). *Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics*. In L. Carvalho & L. Guimara˜es (Eds.), Historia e tecnologia no ensino da matematica (Vol. 1, pp. 1–28).

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge.

Teaching and Learning of Calculus (ICME 13). Springer.

Thompson S. P. & Gardner M. (1998), *Calculus Made Easy*, St. Martin's Press, New York.

Urchegui, P. (2015). *El pensamiento visual en la formación del profesorado: Análisis de los componentes del pensamiento viso-espacial y su importancia en la formación de los docentes de educación infantil y primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Pedagogía. Facultad de Educación y Trabajo social, Universidad de Valladolid, España.

Urrego, J. (2016). *Secuencia didáctica para la enseñanza del algebra vectorial a partir de la geometría Euclidiana y Analítica.* Recuperado de bdigital.unal.edu.co

Weintraub, S. (1997) *Differential forms: A complement to Vector Calculus.* Academic Press.

Weintraub, S. (2014) *Differential forms: theory and practice.* [2] Edition. Academic Press.

ANEXOS

A continuación se presentan como anexos el cronograma establecido para la investigación, la prueba de entrada a la asignatura y los análisis obtenidos a partir de las respuestas de los estudiantes.

Anexo 1. Cronograma de investigación

Tabla 40 Cronograma de investigación

No.	Tareas	Fecha
1.	Búsqueda y determinación el problema	Hasta agosto de 2018
2.	Realizar un estudio previo del estado del arte	Septiembre de 2018
3.	Presentación en taller de tesis	Octubre de 2018
4.	Elaborar introducción y el capítulo del estado del arte.	Diciembre de 2018
5.	Elaborar el marco teórico	Febrero de 2019
6.	Presentación en taller de tesis	24 de marzo de 2019
7.	Entregar proyecto de tesis para examen de calificación	28 de abril de 2019
8.	Presentación de examen de calificación	Junio de 2019
9.	Estructurar la tesis con las sugerencias realizadas (Estado del arte)	Julio de 2019
10.	Estructurar la tesis con las sugerencias realizadas (Marco teórico)	Agosto de 2019
11.	Elaborar propuesta de actividades I	Julio y agosto de 2019
12.	Elaborar el aporte o modelo didáctico	Sept a diciembre de 2019
14.	Presentación en taller de tesis	Octubre de 2019
15.	Estudio piloto 1 (Aplicar actividades)	Octubre de 2019
16.	Elaborar propuesta de actividades II	Enero febrero de 2020
17.	Estudio piloto 2	Marzo 2020
18.	Rediseñar las actividades con base al estudio piloto 2	Abril y mayo de 2020

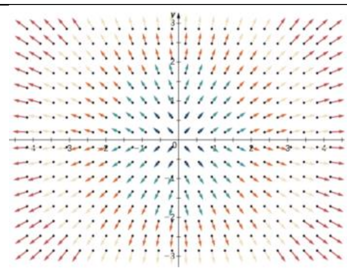
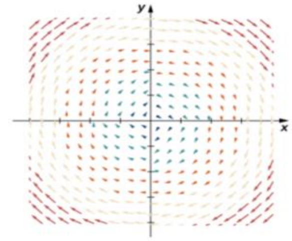
19.	Presentación en taller de tesis	Mayo de 2020
20.	XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática	5 al 10 de mayo de 2020
21.	Elaborar artículo para publicar en revista indexada	Junio y julio de 2021
22.	Aplicar sistema de actividades y Elaborar el capítulo 5	Agosto a noviembre de 2021
23.	Presentación en taller de tesis	Noviembre de 2021
24.	Elaborar las conclusiones generales y recomendaciones	Noviembre de 2021
25.	Revisar bibliografía y anexos y Presentar sus resultados en PVM I	Diciembre de 2021
26.	Presentación en taller de tesis y revisión de tesis y realizar arreglos	Diciembre de 2021
27.	Entregar la tesis al tutor para revisión final	Diciembre de 2021
28.	Entrega de la tesis a la dirección del programa	Diciembre de 2021
29.	Sustentación de la tesis	Enero de 2022

Fuente: Autor (2021)

Anexo 2. Prueba de entrada y análisis de respuestas

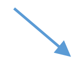
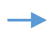
Tabla 41 Prueba de entrada y análisis de respuestas

PRUEBA DE ENTRADA
1. En relación a su experiencia con diversas cantidades y de la forma para hacer una medición en ellas, ¿usted diría que todas ellas tienen una única manera de medirse? a) Si b) No
2. Explique lo que usted entiende por “vector”. ¿Cómo concibe usted que un número negativo puede entenderse como un vector?
3. En la naturaleza, las cantidades a medir solo dependen de su magnitud. a. Verdadero b. Falso Explique su respuesta: __________
4. De acuerdo a los siguientes esquemas, relacione cada uno con una acción adecuada, respectivamente:

a. Rotativo y divergente
b. Convergente y rotativo
c. Divergente y rotativo
d. Rotativo y convergente

---

5. La opción que más aproxima la suma dada  +  es:
   1. 
   2. 
   3. 
   4. 

---

6. De la representación anterior, se tiene que

 +  =  + 

a. Verdadero   b. Falso

---

7. Una empresa ofrece diez productos diferentes de los cuales existen más de veinte referencias de cada uno con sus respectivos precios de venta al público y que se venden todos. Para determinar los ingresos de la empresa al vender los diez productos, de una manera eficiente, se puede hacer:
   a) Hacer una lista del número de referencias de cada producto y una lista de sus respetivos precios de venta, después multiplicar cada referencia con su precio respectivo y sumar los resultados.
   b) Sumar los precios de cada producto, después sumar aparte el número de referencias de cada producto y al final multiplicar esos valores.

---

8. Recordando que los procesos de derivar e integral son inversos, ¿qué significado tendrá la expresión $\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx$?
   a) El área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$
   b) La razón de cambio de la función $\int f(x)\,dx$ en el intervalo $[a,b]$
   c) La función $\frac{df}{dx}$ evaluada en el intervalo $[a,b]$
   d) El cambio total de f en el intervalo $[a,b]$

---

9. Según su experiencia en lo que va cursado en matemáticas, ¿tendrá sentido hablar de áreas o volúmenes con signo?

a. Si b. No Explique su respuesta: _______________
10. Si se define la siguiente operación $*$ entre parejas como: $$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,-4ad+bc)$$ Si $(a,b)=(1,2)$, entonces dos parejas $(c,d)\neq(0,0)$ que al efectuar la operación * con $(1,2)$ dan como resultado la pareja $(0,0)$ son: a. $(2,-1)$ y $(6,-2)$ $c.$ $(2,2)$ y $(6,4)$ b. $(2,1)$ y $(6,3)$ $d.$ $(2,-1)$ y $(-6,4)$

Fuente: *Autor (2021)*

Tabla 42 Tabla de respuestas de selección múltiple

Pregunta 1: En relación a su experiencia con diversas cantidades y de la forma para hacer una medición en ellas, ¿usted diría que todas ellas tienen una única manera de medirse?	80 %
Pregunta 4: De acuerdo a los siguientes esquemas, relacione cada uno con una acción adecuada, respectivamente:	70 %
Pregunta 5: La opción que más aproxima la suma dada es:	80 %
Pregunta 6: Una empresa ofrece diez productos diferentes de los cuales existen más de veinte referencias de cada uno con sus respectivos precios de venta al público y que se venden todos. Para determinar los ingresos de la empresa al vender los diez productos, de una manera eficiente, se puede hacer	60 %
Pregunta 7: Recordando que los procesos de derivar e integral son inversos, ¿qué significado tendrá la expresión $\int_a^b \frac{df}{dx}dx$?	30%
Pregunta 9: Si $(a,b)=(1,2)$, entonces dos parejas $(c,d)\neq(0,0)$ que al efectuar la operación * con $(1,2)$ dan como resultado la pareja $(0,0)$ son:	50%

Fuente: *Autor (2021)*

Tabla 43 Tabla de respuestas de preguntas abiertas

Pregunta 2: Explique lo que usted entiende por “vector”. ¿Cómo concibe usted que un número negativo puede entenderse como un vector?	
• *´´Es una representación gráfica de una fuerza física, que cuenta con magnitud (fuerza o longitud del vector) y dirección, la dirección en el espacio en la que se dirige.´´*	• *´´Es un segmento de recta, que cuenta con una cabeza y una cola y que puede partir de un punto cualquiera del espacio y que cuya longitud representa a escala una magnitud, en una dirección determinada y en uno de sus sentidos.´´*

• *´´Es una trayectoria que va de un punto a otro, que tiene un valor en unidades del sistema internacional, ya sea Newton, libras, kilogramos etc… Entiendo que un número negativo puede entenderse como un vector de acuerdo a su orientación en el plano cartesiano y con las clases que hemos dado he aprendido que no solo en el plano, sino que también depende de su orientación en el espacio.´´*	• *´´Un vector es una forma de medir una cantidad teniendo en cuenta su magnitud y dirección, y si obtengo de un vector un número negativo, entiendo que será un vector opuesto a su dirección original o positiva. Son entes matemáticos que poseen magnitud y dirección, un vector negativo se entiende que tiene la misma magnitud, pero sentido contrario o sea opuesto.´´*
Pregunta 3. En la naturaleza, las cantidades a medir solo dependen de su magnitud. a.Verdadero b. Falso	
• *´´FALSO Porque para mí, también dependen de otros factores, como su orientación, ángulos y fuerzas que actual sobre ellas.´´*	• *´´Falso Las cantidades a medir no solamente dependen de su magnitud sino también es muy importante saber si cuentan con una orientación o sentido, como tal de saber hacia dónde está siendo aplicada esa magnitud.´´*
• *´´Falso, Todas las unidades de medida fueron concedidas por la comparación de un efecto de un cuerpo con otro. Donde ni siquiera se pensaba que un número estaba involucrado, solo similitudes visuales. Las magnitudes sirven para ser más precisos y tener una idea de cómo se representa.´´*	• *´´VERDADERO : las cantidades a medir solo dependen de su magnitud, pero hay algo a tener muy en cuenta y es que su signo depende de su dirección, es decir que si contáramos en las cantidades si es una cantidad positiva o negativa tendríamos que tener en cuenta algo más que la magnitud.´´*
• *´´VERDADERO Digo que sí porque si tienes un instrumento de medida más pequeño que lo que vas a medir no vas a poder hacer nada´´*	• *´´FALSO: no es verdadero ya que, en la naturaleza, las cantidades se pueden medir con otros aspectos como lo son el volumen, el peso y otros.´´*
Pregunta 8: Según su experiencia en lo que va cursado en matemáticas, ¿tendrá sentido hablar de áreas o volúmenes con signo? A. Si b. No	
• *´´Si porque desde un punto de vista gráfico si se puede hablar de volúmenes y áreas negativas ya que un plano está dividido en varios sectores´´*	• *´´NO Porque las áreas y los volúmenes hacen parte de objetos tangibles, por tal motivo no pueden ser áreas negativas.´´*
• *´´Si porque el signo de las áreas tiene que con el ángulo que se forma de dos vectores, si este ángulo es obtuso su signo va ser negativo mientras que si es agudo será positivo.´´*	• *´´No, porque el área o volumen es una cantidad o una magnitud no importa su signo esta se conservaría la misma, lo único que influiría el signo es su sentido o desplazamiento´´*
• *´´SI porque no se necesita una comparación en este caso, desde que ya se tiene una idea del comportamiento de las gráficas con valores numéricos y direcciones, así que si influye el signo, aunque este únicamente ese ejercicio.´´*	• *´´NO ya que mi punto de partida para contar el área o volumen de algo empieza desde cero, siendo esta cantidad desde la que parte.´´*
• *´´NO porque depende de los factores volumen… entre otras cosas para así poder hablar de áreas negativas.´´*	• *´´SI PORQUE Ejemplos de áreas negativas se ven en matemáticas cuando, por ejemplo, definimos la integral como el área bajo la curva. ´´*

Fuente*: Autor*

Análisis: Teniendo en cuenta la metodología planteada se aplicó una prueba de entrada a 32 estudiantes del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal la cual consta de 9 preguntas; 6 de selección múltiple y 3 de pregunta abierta cuyas respuestas se pueden observar en las tablas anteriores. Según las respuestas de los estudiantes se evidencia cómo ellos en parte poseen intuitivamente un pensamiento vectorial, que se verá reforzada con las actividades propuestas para tal fin. Esta prueba fue aplicada con el fin de identificar los conocimientos previos al curso y modos del pensamiento vectorial de los estudiantes y cómo abordan los problemas matemáticos desde un punto de vista vectorial para tratar de darle solución óptima y coherente.