Programa de Doctorado en Educación Matemática

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO: RELACIONES Y APORTES MUTUOS ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPETICIONES Y LA TEORÍA SOBRE COMPETENCIAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Juan Samuel Rangel Luengas

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO: RELACIONES Y APORTES MUTUOS ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPETICIONES Y LA TEORÍA SOBRE COMPETENCIAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Autor: Juan Samuel Rangel Luengas

Director de tesis: Dra. María Falk de Losada

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. junio 2022

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi sincera gratitud a todas las personas que han contribuido de diversas formas a la realización de esta tesis doctoral. Sin su apoyo, dedicación y aliento, este logro no habría sido posible.

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora María Falk de Losada por su orientación experta, paciencia y compromiso a lo largo de todo el proceso de investigación. Su sabiduría y experiencia fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo, y estoy profundamente agradecido por su guía constante.

También quiero extender mi agradecimiento a los miembros de mi comité de tesis: Dr. José Nieto, Dr. Gerardo Chacón y al Dr. Nicolás Bolívar, por su valiosa contribución, sugerencias y comentarios constructivos que enriquecieron considerablemente este estudio. Sus perspectivas y conocimientos fueron invaluables para ampliar mi comprensión del tema.

No puedo dejar de mencionar a mis profesores: Dra. Mary Falk de Losada, Dra. Diana Carolina Pérez Duarte, Dr. Miguel Ángel Borges Trenard, Dr. Rafael Sánchez Lamoneda y de forma especial al Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez y al Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero por su acompañamiento y sus contribuciones al trabajo final. Todos ustedes me brindaron un entorno de trabajo estimulante y colaborativo. Sus ideas, discusiones y comentarios fueron de gran importancia para mi desarrollo como investigador.

Además, deseo agradecer a mi pareja, familia y amigos por su apoyo incondicional a lo largo de este arduo camino. Sus palabras de aliento, comprensión y amor me dieron la fuerza necesaria para superar los desafíos y perseverar hasta el final.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a todos los estudiantes que colaboraron como participantes en este estudio. Su generosidad al compartir su tiempo y conocimientos fue esencial para la recolección de datos y el análisis posterior.

En resumen, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de alguna manera a la realización de esta tesis doctoral. Su apoyo y colaboración han dejado una huella imborrable en mi trayectoria académica y personal.

¡Gracias!

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de tesis doctoral a las personas que han sido fundamentales en mi vida y que han brindado un apoyo incondicional a lo largo de esta ardua travesía.

A mi familia, mis hermanos, en especial a mi madre, mi pareja y mi hija, por su amor, paciencia y comprensión. Gracias por ser mi fuente de inspiración y por alentarme en cada paso que he dado. Su constante apoyo emocional y sacrificio han sido el pilar fundamental de mi carrera académica.

A mis colegas y colaboradores, por su valiosa contribución, discusiones estimulantes y perspectivas enriquecedoras. Agradezco su participación en este proyecto y por compartir su experiencia y conocimientos.

A todas las personas que, de una forma u otra, han dejado una huella en mi camino académico y personal, mi más sincero agradecimiento. Este logro no habría sido posible sin su presencia en mi vida.

SÍNTESIS

Esta investigación de enfoque cualitativo se apoya en métodos cuantitativos y la educación matemática como ciencia del diseño con el propósito de acercar dos marcos referenciales diferentes: la teoría sobre las competencias por una parte y las competiciones matemáticas que centran su atención en la solución de problemas retadores por otra, al contrastar problemas tipo PISA y Tipo Olimpiada.

Algunos países presentan su propuesta curricular en términos de competencias, mientras que la comunidad matemática científica continúa en el proceso de solucionar problemas que permitan el avance de la teoría. En los dos enfoques se centra la atención en la solución de problemas y se utilizan problemas con características diferentes.

Se concluye que existe dependencia estadística entre las estrategias y los problemas propuestos, algunas estrategias indican un mayor avance en el desarrollo del pensamiento matemático y, que el número de estrategias utilizadas es un indicador común de avance positivo en los dos enfoques. Los dos tipos de problemas son pertinentes para el aula regular, aunque los resultados muestran que los problemas tipo Olimpiadas permiten aplicar más estrategias.

Finalmente, también para los estudiantes los dos tipos de reto son importantes y complementarios, porque permiten el trabajo creativo, los procedimientos abiertos y el trabajo divertido vs el enfoque metódico con procedimientos cerrados y especializados.

ABSTRACT

This qualitative approach research is supported by quantitative methods and mathematics education as a design science with the purpose of bringing together two different reference frameworks: the theory on competencies on the one hand and mathematical competitions that focus on the solution of challenging problems on the other hand, by contrasting PISA-type and Olympiad-type problems.

Some countries present their curricular proposals in terms of competencies, while the scientific mathematical community continues in the process of solving problems that allow the theory to advance. Both approaches focus on problem solving and use problems with different characteristics.

It is concluded that there is statistical dependence between the strategies and the proposed problems, some strategies indicate a greater progress in the development of mathematical thinking, and that the number of strategies used is a common indicator of positive progress in the two approaches. Both types of problems are relevant for the regular classroom, although the results show that the Olympiad-type problems allow the application of more strategies.

Finally, also for the students the two types of challenges are important and complementary, because they allow creative work, open procedures and fun work vs. the methodical approach with closed and specialized procedures.

- **INDICE**

- **INTRODUCCIÓN**

La presente investigación inició con la pregunta: ¿Qué pueden aportar las competiciones de resolución de problemas matemáticos retadores a las teorías de la disciplina denominada educación matemática? Para el caso particular la pregunta se fue refinando hasta llegar a considerar la teoría específica de Mogens Niss y sus colaboradores en la cual se delinea las competencias matemáticas o lo que significa ser matemáticamente competente. Esta teoría es importante en la medida que influencia el marco teórico de las pruebas del proyecto PISA y a su vez el currículo colombiano, al igual que muchos otros currículos a nivel mundial, y, por consiguiente, las clases en el aula regular. Pero también, y es el interés de esta investigación, porque define el enfoque del aprendizaje hacia un estudiante *matemáticamente competente*. Conjuntamente, se fueron refinando los aspectos de las competiciones de resolución de problemas en las que se identifica un enfoque diferente porque pretenden que los participantes en las competiciones *desarrollen el pensamiento matemático*, permitiéndoles encaminarse hacia su nivel personal óptimo en matemáticas por medio del desarrollo de actividades matemáticas más desafiantes. De esta manera, se propone el contraste de dos direcciones; por una parte, el enfoque con la perspectiva de las competencias que centra su atención en el entendimiento y que es al que más se exponen los estudiantes de aula regular, y por otra, el enfoque de las olimpiadas hacia el desarrollo del pensamiento matemático. Así, este trabajo reúne varios temas de debate e investigación tratados en congresos internacionales (TSG 17 Problem posing and solving in mathematics education, y TSG 46 Mathematical Competitions and other challenging activities, ICME 14 — International Congress on Mathematical Education), la solución de problemas, la evaluación en matemáticas, las competiciones matemáticas y las teorías de educación matemática en actual vigencia.

¿Porque la teoría de competencias propuesta por Mogens Niss y sus colaboradores?

Primero, es el resultado del proyecto danés KOM (competencias y aprendizaje de las matemáticas) y es un proyecto que ha sido muy reconocido en educación matemática, al punto que sus resultados han marcado pautas para diferentes investigaciones a nivel internacional. Segundo, el impacto más notable se encuentra en la influencia de sus resultados sobre la definición de alfabetización matemática para las pruebas PISA promovidas por la OCDE (Weatherby, 2016). La definición de competencia propuesta en el informe KOM es más amplia, y la alfabetización matemática se considera una condición necesaria pero no suficiente, de la competencia en matemáticas definida por el proyecto (Niss, 2015). Tercero, el lenguaje de competencias es altamente relevante en la evaluación externa internacional (Stacey y Turner, 2015; Turner et. al, 2015) y es evidente el uso de los resultados del proyecto KOM, así lo presenta el marco de las pruebas PISA 2012.

Por último, en Colombia, recientemente el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para el área de matemáticas propone que los estudiantes sean matemáticamente competentes y *"…ser matemáticamente competente no se relaciona tanto con el despliegue de una lista de conocimientos, como sí con la capacidad de reconocerlos, relacionarlos, organizarlos y utilizarlos, de forma eficiente y eficaz en resolución de problemas…se asume la actividad matemática de resolución de problemas como el macro-proceso alrededor del cual se articulan, desarrollan y estructuran los otros procesos… la modelación, la comunicación, el razonamiento, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos"*[1].

Así, desde la normativa curricular, con los Estándares Básicos de Calidad - EBC (2006), los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las mallas de aprendizajes estructurantes, se proponen desarrollar las competencias: comunicación y representación, razonamiento y argumentación, y modelación,

[1] MEN y Universidad de Antioquia (2016). Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas. *Contrato Interadministrativo 0803 de 2016.* Colombia. p. 33.

planteamiento y resolución de problemas (MEN y UdeA, 2016). Por otra parte, en Colombia desde 1981 la Universidad Antonio Nariño -UAN- ha apoyado el proyecto Olimpiadas Matemáticas cuyo objetivo es permitir a cada estudiante lograr su nivel personal óptimo en matemáticas, y fue vinculando nuevas áreas de la ciencia con el propósito de contribuir a la calidad y mejoramiento del sistema educativo para lograr la excelencia en el estudio de las ciencias. Por esta razón, uno de los objetivos estratégicos de la UAN ha sido ampliar la participación de estudiantes de educación básica y media a nivel nacional.

Las Olimpiadas se centran en una de las ocho sub-competencias planteadas por el grupo danés KOM bajo el liderazgo de Mogens Niss, que es la resolución de problemas retadores (central en el doctorado), sumado a la efectividad de la resolución de problemas como metodología de trabajo en el aula (comprobada en las diferentes investigaciones de la UAN, tanto en la maestría como en el doctorado), con el propósito de incidir en el desarrollo del pensamiento matemático.

Además de lo tratado en los congresos internacionales, de la distinción de Harel (2008b) del razonamiento matemático en formas de entender y forma de pensar, de la propuesta de dominio de la matemática de Niss y sus colaboradores (2003a, 2003b, 2015, Niss & Højgaard, 2019), se suma el planteamiento de Schoenfeld (2001) de que la investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales, uno puro y otro aplicado; el puro (ciencia básica) se dedica a entender la naturaleza del pensamiento matemático, y de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y el aplicado, se ocupa de usar esos entendimientos para desarrollar el pensamiento matemático del estudiante (Schoenfeld ,1992)). Entonces, se plantea como problema lo siguiente.

En 2002 el grupo KOM (ver Niss & Højgaard, 2011) bajo la dirección de Mogens Niss, se preocupó por definir qué era necesario para considerar que alguna persona *domina la matemática*, en un rango amplio, sin importar el nivel académico ni los contenidos matemáticos a trabajar. Como resultado de ese propósito, se estableció lo que se define como la competencia matemática. El impacto de esta propuesta ha sido considerable -tanto amplio como profundo-, porque fue tomada en cuenta por el proyecto PISA para redefinir sus pruebas en 2012. Recientemente, Mogens Niss ratifica los resultados del proyecto KOM y define un conjunto de subcompetencias asociadas a la competencia matemática, incluida la solución de problemas (Niss & Højgaard, 2019).

La UAN utiliza como metodología en el aula el aprendizaje por medio de la solución de problemas, pero en diferentes contextos se puede considerar la solución de problemas como un tipo especial de competencia que deriva en diferentes actos mentales, formas de entender y formas de pensar (Harel, 2021). Sin embargo, existe un desacuerdo en la posición que están tomando algunos países frente a los resultados de los exámenes PISA, reduciendo los objetivos de la educación matemática con el propósito principal (único) de figurar bien en esos exámenes. Es claro que las pruebas conllevan su grado de dificultad, pero centrarse en las competencias puede verse como poner atención solo en el entendimiento al punto que no se busque enriquecer el desarrollo del pensamiento matemático.

En contraposición, un aspecto muy importante en el doctorado de la UAN y en las olimpiadas matemáticas es la construcción de significado robusto, de tal forma que los conceptos, puestos en juego, habilitan al estudiante para pensar matemáticamente, es decir, solucionar problemas y además establecer conexiones entre distintos contenidos matemáticos. Entonces, se propone el siguiente **problema**: *¿Cuáles son las contribuciones mutuas entre las competiciones de solución de problemas matemáticos y la teoría de competencias matemáticas del grupo KOM bajo la orientación de Mogens Niss?*

Se precisa como **objeto de investigación**: Caracterizar el pensamiento matemático que se pretende desarrollar en competiciones matemáticas y en el enfoque de competencias matemáticas (ser matemáticamente competente). Y como **objetivo de la investigación** se tiene: avanzar en la caracterización del pensamiento matemático al contrastar el enfoque de competencias y la clase de problemas que se encuentran en exámenes como el PISA con el enfoque de desarrollo del pensamiento matemático y la clase de problemas que se encuentran en las competiciones y en particular en el Canguro Matemático y la Olimpiada colombiana de matemáticas.

El **campo de acción** se enfoca en la: Teoría de competencias matemáticas de Mogens Niss et al. y soluciones completas a problemas de competición de primaria y primer nivel (10-14 años).

A continuación, se precisan para guiar la investigación las siguientes **Preguntas científicas**:

- ¿Qué se observa (en términos de pensamiento matemático) en las soluciones completas a problemas de los estudiantes participantes en la ronda final de las olimpiadas matemáticas de primaria? ¿Cómo utilizar lo observado para elaborar el sistema de actividades? y ¿Qué aportan los resultados (I) en el propósito de observar y analizar soluciones obtenidas con estudiantes del aula regular de matemáticas?
- ¿Qué se observa (en términos de pensamiento matemático) en las soluciones realizadas por estudiantes en entrenamiento para olimpiadas de primer nivel (sexto y séptimo grados) al solucionar actividades que contrastan problemas del tipo PISA y problemas del tipo olimpiadas?, ¿Cuál es la percepción emocional acerca de los dos tipos de retos? ¿Qué sugerencias surgen en pro de mejorar el sistema de actividades? ¿Qué aportan estos resultados (II) en el propósito de observar y analizar soluciones obtenidas con estudiantes del aula regular de matemáticas?
- ¿Qué se observa (en términos de pensamiento matemático) en las soluciones realizadas por estudiantes de aula regular al solucionar actividades que contrastan problemas del tipo PISA y problemas del tipo olimpiadas (Canguro)?, ¿Cuál es la percepción emocional acerca de los dos tipos de retos? ¿Qué puede decirse desde los resultados (III) acerca del enfoque de competencias y la clase de problemas que se encuentran en exámenes como el PISA primero, y desde el enfoque de desarrollo del pensamiento matemático y la clase de problemas que se encuentran en las competiciones matemáticas? ¿Cómo se contrasta con lo observado en los resultados I y II?

- ¿En qué aspectos la teoría de competencias del grupo KOM dirigido por Mogens Niss se corrobora desde lo observado empíricamente al desarrollar problemas del enfoque de competiciones matemáticas? ¿Cuáles son los diferentes puntos de convergencia y/o divergencia entre la propuesta teórica de MN y colaboradores y el marco de las competiciones matemáticas?

A continuación, se presentan las siguientes **tareas de investigación**:

- Fundamentar teóricamente la tesis.
- Elaborar el estado del arte.
- Aplicar la metodología de la ciencia del diseño de Prediger, Gravemeijer, & Confrey (2015) para pilotear, clasificar y elegir lo referente a las actividades y su implementación. Estudiar soluciones seleccionadas de problemas realizadas por estudiantes en olimpiadas matemáticas de primer nivel, tanto en problemas del Canguro Matemático como problemas de solución completa que ya han sido evaluadas y contrastar con lo observado empíricamente con estudiantes del aula regular de matemáticas.
- Revisar y estudiar soluciones completas seleccionadas de problemas realizadas por estudiantes de aula regular (12 a 14 años) tanto a problemas del Canguro Matemático como problemas del tipo PISA y determinar el contraste con lo observado con estudiantes participantes o en entrenamiento para olimpiadas.
- Proponer y revisar las soluciones completas a los problemas del tipo PISA realizadas por estudiantes en entrenamiento para olimpiadas matemáticas de primer nivel, así como de grado séptimo de aula regular.
- Aplicar un enfoque mixto de análisis de los resultados a fin de proponer resultados teóricos derivados de la triangulación de las etapas realizadas en la tesis.

El **aporte teórico** radica en caracterizar el pensamiento matemático observado en las soluciones presentadas por estudiantes olimpiadas y aula regular al contrastar e identificar fortalezas y/o limitaciones del enfoque de desarrollo de competencias del grupo KOM y la clase de problemas que se encuentran en exámenes como el PISA, con el enfoque de desarrollo del pensamiento matemático y la clase de problemas que se encuentran en las competiciones como el Canguro matemático y las Olimpiadas colombianas de matemáticas.

El **aporte práctico** consiste en conjunto de actividades diseñadas y evaluadas desde el enfoque de la educación como una ciencia del diseño, que permite contrastar el enfoque de competencias y la clase de problemas que se encuentran en exámenes como el PISA con el enfoque de desarrollo del pensamiento matemático y la clase de problemas que se encuentran en las competiciones matemáticas, aplicado con estudiantes de aula regular.

- **CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE**

Al indagar en bases de datos especializadas por investigaciones en educación matemática que relacionan el pensamiento matemático y la resolución de problemas, se encuentra en los últimos años un gran volumen de información (más de 5000 registros). Este indicador de interés de los investigadores por esta línea de trabajo permite plantearse una búsqueda más detallada, seleccionando una muestra de 51 artículos, entre el 1999 y el 2022, con mayor concentración en la última década, como lo presenta la Figura 2-1.

Figura 2-1 Diferenciación por año de las publicaciones seleccionadas. Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presenta un breve análisis exploratorio de los documentos. En la nube de palabras (ver Figura 2-2), puede observarse que esas investigaciones centran su interés en diferentes combinaciones de las palabras con mayor representación. Así, se aborda la resolución de problemas matemáticos, el pensamiento matemático en la solución de problemas, el pensamiento matemático en la escuela, además de la investigación y el trabajo con los estudiantes con el propósito de mejorar el aprendizaje, las habilidades y su conocimiento.

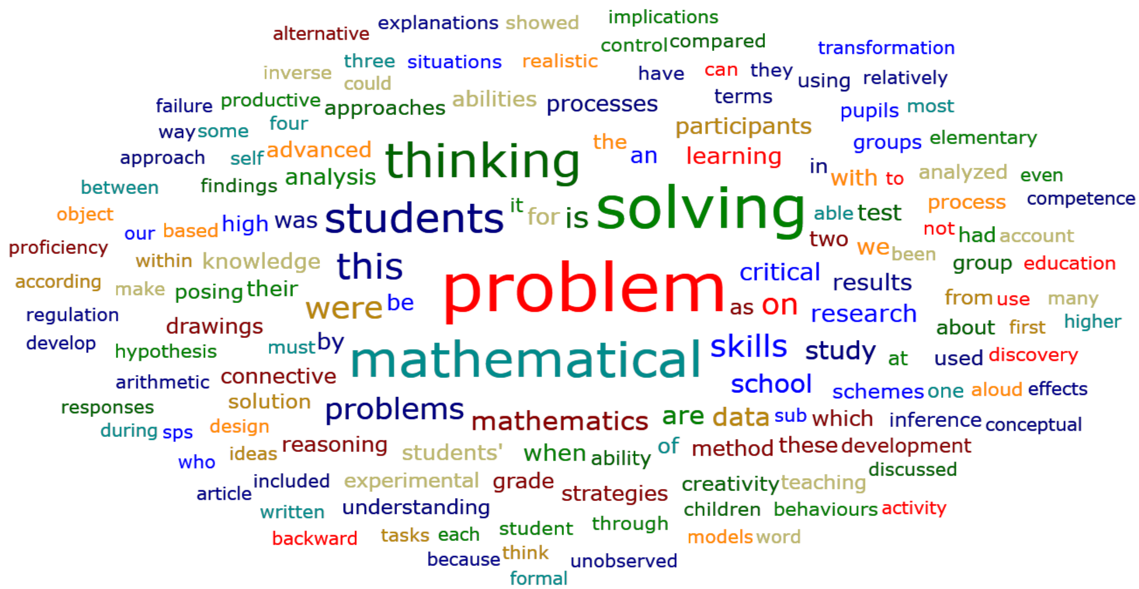


Figura 2-2 Nube de palabras más utilizadas en los artículos 63 seleccionados. Fuente: elaboración propia.

Además, clasificando las investigaciones por métodos lexicométricos, se identifican tres grandes grupos de investigaciones. El primer grupo hace referencia a investigaciones que están basadas en la resolución de problemas, y que se centran en el impacto de las dificultades de aprendizaje, la adquisición de habilidades o la enseñanza en diferentes asignaturas incluyendo la estadística inferencial (Siau (2003), Koichu (2010), Carroll & Kemp (2015), Ostad-Ali-Askari & Shayannejad (2015). (2015), Pighin et al. (2017), Yasin et al. (2020)).

El segundo grupo está conformado por los artículos de Blum & Niss (1991), Kapa (1999), Doerr & English (2003), Robinson (2003), Hino (2007), Bloom (2007), Klein et al. (2007), Triantafillou & Potari (2010), Van Harpen & Sriraman (2013), Hashemi et al. (2015), Polotskaia et al. (2015), Karlsson Wirebring et al. (2015), Barros-Castro et al. (2015), Lotero et al. (2017), Freiman et al. (2017), Pappas et. al (2018), Tasni et al. (2019), Asari et al. (2019), Koichu, B. (2020) y Xin et al. (2020). Las investigaciones de este grupo tienen su interés en la solución de problemas desde el modelamiento matemático y el avance cognitivo, con la característica que centran su atención hacia la labor del profesor, la importancia de la investigación, la experiencia del trabajo del maestro y el uso de las tareas en contexto.

Por otra parte, en el tercer grupo se encuentran artículos de Cooper & Harries (2003), Meija & Bisenieks (2004), Fujita (2004), Nunokawa (2006), Koichu et al. (2007), Koichu & Harel (2007), Swartjes, Vromen & Bloom (2007), Jacob et al. (2009), Alsawaie (2012), Bayazit, (2013), Kashefi, et al. (2013), Surya et al. (2013), Wedelin et al. (2015), Singer, Ellerton & Cai (2015), Özca et al. (2017), Sujadi & Masamah (2017), Sung et al. (2017), Witherspoon et al. (2017), Lambertus et al (2019), Osman et al. (2019), Abdullah et al. (2019), Basri et al (2019), Popat & Starkey (2019), Cutumisu & Guo (2019), Turmudi, & Susanti, E. (2020), Wahyudi et al. (2020, 2021), Salangsang & Subia (2020), Ahdhianto et al. (2020), Hamilton et al. (2020), Szabo et al. (2020), Kirisci et al. (2020) y Koichu, Cooper & Widder (2022). En este grupo se reportan investigaciones que enfatizan en la solución de problemas, algunas relacionadas con la ingeniería y la computación, pero centradas en el uso de la heurística y la conectividad. En estos trabajos, se hacen comparaciones y análisis del avance conceptual en el aula de clase y el desarrollo de habilidades, y reportan su interés por el desarrollo del pensamiento matemático y la creatividad.

En este amplio panorama de investigaciones, las del grupo tres son las más cercanas al interés de la presente tesis. Como metodología, se realiza la lectura y relectura de los documentos y después se agrupan, teniendo como criterio la intencionalidad, objetivos de la investigación y los resultados de las investigaciones. Se concluye que los artículos elegidos para este epígrafe se pueden clasificar en tres grupos: El primer grupo (I), Investigaciones sobre competencias matemáticas enfocadas desde la resolución o planteamiento de problemas como habilidad o capacidad a desarrollar, el segundo (II) Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución y planteamiento de problemas y el tercer grupo (III), investigaciones que presentan posibles acercamientos entre las Competiciones (olimpiadas) a la competencia matemática y la matemática escolar, este grupo final, ha sido enriquecido por la revista ZDM en el volumen 54 (No. 5) de octubre del 2022, dedicando 13 artículos a las competiciones y su relación con la educación matemática.

A continuación, se presenta con mayor detalle una breve descripción de cada investigación al interior de cada categoría.

1.1 Investigaciones sobre competencias matemáticas enfocadas desde la resolución o planteamiento de problemas como habilidad o capacidad a desarrollar

Las investigaciones de este epígrafe tienen como característica el uso de la resolución de problemas para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Son investigaciones en educación matemática que involucran la solución y el planteamiento de problemas en las cuales se analizan diferentes enfoques de enseñanza con el propósito de mejorar la comprensión y el entendimiento durante el aprendizaje por medio de la solución de problemas. Algunos utilizan los problemas de palabras o problemas verbales como parte fundamental de sus trabajos. Son investigaciones cualitativas o teóricas que analizan procesos de enseñanza, habilidades de pensamiento, el estudio de esquemas, así como las ideas, estrategias y creatividad utilizadas por los estudiantes al enfrentar problemas matemáticos.

1.1.1 Improving of junior high school visual thinking representation ability in mathematical problem solving by CTL[2]

Surya et al. (2013) desarrollan un enfoque cuasi experimental en su investigación que utiliza un análisis factorial de 2 x 3. Se comparan dos enfoques de aprendizaje: el contextual (CTL) y el aprendizaje convencional (KV) en cuatro clases (169 estudiantes), clasificadas en tres grupos de acuerdo con sus

[2] Surya, E., Sabandar, J., Kusumah, Y. S., & Darhim. (2013). Improving of junior high school visual thinking representation ability in mathematical problem solving by CTL. Journal on Mathematics Education, 4(1), 113–126. https://doi.org/10.22342/jme.4.1.568.113-126

conocimientos matemáticos (alto, medio y bajo). El grupo experimental se trató con la metodología contextual y el grupo control con el aprendizaje convencional.

En este estudio, se utilizan como instrumentos de investigación una prueba, la observación y la entrevista, centrándose en la aplicación del modelo de aprendizaje contextual, en un esfuerzo por mejorar la capacidad de representación visual de los estudiantes de secundaria, pensando en categorías de habilidades matemáticas tempranas de los mismos (alta, media y baja).

Surya et. al. (2013) encuentran dificultades en los estudiantes en el entendimiento del problema, el dibujo de diagramas, la lectura correcta de los gráficos, además de la comprensión matemática formal. Sin embargo, según los resultados presentados, el enfoque CTL aumenta la capacidad de representación matemática en todos los niveles en comparación con el enfoque convencional.

Los autores concluyen que la capacidad de representación visual del pensamiento (RVT) de los estudiantes en los tres grupos aumenta significativamente, especialmente en el grupo considerado de bajo conocimiento. Así, se presenta una interacción entre los enfoques de enseñanza y las habilidades matemáticas básicas de los estudiantes, con el propósito de mejorar la capacidad de representación visual de los escolares.

1.1.2 Duality of mathematical thinking when making sense of simple word problems: Theoretical essay[3]

El documento presenta un ensayo en el que se propone una reflexión sobre las dificultades de aprendizaje que experimentan los estudiantes al aprender a resolver problemas de adición y sustracción, y los enfoques pedagógicos relacionados con la resolución de problemas aritméticos presentados verbalmente

[3] Polotskaia, E., Savard, A., & Freiman, V. (2015). Duality of mathematical thinking when making sense of simple word problems: Theoretical essay. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11(2), 251–261. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1325a

o “en palabras”. Se cuestiona el desarrollo de las habilidades verbales (“de palabras”) en los primeros cursos de la escuela primaria, por dos motivos, primero, la reversibilidad de las operaciones aritméticas y la flexibilidad del pensamiento matemático son los elementos clave de las matemáticas elementales, y segundo, porque se esperan cambios en la comprensión de este conocimiento en los estudiantes.

Polotskaia, Savard y Freiman (2015) exponen la importancia del diseño de actividades y tareas para involucrar a los estudiantes en un análisis holista de la estructura del problema y apoyarlos para desarrollar la reversibilidad/flexibilidad del pensamiento matemático. El artículo utiliza el cuento popular "Los tres cerditos" como metáfora, porque, para los autores, el conocimiento puede elaborarse como las tres casas del cuento, primero de paja, luego de madera y finalmente de ladrillo.

Los autores sugieren que los problemas de palabras del tipo “*Pierre tenía 8 canicas. Luego ganó algunas canicas. Ahora tiene 13 canicas. ¿Cuántas canicas ha ganado?”* deberían utilizarse principalmente como tareas de resolución de problemas en los primeros cursos. Tareas matemáticamente similares, como resolver problemas aditivos sencillos, pueden implicar procesos cognitivos muy diferentes, y muestran que no todas las tareas se ajustan a los estudiantes en pro de un conocimiento sólido.

Por otra parte, traer a cuenta para los estudiantes la necesidad de un análisis holista de la estructura del problema debe ser reconocido como objetivo explícito de la enseñanza en la educación matemática elemental. De lo contrario, corren el riesgo de acercarse a los problemas de palabras de forma instrumental y se puede desplazar su desarrollo potencial de conocimientos llevándolos hacia el estancamiento en el aprendizaje.

Por último, en el documento los autores sugieren que las teorías de enseñanza existentes no abarcan plenamente la relación entre el uso de conocimientos previos y el desarrollo de conocimientos nuevos, y proponen que la neuroeducación puede ser una buena fuente de nuevas ideas.

1.1.3 An investigation of problem-solving approaches, strategies, and models used by the 7th and 8th grade students when solving real-world problems[4]

El artículo relata una investigación cualitativa realizada con 116 estudiantes en la que se examinan los enfoques y procesos de pensamiento mostrados por los alumnos de primaria al resolver problemas del mundo real aplicando las ideas de Freudenthal (1991). Los datos se obtienen a partir de una prueba escrita y de entrevistas semiestructuradas examinadas mediante métodos de análisis de contenido y del discurso.

El análisis de la solución de seis problemas permite observar que la mayor parte de los estudiantes ignoran las situaciones de la vida real con las que se relacionan los problemas. Los métodos de solución usados eran rutinarios, están aplicados sin reflexión y no se buscaron maneras alternativas. Además, las soluciones están orientadas hacia los resultados y no hacia los procedimientos. Por esta razón, se concluye que los enfoques no realistas de los estudiantes, los lleva a aplicar reglas y procedimientos en busca de una respuesta sin reflexionar acerca de la situación realista que se les propone. Así, en el caso de los modelos presentados por los estudiantes, estos eran inadecuados y no les permitieron avanzar en la solución, ni tampoco alcanzar los objetivos de aprendizaje.

Según los autores, la construcción de modelos adecuados sería un tema fundamental en el aula de clase, aunque no suficiente para avanzar en el planteamiento de juicios realistas con relaciona a los problemas de la vida real. Entonces, es necesario avanzar en los juicios, en interacción con los enunciados de los problemas, en pro de concepciones más ajustadas a lo real del problema.

---

[4] Bayazit, I. (2013). An investigation of problem-solving approaches, strategies, and models used by the 7th and 8th grade students when solving real-world problems. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 13(3), 1920–1927. https://doi.org/10.12738/estp.2013.3.1419

Por último, Bayazit (2013) propone la resolución de problemas como una actividad orientada al proceso, en el que los profesores deben apreciar lo que los estudiantes hacen más que los resultados que obtienen. Recomienda que se permita a los alumnos trabajar en problemas cuya solución requiere ser flexible en el pensamiento, adoptar diversos enfoques, utilizar estrategias y modelos adecuados, e incorporar el pensamiento creativo y crítico en la solución.

1.1.4 Analysis of sixth grade students' think-aloud processes while solving a non-routine mathematical problem[5]

El artículo trata un estudio cualitativo cuyo objetivo es investigar los procesos de pensar en voz alta de 24 alumnos de grado sexto, mientras resuelven un problema de matemáticas, utilizando como método el estudio de casos. Özcan, İmamoğlu y Bayraklı (2017) afirman que la solución de problemas permite el desarrollo de las habilidades de los estudiantes en pro de una mejor comprensión de las matemáticas y mencionan diferentes estudios en que los datos se recogen de forma escrita o verbal donde resaltan el "método de pensar en voz alta" elegido para el estudio que presentan. En consecuencia, el proceso de pensamiento en voz alta de cada estudiante se graba en vídeo, luego se transcribe, se codifica y se categoriza.

Los resultados indican que los estudiantes tienen dificultades para expresar sus pensamientos durante el proceso de resolver un problema. La mayoría de los estudiantes realizan operaciones con los números dados, pero no dedican tiempo a la comprensión del problema, lo que se considera una debilidad. Entonces, reformular un problema con propias palabras, y pensar en lo que el problema ofrece con relación a lo que el problema pide, es un indicador fuerte de la comprensión del problema siendo el primer paso en su proceso de resolución. Los autores sugieren que el método de proceso de solución en voz

[5] Özcan, Z. Ç., İmamoğlu, Y., & Bayraklı, V. K. (2017). Analysis of sixth grade students' think-aloud processes while solving a non-routine mathematical problem. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 17(1), 129–144. https://doi.org/10.12738/estp.2017.1.2680

alta puede ser útil para determinar áreas específicas de dificultad en habilidades de procesamiento de los estudiantes, diferentes tipos de errores, y estrategias utilizadas durante el proceso de resolución de problemas.

1.1.5 Anticipating failure of students' productive connective thinking transformation in solving mathematical problems[6]

Para los autores el establecer conexiones matemáticas es necesario en el proceso de resolución de problemas ya que representa un esfuerzo para encontrar soluciones basadas en los conocimientos que tienen los estudiantes. En su investigación justifican que al resolver problemas es necesaria la capacidad de los estudiantes para asociar ideas matemáticas de un dominio con ideas que han asociado a otros dominios y lo consideran un proceso cognitivo del pensamiento.

En la investigación se observa que los estudiantes no transforman las estrategias de pensamiento adecuadas, lo que hace que fracasen en el pensamiento conectivo, porque el sujeto no realiza una adecuada estrategia de transformación tras la reflexión. Esta condición se produce porque las ideas de conexión que se han construido no se han podido completar y quedan vacíos en la construcción. Por lo tanto, aún no han surgido nuevas ideas que puedan formar un esquema de red de pensamiento para ser interpretado en el proceso de resolución de problemas.

Según Tasni, Nusantara, Hidayanto y Sisworo (2019) para anticipar el fracaso en la resolución de problemas matemáticos y así alcanzar el éxito en el proceso de aprendizaje, los estudiantes deben ser capaces de: desarrollar sus ideas para elaborar una planificación más madura con el fin de encontrar

---

[6] Tasni, N., Nusantara, T., Hidayanto, E., & Sisworo. (2019). Anticipating failure of students' productive connective thinking transformation in solving mathematical problems. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 8(9), 392–400. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85073419230&partnerID=40&md5=ed6f96ed1d6f7254cae3b7177ca5637e

varias estrategias de resolución; identificar los errores cometidos en el proceso de cálculo mediante el proceso de verificación de datos; comprender bien los conceptos básicos en la construcción de soluciones de problemas; realizar una verificación sistemática y exhaustiva del proceso de resolución de problemas; y tener una motivación positiva y confianza en sí mismos para desarrollar ideas de conexión basadas en su reflexión y experiencia en la resolución de problemas.

1.1.6 Productive connective thinking scheme in mathematical problem solving[7]

El propósito de esta investigación es describir la formación de esquemas productivos de pensamiento conectivo en el proceso de la resolución de problemas matemáticos teniendo como referencia cuatro fases: cognición, inferencia, formulación y reconstrucción. Es un estudio cualitativo, en el que la muestra está conformada por 24 estudiantes de duodécimo curso, clasificados de alto rendimiento, al interior de tres escuelas de Indonesia. Se recopilan datos sobre los esquemas de pensamiento productivo de los participantes, grabaciones en voz alta y transcripciones de entrevistas, lo que permite la triangulación de datos.

Según Turmudi y Susanti (2020), los resultados muestran una descripción de la formación de esquemas de pensamiento conectivo productivo cuando los estudiantes pasan por cada una de las cuatro fases mencionadas de resolución de problemas. En la fase de cognición, se describe la relación entre el problema y la intención de explorar direcciones de solución. Los autores resaltan que, las ideas surgen mientras se quiere comprender las características y posibles causas interrelacionadas del problema.

Durante la fase de inferencia, la intención de los estudiantes es encontrar la información base para la resolución que permita una inferencia razonable y lógica, así aparecen ideas de solución, ideas de

---

[7] Turmudi, & Susanti, E. (2020). Productive connective thinking scheme in mathematical problem solving. *Pertanika Journal of Social Sciences and Humanities*, 28(1), 293–308. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-&partnerID=40&md5=b1defbe855f1d391a6fc5d750205140d

generalización e ideas basadas en la experiencia. Todas estas ideas, tienen la misma relevancia y significado, lo que constituye una sólida red de pensamiento.

En la fase de formulación los estudiantes avanzan en verificar el problema, adquirir los conocimientos y se forma lo que los autores denominan *el esquema*, que pretende apoyar el proceso de generalización y requiere de los estudiantes altas capacidades tanto espaciales, como de abstracción. Por último, está la fase de reconstrucción, que para los autores es un período importante porque permite mirar hacia atrás, evaluar y reconstruir todo el proceso de resolución de problemas, y de esta manera abre la posibilidad de crear nuevos problemas. Entonces, esta reconstrucción del esquema de redes de pensamiento inicial permite evolucionar a un nuevo esquema de pensamiento conectivo que puede ser utilizado en el dominio de la resolución de problemas más complejos.

En conclusión, la descripción de los esquemas se finaliza en relación directa con las características y condiciones que generan el problema, luego de ser determinadas por los estudiantes y, además, de la forma en que los participantes hacen asociaciones entre las ideas. Se observa que la estructura de pensamiento de los estudiantes se ajusta a la estructura del problema y, al resolver el problema, los participantes forman esquemas de pensamiento constructivo, denominados esquemas de generalización que, según los investigadores, requieren una alta capacidad del manejo espacial y la abstracción.

1.1.7 Mathematical thinking on problem solving and self-regulation: strategies of filipino primary grade pupils[8]

Esta investigación explora el pensamiento matemático sobre la resolución de problemas y las estrategias de autorregulación de diez estudiantes filipinos de la escuela primaria en una zona urbana. Cada

[8] Salangsang, L. G., & Subia, G. S. (2020). Mathematical thinking on problem solving and self-regulation strategies of filipino primary grade pupils. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 9(2), 4000–4004. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85079884144&partnerID=40&md5=938971d862d3dd5d0a8e16f743ff68b7

estudiante tiene un problema diferente (en idioma inglés) para solucionar, preferiblemente sin requerir la traducción a su idioma natal, en un tiempo de aproximadamente 30 minutos. Al ser un problema para cada uno de los estudiantes, si se comunicaban entre ellos, la recolección de los datos evitaba el sesgo. Como apoyo para idear la solución podían utilizar papel y bolígrafo, o manipulativos como palos y cuentas si lo preferían.

Salangsang y Subia (2020), aseguran que la competencia lectora, la comprensión y las estrategias de autorregulación juegan un papel importante en el pensamiento matemático de los alumnos en la resolución de problemas. Los resultados mostraron que: (1) los estudiantes eran capaces de resolver problemas de multiplicación y división antes de recibir instrucción formal de estas operaciones; (2) se emplearon como estrategias de solución autorreguladas, la escritura de frases numéricas, el algoritmo en la resta, la estimación, el recuento hacia atrás, el ensayo y error, el uso de marcas de recuento, la realización de un dibujo, el recuento de saltos, la suma repetida y, en general, algoritmos inventados que dieron muestras de creatividad.

Por último, se manifiesta que, aunque los estudiantes resuelven problemas aritméticos en inglés lo hacen mucho mejor cuando los problemas se traducen al tagalo, su lengua materna. El dominio de la lengua en la que está escrito el problema desempeña un papel importante en el éxito de los alumnos a la hora de resolver problemas de historias (o “palabras”) en matemáticas. Conocer el vocabulario y la comprensión del contexto del problema ayudan a los estudiantes a aprender a resolver problemas y a autorregular las estrategias más significativas e interesantes para ellos. Además, aprender a leer y comprender un problema en un idioma (inglés), no sólo en su dialecto nativo, es igual de importante que el aprendizaje de las matemáticas. Así, se propone hacer hincapié en la lectura, como objeto de atención en el plan de estudios de matemáticas, al menos en el nivel primario, para ayudar a los alumnos a reducir sus dificultades en la asignatura.

1.2 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución y planteamiento de problemas

Las investigaciones de este epígrafe tienen como característica el uso de la resolución de problemas para favorecer el desarrollo de habilidades y/o competencias matemáticas. Son investigaciones que relacionan métodos de resolución de problemas, preguntas y heurísticas, y reportan resultados avanzados en habilidades de los estudiantes que principalmente se ocupan del avance cognitivo, la creatividad y el planteamiento de problemas. Las metodologías utilizadas en estas investigaciones son cualitativas o triangulaciones con un componente cualitativo apoyado en la inferencia estadística, y en algunos casos con diseños muy completos como los grupos de Solomon.

1.2.1 Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. Educational Studies in Mathematics[9]

Van Harpen y Sriraman (2013) utilizan el hecho de que la capacidad de plantear problemas se considera un aspecto/indicador importante de la creatividad en matemáticas. Realizan un estudio que tiene como objetivo explorar la creatividad de los estudiantes de secundaria en matemáticas mediante el análisis de sus habilidades de planteamiento de problemas en escenarios geométricos, utilizando tres grupos de estudiantes ubicados en Estados Unidos y de dos localidades de China.

Las medidas e instrumentos de este estudio incluyen una prueba de contenido matemático, una prueba de planteamiento de problemas matemáticos y entrevistas. Ambas pruebas se tradujeron al chino para los participantes en China y se aplicaron en el estudio después de varias pruebas piloto.

[9] Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. Educational Studies in Mathematics, 82(2), 201–221. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5

Las diferencias en los problemas planteados por los tres grupos se discuten en términos de calidad (novedad/elaboración) así como de cantidad (fluidez). El análisis de los datos indicó que incluso los estudiantes de secundaria matemáticamente avanzados tenían problemas para plantear problemas matemáticos de buena calidad y/o novedosos. Aunque en la prueba de planteamiento de problemas se dijo a los estudiantes que no se limitaran a problemas conocidos y que pensaran en situaciones retadoras y desafiantes, no se obtuvieron muchos resultados de este tipo. Algunos de los problemas planteados por los estudiantes no eran viables porque carecían de la información necesaria para encontrar una solución o eran triviales porque no suponían un reto.

La creatividad de las respuestas de los alumnos se analizó según su fluidez, flexibilidad y originalidad. Las puntuaciones de los alumnos en cuanto a fluidez no fueron tan altas como se esperaba. El análisis de la flexibilidad mostró que, aunque los alumnos plantean problemas diversos como grupo, la mayoría de los problemas se centraron en dos categorías principales, área y longitud.

No se compararon las puntuaciones de originalidad entre los grupos, pero las entrevistas con los alumnos que plantearon problemas poco frecuentes revelaron una variedad de razones por las que los problemas se consideraron creativos.

El estudio concluye que el planteamiento de problemas aún no es un elemento establecido en la instrucción en las aulas. Además, aunque los participantes en este estudio eran de cursos avanzados de matemáticas en la escuela secundaria, no se desempeñaron muy bien en la prueba de planteamiento de problemas matemáticos.

Esto sugiere que los estudiantes que son buenos resolviendo problemas matemáticos rutinarios o en la realización de pruebas matemáticas rutinarias, podrían no ser buenos en plantear problemas matemáticos. Por último, los autores consideran que los conocimientos y las habilidades básicas en matemáticas pueden o no estar muy relacionados con la creatividad en el planteamiento de problemas en matemáticas, pero existe una especie de equilibrio entre ellos.

1.2.2 Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary [10]

El documento de English (2020) analiza una colección de artículos que destacan la importancia de plantear problemas tanto desde la perspectiva de los profesores como de los estudiantes, aunque los estudios sobre el conocimiento sobre el pensamiento de los estudiantes y sus capacidades para plantear problemas han sido limitados. Al parecer enseñar a través del planteamiento de problemas requiere una alta demanda cognitiva y fomenta el desarrollo de pensamiento matemático de los estudiantes. Según la autora, un primer desafío es la calidad del problema *"que se refieren al conocimiento significativo del contenido, se dirigen al desarrollo conceptual de los estudiantes y se establecen dentro de contextos o situaciones orientadas a la investigación"*[11]

El segundo desafío radica en el problema matemático que se plantea debería revelar eficazmente el pensamiento y el grado de comprensión de los estudiantes. El tercer desafío, consiste en cómo se podría facilitar la presentación de problemas dentro de un plan de estudios de matemáticas regular, a lo que la autora incluye como referencia la modelización matemática. Como conclusiones se extrae que plantear problemas dentro de contextos significativos puede proporcionar información sobre el pensamiento de los estudiantes y avanzar en las habilidades de planteamiento de problemas tanto de los maestros como de los estudiantes. También se necesita más investigación con respecto a un marco para la enseñanza a través del planteamiento de problemas, sin embargo *"Los estudiantes más jóvenes muestran habilidades*

[10] English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101451.
[11] Ibidem p.2.

sorprendentes para razonar hipotéticamente, plantear problemas sin preguntar y abordar múltiples situaciones al plantear y resolver problemas …" [12]

1.2.3 Learning mathematics without a suggested solution method: Durable effects on performance and brain activity[13]

Karlsson, et al. (2015) presentan un artículo que tiene como propósito contrastar dos enfoques de enseñanza en términos de efectos duraderos en el rendimiento y la actividad cerebral. Para ellos, fomentar la comprensión matemática es uno de los retos más importantes de cualquier plan de estudios de hoy en día, y para este fin los profesores quieren utilizar los mejores métodos de enseñanza disponibles. Según los autores, el método de enseñanza de las matemáticas dominante consiste en instruir a los estudiantes en un método de solución y dejar que ellos lo practican repetidamente (razonamiento algorítmico RA). Sin embargo, un método alternativo es dejar que los estudiantes creen un método de solución por sí mismos, (razonamiento matemático creativo RMC). Para ello, utilizaron una muestra de setenta y tres participantes que hicieron uso de uno de estos dos enfoques, y una semana más tarde se sometieron a una imagen por resonancia magnética funcional (IRMF), mientras eran evaluados en las tareas de práctica.

Se comprueba que las tareas de práctica que promueven el RMC, se mantienen en el tiempo y requieren menos memoria de trabajo que el RA. Así, los participantes que habían creado ellos mismos el método de solución obtuvieron mejores resultados en las preguntas de la prueba. Las implicaciones del estudio son dobles. En primer lugar, el estudio demuestra que diferentes tareas de práctica matemática pueden dar lugar a diferencias conductuales y neuronales duraderas. El RA conduce a un mejor rendimiento y a

[12] English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101451 p.4

[13] Karlsson Wirebring, L., Lithner, J., Jonsson, B., Liljekvist, Y., Norqvist, M., & Nyberg, L. (2015). Learning mathematics without a suggested solution method: Durable effects on performance and brain activity. Trends in Neuroscience and Education, 4(1–2), 6–14. https://doi.org/10.1016/j.tine.2015.03.002

una actividad cerebral del giro angular relativamente menor a largo plazo en comparación con el RMC. Además, los resultados demuestran que la corteza parietal superior derecha es fundamental para el rendimiento matemático en general, lo que posiblemente refleja la contribución de la atención y/o la memoria de trabajo a las tareas matemáticas complejas.

En ambas condiciones, los participantes activaron más la red fronto-parietal al resolver las preguntas de la prueba en comparación con la tarea de referencia, y lo que es más importante, los participantes que habían creado ellos mismos el método de solución mostraron una actividad cerebral relativamente menor en la circunvolución angular, lo que posiblemente refleja una menor demanda de memoria verbal. Estos resultados indican que podría ser ventajoso crear uno mismo el método de solución y, por tanto, tienen implicaciones para el diseño de métodos de enseñanza.

1.2.4 The frames of meaning hypothesis: Children's mathematical problem-solving abilities[14]

Lotero, Botero y Andrade Londoño (2017) consideran que un cuadro de significado es una estructura que se construye entre la comprensión semántica de un problema y la solución tangible y material que se le da al problema. Así el cuadro de significado matemático se expresa como una manera de solucionar un problema que *"… requiere no sólo un alto nivel de organización, sino también integrar diversos elementos de pensamiento lógico, representacional, y situado – es decir, el desempeño de un sujeto haciendo uso del contexto…"*[15]

Este artículo presenta datos tomados de una investigación macro que incluyó 1038 estudiantes de grados Kínder a Tercero, 26 profesores y tres colegios de estrato socioeconómico bajo de la ciudad de Medellín, Colombia. Tiene la intención de describir lo que ocurre cuando niños y niñas de 6 y 7 años, quienes aún

---

[14] Lotero, A. A., Botero, A. L., & Andrade Londoño, E. A. (2017). The frames of meaning hypothesis: Children's mathematical problem-solving abilities. Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa, 20(1), 39–70. https://doi.org/10.12802/relime.17.2012

[15] Ibidem p. 46.

no habían recibido instrucción formal en la división, intentan resolver un problema de repartición por medio de dibujos. Para ello los autores, consideran los cuadros de significado como una herramienta teórica y metodológica para la conceptualización de la solución de problemas aritméticos y la organización en correspondencia que subyace al pensamiento matemático. Y proponen seguir expandiendo este análisis y la aplicación de este marco de referencia a otros campos del pensamiento matemático y, en general, a la resolución de problemas.

Según los autores, al solucionar un problema se ponen en juego recursos cognitivos y epistémicos, *"…Estos recursos cognitivos están compuestos por pequeñas unidades cognitivas fenomenológicas, así como de otras habilidades y conocimientos de sistemas representacionales particulares. El significado es construido subjetivamente, pero es visible y externalizado como una comunicación de sentido. Por ello, el significado de cada cuadro es completado también por la interpretación de la persona que lo recibe o evalúa"*[16]. Sin embargo, este significado se expresa como un recurso semiótico que inicia en el niño, quien es el que genera el cuadro y es completado por el profesor o el investigador, quien es el que lo interpreta.

El artículo pretende explicar por qué algunos niños tuvieron éxito en la solución de problemas y otros no, por medio de los cuadros de significado. Se expone que en la solución de un problema intervienen competencias y recursos cognitivos considerados más pequeños que según los autores corresponden al menos a tres tipos: "*a) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios, b) conocimientos de sistemas representacionales, y c) expectativas epistémicas acerca de la solución del problema. Además, … este significado se expresa como un recurso semiótico que inicia en quien genera el cuadro y es completado por quien lo interpreta"*[17].

---

[16] Lotero, A. A., Botero, A. L., & Andrade Londoño, E. A. (2017). The frames of meaning hypothesis: Children's mathematical problem-solving abilities. Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa, 20(1), 39–70. https://doi.org/10.12802/relime.17.2012. p 64.

[17] Ibidem p 65.

Así proponen como alternativa teórica que, entre la comprensión del problema verbal y la solución correcta, un sujeto debe construir un cuadro de significado completo. Además, observan que no todos los niños que comprenden apropiadamente el enunciado del problema logran proponer una solución adecuada, lo cual indica que la construcción de significado es mucho más profunda que la comprensión de la semántica del texto del problema. En palabras de Lotero, Botero y Andrade Londoño (2017) *"…Según hemos tratado de exponer, el niño es un sujeto activo que construye un cuadro de significado a la manera de una interfaz entre la comprensión semántica del problema y la comprensión del significado de las operaciones matemáticas como acciones de transformación de cantidades*"[18].

Por último, para los autores, el estudio de caso ilustra empíricamente la hipótesis de que los niños generan cuadros de significado para solucionar problemas matemáticos. Determinan que los niños ponen en juego pequeños recursos cognitivos de tres tipos: 1) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios, 2) conocimientos de sistemas representacionales, y 3) expectativas epistémicas acerca de la solución del problema.

1.2.5 Examples of Problem-Solving Strategies in Mathematics Education Supporting the Sustainability of 21st-Century Skills[19]

El documento pretende abogar por un replanteamiento de la forma en que los alumnos adquieren los conocimientos en correspondencia a necesidades futuras a las que tendrán que hacer frente, entendiendo que se vive en un mundo que cambia rápidamente y, por lo tanto, se debe actualizar el plan de estudios en este sentido.

---

[18] Lotero, A. A., Botero, A. L., & Andrade Londoño, E. A. (2017). The frames of meaning hypothesis: Children's mathematical problem-solving abilities. Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa, 20(1), 39–70. https://doi.org/10.12802/relime.17.2012. p 66.

[19] Szabo, Z. K., Körtesi, P., Guncaga, J., Szabo, D., & Neag, R. (2020). Examples of problem-solving strategies in mathematics education supporting the sustainability of 21st-century skills. *Sustainability (Switzerland)*, *12*(23), 1–28. https://doi.org/10.3390/su122310113

Szabo et al. (2020) centran su atención en las competencias del siglo XXI y su relación con la resolución de problemas matemáticos. En el artículo se considera que la búsqueda de soluciones a los problemas es muy importante para manejar situaciones desafiantes y hacer frente a los obstáculos en cualquier carrera profesional. Los autores realizan una revisión teórica de la literatura para evaluar, criticar, sintetizar y ampliar la base teórica del tema. Además, presentan tres ejemplos en los que se pretende demostrar que la heurística de Pólya puede utilizarse en un contexto amplio que permite a los estudiantes adquirir las habilidades modernas necesarias para tener éxito en sus carreras.

Se utiliza una metodología de investigación cualitativa dirigida por las siguientes preguntas: ¿Qué son las competencias del siglo XXI? ¿Cómo se definen? ¿Cómo podría la educación matemática ayudar a desarrollar las competencias del siglo XXI para la resolución de problemas? ¿Qué metodología y métodos podrían introducirse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para mejorar la integración transversal de la resolución de problemas? Para ello, se realiza una revisión bibliográfica integradora que, según los autores, permite evaluar la teoría, proporcionar una visión general de la base de conocimientos, y examinar la validez y exactitud de ciertas teorías matemáticas en pro de responder las preguntas de investigación.

La principal conclusión de esta investigación teórica es que el método propuesto por Pólya, utilizado en la resolución de problemas matemáticos, podría utilizarse para desarrollar las competencias del siglo XXI. Así, la heurística podría utilizarse en un contexto más amplio para ayudar a los alumnos a adquirir las competencias modernas necesarias para tener éxito en sus carreras. Según los autores, el resultado del trabajo proporciona a los profesores y educadores métodos, modelos de aprendizaje y estrategias para desarrollar las competencias del siglo XXI en los alumnos de todos los niveles durante las actividades de clase. *"Dependiendo del compromiso de los alumnos y de la disposición de los profesores, casi todo el mundo puede convertirse en un buen estudiante de matemáticas. Haciendo las preguntas adecuadas, los* *profesores pueden ayudar a los alumnos a construir sus propias estrategias orientadas a la resolución de problemas."*[20]

Este artículo aporta a la tesis, desde el contexto teórico de la solución de problemas, las competencias matemáticas y la intencionalidad de utilizar problemas para verificar dichas competencias, incluyendo un ejemplo tomado del canguro matemático.

1.2.6 The effectiveness of the selective problem-solving model on students' mathematical creativity: A Solomon four-group research[21]

Kirisci, Sak, y Karabacak (2020) utilizan un diseño de investigación de cuatro grupos de Solomon para examinar la eficacia del modelo de solución selectiva de problemas (SPS) en el desarrollo de las habilidades creativas de los estudiantes en matemáticas. Según los autores, el SPS es un modelo de resolución creativa de problemas altamente estructurado y compuesto por seis pasos: (1) definición del problema objetivo, (2) identificación del problema fuente (analogía), (3) solución del problema fuente, 4) construcción del problema análogo original, (5) solución del problema análogo original y (6) evaluación. Participan en el estudio 201 estudiantes de séptimo grado que asistían a una escuela pública.

La primera etapa del SPS está diseñada para facilitar la comprensión de un problema, porque "…*el primer paso de un proceso eficaz de resolución de problemas es la comprensión del problema (Mason, Burton y Stacey, 2010; Polya, 1957). Mayer (1998) subrayó la relación entre la comprensión de los problemas y la resolución satisfactoria de los mismos"*[22]. Entonces, se expone a los estudiantes a la codificación selectiva

[20] Szabo, Z. K., Körtesi, P., Guncaga, J., Szabo, D., & Neag, R. (2020). Examples of problem-solving strategies in mathematics education supporting the sustainability of 21st-century skills. *Sustainability (Switzerland)*, *12*(23), 1–28. https://doi.org/10.3390/su122310113. p. 20.

[21] Kirisci, N., Sak, U., & Karabacak, F. (2020). The effectiveness of the selective problem-solving model on students' mathematical creativity: A Solomon four-group research. Thinking Skills and Creativity, 38. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100719

[22] Ibidem p. 9.

de la información y posteriormente a la comparación selectiva de la misma, buscando comprender lo conocido, lo desconocido y las relaciones entre los componentes del problema.

Los pasos 2 a 5 del SPS enseñan la búsqueda de problemas análogos, la construcción de problemas análogos y la solución de esos problemas. El segundo paso requiere que los estudiantes identifiquen un problema análogo similar pero más sencillo que el problema objetivo presentado en el primer paso. Son importantes en este paso los conocimientos previos de los estudiantes; después se transfiere lo aprendido en esta experiencia a tareas de construcción de problemas análogos, pues el cuarto y el quinto paso implican a los estudiantes la construcción de problemas análogos originales y la tarea de resolución de esos problemas. Entonces ya se está en un nivel superior de experiencia y pueden construir sus propios problemas análogos originales, con el propósito de que sean más avanzados que el problema objetivo del inicio.

Como resultados, los autores afirman que encuentran eficaz el SPS y concluyen que una intervención de diez semanas muestra que los grupos experimentales superaron a los grupos de control en las tareas de construcción de problemas análogos y de análisis de problemas, y atribuyen el éxito a la estructura progresiva de seis pasos. Así encuentran resultados similares a los de otras investigaciones que utilizan técnicas y modelos de creatividad bien estructuradas, tal como el modelo de resolución de problemas de Polya, entre otros.

Como las tareas de SPS requieren exploraciones de similitudes estructurales entre los problemas análogos de destino, de origen y originales, los estudiantes pueden lograr desarrollar nuevos problemas análogos, resolver estos problemas utilizando las relaciones estructurales entre ellos y, empleando esta experiencia analógica, resolver problemas más avanzados que los que conocen.

Kirisci, Sak, y Karabacak, (2020), concluyen que la enseñanza de la analogía a través del entrenamiento del SPS, tiene importantes implicaciones para la enseñanza de la creatividad. Sugieren que los problemas objetivo sean lo suficientemente desafiantes para que los estudiantes no puedan resolverlos fácilmente y así aplicar el SPS para resolverlos. Sin embargo, advierten que los estudiantes necesitan más tiempo para construir problemas análogos en el cuarto paso, debido al poco trabajo en este tipo de experiencias en las clases de matemáticas habituales.

1.2.7 Investigating (the) critical thinking skill of junior high school students in solving (a) mathematical problem[23]

Se presenta una investigación descriptiva con un enfoque cualitativo que pretende relatar las habilidades de pensamiento crítico de 24 estudiantes de secundaria mientras solucionan problemas matemáticos. Los autores identifican los componentes del pensamiento crítico en el análisis, evaluación, inferencia, explicación y autorregulación y, para ello, utilizan un test y entrevistas. El test consta de seis problemas matemáticos que representan seis sub habilidades de pensamiento crítico y, por medio de la triangulación, analizan los datos mediante reducción y visualización hasta obtener conclusiones.

Para Basri, Purwanto, As'ari, y Sisworo (2019) las habilidades de pensamiento crítico son una de las cuatro habilidades necesarias en el siglo XXI y las consideran tan importantes que sugieren su inclusión en el currículo escolar. Los resultados de la investigación clasifican en una categoría baja las habilidades de pensamiento crítico que manifiestan los estudiantes, con una tendencia muy baja en las subhabilidades de evaluación, análisis y autorregulación. Por lo tanto, se sugiere la aplicación de un modelo de aprendizaje que pueda mejorar las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes, especialmente las mencionadas, y el desarrollo de un instrumento para medir las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes, ya que hasta ahora la medición de estas habilidades no utiliza ni implica conocimientos específicos en matemáticas.

[23] Basri, H., Purwanto, As'ari, A. R., & Sisworo. (2019). Investigating critical thinking skill of junior high school in solving mathematical problem. *International Journal of Instruction*, 12(3), 745–758. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12345a

1.2.8 Assessment Strategies for Enhancing Students' Mathematical Problem-solving Skills: A Review of Literature[24]

Ukobizaba, Nizeyimana y Mukuka (2021), presentan la revisión de veinte artículos de conferencias y revistas, publicados desde 1997 hasta 2020, descargados de Google Scholar, Academia y ERIC. En la revisión encuentran que la capacidad de los estudiantes para aplicar los conocimientos matemáticos a diversas situaciones ha sido una de las principales motivaciones de la investigación en educación matemática. Sin embargo, se sabe poco sobre las estrategias de evaluación que contribuyen sustancialmente al desarrollo de las habilidades de resolución de problemas matemáticos. Entonces, con esta revisión de la literatura existente se proponen analizar, en las últimas tres décadas, la contribución de las estrategias de evaluación en el fortalecimiento de la adquisición de habilidades de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de preescolar hasta estudiantes de secundaria superior.

Según los autores, el estudio: "… *revisó, discutió y presentó diferentes estrategias de evaluación empleadas para mejorar las habilidades de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes en las últimas tres décadas…. …[S]ubraya hasta qué punto estas prácticas de evaluación han contribuido a reforzar el logro de las habilidades de resolución de problemas matemáticos de los alumnos. … [Por último] informa a los profesores y a los responsables de las políticas educativas sobre las estrategias de evaluación que están destinadas a mejorar las habilidades de resolución de problemas matemáticos"*[25]

Ukobizaba, Nizeyimana y Mukuka (2021) recomiendan que: (i) hay que animar a los profesores de matemáticas a enseñar y evaluar los conocimientos y habilidades matemáticas de los estudiantes; (ii) los

---

24 Ukobizaba, F., Nizeyimana, G., & Mukuka, A. (2021). Assessment Strategies for Enhancing Students' Mathematical Problem-solving Skills: A Review of Literature. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(3), em1945. https://doi.org/10.29333/ejmste/9728

25 Ibidem p. 2.

profesores de matemáticas no deben evaluar sólo para calificar, sino para obtener información sobre el progreso del aprendizaje y la mejora en las competencias con el fin de mejorar la instrucción, y para ello se sugiere el uso de tareas abiertas que probablemente inciten el pensamiento de orden superior de los estudiantes; y (iii) es necesaria la investigación de otras formas de evaluación que ayuden a reforzar la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

Como resultados informan que la aplicación de estrategias de evaluación como la *estructura de los resultados de aprendizaje observados*, el *modelo de habilidades de pensamiento de orden superior*, las evaluaciones del rendimiento, las evaluaciones auténticas, las evaluaciones dinámicas y las evaluaciones basadas en videojuegos, junto con los métodos activos de aprendizaje centrados en los estudiantes y el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje cooperativo, están destinados a fortalecer las habilidades de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes. Todas estas estrategias de evaluación revisadas han resultado tener un mayor potencial en la promoción de los logros del aprendizaje y motivar a los estudiantes para que aborden problemas complejos, combinadas con el uso del aprendizaje activo para que ellos comprendan las matemáticas, no sólo en la teoría, sino sobre todo en la práctica.

Finalmente, los autores sugieren que las estrategias de evaluación que ayudan a fomentar el razonamiento lógico y las habilidades de resolución de problemas serán útiles y relevantes para la sociedad y los lugares de trabajo actuales, debido a que, cuando se evalúa a los estudiantes de forma que se mejore su comprensión matemática de los conceptos, entonces serán capaces de aplicar los conocimientos adquiridos para responder a los problemas que encontrarán después de la escolarización.

1.3 Investigaciones que presentan posibles acercamientos entre las competencias y las competiciones matemáticas o el desarrollo del pensamiento matemático

En esta sección se presenta la relación entre las competiciones y la educación matemática. Las investigaciones muestran reflexiones sobre el aporte de las olimpiadas a la educación matemática, relaciones con el aula regular y potencialidades de un currículo, que toma en cuenta los aportes de las olimpiadas internacionales, desde la actividad de solución de problemas retadores.

1.3.1 Competencia Matemática de los Participantes de Olimpiadas como Indicador de la Calidad del Nivel de Formación Matemática[26]

Según el autor la olimpiada matemática se puede utilizar, como medio para ofrecer un alto potencial para el desarrollo de la competencia y para determinar el nivel de los participantes. Entonces, se propone como problema de investigación *"la necesidad de identificar el potencial didáctico de la Olimpiada Matemática como herramienta para determinar el nivel de competencia matemática de los escolares"*[27] por medio de la fundamentación teórica y el desarrollo del contenido detallando los indicadores de competencia matemática de los participantes en las Olimpiadas.

La investigación realizada plantea que el estudio sobre el nivel de desarrollo de competencias es relevante en el campo educativo porque estas predeterminan la victoria del participante en la olimpiada. Para Keldibekova (2021) el contexto de la olimpiada permite desarrollar las competencias más plenamente y el enfoque de aprendizaje basado en competencias en el entorno de las Olimpiadas se caracteriza por la formulación de objetivos basados en actividades para la competencia que se está formando y la Olimpiada

[26] Keldibekova A. O. (2021). La competencia matemática de los participantes de las Olimpiadas como indicador de la calidad del nivel de formación matemática // *Perspectivas de la ciencia y la educación. 2021. Nº 3 (51)*. págs. 169-187. doi:10.32744/pse.2021.3.12

[27] Ibidem p. 1.

Matemática es una de las formas más efectivas tanto de formación como de desarrollo y determinación del nivel de competencia matemática de sus participantes.

Como resultado en el grupo experimental, la introducción de un sistema para preparar a los escolares para las Olimpiadas matemáticas utilizando modelos para la formación de competencias matemáticas condujo a un aumento en el conocimiento de los estudiantes sobre la teoría y la práctica de la resolución de problemas de Olimpiadas en matemáticas, además, del aumento del conocimiento en lo que denominan el currículo escolar en matemáticas.

Entonces según el autor los resultados obtenidos confirman que el desarrollo de la competencia matemática de los participantes de la Olimpiada está relacionado con el proceso de preparación para la misma.

1.3.2 How to Measure Adolescents' Mathematical Competence[28]

Este documento presenta definiciones actuales de la competencia matemática; en este se afirma que la mayoría de los sistemas educativos de todo el mundo están trabajando en adoptar una educación basada en competencias que aún no es realidad. Según Vorobjovs (2020), las competencias se entienden como una combinación de conocimientos, habilidades y actitudes, pero se tiene diferentes interpretaciones a nivel científico y político además de la falta de consenso al definir el término. Es muy importante para esta tesis cuando el autor informa que lo que *realmente no está claro es cómo medir conocimientos, habilidades y actitudes complejas basadas en la competencia.* Además, determina tres definiciones muy citadas, estableciendo sus similitudes y diferencias como se muestra en la Figura 2-3.

[28] Vorobjovs, Aleksandrs. (2020). How to Measure Adolescents' Mathematical Competence. 185-190. 10.22616/REEP.2020.022

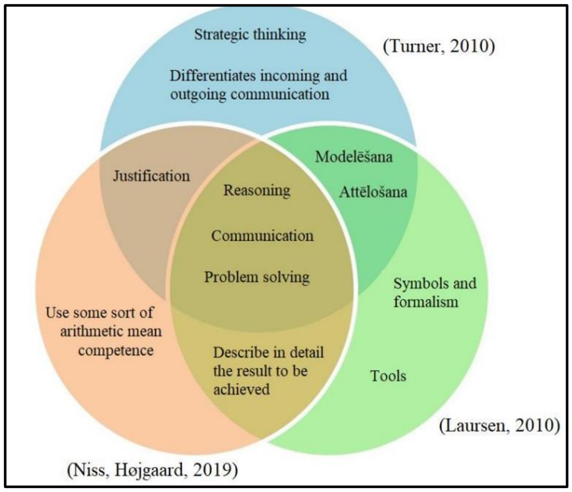


Figura 2-3 Comparación de las tres principales definiciones de competencia matemática. (imagen tomada de Vorobjovs, 2020, p3).

Teniendo en cuenta la investigación teórica sobre la competencia matemática de los adolescentes, el autor determina siete componentes: *intuición matemática, resolución de problemas, modelación matemática, comunicación matemática, pensamiento crítico, rasgos personales y autorreflexión*. Cada componente se describe utilizando niveles de logro: pronunciado, bueno, pobre y sin nivel. Los niveles hacen hincapié en los conocimientos, habilidades y actitudes que se supone que el adolescente debe mostrar para obtener un nivel superior.

Basándose en lo anterior, la competencia matemática de los adolescentes se ha definido como un conjunto de habilidades y actitudes que les permiten comprender y resolver una variedad de problemas, utilizar modelos generalizados, evaluar y justificar críticamente un resultado, y utilizar un lenguaje matemáticamente correcto.

Entonces, según el autor, la competencia matemática es un constructo muy complejo, que para medirla adecuadamente requiere un instrumento basado en la ciencia que sea preciso y sensible, y asegura que, al parecer, la calificación o las pruebas no son válidos para este propósito porque deben tener en cuenta más características de los adolescentes como la inestabilidad psicológica, el desorden, el cambio rápido de humor, incluso sus prioridades. Según Vorojobs (2020) estas características y muchas otras podrían considerarse erróneamente como una falta de competencia, lo que significa que los criterios deben ser muy precisos, inequívocos y objetivos.

1.3.3 Sexo femenino y capacidades matemáticas: desempeño de los más capaces en pruebas de rendimiento matemático[29]

En este artículo se hace un análisis de las diferencias entre sexos (M vs F) en una prueba de rendimiento denominada BECOMA (Batería de Evaluación de la Competencia Matemática) que utiliza como marco de referencia las competencias matemáticas. Según los autores estudios de exámenes como el PISA enfatizan en las brechas de género, por ejemplo, en las evaluaciones *"PISA, para la competencia matemática siempre aparecen diferencias a favor de los chicos, respecto a las chicas, tanto en los promedios de la OCDE, como en los resultados globales de España, y en los específicos de cada Comunidad Autónoma. En solución de problemas, campo evaluado en PISA 2003 y 2009, las diferencias son a favor de las mujeres, en la primera edición, y principalmente a favor de los hombres, en la segunda"*[30]

Según los autores los ítems clasificados a los niveles 6 y 7, son los más exigentes de la prueba. Así, luego de aplicar la prueba, se realiza una prueba estadística de independencia entre la variable sexo y los niveles 6 y 7. En el nivel 7 no existe diferencia estadística al comparar por sexo. Sin embargo, en el nivel 6, aparecen diferencias estadísticamente significativas entre sexos, a favor de los hombres.

Los autores afirman que, si se realiza una interpretación similar a la del PISA, se puede interpretar una brecha de género en la que las mujeres estarían vulnerables y propensas al fracaso escolar. Por tal razón,

---

[29] Perales, R. G. (2016). Desempeño de los más capaces para la matemática en la prueba de rendimiento BECOMA: correlación de los resultados con el test psicométrico BADYG-E3. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía,* 27(2), 45-61.

[30] Ibidem p. 60.

los autores recomiendan la ampliación de tareas y contenidos matemáticos con distintos niveles de dificultad, incluyendo contenidos de otras competencias, atendiendo a sus potencialidades, e incluyendo la búsqueda de una igualdad de oportunidades real entre los estudiantes de ambos sexos, algo que consideran importante para posteriores investigaciones.

1.3.4 Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education[31]

En este documento los autores se refieren a "*la investigación y la actividad creativa en torno a las competiciones de resolución de problemas matemáticos y sus muchas facetas, objetivos y realizaciones*".[32] Entre las muchas facetas se presenta una complementariedad de las competiciones con el trabajo escolar, porque los concursos en su diseño reflejan diferentes objetivos educativos y matemáticos por medio de la creación y selección de problemas originales que según los autores "*transmiten genialidad, sorpresa, belleza y elegancia*"[33]

Una de las conclusiones cercanas al propósito de este trabajo es que, aunque las competiciones son preferentemente extracurriculares son una parte integral del proceso educativo aportándole pertinencia al plan de estudios y fortaleciendo su interacción con el campo de las matemáticas. Porque las competiciones representan los intereses y objetivos compartidos de "*matemáticos en ejercicio, educadores de matemáticas, profesores y estudiantes*"[34]

---

[31] De Losada, M. F., & Taylor, P. J. (2022). Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education. *ZDM–Mathematics Education*, 1-19. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z
[32] Ibidem p. 1.
[33] Ibidem p. 18.
[34] Ibidem p. 18.

1.3.5 A Curriculum for mathematical competitions. ZDM–Mathematics Education[35]

En este artículo los autores pretenden responder ¿Cuál es el currículo oculto de las competiciones matemáticas? Nieto-Said & Sánchez-Lamoneda (2022) se proponen describir el currículo oculto de las competiciones matemáticas, determinando que las áreas de interés fundamentales son: el algebra, la combinatoria, la geometría y la teoría de números, y aunque puede envolver más que esas áreas, propone problemas para ser solucionados por métodos elementales sin recurrir al cálculo, sin embargo, dicen los autores que la solución de los problemas puede ser difícil y seguramente requieren ingenio, creatividad y habilidades para la solución de problemas.

En el documento se presentan diferentes tipos de problemas, sus soluciones y unas breves recomendaciones en comparación al desarrollo curricular de las escuelas, concluyendo que unos de los temas que pueden ser incluidos en los currículos escolares son: "*Álgebra: secuencias definidas por relaciones de recurrencia, teoremas básicos sobre polinomios, desigualdades, ecuaciones trigonométricas, ecuaciones funcionales. Combinatoria: técnicas de conteo, nociones de teoría de grafos, teoría básica de conjuntos. Geometría: transformaciones geométricas. Teoría de números: aritmética modular con la $a \equiv b$ (mod m) notación, hasta el teorema de Fermat-Euler. Lógica: problemas de mentirosos y contadores de la verdad.*"[36]

También, afirman que, en las olimpiadas, las matemáticas discretas han ganado terreno al igual que juegos de estrategia, coloración, teoría de grafos y formas de contar, secuencias y relaciones de recurrencia entre otros mencionados en el artículo. Sin embargo, según los autores, actualmente en las

---

[35] Nieto-Said, J. H., & Sánchez-Lamoneda, R. (2022). A curriculum for mathematical competitions. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(5), 1043-1057.
[36] Nieto-Said, J. H., & Sánchez-Lamoneda, R. (2022). A curriculum for mathematical competitions. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(5), 1043-1057. p. 13.

escuelas se dedica mucho tiempo a resolver problemas de rutina lo que impide que el currículo sea más interesante y desafiante. Finalmente, loa autores creen que, "*si introducimos algunos de los temas y formas de pensar mencionados, en lugar de hacer repetidamente ejercicios tediosos, nosotros como maestros permitiremos a los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático y mostrarles la belleza y la verdadera alma de las matemáticas*"[37]

1.3.6 La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas[38]

Este artículo la Dra. Falk analiza el diseño y elaboración de las pruebas involucradas en las diferentes etapas de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas mostrando cómo se busca desarrollar el pensamiento matemático del estudiante participante. La autora se ubica en el *"contexto de analizar el pensamiento involucrado en la solución o soluciones de algunos problemas representativos de cada ronda de un año específico"*[39].

Se muestra lo que puede hacer un estudiante a lo largo de una competencia de olimpiadas por rondas que exige diferentes niveles de pensamiento matemático. Por ejemplo, algunos problemas, como el del juego estratégico requieren del participante creatividad y buen uso de experiencias propias en su solución, hasta los problemas que exigen razonamiento completo. Se observa como los diferentes "*problemas apuntan a proporcionar oportunidades y contextos en los cuales el estudiante está invitado a desarrollar el pensamiento matemático y las características que lo distinguen, en contraste con el desarrollo de procedimientos genéricos de solución de ejercicios que es el enfoque más común en el aula.*"[40]

---

[37] Ibidem p. 14.
[38] Falk M, 2022. La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. *Espacio Matemático Vol. 1 No. 1 (2020),* pp. 1-18. ISSN: 2711-1792 (En línea)
[39] Ibidem p. 1.
[40] Ibidem p. 18.

En el documento se invita al profesor a promover la originalidad y argumentación por parte de los estudiantes, no solo la búsqueda de errores sin hacer uso positivo del mismo.

1.3.7 Mathematics competitions: an integral part of the educational process[41]

En el artículo en autor presenta una gran variedad de competiciones, que convoca a estudiantes escolares y universitarios y, con ellos a profesores, mentores o padres, científicos, las escuelas o universidades, instituciones de investigación, etc.

Aunque el articulo reflexiona sobre sobre la evolución, el estado actual, el funcionamiento de este ecosistema, así como su papel para la identificación y el desarrollo del talento, también presenta una breve mirada frente al impacto en el proceso educativo. Se pueden resaltar entre los pros mencionados en el artículo que

- *"Las competiciones son una buena herramienta motivadora para el trabajo independiente y el estudio en profundidad de las matemáticas por parte de los estudiantes (y, a veces, por parte de los profesores).*
- *La preparación de los estudiantes para la competencia tiene un impacto educativo significativo. Resolver tareas difíciles no solo genera un mejor conocimiento, sino que también cultiva habilidades para lidiar con problemas de todo tipo, no solo matemáticos.*
- *A través de competiciones, se descubren y desarrollan las habilidades matemáticas de los jóvenes.*
- *Las competiciones pueden ayudar a enseñar a los participantes cómo lidiar con un rendimiento deficiente e incluso con el fracaso. No se puede esperar que siempre tenga mucho éxito en la*

[41] Kenderov, P. S. (2022). Mathematics competitions: an integral part of the educational process. *ZDM–Mathematics Education,* 1-14.

resolución de problemas de competencia. Saber aceptar y aprender de un bajo rendimiento es útil para la vida futura.

- *Por último, pero no menos importante, las competiciones proporcionan una oportunidad para probar las reacciones de los estudiantes cuando se enfrentan a material desconocido, nuevos enfoques educativos, tecnologías y otras cosas que deben implementarse en el proceso educativo."*[42]

Aunque también se presentan opositores al escenario de las competiciones, los organizadores realizan ajustes a las realidades como es el caso de la pandemia COVID -19 que permitió introducir otras formas de competición.

Por último, se presenta una investigación especial porque pretende relacionar el discurso de las competencias (habilidades, destrezas) al mundo del entrenamiento para las competiciones en matemáticas por medio de la formulación de objetivos. Keldibekova (2019; 2021) afirma que la olimpiada matemática se puede utilizar, como medio para ofrecer un alto potencial para el desarrollo de la competencia y para determinar el nivel de los participantes. La investigación realizada plantea que el estudio sobre el nivel de desarrollo de competencias es relevante en el campo educativo porque estas predeterminan la victoria del participante en la olimpiada. Para el autor el contexto de la olimpiada permite desarrollar las competencias más plenamente y el enfoque de aprendizaje basado en competencias en el entorno de las Olimpiadas se caracteriza por la formulación de objetivos basados en actividades para la competencia que se está formando y la Olimpiada Matemática es una de las formas más efectivas tanto de formación como de desarrollo y determinación del nivel de competencia matemática de sus participantes.

---

[42] I Kenderov, P. S. (2022). Mathematics competitions: an integral part of the educational process. *ZDM–Mathematics Education,* 1-14. p. 7.

- **Conclusiones del capítulo 1**

Como resultado, aunque no se encuentra en la literatura documentos que relacionen explícitamente los marcos referenciales de las competencias y las competiciones en matemáticas, se obtienen como temas de convergencia entre las teorías: la solución de problemas, el planteamiento de problemas, pensamiento matemático y un interés desde las competiciones por favorecer la educación matemática. Las competencias y las competiciones tienen dos intencionalidades diferentes. Desde los promotores de las competiciones matemáticas, aparece la intención de incidir en el amiente escolar y las investigaciones muestran cómo las competencias tienen un carácter curricular, enfocado hacia el desarrollo de habilidades, destrezas y la comprensión de teorías y conceptos institucionalizados que se deberían enseñar en la escuela. Por su parte, las competiciones, son de carácter extra curricular, centran su atención en la solución de problemas como actividad del hacer matemático, y pretenden captar el talento para las matemáticas.

Sin embargo, son pocas o nulas las investigaciones que ponen a dialogar estos dos marcos referenciales. Entonces, ¿Por qué no se encuentran investigaciones que relacionan los marcos referenciales de competiciones y las competencias? La respuesta está ligada a las diferencias desde las iniciativas, por su parte las competencias, entendidas como la reunión de habilidades, destrezas, capacidades, incluso como la reunión de un conjunto de competencias para explicar el dominio de la matemática escolar-curricular, mientras que las competiciones matemáticas, como las Olimpiadas presentan un enfoque hacia el desarrollo del pensamiento matemático, desde la premisa que la solución de problemas retadores ha sido la forma en la cual las teorías matemáticas han evolucionado, entonces solucionar problemas es la esencia del hacer matemático, pero no es una labor que nace desde una propuesta curricular, solo hasta ahora Nieto-Said & Sánchez-Lamoneda (2022) proponen acercamientos hacia el currículo de la matemática escolar.

Lo que sí se puede establecer desde las investigaciones, es que los dos marcos referenciales tienen un punto en común que es el uso de la solución de problemas, pero la posición que le dan es totalmente diferente, para la competición es el eje central, mientras que para la teoría de competiciones es solo una competencia adicional. además, Según las investigaciones revisadas existe un creciente interés por el planteamiento de problemas como potenciador de la resolución de problemas, la mejora de la comprensión, la solución de problemas y también la creatividad, se centran en el uso de la heurística y el desarrollo del pensamiento matemático y la creatividad.

Otro punto común de los marcos teóricos presentados es que los problemas deben posibilitar un pensamiento flexible, adoptar diversos enfoques, utilizar estrategias y diversos modelos adecuados e incorporar el pensamiento creativo y crítico en la solución. Entonces, puede pensarse que, aunque las competiciones son preferentemente extracurriculares son una parte integral del proceso educativo aportándole pertinencia al plan de estudios y fortaleciendo su interacción con el campo de las matemáticas. Porque las competiciones representan los intereses y objetivos compartidos de *“matemáticos en ejercicio, educadores de matemáticas, profesores y estudiantes”*[43]

Son pocas las investigaciones sobre competiciones matemáticas o el desarrollo del pensamiento matemático que presentan aproximaciones teóricas desde las competencias, lo cual parece implicar que el tema de interés de esta tesis ha sido poco explorado por los investigadores en educación matemática, debido a la diferencia entre sus marcos teóricos e intereses, lo que supone un reto para la tesis a realizar.

[43] De Losada, M.F, Taylor, PJ (2022). Perspectivas sobre las competencias matemáticas y su relación con la educación matemática. *Educación matemática ZDM* 54, 941–959 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z p.18.

- **CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO**

El marco teórico de la investigación inicia con los referentes sobre competencias, después los referentes sobre la solución de problemas y los fundamentos de las competiciones matemáticas, seguido del avance hacia el desarrollo del pensamiento matemático y, por último, se presentan los referentes sobre las formas de pensar y las formas de entender de Harel que puede ser el parte fundamental del enlace entre las teorías puestas en juego.

2.1. Referentes teóricos sobre competencias

Desde la década de los 90, existe gran interés entre los investigadores por el desarrollo de competencias matemáticas y desde ese momento numerosos países han realizado esfuerzos para enfocar sus currículos y educación hacia este enfoque. En Colombia, por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) define sus lineamientos, estándares y derechos básicos de aprendizaje, derivados de la concepción de competencias. Particularmente en matemáticas, las evaluaciones internacionales como la prueba realizada por el proyecto PISA de la OCDE y las evaluaciones nacionales denominadas pruebas SABER, están determinadas siguiendo el enfoque de competencias.

Es importante resaltar que, para poder realizar comparaciones entre los sistemas educativos de las naciones, se ha "degradado" el término competencia al relacionarlo con un mínimo valor de desempeño, que será tomado como una base para poder comparar las diferentes naciones. En ese sentido, es preciso informar al lector que este documento se distancia rotundamente de esa idea; la competencia no se considera un mínimo, por el contrario, ser competente describe a un sujeto que está en condiciones de avanzar en el dominio de la matemática en un sentido amplio, porque supera lo mínimo esperado y está habilitado para mejorar aún más.

Es en este aspecto que adquiere relevancia como marco teórico la postura de competencia matemática del grupo KOM de Dinamarca, dirigido por Mogens Niss, ya que la definición de competencia propuesta por este grupo de trabajo está enfocada a la maestría en, y el dominio de, la matemática. Además, aunque ya se ha puesto en evidencia, es importante resaltar que esta definición ha influenciado el marco conceptual de las pruebas internacionales PISA.

2.1.1. Referentes teóricos Proyecto KOM Mogens Niss

Niss y Højgaard (2011) presentan un documento que se toma como base principal para la presente tesis. El documento consta de seis partes: Parte I: Introducción y términos de referencia. Parte II: Competencias como medio para describir las matemáticas como asignatura. Parte III: Educación de los profesores de matemáticas. Parte IV: Competencias y la matemática como materia. Parte V: Progresión de la competencia y la evaluación del desarrollo de competencias. Parte VI: Mirando adelante: desafíos y recomendaciones. Son de especial interés para la presente tesis las partes II y V. A continuación, se extraen los puntos relevantes de la teoría propuesta en el informe KOM.

La competencia matemática

El grupo KOM identifica ocho competencias centrales que conforman la competencia matemática en general. Así la competencia matemática se describe como la pericia y experticia de una persona que le permite el dominio eficaz e incisivo de aspectos esenciales de un campo, en particular de la matemática. En este sentido, Niss y Højgaard (2011) proponen ocho competencias que, como un conjunto de dimensiones bien definidas, en su totalidad engloban lo que será la competencia matemática.

Estas ocho *sub competencias* están conectadas entre sí, pero cada una de ellas tiene su propia identidad y, según los autores, ninguna de las competencias puede reducirse a las restantes. Aunque no presentan documentación científica que demuestre que esto es así teórica y empíricamente, aseguran de forma pragmática que estas competencias en su conjunto engloban y encapsulan la esencia de la competencia matemática ver Figura 2-1.

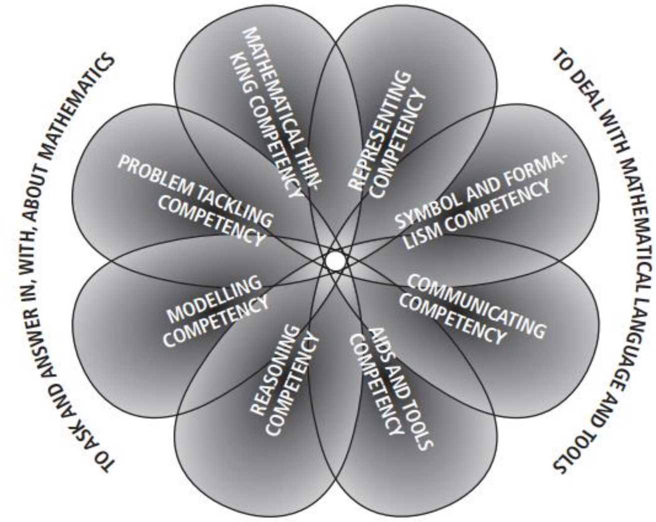


Figura 2-1**.** Flor de las ocho sub competencias de la competencia matemática (Tomado de Niss & Højgaard, 2011, p 51**).**

La propuesta centra su interés en dos grandes competencias representadas en esta flor de ocho pétalos: (i) la capacidad de formular y responder preguntas en y con las matemáticas; y (ii) la capacidad para utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas. Entonces, la capacidad de enfrentarse a (y en) las matemáticas de cara a la meta de dominarla consisten en dos “super competencias", cada una de las cuales contiene un conjunto de competencias específicas. Por una parte, *la capacidad de plantear y responder preguntas sobre y por medio de las matemáticas* es, en pocas palabras, la capacidad de (a) plantear esas preguntas y ser consciente de los tipos de respuestas disponibles, (b) responder a dichas preguntas en y por medio de las matemáticas, así como, (c) la capacidad de comprender, evaluar y producir argumentos para resolver cuestiones matemáticas. Del mismo modo, *ser capaz de manejar el lenguaje y las herramientas matemáticas* implica (a) ser capaz de manejar diferentes representaciones de entes, fenómenos y situaciones matemáticas, (b) ser capaz de manejar las representaciones simbólicas y fórmulas especiales de las matemáticas, (c) ser capaz de comunicarse en, con y sobre las matemáticas, así como, (d) ser capaz de utilizar y relacionarse con las diversas ayudas técnicas para la actividad matemática (Tabla 2-1).

Tabla 2-1. Grupos de competencias KOM

	Habilidad de preguntar y responder de y por medio de las matemáticas	***Habilidad para tratar con el lenguaje y las matemáticas***	
Responder	1) *Resolución de problemas* Responder a dichas preguntas en y por medio de las matemáticas	5) *Representación* Dominar diferentes representaciones de entidades, fenómenos y situaciones matemáticas	***Lenguaje***
	2) *Modelación* Responder a dichas preguntas en y por medio de las matemáticas	6) *Símbolos y formalismo* Dominar las representaciones simbólicas y fórmulas especiales de las matemáticas.	
Preguntar	3) *Pensamiento matemático* Plantear dichas preguntas y ser consciente de los tipos de respuestas disponibles.	7) *Comunicación* Comunicar en, con y sobre las matemáticas.	***Comunicación***
Evaluar y dar cuenta de	4) *Razonamiento:* Comprender, evaluar y producir argumentos para resolver cuestiones matemáticas	8) *Ayudas y herramientas* Utilizar y relacionarse con las diversas ayudas técnicas para la actividad matemática.	***Herramientas***

Fuente: Elaboración propia

Según los autores la división de las competencias en dos grupos no debe considerarse como un indicador de que las competencias de un mismo grupo están más conectadas. Según ellos, otras disposiciones son posibles entre los diferentes grupos. *"Por ejemplo, tener la competencia para tratar con símbolos y* *formalismos matemáticos suele ser un requisito previo para ser capaz de responder a preguntas, es decir, tener la competencia para plantear y resolver problemas matemáticos." p. 52*[44]

Según el informe se definen tres dimensiones con las que se puede determinar el dominio de una competencia; el "grado de cobertura", el "radio de acción" y el "nivel técnico". Ver Figura 2.2.

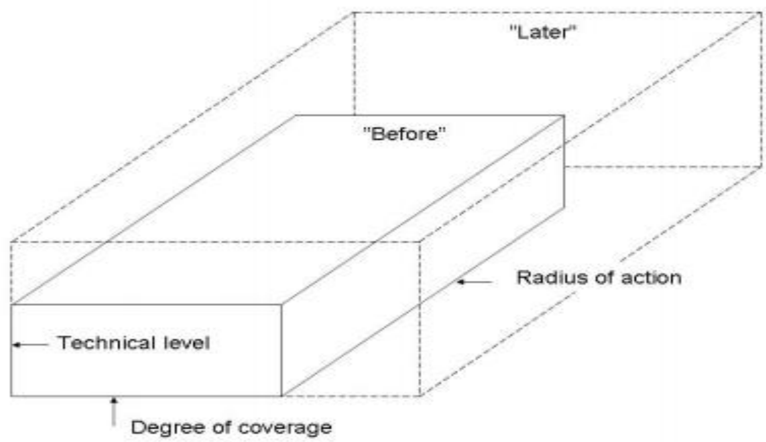


Figura 2-2. Nivel de competencia relativa a las tres dimensiones. (Tomado de Niss & Højgaard, 2011, P 141)

El **grado de cobertura** se refiere al dominio de diferentes aspectos que caracterizan la competencia y cuántos de ellos de forma independiente se pueden activar en diferentes situaciones. *"Por ejemplo, …una persona que es capaz de enunciar, de manera clara y en lenguaje corriente, los procesos de pensamiento detrás de la solución de un problema matemático y que también es capaz de enunciar la solución en términos técnicos, tiene un mayor grado de cobertura de la competencia comunicativa que alguien que solo puede hacer lo último."*[45]

---

[44] Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark, 485p.
[45] Ibidem p. 72.

El **radio de acción** de una competencia es el rango de contextos, problemas y desafíos en los que la persona puede activar la competencia. Esos contextos pueden ser internos a la matemática o temas aplicados. *"Si la competencia de abordar problemas de una persona, por ejemplo, puede activarse con éxito tanto dentro de la aritmética como del álgebra, la geometría y la teoría de la probabilidad, tiene un mayor radio de acción que una persona que sólo puede activarla con éxito en la aritmética y el álgebra…una persona que puede aplicar las matemáticas a su economía diaria, a la cocina o a las construcciones de bricolaje, tiene un mayor radio de acción para su competencia de modelación que la persona que sólo puede aplicarla mientras hace la compra en un supermercado"*[46].

Por último, el **nivel técnico de la competencia** de una persona está determinado por el grado de avance conceptual y técnico de las entidades y herramientas que pueden activarse en la competencia relevante. *"Por ejemplo, una persona que puede dibujar gráficos para funciones reales de una variable, pero no para funciones reales de dos variables, tiene una competencia de representación a un nivel técnico más bajo que la persona que puede lograr ambas."* [47]

A continuación, se detalla la propuesta con **relación a la competencia de pensamiento matemático**. Según Niss y Højgaard (2011) se definen diferentes dominios de modos de pensamiento matemático y esta competencia involucra ser capaz de reconocer, comprender y tratar el alcance y las limitaciones de determinados conceptos matemáticos, sus raíces en diferentes dominios y sus propiedades. Además, requiere observar y comprender las implicaciones de la generalización de resultados y ser capaz de generalizarlos a clases más amplias de objetos. *"Esta competencia también incluye ser capaz de distinguir, tanto de forma pasiva y activa, entre los distintos tipos de enunciados matemáticos y*

---

[46] Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, p. 72*

[47] Ibidem p. 73.

afirmaciones, incluyendo "afirmaciones condicionales", "definiciones", "teoremas", "enunciados fenomenológicos" sobre casos particulares, y "conjeturas" basadas en la intuición o la experiencia con casos especiales. Es especialmente importante comprender el papel que desempeñan los "cuantificadores" explícitos o implícitos en los enunciados matemáticos, sobre todo cuando se combinan"[48].

Se enfatiza que en este contexto se habla ante todo de cuestiones y asuntos de naturaleza matemática, aunque éstos puedan tener su origen en condiciones ajenas a las matemáticas como asignatura. El núcleo de esta competencia es la naturaleza real de las preguntas matemáticas y las posibles respuestas, la conciencia de los tipos de preguntas que caracterizan a las matemáticas, la capacidad de plantear dichas preguntas y la comprensión de los tipos de respuestas que cabe esperar. Es importante resaltar que no es relevante el contenido de las preguntas y respuestas, sino su naturaleza, que para esta competencia es central, así, es especialmente importante el esfuerzo matemático por encontrar las condiciones necesarias y suficientes que permitan establecer las propiedades específicas de un objeto.

Relación con la **competencia de Resolución de problemas.** Esta competencia tiene como delimitación el formular y resolver problemas matemáticos. Consiste en (1) ser capaz de plantear, detectar, formular, delimitar y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos, tanto "puros" como "aplicados", tanto "abiertos" como "cerrados", y (2) ser capaz de resolver de diferentes formas, si es necesario o deseable, dichos problemas matemáticos ya formulados, sin importar si son planteados por uno mismo o por otros. Es importante resaltar que la noción de "problema" no es absoluta, sino relativa a la persona que se enfrenta al problema. Lo que puede ser una tarea rutinaria para una persona puede ser un problema para

[48] Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. p. 53.

otra y viceversa. Un problema matemático (formulado) es un tipo particular de pregunta matemática en la que es necesaria la investigación matemática para resolverla.

Para Niss y Højgaard (2011), las preguntas que pueden responderse mediante unas (pocas) operaciones rutinarias específicas no se consideran problemas. Además, la capacidad de formular problemas matemáticos está íntimamente ligada a la capacidad de plantear preguntas matemáticas y ser consciente de los tipos de respuesta posibles, es decir, relativo a la competencia de pensamiento matemático. Sin embargo, estas dos competencias no son en absoluto idénticas. Ser capaz de detectar y formular problemas matemáticos no es lo mismo que ser capaz de resolver problemas matemáticos ya formulados. Es muy posible formular problemas matemáticos sin ser capaz de resolverlos. Incluso se puede plantear un problema con conocimiento elemental sin que sea posible llegar a la solución utilizando este aparato de conceptos. Del mismo modo, es posible ser bueno en la resolución de problemas sin ser bueno en la búsqueda o formulación de estos.

En el congreso MEM 2022 se presentó el Dr. Mogens Niss con la conferencia plenaria "*Relationships between modelling competency and the other mathematical competencies".* En esta conferencia se ratifican los planteamientos del grupo KOM con relación a las ocho competencias matemáticas, y ello permite ampliar la descripción de cada una de ellas (ver Tabla 2-2, Tabla 2-3).

Tabla 2-2 Habilidad de preguntar y responder de y por medio de las matemáticas

Preguntar		Responder	
Pensamiento	**Razonamiento**	**Modelamiento**	**Resolución de problemas**
La capacidad de plantear dichas preguntas	La corrección de la respuesta es el núcleo de la competencia de razonamiento matemático.	La capacidad de traducir estas condiciones no matemáticas en conceptos matemáticos	Los tipos de preguntas que pueden responderse activando habilidades rutinarias no se incluyen en la definición de

Y la comprensión de los tipos de respuestas que cabe esperar.		Uso de la matemática	problemas matemáticos en este contexto
Peso en las preguntas	Habilidad de seguir y acceder a un argumento matemático	Pre- matematización	Peso en las estrategias
"¿Existe. . .?"			En ser capaz de plantear
"¿Cuántos. . .?"	Peso en la justificación	Matematización	Detectar, formular, delimitar y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos
¿Es posible que. . .?			
¿Es el enunciado necesario o suficiente, o ambos?		Tratamiento matemático	Tanto “puros" como "aplicados", tanto "abiertos" como "cerrados"
¿Pueden debilitarse los supuestos sin afectar a la conclusión?	Saber y entender cuando una prueba es o no es.		
		De- matematización	
Respuestas	Tener claras las ideas básicas de una prueba (argumentación)		Para resolver dichos problemas matemáticos en su forma ya formulada
Sí, porque. . .		Validación de los resultados del modelo	Ya sean planteados por uno mismo o por otros
No, porque. . .			Si es necesario o deseable, de diferentes formas.
La afirmación es necesaria pero no suficiente ya que. . . ejemplo. . .	Idear pruebas independientes	Evaluación del modelo	El procedimiento de obtención de una respuesta es un elemento central
Depende de la situación ya que. . .			La capacidad de formular problemas matemáticos ligado al pensamiento matemático
Es una cuestión abierta. . .			
Si. . . entonces. . .		Revisión del modelo	
"Tenemos que … si y sólo si … "			Vital para el modelamiento

Fuente: Elaboración propia tomando como referencia la conferencia de Niss (2022)

En la Tabla 2-2 y la Tabla 2-3 se presenta lo relevante de cada una de las competencias y se puede determinar en qué hace énfasis cada una de ellas. Aunque puede observarse cómo se interrelacionan para dar cuenta de lo que se denomina la competencia matemática global, queda claro que una sola competencia no logra dar cuenta de toda la generalidad de la Mathematical Competency.

Tabla 2-3. Habilidad para tratar con el lenguaje y las matemáticas

Tratar con el lenguaje y la comunicación			**Tratar con las ayudas y herramientas**
Comunicación	Símbolos y formalismo	Representación	Ayudas y herramientas
Comprender, decodificar e interpretar textos.	Herramientas para decodificar, traducir y manejar declaraciones simbólicas	Entender y utilizar diferentes representaciones.	Conocer las posibilidades y limitaciones de diversas herramientas.
Lo relacionado con comunicar en, con y sobre la matemática, pero es más que la representación y el manejo simbólico			Reflexionar sobre el uso de las herramientas y a las ayudas
Estudiar e interpretar lo que otros escriben.	Sistemas formales en matemáticas. Se observa principalmente la actividad sintáctica	Utilizar representaciones simbólicas y/o algebraicas	Incluye ayudas tecnológicas de todo tipo.
	Se restringe a los símbolos y a las reglas de uso de estos, aunque sean elementales.		Pero también uso del papel
Expresarse en diferentes caminos y con diferentes niveles teóricos.	Tratamiento con sistemas matemáticos	Representaciones visuales y geométricas	El compás, la regla.
O diferentes caminos técnicos de precisión.	Énfasis en las reglas de trabajo.	Incluye, diagramas tablas, representaciones verbales	Esta competencia está ligada a la competencia de representación
Estrechamente vinculada a la competencia de representación		Entender las relaciones reciprocas entre diferentes formas de representación para una misma entidad.	Ligada a la competencia de símbolos y formalismos.
La competencia de comunicación. No necesita necesariamente incluir formas		Elegir y cambiar entre diferentes representaciones.	LOGO-CABRI GeoGebra

matemáticas específicas de representación.			
		Determina las fortalezas y debilidades, con respecto a otros componentes	
		Entiende la representación actual y posibilidades de cambio a nuevas representaciones	
		Puede ser una actividad semántica como también, la representación simbólica.	Esta competencia está estrechamente vinculada con la representación

Fuente: Elaboración propia con relación a Niss (2022)

Adicionalmente, en la conferencia el doctor Niss presenta cómo él puede tomar como centro de la flor de competencias el modelamiento y desde ahí activar todas las demás, mientras pasa por la pre-matematización, la matematización, la de matematización, hasta la evaluación y revisión del modelo. Estas características importantes de la competencia de modelamiento matemático con relación a las otras competencias justifican cómo el modelamiento matemático es una competencia transversal a las demás competencias, pero, que no logra agotarlas por completo.

2.2. Referentes sobre la teoría de resolución de problemas.

Un primer referente es George Pólya y de allí se desarrolla hacia nuevos autores, tal como se presenta a continuación.

2.2.1. Referentes de la resolución de problemas desde George Pólya

En su libro *How to Solve it* (1957) Polya describe cómo el maestro puede ayudar al estudiante o en general a cualquier interesado en la solución de un problema. El texto invita al lector a avanzar en la solución de un problema por medio de una lista de preguntas agrupadas en cuatro etapas: "*comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y tener una visión retrospectiva*"[49].

El autor centra su atención en lo que define como heurística (servicio al investigador) que *"tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento"*[50].

Según Polya, la heurística moderna *"trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso"* y para este propósito sugiere tener en cuenta diversas fuentes de información sin descuidar ninguna. En estos términos, *"Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico, como psicológico… debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo…"* [51]

Según Pólya (1963) la enseñanza es un arte. La enseñanza no es una ciencia, sino un arte, que en matemáticas se ocupa principalmente de situaciones de aprendizaje complejas y que debe centrar su objetivo en enseñar a los jóvenes a PENSAR sin centrarse en la idea de que el pensamiento matemático es puramente "formal". Entonces, determinar las características generales de las soluciones independientes del tema del problema favorece una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema lo que puede influir favorablemente en los posibles métodos de la enseñanza de las matemáticas.

Tal como aparece en la página de Taylor and Francis a este profesor emérito en la Universidad de Stanford lo consideran un distinguido matemático investigador, autor de aproximadamente 250 artículos sobre matemáticas y educación matemática, y de una serie de libros ampliamente leídos: "How to Solve

[49] Pólya, G., & Conway, J. H. (1957). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press.p. 5
[50] Ibidem p. 113.
[51] Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas. p. 102

It," "Mathematics and Plausible Reasoning," "Mathematical Discovery," entre otros. La influencia de los planteamientos de Pólya es notable, sus conferencias y escritos han estimulado en gran medida el interés por la resolución de problemas y han influido en muchos profesores de todos los niveles, entre ellos, algunos de los autores incluidos en el marco teórico de esta tesis.

2.2.2. Referente sobre problemas retadores

Para Protasov, Applebaum, Karp, Kašuba, Sossinsky, Barbeau y Taylor (2009) los retos matemáticos no son nuevos. Los humanos se dedican a resolver problemas, rompecabezas, sudokus, encontrar regularidades o patrones de comportamiento, y así desafiar su propio conocimiento y desafiar el ingenio de los otros. Sin embargo, un reto debe ser atractivo para el resolutor, su planteamiento no debe ser abrumador sino preferiblemente sencillo, aunque la solución requiera tiempo y dedicación. Según Protasov et al. (2009), durante el Renacimiento los matemáticos que habían descubierto una nueva técnica podían demostrar sus avances y conocimientos, planteando un problema que los otros matemáticos, que no conocían su estrategia, no lograban resolver. En la época de la Ilustración, se ofrecían premios a los matemáticos o aficionados que conseguían avanzar en algún problema matemático que para la época era apremiante. Dicen los autores que, en la época moderna, los primeros retos dirigidos específicamente a los estudiantes se plantearon en revistas y concursos, siendo Hungría uno de los primeros líderes. El propósito de esos retos era una batalla de ingenio entre los matemáticos que los planteaban para desafiar a los estudiantes, y algunos de estos que lograban una solución, con frecuencia de forma imprevista.

Se encuentran desafíos en la cultura popular, tales como el cruce del río de un hombre, un tigre, una vaca y una medida de pasto, en diferentes versiones (problema atribuido a Alcuino de York) y también, problemas populares que consisten en disponer de varios vasos de distinta capacidad, algunos llenos de líquido, con el requisito de obtener un volumen-determinado del líquido. Actualmente, son populares los rompecabezas sudoku, que aparecen en muchos periódicos y revistas de todo el mundo (basados en el trabajo de Euler con los llamados cuadrados latinos y griegos). Entonces, los retos matemáticos se han utilizado culturalmente o aparecen en eventos públicos, pero también, deberían ser llevados al aula de clase, incentivando la imaginación, el ingenio y la creatividad en la solución de problemas.

Es muy importante que los estudiantes aprecien la importancia del trabajo matemático, y los problemas retadores son un camino para lograr este objetivo. Los desafíos pueden llevarse al aula de clase incentivando la observación hacia la generalización, la conjetura o el reconocimiento de patrones, reformulando ejercicios propuestos por el libro de texto, animando a los estudiantes a ir más allá de un enfoque meramente algorítmico, y, en consecuencia, la solución de problemas les permita adoptar una postura más holista de la matemática. Por último, para este propósito es posible encontrar excelentes desafíos en los concursos incluyentes tales como el Canguro Matemático. Una mirada más amplia se encuentra en el siguiente epígrafe.

2.3. Fundamentos de las competiciones matemáticas

Soifer (2017a) inicia su artículo con el proverbio chino: "*Dale a un hombre un pez y lo alimentarás durante un día. Enséñale a pescar y le darás de comer toda la vida*"[52], pero para él, esto es parcialmente cierto, porque en la actualidad no basta con aprender una sola habilidad, en ese caso pescar, sino que es necesario formar una persona **solucionadora de problemas** que ante la eventual falta de peces pueda aprender a cazar, cultivar o resolver cualquier problema que la vida le ponga en el camino. Desde este punto de vista, adquiere mayor relevancia la resolución de problemas en relación con el énfasis en la formación de habilidades (como el desarrollo del pensamiento) y, por lo tanto, los entornos que permitan desarrollar la capacidad de resolver problemas son muy importantes.

[52] Soifer, A. (2017a). Goals of Mathematics Instruction: Seven Thoughts and Seven Illustrations of Means. In *Competitions for Young Mathematicians* (pp. 3-24). Springer, Cham. p. 4.

Según Soifer (2017a) se debe considerar que un matemático investigador es un pionero que avanza por un camino desconocido y nunca recorrido cuando piensa en un problema. Esta es una situación deseable para un aula de clase de matemáticas y una invitación para el trabajo con las matemáticas de secundaria y universitarias. Según el autor, se debe dejar que los estudiantes experimenten en las aulas, que el salón de clase sea un laboratorio que permita desarrollar la intuición, la creatividad, el uso de conjeturas y sus demostraciones deductivas y, de esta forma, guiar hacia el verdadero propósito de la enseñanza de las matemáticas: demostrar.

Para Protasov, Applebaum, Karp, Kašuba, Sossinsky, Barbeau y Taylor (2009), las matemáticas son el resultado de un esfuerzo humano símbolo de la creatividad de la sociedad. Los humanos disfrutan encontrando patrones geométricos o numéricos y planteando retos y desafíos, tanto para otros como para sí mismos. Según los autores un reto matemático interesante debe atraer y no abrumar al posible resolutor y, cuando la solución se encuentra, es como una obra de arte ya que requiere un público que lo aprecie. Además, estos retos son importantes porque demandan de los resolutores, conjeturas, argumentos, pruebas o demostraciones y estos argumentos dan cuenta de diferentes niveles lo que permite una autentica experiencia matemática. Los concursos y las competiciones matemáticas ayudan a este propósito. Entonces, ¿qué pueden aportar las competiciones matemáticas?

Según Falk de Losada (2017) la influencia de las ideas de Leonardo de Pisa, desarrolladas en el contexto de una competencia de resolución de problemas que incluyó una ecuación cúbica, repercutió a lo largo de al menos seis siglos y acabó cambiando la perspectiva de la matemática europea desde una base netamente geométrica a una predominantemente algebraica. Además, la influencia de pensadores formados en la tradición de abordar problemas difíciles cuya comprensión no requiere amplios conocimientos previos es una tradición renovada y enriquecida por competiciones matemáticas y su alcance puede depender de la consecución de nuevos principios de organización del conocimiento matemático que se basen en estrategias de razonamiento más que en categorías temáticas como ocurre actualmente en las escuelas. Según Soifer (2017a), una olimpiada matemática es una competición en la que los concursantes deben escribir soluciones completas de tipo ensayo a los problemas. Por ejemplo, en una competición se ofrecen a los olímpicos entre 4 y 6 problemas, para ser pensados y solucionados en un tiempo entre 4 y 9 horas, o pueden ser 5 problemas para solucionar en un tiempo más corto de 30 minutos.

Esta es una gran diferencia en comparación con las pruebas de selección múltiple, que no permiten introducir a los alumnos de secundaria en temas, ideas y métodos de las matemáticas "reales". En este escenario puede ocurrir que algún participante continúe pensando los problemas por un tiempo más prolongado, incluso durante muchos años, actividad que se acerca a hacer matemáticas "reales" y tiende a representar qué son las matemáticas y qué es lo que hacen los matemáticos. *"Los problemas de las olimpiadas matemáticas -como pocas cosas- demuestran la belleza y la elegancia de las matemáticas"*[53].

Existe un punto intermedio entre las pruebas estandarizadas y las competiciones de olimpiadas matemáticas, en ellas pueden darse un listado de 25-30 problemas de selección múltiple con cinco opciones de respuesta para ser solucionados en un tiempo de 90 minutos, que pretenden incentivar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento matemático de una forma más inclusiva.

Protasov et al. (2009) clasifican los concursos en inclusivos o exclusivos. Los concursos inclusivos permiten que muchas escuelas se inscriban y pueden participar cientos de miles o incluso millones de estudiantes. Ejemplos de ello son los concursos AMC celebrados por la Asociación Matemática de América, el Concurso Canadiense desde la Universidad de Waterloo, el Concurso Australiano, el europeo (hoy internacional) Kangaroo, la Olimpiada Brasilera de Matemáticas para la Escuela Pública, y los

[53] Soifer, A. (Ed.). (2017). Competitions for Young Mathematicians: perspectives from Five Continents. Springer.p.8

desafíos organizados por el UK Mathematics Trust. Los concursos denominados exclusivos pretenden llegar a una población quienes han sido invitados especialmente dado el interés especial que muestran en las matemáticas o porque se han destacado en rondas previas de competición.

Es importante resaltar que, a diferencia de TIMSS y PISA, las competiciones incluyentes pero en especial las llamadas excluyentes están diseñados para poner a prueba cómo los alumnos pueden explorar problemas con los que pueden relacionarse, pero que los llevan a ampliar sus horizontes y desarrollar su pensamiento matemático de manera creativa utilizando herramientas razonablemente accesibles, como el principio de las casillas, la demostración mediante métodos como la contradicción, casos o invarianza, ecuaciones diofánticas, técnicas de enumeración, teoría de grafos y optimización discreta.

Los estudiantes más interesados o apasionados tienden a convertirse en aprendices independientes, aunque muchos siguen siendo tutelados por maestros o profesores fuera del aula. Algunos llegan a participar en competiciones de olimpiadas, como el Torneo Internacional de Municipios, una competición internacional organizada por la Academia de Ciencias de Rusia.

Por último, es muy importante resaltar que las competiciones no son sólo para estudiantes brillantes. Esto debido a que el propósito final de las competiciones es crear condiciones para que cada estudiante pueda alcanzar su óptimo nivel personal en matemáticas; entonces, le permite a cada participante retarse y mejorar sus capacidades. Tal es el caso de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas que lo deja explícito en sus objetivos y también, el Canguro que tiene como propósito popularizar la matemática interesante no rutinaria, lo que la convierte en una competición inclusiva en la que se puede mejorar y no está pensada solamente para estudiantes sobresalientes.

2.3.1. El canguro matemático

Es importante para esta tesis describir una competición incluyente de diferentes niveles que evalúa desde niños de ocho años hasta los últimos grados de la secundaria y no se enfoca exclusivamente en los estudiantes sobresalientes, sino que pretende promover la popularización de la matemática. La Competencia Internacional Canguro Matemático (Kangourou Sans Frontières) es un evento que promueve el empoderamiento de los estudiantes, aumentando su autoconfianza, por medio de un conjunto de pruebas para estudiantes de diferentes niveles escolares elaboradas internacionalmente con la intención de fomentar la imaginación y la creatividad, y ser un instrumento de popularización de la matemática. En esta prueba se permite el uso de papel para operaciones, papel cuadriculado, regla y compás. No se permite ninguna otra ayuda.

A nivel internacional, la competencia es organizada por Kangourou Sans Frontières, institución internacional sin fines de lucro, presente en más de 70 países. Se creó en 1991 en Francia sobre el modelo de la Competencia Matemática Australiana. Los estudiantes participan en categorías diferentes, lo que permite la interacción directa entre edades similares. En efecto, la competición utiliza seis niveles, desde el tercer grado en adelante, aunque la clasificación por nivel puede variar de un país a otro y en ella participan más de seis millones de estudiantes cada año. Las categorías propuestas se describen a continuación.

Pre-ecolier: Primer grado / Segundo grado; **Ecolier:** Tercer grado / Cuarto grado

Benjamin: Quinto grado / Sexto grado; **Cadet:** Séptimo / Octavo; **Junior:** Noveno / Décimo y Undécimo; **Student** (Internacional): Décimo segundo y décimo tercero

El propósito del examen es dar a conocer el tipo de matemáticas que fomenta la imaginación y el ingenio de los estudiantes, y que aquellos que lo presenten, conozcan y puedan desarrollar más su propio interés y talento. Tiene como finalidad promover el desarrollo del pensamiento matemático a través de diversos planteamientos académico-matemáticos.

Es de resaltar que el objetivo del Canguro es promover la difusión de la cultura matemática básica por todos los medios, en particular organizando una competición a modo promocional que debe realizarse el mismo día en todos los países participantes, y cuya meta es estimular y motivar la mayor cantidad posible de estudiantes hacia las matemáticas.

2.4. Fundamentos teóricos: pensamiento matemático

Para las competiciones, además de la solución de problemas, un punto central es el desarrollo del pensamiento matemático.

Mason, Burton y Stacey (2010) en su libro *Thinking mathematically* influenciado por la obra de Polya (1945) reúnen la experiencia de los autores como pensadores matemáticos en la resolución activa de problemas. La intención del libro es centrarse en el aprendizaje y la experiencia de pensar matemáticamente. Para los autores, el aprendizaje mejora cuando se dan a los estudiantes tareas que desencadenan una actividad en la que ellos se adaptan y modifican las acciones conocidas con el propósito de hacer frente al reto. Además, los autores consideran que de nada sirven las actividades repetitivas que sólo pretenden ganar agilidad y destreza. En ese proceso de solución es muy importante lo que Pólya (1957) llamó la etapa de mirar hacia atrás, llamada en el libro de Mason, Burton y Stacey la *fase de revisión* que, aunque es una etapa muy citada, es realmente poco usada por los profesores y estudiantes.

El libro es una guía para que los profesores puedan orientar la experiencia de sus estudiantes porque, según los autores, en su mayoría las personas necesitan estar en presencia de alguien más experimentado, así sea por un tiempo limitado, para lograr dar sentido a la experiencia. Mason, Burton y Stacey (2010) no tratan de enseñar ningún contenido matemático en particular, pero pretenden que los lectores adviertan sobre las formas en que pueden mejorar sus propias habilidades para explorar y comprender temas y situaciones matemáticas en el curso de la resolución de problemas.

Por otra parte, Tall (2013) describe el desarrollo del pensamiento matemático desde el niño hasta el adulto, presentando argumentos de por qué los conceptos matemáticos que tienen sentido en un contexto, en otro pueden ser problemáticos. En este libro se muestra el desarrollo del pensamiento matemático desde los inicios prácticos hasta el más alto nivel, incluyendo la frontera de la investigación.

Tall (2013) presenta cómo los conceptos se van volviendo cada vez más sofisticados y, aunque la matemática puede considerarse lógicamente elaborada, los sucesivos desarrollos del pensamiento matemático pueden implicar una manera particular de trabajar que es útil en un contexto pero que se vuelve problemática en otro. Según el autor los seres humanos construyen ideas a través de: *(i)* la *percepción* de los objetos del mundo que conduce a imágenes visuales y experimentos de pensamiento, *(ii)* la *operación* sobre los objetos, que conduce a conceptos numéricos y desarrollos simbólicos más sofisticados y *(iii)* el *razonamiento* cada vez más refinado, utilizando símbolos matemáticos y desarrollos del lenguaje más precisos, que culminan en las matemáticas formales, usualmente, en el lenguaje teórico.

Además, en Tall (2009) se realiza un enlace entre el planteamiento del libro *Thinking Mathematically*, con relación a la importancia de la parte afectiva cuando se trabaja con estudiantes por medio de la resolución de problemas y cómo es necesario que los estudiantes generen mejores explicaciones y argumentos, como lo propone el libro Pensar Matemáticamente: convencerse a sí mismo, convencer a un amigo, convencer a un enemigo y posterior, desarrollar ese "enemigo interno" crítico al que también se debe convencer. Para Tall (2009), los niveles representan diferentes estados del desarrollo del pensamiento matemático: Esta mejora en los argumentos puede comenzar con ideas personales hasta la relación con la coherencia de las ideas matemáticas mismas.

"… el modo (i) se refiere a las percepciones personales del mundo basadas en la experiencia y las reflexiones sobre experimentos reales, el acto de «convencerse a sí mismo» … el modo (ii) implica relaciones con otros, que incluirían tanto amigos como 'enemigos', donde estos últimos son escépticos que exigen un mayor nivel de rigor. El hermoso modo (iii) de Skemp involucra la relación de la mente y el espíritu humanos con las matemáticas, a través de la creatividad y la consistencia interna. En Thinking

Mathematically (Pensar matemáticamente), el papel del modo (iii) se formula en términos de un "enemigo interno", en el que el individuo aprende a criticar su propio pensamiento creativo para buscar la superación personal y la consistencia interna[54]*.*

Stacey (2006) indica que el pensamiento matemático es significativo en tres sentidos: como un objetivo de la escolarización, como una forma de aprender matemáticas, y porque es importante para la enseñanza de las matemáticas. En el artículo la autora muestra cómo se hace presente el pensamiento matemático entre los dos pares de procesos: especializar-generalizar y conjeturar-convencer.

Para Stacey (2006) *"La capacidad de pensar matemáticamente y de utilizar el pensamiento matemático para resolver problemas es un objetivo importante de la escolarización… el pensamiento matemático apoyará la ciencia, la tecnología, la vida económica y el desarrollo de una economía. Los gobiernos reconocen cada vez más que el bienestar económico de un país se sustenta en unos niveles elevados de lo que se ha dado en llamar "alfabetización matemática" (PISA, 2006) en la población"*[55]*.*

Es útil que los profesores consideren que la resolución de problemas matemáticos moviliza una amplia gama de destrezas y habilidades, entre ellas conocimientos matemáticos profundos, capacidades generales de razonamiento y conocimiento de estrategias heurísticas, habilidades que, según la autora, están estrechamente relacionadas con el pensamiento matemático.

En la integración de los referentes teóricos planteados por Mason, Burton y Stacey (2010) (Stacey, 2006), se concreta el marco teórico, relacionado con el pensamiento matemático para abordar la presenta investigación.

---

[54] Tall, D. (2009). The development of mathematical thinking: problem-solving and proof. In *Mathematical Action & Structures of Noticing* (pp. 15-29). Brill. p. 3.

[55] Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. p. 39.

2.5. Referentes sobre las formas de pensar y formas de entender de la teoría de Harel

Según Harel 2021 *"La instrucción basada en DNR en matemáticas (DNR, para abreviar) es un marco teórico que estipula las condiciones para lograr objetivos críticos, como provocar la necesidad intelectual de los estudiantes"*[56].

Tabla 2-4 Definiciones tomadas de (Harel, 2021, p.14).

Tabla 1 Definiciones de ***comprensión***, ***significado*** y ***formas de pensar***

	Definición de constructo
[Forma de] ***Comprensión*** (en el momento)	Estado cognitivo resultante de una asimilación
Significado (en el momento)	El espacio de inferencias existentes en el momento de la ***comprensión***
[Forma de] ***Comprensión*** (estable)	Estado cognitivo resultante de una asimilación a un esquema
Significado (estable)	El espacio de inferencias que resulta de haberse asimilado a un esquema. El esquema es el ***significado***, lo que Harel llama ***forma de entender***
Anticipación	Habitual de significados específicos en el razonamiento

Los términos formas de entender (o simplemente entender) y forma de pensar (o simplemente pensar) permanecerán en cursivas lo largo del documento para acentuar los significados que se les dan aquí.

La reflexión acerca de la teoría que aborda las formas de pensar y las formas de entender se realiza con base en el escrito de Guershon Harel (2010), que es un documento que recopila y discute otras publicaciones del autor. En palabras de Harel, "*El DNR se ha discutido ampliamente en otros lugares, haciendo referencia a un listado de sus publicaciones anteriores (Harel 2001, 2008a, 2008b, 2008c)"*[57].

El DNR se basa en un conjunto de ocho premisas, siete de las cuales están tomadas o basadas en teorías conocidas. Las premisas están organizadas de forma imprecisa en cuatro categorías (Matemáticas, Aprendizaje, Ontología y Enseñanza).

---

[56] Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 709-721. DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In *Theories of mathematics education* (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg p. 3.

[57] Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In *Theories of mathematics education* (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg p. 344

Los principios de instrucción fundamentales del DNR son: la dualidad, la necesidad y el razonamiento repetido.

El principio de dualidad. Este principio afirma que los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de entender y, a la inversa, los modos de comprensión que producen se ven afectados por los modos de pensamiento que poseen. El conocimiento que adquieren los estudiantes está determinado por sus conocimientos previos; lo que ellos saben ahora constituye una base para lo que sabrán posteriormente. Esto es cierto para todas las formas de entender y pensar asociadas a cualquier acto mental. En particular, según Harel, el acto mental de demostrar no es una excepción.

Principio de Necesidad. (Tabla 2-5) Se debe prestar atención a las necesidades intelectuales de los estudiantes. Solo se aprende lo que se necesita, en consecuencia, para que los estudiantes aprendan las matemáticas que pretendemos enseñarles, deben sentir la necesidad y propósito intelectual para aprenderlas.

Principio del Razonamiento repetido. El razonamiento repetido refuerza las formas deseables de entender y las formas de pensar. Pero no significa la práctica de problemas rutinarios sino se requiere la solución de problemas, lo que es esencial para el proceso de interiorización, problemas en los que el estudiante sea capaz de aplicar los conocimientos de forma autónoma y espontánea. *"La secuencia de problemas que se da a los alumnos debe exigir continuamente que se piense en las situaciones y soluciones, y los problemas deben responder a las necesidades intelectuales cambiantes de los alumnos. Esta es la base del principio de razonamiento repetido."*[58] Luego, no basta con un solo problema sino se requiere una secuencia de ellos, aunque el marco del DNR no especifica cómo deben elegirse estas situaciones para que corresponda con las necesidades intelectuales de los estudiantes.

---

[58] Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In *Theories of mathematics education* (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg, p. 360.

Tabla 2-5 Principio de necesidad. Fuente: (Harel, 2010, p 365)

La necesidad de certeza
es la necesidad de probar, de eliminar las dudas. La certeza se alcanza cuando uno determina -por los medios que considere apropiados- que una afirmación es verdadera. Sin embargo, la verdad por sí sola puede no ser la única necesidad de un individuo, y éste también puede esforzarse por explicar por qué la afirmación es verdadera.
La necesidad de causalidad
es la necesidad de explicar, de determinar la causa de un fenómeno, de comprender qué hace que un fenómeno sea como es.
La necesidad de cálculo
incluye la necesidad de cuantificar y calcular los valores de las cantidades y las relaciones entre ellas. También incluye la necesidad de optimizar los cálculos.
La necesidad de comunicación
incluye la necesidad de persuadir a otros de que una afirmación es cierta y la necesidad de acordar una forma de expresión (notación) común.
La necesidad de conexión y estructura
incluye la necesidad de organizar los conocimientos aprendidos en una estructura, de identificar similitudes y analogías, y de determinar principios unificadores.

Al igual que en un problema, la necesidad intelectual es un constructo subjetivo que depende de la persona, lo que constituye una necesidad intelectual para una persona puede no serlo para otra. Lo que se sugiere es guiar hacia una necesidad intelectual colectiva. Un componente importante del marco del DNR es la búsqueda del control epistemológico a través de la investigación de la comprensión y producción de pruebas matemáticas por parte de los estudiantes. Harel delibera sobre el conocimiento como el complejo conformado por todas las *formas de entender* y las *formas de pensar* que tienen lugar institucionalmente. Se concibe el conocimiento matemático como punto de partida para responder a preguntas como ¿cuál es la matemática que debe enseñarse en las escuelas? y ¿cómo deben enseñarse esas matemáticas?

El DNR es considerada una propuesta constructivista, centrada en las formas de comprensión y formas de pensamiento, que define las matemáticas como "herramientas conceptuales" que son necesarias para construir definiciones, teoremas, pruebas, problemas y sus soluciones, y no solo centra su atención en estos objetos matemáticos como es usual en la práctica de algunos profesores y los libros de texto. De esta manera, el conocimiento de la materia y la concentración en ella son indispensables para una enseñanza de calidad, pero no son suficientes. Se requiere que los profesores se concentren en las herramientas conceptuales, así como los enfoques para la resolución de problemas, la creatividad, y los esquemas de demostración.

Moreno-Armella afirma que *"La enseñanza de las matemáticas basada en el DNR … sigue de cerca la concepción de Piaget del aprendizaje como adaptación dirigida a la conquista del equilibrio que, al final, da lugar a un proceso iterativo de etapas posteriores de equilibrio temporal…. [E]s la búsqueda del control epistemológico a través de la investigación de la comprensión y producción de pruebas matemáticas por parte de los alumnos."*[59] En este sentido, se corrobora lo que afirmaba Piaget, con relación a que el aprendizaje es adaptación, es un proceso que alterna entre la asimilación y la acomodación dirigido hacia un equilibrio temporal, un balance entre la estructura de la mente y el entorno. Entonces, construir conocimiento es un proceso de asimilación y acomodación que ajusta lo que ocurre entre la mente y el entorno, es decir, *formas de pensar* al interior de un contexto y dominio.

Una definición importante en el DNR es el acto mental. Los actos mentales, como "interpretar", "conectar", "modelar", "generalizar", "simbolizar", etc. no son exclusivos de las matemáticas y son realizados por diferentes sujetos, pero lo que les diferencia son las formas de pensar asociadas a tales actos. Los enunciados y acciones de una persona pueden significar productos cognitivos de un acto mental realizado por la persona. Dicho producto es la *forma de entender* de la persona asociada a ese acto mental. Entonces, la observación repetida de los modos de comprensión de una persona puede revelar que estos comparten una característica cognitiva común y esta característica, se denomina *forma de pensar* asociada a ese acto mental.

[59] Moreno-Armella, L. (2010). Preface to Part XI. In *Theories of Mathematics Education* (pp. 341-342). Springer, Berlin, Heidelberg. p. 341.

Para Sriraman, Van Spronsen y Haverhals (2010) "*En el enfoque DNR, las matemáticas se dividen en dos categorías: "formas de pensar" (la materia en cuestión y las formas en que se comunica la materia) y "formas de entender" (la forma en que uno se acerca y/o ve la materia). El hecho de etiquetarlas como construcciones separadas proporciona una herramienta para considerar la educación matemática. En la actualidad, la educación matemática se ocupa principalmente de las formas de comprensión… Lo que falta, pues, es la consideración de las formas de pensar de los alumnos. Esta atención a las formas de comprensión tiene consecuencias que van más allá de cómo se compone el currículo que se presenta a los alumnos*"[60].

La diferenciación entre formas de pensar y formas de entender es de importancia central para esta tesis, porque centrarse solo en el entendimiento y descuidar las formas de pensar tienen efectos desfavorables en la enseñanza y el aprendizaje, y hace que se pierdan de vista aspectos vitales del desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Conclusiones del Capítulo 2

El marco teórico presenta teorías que no se han puesto en común, tales como lo son la teoría sobre las competencias matemáticas de Mogens Niss y su equipo, y la teoría en torno a las competiciones matemáticas. Además, centra su interés en las evaluaciones del PISA y el Canguro Matemático de gran impacto a nivel mundial. Esta puesta en escena proyecta un trabajo interesante para la comunidad de la educación matemática al contrastar el enfoque sobre el pensamiento matemático y el desarrollo de competencias matemáticas. Además, toma como punto de convergencia la teoría sobre las formas de pensar y formas de entender de Guershon Harel.

---

[60] Sriraman, B., VanSpronsen, H., & Haverhals, N. (2010). Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In Theories of Mathematics Education (pp. 369-378). Springer, Berlin, Heidelberg. p. 371.

- ## CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se muestra el desarrollo metodológico de la investigación. En general, se ha determinado como proceso de investigación dos grandes fases correspondientes al trabajo en pro del aporte práctico y el aporte teórico.

3.1. Enfoque metodológico

El enfoque metodológico global de la investigación está determinado por dos propósitos derivados de los objetivos y relacionados con las tareas de investigación. Uno de ellos corresponde al diseño metodológico encaminado al aporte teórico que en primera medida se describe de corte mixto y el otro, con relación al aporte práctico, se propone desde la investigación como ciencia del diseño. A continuación, se describe cada uno de ellos.

3.1.1 Enfoque metodológico con relación al aporte teórico. Metodología mixta

Este trabajo desde la perspectiva de Sampieri (2014) reconoce dos paradigmas: (I) El paradigma positivista como aquel que entiende el mundo natural con existencia propia, independiente de quien lo estudia, determinado por leyes que permiten explicar, predecir y controlar los fenómenos mediante el uso de técnicas de carácter hipotético-deductivas; (II) El paradigma cualitativo, fenomenológico, naturalista, humanista o etnográfico cuyo propósito es entender y comprender la realidad dinámica, holista y diversa, además de su interés dirigido al significado, descripción y análisis de las acciones humanas y de la práctica social en busca de la transformación de la estructura de las relaciones sociales, aportando respuestas a determinados problemas. El enfoque cualitativo puede entenderse como sociocrítico cuando parte de una ideología explícita y la autorreflexión crítica en los procesos del conocimiento.

Aunque estos enfoques parecen ser de carácter totalmente opuestos, en esta investigación se consideran como complementarios y apropiados según los propósitos de la investigación, desde una mirada que aprecia las fortalezas de los métodos mixtos. Para Bikner-Ahsbahs, Knipping & Presmeg (2015), existe un debate en relación con los métodos mixtos, pero el objetivo final es superar las debilidades del uso de un solo método sin caer en la combinación deliberada. Los autores proponen tres tipos de combinaciones QUAL → QUAN, QUAN → QUAL, QUAL + QUAN, cada uno con sus diferentes bondades y beneficios, pero siempre determinadas por las necesidades propias de la investigación y estrechamente vinculadas a las preguntas de investigación. Es en ese mismo sentido que este trabajo está abierto a una metodología de enfoque mixto.

Por último, el aporte teórico se encuentra mediado y ligado a las actividades que permiten delimitar y construir el proceso de teorización. Esta relación teoría-práctica, presenta como oportunidad el uso metodológico de la educación matemática como ciencia del diseño tal como se expone en el siguiente epígrafe, aunque con un énfasis inicial en el aporte práctico, no se desconoce su potencial hacia el aporte teórico.

3.1.2 Metodología con relación al aporte práctico. Educación Matemática como ciencia del diseño

Con relación al aporte teórico de la tesis y hacia el aporte práctico de la misma, la metodología de esta investigación se encuadra en un enfoque mixto. Entonces existe una dialéctica entre las preguntas de investigación y el diseño metodológico de tal forma que, cada vez que se reestructuran las preguntas de investigación, estas lo van direccionando y permiten ajustar el diseño metodológico. Para Sampieri (2014) el enfoque mixto constituye una posible elección para enfrentar problemas y generar conocimiento. Con esta elección metodológica se busca, como lo describen Kaiser & Presmeg (2019), por medio de la triangulación de métodos, y de la convergencia, corroboración y correspondencia de los resultados. Al realizar métodos complementarios, se puede mejorar la descripción, ilustración, aclaración y análisis de los datos de un método comparados y contrastados con los resultados del otro método.

Sin embargo, específicamente con relación al aporte teórico de la investigación, se presenta especial interés por una metodología basada en la ciencia del diseño. Tal como lo exponen Lesh y Sriraman (2010), la ciencia del diseño es especialmente relevante como método en la educación matemática porque: (a) Los "sujetos" investigados suelen ser en parte productos de la creatividad humana; (b) Los "sujetos" investigados son (o encarnan) sistemas complejos, es decir, un sistema como un todo que tiene propiedades emergentes que no pueden deducirse simplemente de las propiedades de los elementos del sistema; (c) Los investigadores deben diseñar para la potencia, la compatibilidad y la reutilización, pero ellos no se limitan solo a realizar pruebas para ello; (d) Los "temas" que hay que entender cambian continuamente, al igual que los sistemas conceptuales necesarios para comprenderlos y explicarlos; (e) Los "temas" que se investigan están influenciados por las restricciones y asequibilidades sociales; (f) No es probable que una única "gran teoría" proporcione soluciones realistas a problemas realmente complejos y, por último, (g) El desarrollo suele implicar una serie de ciclos de diseño iterativos.

Para Boote (2010) la educación matemática "*(1) es un campo relativamente nuevo que ha tomado prestados sus métodos de investigación principalmente de la psicología experimental; (2) se ha centrado en la producción de conocimientos ampliamente generalizables; (3) pocos investigadores se centran en la producción de productos tangibles para mejorar la calidad de la educación matemática; (4) la mayoría de las políticas de educación matemática, los planes de estudio y los métodos de instrucción no apoyan adecuadamente a los profesores en el aula; (5) los contextos educativos son bastante complejos, dinámicos y se adaptan continuamente; (6) la investigación en educación matemática ha fracasado generalmente en la acumulación de sus conocimientos; (7) muchas de sus ideas son anticuadas y no científicas*"[61].

[61] Boote, D. N. (2010). Commentary 3 on re-conceptualizing mathematics education as a design science. In *Theories of mathematics education*. Springer, Berlin, Heidelberg. p.160

Ante este panorama, los investigadores en educación matemática deben contribuir a atender los problemas planteados, para lo cual se sugiere que, por medio de la ciencia del diseño, se pueda centrar la atención en la complejidad y aportar a un cambio significativo en la relación entre el trabajo teórico y práctico. Porque no es suficiente con determinar si una teoría permite una predicción coherente y precisa, también requiere el diseño de entornos de aprendizaje, la revisión de planes de estudios y la evaluación de los logros con relación a la cognición y al aprendizaje.

Por otra parte, la investigación del diseño combina el diseño instructivo y la investigación educativa. Para Prediger, Gravemeijer y Confrey (2015), la investigación como ciencia del diseño sigue ganando protagonismo como metodología importante en la comunidad de investigación en educación matemática. Se distinguen dos enfoques de investigación sobre el diseño, el primero considerado de menor relevancia, pretende innovaciones de los planes de estudio, y el segundo, de mayor importancia y el eje principal de este tipo de investigación, centra su atención en el desarrollo de teorías sobre los procesos de aprendizaje. Según los autores, en este tipo de investigación se identifican cinco características:

(1) Es un diseño intervencionista, porque se realiza una intervención al crear y estudiar nuevas formas de instrucción.

(2) El objetivo principal de la investigación como diseño es generar o refinar teorías con un enfoque pragmático sobre el proceso de aprendizaje específico de un tema de interés y los medios para apoyarlo.

(3) Se utiliza un proceso prospectivo y reflexivo, porque se conecta la teoría y el experimento, generando reflexiones acerca de la relación entre lo esperado y lo observado en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

(4) Se observan ciclos iterativos de invención y revisión que permiten refinar las conjeturas y adaptar tanto las actividades de instrucción como la teoría que las sustenta. Además, los conocimientos no sólo se adquieren en las distintas iteraciones sino también al realizar el análisis retrospectivo.

(5) La investigación es ecológicamente válida y orientada a la práctica. Busca la relación entre la teoría y el trabajo cotidiano en las aulas, que represente las condiciones de la práctica real. Así, las teorías están estrechamente vinculadas a las actividades de los estudiantes y los profesores, y así permiten ponerlas a prueba y realizar revisiones de forma reiterada.

Por último, se reconoce que la investigación como diseño requiere un enfoque diferente del currículo y no pretende dar cuenta de este. Aunque puede utilizarse, los materiales curriculares que se generan tienen como propósito incentivar en los estudiantes el pensamiento, además de estimular y potenciar formas de aprendizaje activas, anticipadas e imprevistas, lo que requiere revisiones continuas durante el experimento que a su vez pueden llevar a decisiones que no corresponden a lo planteado por el currículo.

Entonces, la ciencia de diseño está lejos de ser una metodología que realiza el bricolaje de diferentes métodos, sino por el contrario se enfoca en una metodología flexible, iterativa, coherente y sobre todo convergente a los objetivos de la investigación, lo que conlleva responsabilidad y madurez en las decisiones. Aunque no puede pensarse que es una panacea (Boote, 2010), si está coherentemente pensada con la evolución y progreso histórico de la matemática, su relación con la computación, la revisión e innovación curricular y lo más importante, su atención en el desarrollo de teorías sobre los procesos de aprendizaje, el cual es uno de los propósitos principales en esta tesis. En conclusión, se propone una investigación de tipo cualitativo, con un enfoque mixto y que utilizará la ciencia del diseño como parte fundamental del diseño de la investigación.

3.2. Población y unidad de análisis

3.2.1. Análisis descriptivo exploratorio problemas tipo Canguro Matemático y problemas liberados del PISA, además de problemas de competiciones que requieren solución completa en la olimpiada matemática de primer nivel.

Población: Preguntas tipo PISA, Problemas Canguro Matemático, Soluciones a problemas de Olimpiadas de primer nivel.

Unidad de análisis:

Soluciones a Preguntas tipo PISA (aula regular y estudiantes en entrenamiento);

Soluciones a Problemas del Canguro Matemático (Estudiantes de aula regular) y

Soluciones a problemas de Olimpiadas matemáticas (Concursantes de la olimpiada).

3.2.2. Aplicación de actividades e instrumentos

Se definen las poblaciones de trabajo para la tesis.

Población 1. Estudiantes de clases regulares.

Unidad de análisis A: Estudiantes de colegios distritales en edades entre los 12 y los 14 años (curso asignado entendido como muestra no intencionada con cierta aleatoriedad).

Población 2. Estudiantes en entrenamiento para competiciones.

Unidad de análisis B: Estudiantes en entrenamiento para Olimpiadas Colombianas (*Muestra preseleccionada*). Es importante mencionar que el Canguro Matemático es una de las rondas de la olimpiada, es decir, cercana y conocida por los estudiantes en entrenamiento**.**

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. A continuación, se relacionan los métodos para cada propósito.

3.3.1. Análisis exploratorio soluciones a problemas de competiciones. Revisión teórica y planteamiento de hipótesis.

Entrevista a expertos: Se entrevista al Dr. Mogens Niss; esta entrevista es importante porque su teoría fundamenta la definición de competencia utilizada en el desarrollo de la tesis. Además, se entrevistarán expertos con el propósito de detallar y mejorar el alcance y la profundidad de la tesis; diálogo con el Dr. Gerson Harel.

Revisión bibliográfica: es importante la revisión bibliográfica tanto para el estado del arte, el marco teórico, como evaluaciones liberadas de los tipos requeridos en la investigación a fin de tomar decisiones frente a las actividades a proponer.

Revisión y selección de preguntas y/o problemas. Se revisan preguntas liberadas tipo PISA, preguntas del Canguro Matemático del nivel Cadet, y problemas de olimpiadas matemáticas de primer nivel, además de las soluciones a los problemas de olimpiadas de la ronda final de primaria.

3.3.2. Aplicación de actividades e instrumentos encaminados al aporte práctico

Principalmente la investigación basada en el diseño será el eje orientador del proceso de aplicación práctica. Con respecto de la investigación basada en el diseño, Bakker & Van Eerde (2015) la caracterizan como una investigación en la que el diseño de materiales educativos es una parte muy importante de la investigación. El diseño de entornos de aprendizaje está entretejido con el desarrollo de la teoría siguiendo principalmente tres fases.

Fase 1: La preparación y el diseño: Análisis del tema, las dificultades, la formulación y el establecimiento de unas metas provisionales.

- ***Encuestas docentes:*** establecer una ruta de trabajo que permita delimitar los propósitos de la tesis con relación a la importancia entre los profesores y la comunidad de educadores matemáticos.
- ***Aplicación de actividades piloto*.** Las pruebas y actividades relacionadas con el tema proporcionarán un panorama a revisar en las actividades a construir. En principio un diseño optativo tendrá: Una pregunta tipo PISA, una pregunta tipo Canguro Matemático y un problema de Olimpiada matemática para solución completa. Además, se abrirá un espacio para tratar características de tipo afectivo y la forma de pensar o fijar la atención al abordar y enfocar la solución del problema.

Fase 2: El experimento de enseñanza: se implementa el experimento el cual permite concentrarse en qué enseñar y cómo se aprende, además de entrevistar y observar.

- ***Aplicación de actividades.*** En principio un diseño optativo tendrá: Dos preguntas tipo PISA, dos preguntas tipo Canguro Matemático y un problema de Olimpiadas matemáticas para solución completa. Además, se dedicará un espacio para tratar características de tipo afectivo y la forma de pensar o fijar la atención al abordar el enfoque del problema. En casos especiales se recurrirá a la entrevista para mejorar la comprensión con relación a las decisiones y enfoque de trabajo en la solución de los diferentes problemas.
- ***Observación no participante*.** Como lo describe Sampieri, Fernández y Baptista (2014, p.375 y 376), se realiza registro de notas de campo que pueden ser escritas y grabadas en algún medio electrónico del desarrollo de las actividades.

- ***Observación sistemática.*** **C**on relación a los documentos de los estudiantes es preciso una observación más detallada y realizada con detenimiento, el registro de citas textuales de los participantes, y observación y descripción de las soluciones particulares de los estudiantes.
- ***Diálogo o encuesta con estudiantes.*** Aunque se aplican instrumentos de selección múltiple, se pedirá que el estudiante muestre el procedimiento que siguió. Este instrumento es de especial importancia para mejorar la descripción y categorización. Así, será posible acercarse primero a la parte afectiva del estudiante, y, segundo, a la descripción de episodios sobre sus posibles formas de entender y formas de pensar.
- ***Soluciones completas a problemas propuestos.*** Para todos los problemas es deseable que el estudiante escriba la solución completa tipo ensayo o que proporcione información de su proceso de solución a fin de determinar el conjunto de estrategias utilizadas, esto con el propósito de observar y describir formas de entender (estables y en el momento (Harel, 2021)) y formas de pensar de los estudiantes que se relacionan con las competencias matemáticas esperadas. Sin embargo, durante el escrito se especificarán los indicadores de observación tanto para las preguntas de tipo PISA, como en los problemas canguro o de olimpiadas. Esto con el propósito de dar cuenta del avance en la solución de problemas y en manifestaciones de desarrollo del pensamiento matemático.

Fase 3: Análisis retrospectivo: Seleccionar, caracterizar y describir los resultados de las observaciones. Contrastar, conjeturar y discutir las conjeturas iniciales. Este método permitirá el análisis de las actividades y de ser requerido, planear y/o ejecutar aproximaciones cada vez más precisas de los fenómenos observados con relación a la teoría de competencias y las competiciones matemáticas.

- Lectura y relectura de las soluciones presentadas por los estudiantes en cada etapa del estudio.
- Análisis de los datos obtenidos y conciliaciones entre las teorías.

- Elaboración de una teoría de explicación teniendo en cuenta los resultados empíricos. Entre ellos el análisis de las soluciones presentadas por los estudiantes en la ronda final de la Olimpiada Colombiana de Matemática de primaria.
- Trabajo de campo. Con base en dos pruebas internacionales, Prueba PISA y Canguro Matemático (que utilizan instrumentos de evaluación de selección múltiple) y documentos de las olimpiadas de primer nivel, se aplicarán dos actividades a estudiantes en entrenamiento para olimpiadas y cinco actividades a estudiantes de aula regular de colegio distrital en un rango de 12 a 14 años.

3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se conciliaron las siguientes fases:

1. Elaborar el estado del arte y fundamentar teóricamente la tesis.
2. Estudiar y solucionar preguntas tipo PISA, preguntas Canguro matemático y problemas de Olimpiada del primer nivel.
3. Estudiar soluciones de problemas realizadas por estudiantes en olimpiadas matemáticas de primer nivel (inicialmente) y por estudiantes de clase regular de un colegio distrital.
4. Proponer y revisar las soluciones completas a los problemas del tipo PISA y Canguro Matemático realizadas por estudiantes en entrenamiento para olimpiadas matemáticas y por estudiantes de clase regular de 12 a 14 años.
5. Revisar y analizar los resultados, organización y triangulación de la información.
6. Elaborar los documentos de tesis, publicación y divulgación

Conclusiones del capítulo 3

Aunque en general la investigación es de carácter cualitativo, Es importante hacer notar que se presentan dos niveles de enfoque metodológico, uno de carácter general determinado por una metodología mixta y otro enfocado hacia el aporte teórico determinado por la educación matemática como ciencia del diseño. Este diseño tiene como fortaleza la posibilidad de combinar diferentes métodos en relación con las preguntas científicas.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA FAVORECER EL AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y EL CONTRASTE ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPETICIONES Y LA TEORÍA SOBRE COMPETENCIAS

El sistema de actividades cruza por varias etapas de elaboración y reelaboración hasta la propuesta de trabajo final, que pueden presentarse en varios momentos, iniciando con la elección de los problemas que contiene la actividad, probando por varios semestres la aplicación y uso de diversos problemas, solucionándolos juntamente con estudiantes de aula regular. Después, se elabora una propuesta de estructura de actividad piloto con estudiantes de aula regular y se aplica, desde los resultados, se analizan lo favorable y seguido se adecúa la actividad.

Se elabora una actividad para estudiantes en entrenamiento para olimpiadas y se aplica. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y la dinámica observada, los tiempos y resultados; se corrigen y mejoran los aspectos necesarios para definir lo que será la estructura definitiva de aplicación con estudiantes de aula regular. A continuación, se presenta brevemente parte de los resultados de las diferentes etapas, que justifican la elección de la estructura de las actividades.

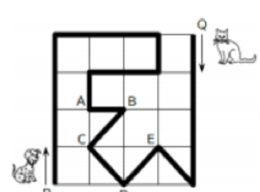
4.1. Elección de los ítems que contiene la actividad.

El sistema de actividades pretende el contraste entre la solución de problemas de competiciones y la teoría sobre competencias. Así, para las preguntas tipo olimpiadas se propone elegir preguntas del Canguro matemático del nivel Cadet y preguntas de Olimpiada Colombiana de primer nivel o primaria; por otra parte, con relación a las competencias se eligen ítems de la prueba PISA. A continuación, se describen algunas de las características de los problemas.

4.1.1 Problemas del Canguro Matemático

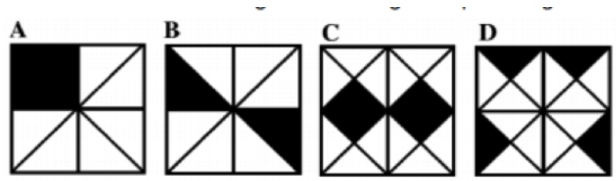
Estos problemas son problemas cortos que no requieren un nivel de conocimiento matemático avanzado. Los problemas no están pensados desde el currículo escolar, sino que pretenden que el estudiante utilice sus habilidades matemáticas haciendo uso de diferentes estrategias, más que de procedimientos rutinarios aprendidos en las clases. A continuación, se presenta cuatro ejemplos de la prueba Canguro Matemático del nivel Cadet, los problemas se clasifican por nivel de dificultad y en la prueba, le pueden otorgar al participante 3, 4 o 5 puntos, lo que puede homologarse a un nivel medio, alto o avanzado.

Ejemplo A. (Nivel medio) Un perro y un gato caminan por el parque a lo largo del camino marcado por la línea gruesa. Comienzan simultáneamente, el perro desde P y el gato desde Q. Si el perro camina tres veces más rápido que el gato. ¿Dónde se encontrarán?



A) en A B) en B C) en C D) en D E) en E

Ejemplo B. (Nivel alto) ¿En cuál de los cuatro cuadrados iguales de la figura la parte negra es mayor?

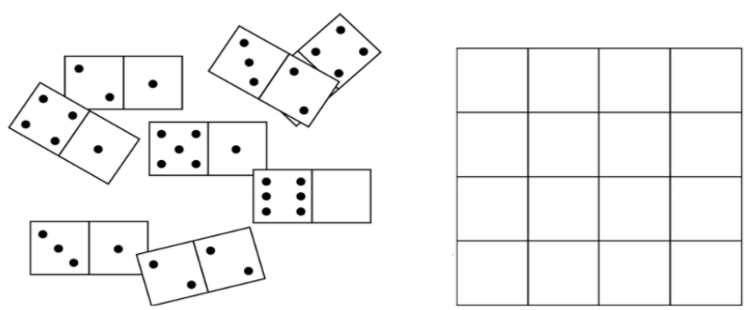


A) A   B) B   C) C   D) D   E) en todos es igual

Ejemplo C. (Nivel avanzado) Cinco enteros positivos (no necesariamente diferentes) se escriben en cinco cartas. Pedro calcula la suma de los números tomando cada posible pareja de cartas. Obtiene solamente tres sumas diferente 57, 70 y 83. ¿cuál es el mayor entero escrito en alguna de las cartas?

(A) 35   **(B)** 42   **(C)** 48   **(D)** 53   **(E)** 82

Ejemplo D: (Nivel avanzado) Sobre la mesa hay 8 fichas de dominó. La mitad de una de las fichas está cubierta por otra ficha y no se ve cuántos puntos tiene. Las 8 fichas se pueden acomodar en un tablero de 4 x 4 de modo que la cantidad de puntos en cada fila y en cada columna del tablero sea la misma. ¿cuántos puntos hay en la mitad no visible de la ficha cubierta?



Se puede apreciar en los ejemplos como los puntos que otorga cada pregunta según en la evaluación, es

(A) 1   **(B)** 2   **(C)** 3   **(D)** 4   **(E)** 5

4.1.2 Problemas Tipo PISA

Son problemas con un enunciado en contexto que corresponde a las características que se describen a continuación.

Vincula alguno de tres procesos: Reproducción (de cálculos sencillos o definiciones del tipo más familiar), Conexiones (requiere de la reunión de ideas y procedimientos matemáticos) o Reflexión (se basa en razonamiento, generalización y discernimiento matemático). ***Hace referencia a una categoría del Contenido:*** Cantidad, el espacio, la forma, el cambio y las relaciones, y la incertidumbre. ***La pregunta se enmarca en un Contexto:*** La vida personal, la vida escolar, el trabajo y el ocio, la comunidad local y la sociedad. Su propósito es evaluar el currículo y así obtener evidencia para comparar el desempeño de los estudiantes en matemáticas centrándose en las competencias y no principalmente en los contenidos escolares. Por ejemplo, una pregunta que refiere al uso de molinos de viento como centrales de energía, llamada el poder del viento[62]. la primera característica es que la pregunta inicia con un contexto, que puede no ser cercano a la realidad del estudiante, como en este caso (Figura 4-1).

EL PODER DEL VIENTO

Villazed está contemplando construir varias centrales de energía eólica para producir electricidad.

El Ayuntamiento de Villazed recogió información sobre el siguiente modelo.

Modelo:	E-82
Altura de la torre:	138 metros
Número de palas del rotor:	3
Longitud de una pala del rotor:	40 metros
Velocidad máxima de rotación:	20 vueltas por minuto
Precio de construcción:	3.200.000 zeds
Facturación:	0,10 zeds por kWh generado
Coste de mantenimiento:	0,01 zeds por kWh generado
Rendimiento:	Operativa el 97% del año

Nota: El kilovatio-hora (kWh) es una unidad de medida de la energía eléctrica.

Figura 4-1 Contexto pregunta Poder del Viento

62 PISA 2012. Competencia Matemática. Ejemplos de ítems liberados de la prueba en papel. recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/inee/publicaciones/items-liberados/pisa-ocde/pisa-2012-items-liberados.html (noviembre 2022). p. 25.

Lo segundo es que desde el mismo contexto se derivan las preguntas, que pueden ser presentadas de diferente forma. Primero se formulan preguntas para elegir si o no y que no requieren justificación, como lo presenta la Figura 4-2.

Pregunta 1: EL PODER DEL VIENTO

Indica si los siguientes enunciados sobre la central de energía eólica E-82 pueden deducirse de la información facilitada. Rodea con un círculo «Sí» o «No» según corresponda a cada enunciado.

Enunciado	¿Puede este enunciado deducirse de la información facilitada?
La construcción de tres de las centrales de energía costará más de 8.000.000 de zeds en total.	Sí / No
Los costes de mantenimiento de la central de energía corresponden, aproximadamente, al 5% de su facturación.	Sí / No
Los costes de mantenimiento de la central de energía eólica dependen de la cantidad de kWh generados.	Sí / No
Exactamente durante 97 días al año, la central de energía eólica no está operativa.	Sí / No

Figura 4-2 Pregunta de elección falso o verdadero

También puede ser la típica pregunta con cuatro opciones de respuesta y una sola verdadera, como lo presenta el ejemplo de la Figura 4-3.

Pregunta 2: EL PODER DEL VIENTO

Villazed desea calcular los costes y el beneficio que generaría la construcción de esta central de energía eólica.

El alcalde de Villazed propone la siguiente fórmula para calcular el beneficio económico, *E* (en zeds), durante una serie de años, *a*, si construyen el modelo E-82.

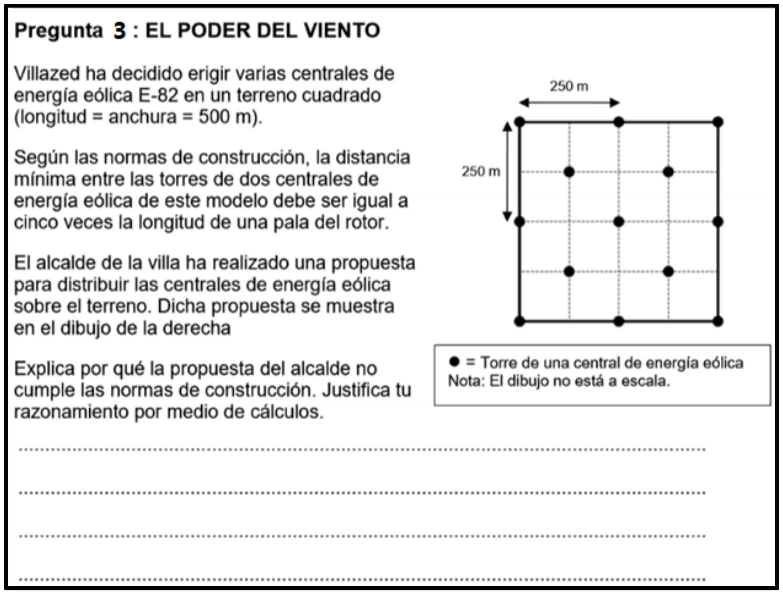
$$E = \underbrace{400.000\,a}_{\text{Beneficio de la producción anual de electricidad}} - \underbrace{3.200.000}_{\text{Costes de construcción de la central de energía eólica}}$$

Según la fórmula del alcalde, ¿cuál es el número mínimo de años de funcionamiento requeridos para cubrir los costes de construcción de la central de energía eólica?

A 6 años
B 8 años
C 10 años
D 12 años

Figura 4-3 Pregunta de selección múltiple única respuesta

Por último, puede ser una pregunta abierta en la que el estudiante debe justificar su respuesta haciendo uso de cálculos matemáticos, así como se presenta en la Figura 4-4.


Pregunta 3 : EL PODER DEL VIENTO

Villazed ha decidido erigir varias centrales de energía eólica E-82 en un terreno cuadrado (longitud = anchura = 500 m).

Según las normas de construcción, la distancia mínima entre las torres de dos centrales de energía eólica de este modelo debe ser igual a cinco veces la longitud de una pala del rotor.

El alcalde de la villa ha realizado una propuesta para distribuir las centrales de energía eólica sobre el terreno. Dicha propuesta se muestra en el dibujo de la derecha

Explica por qué la propuesta del alcalde no cumple las normas de construcción. Justifica tu razonamiento por medio de cálculos.

Figura 4-4 Pregunta abierta de la prueba PISA

Las preguntas pueden ser de respuesta abierta, pero las respuestas están limitadas a un conjunto o rango de posibilidades, esto para facilitar la posterior evaluación.

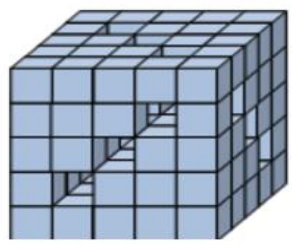
4.1.3. Preguntas tipo Olimpiada

La Olimpiada Colombiana de Matemáticas utiliza diferentes tipos de preguntas en cada una de las rondas clasificatorias hasta llegar a la ronda final en la que el problema debe ser resuelto en su totalidad y su solución se evalúa tipo ensayo.

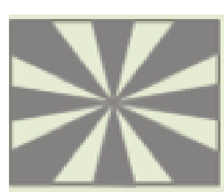
La primera característica es que en este tipo de problema no se ofrecen opciones de respuesta, es decir, se propone un problema abierto que busca del estudiante un desarrollo libre sin ofrecer una pista de la respuesta. El formato de elaboración se es acorde con la prueba selectiva, la prueba final en las Olimpiadas Colombianas y también los problemas de las pruebas de entrenamiento, utilizados en diferentes momentos de la investigación.

Es importante mencionar que, aunque los problemas de la prueba selectiva no requieren solución completa, en la actividad se pretende que los estudiantes presenten una, dentro de sus posibilidades. También, es posible que se utilicen preguntas similares a las del Canguro, pero del nivel avanzado, que exigen un nivel de pensamiento más elaborado y con una mayor posibilidad en el uso de estrategias para ser abordado y como se ha mencionado, que permitan al estudiante presentar una solución completa del problema. A continuación, se presentan tres ejemplos.

Ejemplo 1. Miguel tiene 125 cubos pequeños. Pega algunos de ellos para formar un cubo grande con nueve túneles que atraviesan el cubo completamente, como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños le sobraron?



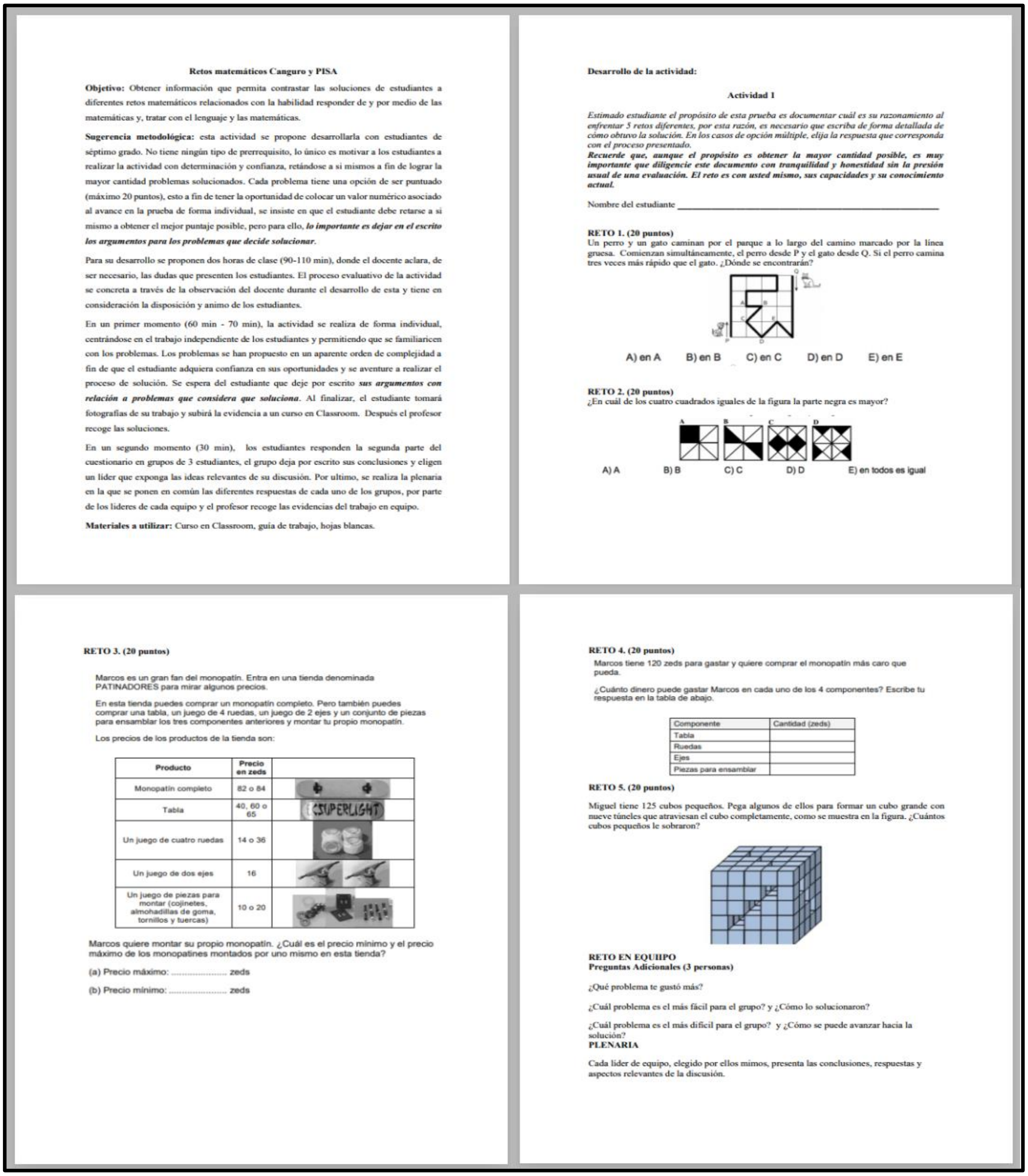
Ejemplo 2. La bandera de la figura tiene 50 cm de largo por 30 cm de alto. Además, se construyó de forma que cada lado está dividido en 5 partes iguales: ¿Cuál es el área de la región sombreada, en centímetros cuadrados?



Ejemplo 3. Un tendero empacó 46 cajas con el mismo número de naranjas en cada una y le sobraron 2 naranjas. Si hubiera empacado 3 naranjas menos en cada caja, habría utilizado 60 cajas y no le sobraría ninguna naranja ¿Cuántas naranjas tenía el tendero?

4.2. Elaboración de la prueba piloto

En la prueba piloto la actividad que se propuso contenía cinco problemas: dos del tipo canguro matemático, dos del tipo PISA y uno del tipo Olimpiadas, como se presenta en la Figura 4-5.



Retos matemáticos Canguro y PISA

Objetivo: Obtener información que permita contrastar las soluciones de estudiantes a diferentes retos matemáticos relacionados con la habilidad responder de y por medio de las matemáticas y, tratar con el lenguaje y las matemáticas.

Sugerencia metodológica: esta actividad se propone desarrollarla con estudiantes de séptimo grado. No tiene ningún tipo de prerrequisito, lo único es motivar a los estudiantes a realizar la actividad con determinación y confianza, retándose a si mismos a fin de lograr la mayor cantidad problemas solucionados. Cada problema tiene una opción de ser puntuado (máximo 20 puntos), esto a fin de tener la oportunidad de colocar un valor numérico asociado al avance en la prueba de forma individual, se insiste en que el estudiante debe retarse a si mismo a obtener el mejor puntaje posible, pero para ello, ***lo importante es dejar en el escrito los argumentos para los problemas que decide solucionar***.

Para su desarrollo se proponen dos horas de clase (90-110 min), donde el docente aclara, de ser necesario, las dudas que presenten los estudiantes. El proceso evaluativo de la actividad se concreta a través de la observación del docente durante el desarrollo de esta y tiene en consideración la disposición y animo de los estudiantes.

En un primer momento (60 min - 70 min), la actividad se realiza de forma individual, centrándose en el trabajo independiente de los estudiantes y permitiendo que se familiaricen con los problemas. Los problemas se han propuesto en un aparente orden de complejidad a fin de que el estudiante adquiera confianza en sus oportunidades y se aventure a realizar el proceso de solución. Se espera del estudiante que deje por escrito ***sus argumentos con relación a problemas que considera que soluciona***. Al finalizar, el estudiante tomará fotografías de su trabajo y subirá la evidencia a un curso en Classroom. Después el profesor recoge las soluciones.

En un segundo momento (30 min), los estudiantes responden la segunda parte del cuestionario en grupos de 3 estudiantes, el grupo deja por escrito sus conclusiones y eligen un líder que exponga las ideas relevantes de su discusión. Por ultimo, se realiza la plenaria en la que se ponen en común las diferentes respuestas de cada uno de los grupos, por parte de los lideres de cada equipo y el profesor recoge las evidencias del trabajo en equipo.

Materiales a utilizar: Curso en Classroom, guía de trabajo, hojas blancas.

Desarrollo de la actividad:

Actividad 1

Estimado estudiante el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 5 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada de cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda con el proceso presentado.
Recuerde que, aunque el propósito es obtener la mayor cantidad posible, es muy importante que diligencie este documento con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación. El reto es con usted mismo, sus capacidades y su conocimiento actual.

Nombre del estudiante ____________________

RETO 1. (20 puntos)
Un perro y un gato caminan por el parque a lo largo del camino marcado por la línea gruesa. Comienzan simultáneamente, el perro desde P y el gato desde Q. Si el perro camina tres veces más rápido que el gato. ¿Dónde se encontrarán?

A) en A B) en B C) en C D) en D E) en E

RETO 2. (20 puntos)
¿En cuál de los cuatro cuadrados iguales de la figura la parte negra es mayor?

A) A B) B C) C D) D E) en todos es igual

RETO 3. (20 puntos)

Marcos es un gran fan del monopatín. Entra en una tienda denominada PATINADORES para mirar algunos precios.

En esta tienda puedes comprar un monopatín completo. Pero también puedes comprar una tabla, un juego de 4 ruedas, un juego de 2 ejes y un conjunto de piezas para ensamblar los tres componentes anteriores y montar tu propio monopatín.

Los precios de los productos de la tienda son:

Producto	Precio en zeds	
Monopatín completo	82 o 84	
Tabla	40, 60 o 65	SUPERLIGHT
Un juego de cuatro ruedas	14 o 36	
Un juego de dos ejes	16	
Un juego de piezas para montar (cojinetes, almohadillas de goma, tornillos y tuercas)	10 o 20	

Marcos quiere montar su propio monopatín. ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo de los monopatines montados por uno mismo en esta tienda?

(a) Precio máximo: .... zeds

(b) Precio mínimo: .... zeds

RETO 4. (20 puntos)
Marcos tiene 120 zeds para gastar y quiere comprar el monopatín más caro que pueda.

¿Cuánto dinero puede gastar Marcos en cada uno de los 4 componentes? Escribe tu respuesta en la tabla de abajo.

Componente	Cantidad (zeds)
Tabla	
Ruedas	
Ejes	
Piezas para ensamblar	

RETO 5. (20 puntos)

Miguel tiene 125 cubos pequeños. Pega algunos de ellos para formar un cubo grande con nueve túneles que atraviesan el cubo completamente, como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños le sobraron?

RETO EN EQUIIPO
Preguntas Adicionales (3 personas)

¿Qué problema te gustó más?

¿Cuál problema es el más fácil para el grupo? y ¿Cómo lo solucionaron?

¿Cuál problema es el más difícil para el grupo? y ¿Cómo se puede avanzar hacia la solución?
PLENARIA

Cada líder de equipo, elegido por ellos mimos, presenta las conclusiones, respuestas y aspectos relevantes de la discusión.

Figura 4-5. Propuesta piloto Actividad

El problema que se detecta en esta actividad es que no queda clara la división entre los dos enfoques a contrastar. Por esa razón, se cambia el formato a una actividad que utiliza dos tipos de retos matemáticos.

4.3. Estructura de la actividad piloto estudiantes de olimpiadas

La actividad se presenta en hojas separadas. Tiene como diferencia que las instrucciones son cortas ver Figura 4-6 y se desiste de la idea de puntuar los resultados.

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y, aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.

Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

Figura 4-6 Instrucciones de la prueba.

También, cambia que ahora se definen dos tipos de retos. El reto naranja que contiene tres preguntas que parten de un mismo contexto (Tipo PISA), y el reto azul, que son tres preguntas, que no están ligadas a un mismo contexto (Tipo Olimpiadas) ver Figura 4-7. Como instrumento adicional, se incluyó una encuesta sobre la percepción de cada tipo de reto (Figura 4-8); en la encuesta se le dan al estudiante palabras para elegir según sean cercanas al reto que ha solucionado, después unas preguntas en escala Likert para responder con relación a los dos tipos de reto y, por último, una pregunta abierta con relación a si prefiere el reto naranja o el azul o ambos

Actividad 1

Nombre del estudiante ______________________________

INSTRUCCIONES GENERALES

1. Estimado estudiante el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes (naranja y azul), cada reto tiene 3 problemas que deben ser contestados con justificación.
2. Tiene 90 minutos para resolver y escribir las soluciones. El propósito es trabajar todos los problemas así que se le sugiere utilizar entre 10 y 15 minutos por cada pregunta.
3. Todo el trabajo debe hacerse en la página correspondiente a cada pregunta. Abajo del enunciado se ha dejado un espacio en blanco para trabajar y escribir la solución.
4. Registre en el informe los procedimientos, los razonamientos o las operaciones, así como los argumentos que utiliza para dar solución. No utilice otras hojas de trabajo. Con el propósito de entender su razonamiento, es necesario que escriba de forma detallada de cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y justifique porqué es la opción correcta.
5. Para la revisión son importantes todos los razonamientos o procedimientos incluidos los resultados parciales que se dejan como evidencia del trabajo, por favor no borre sus avances en cada pregunta.
6. Puede leer y solucionar la prueba en diferente orden. Recuerde que, aunque se le invita a solucionar la mayor cantidad posible de preguntas, es muy importante que diligencie este documento con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.
7. Al finalizar cada reto avise al profesor para diligenciar una breve encuesta sobre la percepción del reto.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

La empresa EMPW fabrica un dispositivo electrónico de video y otro de audio. Al final de cada día se hace el control de calidad, a continuación, se presenta una tabla que resume el control al final del día:

Tipo de dispositivo	Numero de dispositivos fabricados al día	Porcentaje de dispositivos para revisión
Audio	2000	5%
Video	6000	3%

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones sobre la produccion diaria de la empresa EMPW ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo ≪ *SI* ≫ o ≪ *NO* ≫ según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
Un tercio de los dispositivos fabricados diariamente son de video.	Si/No
En cada lote de 100 reproductores de video fabricados habrá exactamente 3 defectuosos.	Si/No
Si de la producción diaria se elige un reproductor de audio al azar para probarlo, la probabilidad de que tenga que ser repararlo es de 0.03.	Si/No

Hoja en blanco

PREGUNTA 2

Una de las personas que realiza las pruebas de calidad hace a siguiente afirmación: *"En un día en promedio, se envían a reparar más reproductores de video que de audio"* Indica si la afirmación es o no correcta y justifica matemáticamente tu respuesta

Observa las tablas que comparan a empresa EMPW *con la empresa SRTM*

Empresa	Número de dispositivos de <u>audio</u> fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	2000	5%
SRTM	7000	4%

Empresa	Número de dispositivos de <u>video</u> fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	6000	3%
SRTM	1000	2%

Hoja en blanco

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 2

Una de las personas que realiza las pruebas de calidad hace a siguiente afirmación: *"En un día en promedio, se envían a reparar más reproductores de video que de audio"* Indica si la afirmación es o no correcta y justifica matemáticamente tu respuesta

Observa las tablas que comparan a empresa EMPW *con la empresa SRTM*

Empresa	Número de dispositivos de audio fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	2000	5%
SRTM	7000	4%

Empresa	Número de dispositivos de video fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	6000	3%
SRTM	1000	2%

Hoja en blanco

Prof. Juan Samuel Rangel L 3

PREGUNTA 3

¿Cuál de las dos empresas presenta el total de reparaciones más bajo de dispositivos defectuosos? Escribe los cálculos que realizas para justificar la respuesta.

Hoja en blanco

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Un arbusto tiene 10 ramas cada rama puede tener 7 hojas o 4 hojas y una flor. El número total de hojas de un arbusto puede ser.

A. 11 B. 28 C. 36 D. 67 E. 110

Hoja en blanco

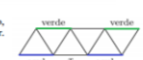
PREGUNTA 2

Un tendero empacó en 52 cajas con el mismo número de naranjas en cada una y le sobraron 16 naranjas. Si hubiera empacado 2 naranjas menos en cada caja, habría utilizado 60 cajas y no le sobraría ninguna naranja ¿Cuántas naranjas tenía el tendero?

Hoja en blanco

PREGUNTA 3

Se quiere colorear cada segmento unitario con el color rojo, verde o azul. Cada triangulo debe tener un lado de cada color. ¿Qué color se puede usar para el segmento marcado con la x?



Hoja en blanco

Figura 4-7 Propuesta actividad estudiantes en entrenamiento de olimpiadas.

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Naranja (Parte 1)

1. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: el reto Naranja es**
   Interesante Entretenido Cuidadoso Aburrido
   Arriesgado Competitivo Prudente Reservado
   Exigente Un_Desafío Amigable Poco_Arriesgado
   Divertido Retador Molesto Mecánico
2. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: al solucionar el reto Naranja me siento**
   Serio Analítico Persuasivo Optimista
   Formal Desconfiado Extrovertido Confiado
   Reservado Sociable Distante Amigable
3. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: El reto naranja permite que usted sea**
   Independiente Creativo Disciplinado Dependiente
   Autónomo Arriesgado Cauteloso Seguro
   Minucioso Libre Obediente Atado
4. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: Para solucionar el reto naranja se requiere ser**
   Dinámico Espontáneo Metódico Calmado
   Diferente Creativo Rutinario Tranquilo
   Movedizo Impaciente Determinado Tolerante
   Cambiante Paciente

Prof. Juan Samuel Rangel L 1

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Naranja (Parte 2)

Marque con una x el número que corresponde a la valoración que realiza del reto naranja.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Me gusta muy poco … Me gusta mucho

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Es muy corto … Es muy extenso

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Me hace pensar muy poco … Me hace pensar mucho

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Puedo actuar con poca libertad … Puedo actuar con mucha libertad

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Utilizo poco los contenidos vistos en mis clases … Utilizo mucho los contenidos vistos en mis clases

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Mejora un poco mi comprensión de las matemáticas … Mejora mucho mi comprensión de las matemáticas

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Son poco importantes estos retos en la clase de matemáticas … Son muy importantes estos retos en la clase de matemáticas

Prof. Juan Samuel Rangel L 2

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Azul (Parte 1)

1. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: el reto Azul es**
   Interesante Entretenido Cuidadoso Aburrido
   Arriesgado Competitivo Prudente Reservado
   Exigente Un_Desafío Amigable Poco_Arriesgado
   Divertido Retador Molesto Mecánico
2. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: al solucionar el reto Azul me siento**
   Serio Analítico Persuasivo Optimista
   Formal Desconfiado Extrovertido Confiado
   Reservado Sociable Distante Amigable
3. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: El reto Azul permite que usted sea**
   Independiente Creativo Disciplinado Dependiente
   Autónomo Arriesgado Cauteloso Seguro
   Minucioso Libre Obediente Atado
4. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: Para solucionar el reto Azul se requiere ser**
   Dinámico Espontáneo Metódico Calmado
   Diferente Creativo Rutinario Tranquilo
   Movedizo Impaciente Determinado Tolerante
   Cambiante Paciente

Prof. Juan Samuel Rangel L 3

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Azul (Parte 2)

Marque con una x el número que corresponde a la valoración que realiza del reto naranja.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Me gusta muy poco … Me gusta mucho

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Es muy corto … Es muy extenso

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Me hace pensar muy poco … Me hace pensar mucho

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Puedo actuar con poca libertad … Puedo actuar con mucha libertad

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Utilizo poco los contenidos vistos en mis clases … Utilizo mucho los contenidos vistos en mis clases

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Mejora un poco mi comprensión de las matemáticas … Mejora mucho mi comprensión de las matemáticas

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — Son poco importantes estos retos en la clase de matemáticas … Son muy importantes estos retos en la clase de matemáticas

Prof. Juan Samuel Rangel L 4

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta (Parte 3)

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Figura 4-8 Encuesta Motivacional y afectiva sobre los problemas propuestos.

4.4. Estructura final de la actividad

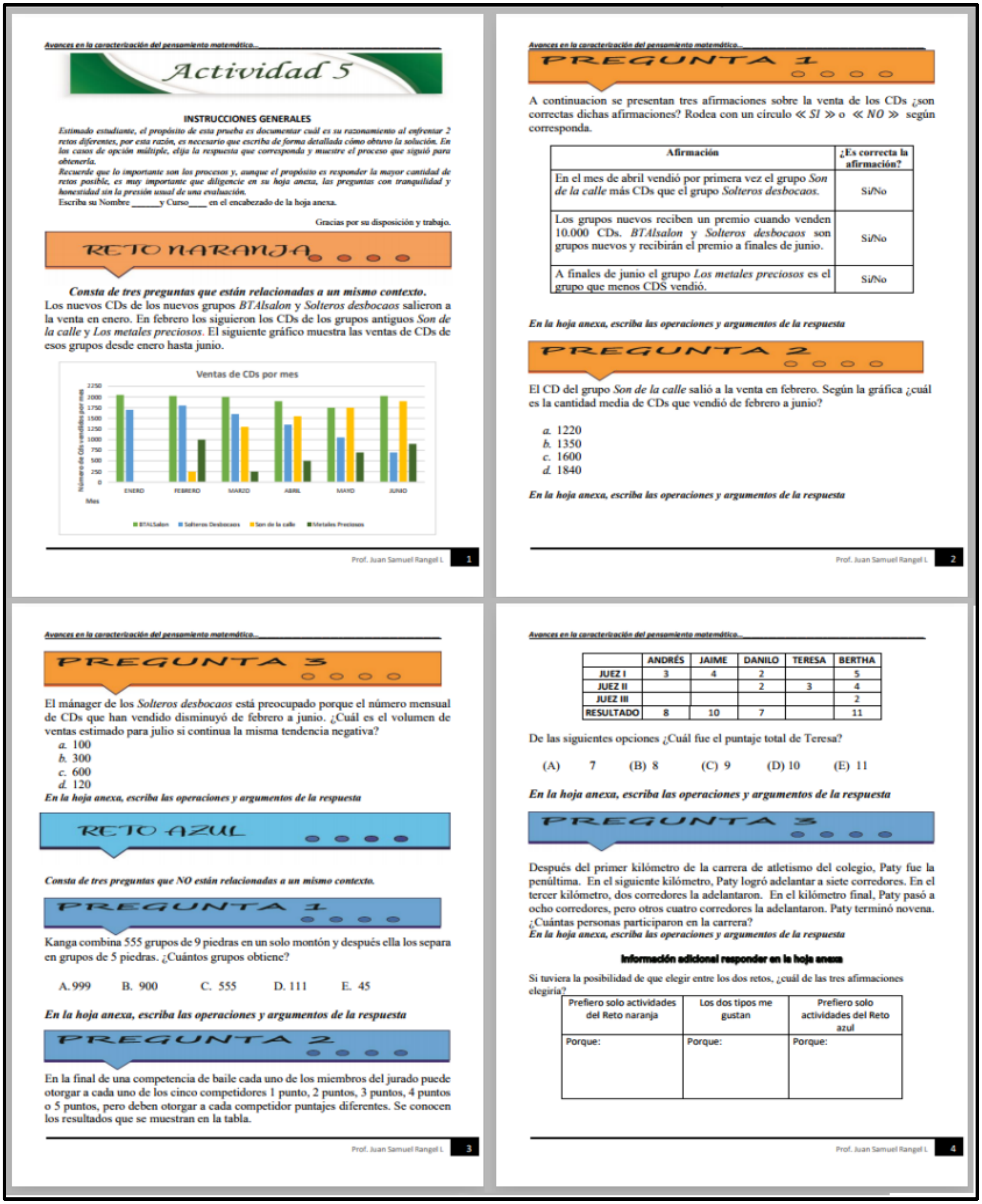
Después de la aplicación se cambian cuatro aspectos: (1) la forma de presentar la actividad, (2) se presentan los problemas seguidos, sin el espacio en blanco para responder (3) y solo se incluye la pregunta abierta como ítem de carácter afectivo y (4) se otorga un tiempo superior al planteado inicialmente quedando de 90 minutos.

Objetivo: caracterizar el pensamiento matemático observado en las soluciones presentadas por estudiantes olimpiadas y aula regular al contrastar las soluciones de estudiantes a diferentes retos matemáticos.

Sugerencia metodológica: esta actividad se propone desarrollarla con estudiantes entre los 12 y 14 años de aula regular. No tiene ningún tipo de prerrequisito, lo único es motivar a los estudiantes a realizar la actividad con determinación y confianza, retándose a sí mismos a fin de lograr la mayor cantidad problemas solucionados. Es muy importante solicitar a los estudiantes dejar en el escrito los procedimientos, operaciones o argumentos que llevan a la solución.

Para su desarrollo se proponen dos horas de clase (90-110 min), donde el docente aclara, de ser necesario, las dudas que presenten los estudiantes, les pide reflexionar sobre los problemas, sobre todo con relación a los que dependen de un mismo contexto.

Se sugiere trabajar en parejas, para que los estudiantes dialoguen sus ideas y así el profesor puede acceder a información que los estudiantes hablan de forma espontánea. Sin embargo, encontrará a estudiantes que no les es fácil trabajar con otra persona quienes le pedirán trabajar solos o harán una parte y sus compañeros otra.


Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Actividad 5

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y, aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.

Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

Los nuevos CDs de los nuevos grupos *BTAlsalon* y *Solteros desbocaos* salieron a la venta en enero. En febrero los siguieron los CDs de los grupos antiguos *Son de la calle* y *Los metales preciosos*. El siguiente gráfico muestra las ventas de CDs de esos grupos desde enero hasta junio.

Ventas de CDs por mes

Prof. Juan Samuel Rangel L 1

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones sobre la venta de los CDs ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo « *SI* » o « *NO* » según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
En el mes de abril vendió por primera vez el grupo *Son de la calle* más CDs que el grupo *Solteros desbocaos*.	Si/No
Los grupos nuevos reciben un premio cuando venden 10.000 CDs. *BTAlsalon* y *Solteros desbocaos* son grupos nuevos y recibirán el premio a finales de junio.	Si/No
A finales de junio el grupo *Los metales preciosos* es el grupo que menos CDS vendió.	Si/No

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

El CD del grupo *Son de la calle* salió a la venta en febrero. Según la gráfica ¿cuál es la cantidad media de CDs que vendió de febrero a junio?

a. 1220
b. 1350
c. 1600
d. 1840

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L 2

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 3

El mánager de los *Solteros desbocaos* está preocupado porque el número mensual de CDs que han vendido disminuyó de febrero a junio. ¿Cuál es el volumen de ventas estimado para julio si continua la misma tendencia negativa?

a. 100
b. 300
c. 600
d. 120

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Kanga combina 555 grupos de 9 piedras en un solo montón y después ella los separa en grupos de 5 piedras. ¿Cuántos grupos obtiene?

A. 999 B. 900 C. 555 D. 111 E. 45

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

En la final de una competencia de baile cada uno de los miembros del jurado puede otorgar a cada uno de los cinco competidores 1 punto, 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos o 5 puntos, pero deben otorgar a cada competidor puntajes diferentes. Se conocen los resultados que se muestran en la tabla.

Prof. Juan Samuel Rangel L 3

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

	ANDRÉS	JAIME	DANILO	TERESA	BERTHA
JUEZ I	3	4	2		5
JUEZ II			2	3	4
JUEZ III					2
RESULTADO	8	10	7		11

De las siguientes opciones ¿Cuál fue el puntaje total de Teresa?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

Después del primer kilómetro de la carrera de atletismo del colegio, Paty fue la penúltima. En el siguiente kilómetro, Paty logró adelantar a siete corredores. En el tercer kilómetro, dos corredores la adelantaron. En el kilómetro final, Paty pasó a ocho corredores, pero otros cuatro corredores la adelantaron. Paty terminó novena. ¿Cuántas personas participaron en la carrera?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional responder en la hoja anexa

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiría?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Prof. Juan Samuel Rangel L 4

Figura 4-9 estructura de la prueba. dos tipos de retos, cada uno con tres problemas.

A estos estudiantes se decide invitarlos a compartir sus estrategias de solución, desde la premisa que siempre es mejor, como parte de la actividad, convencer a su compañero de los argumentos que han utilizado y de esta socialización pueden surgir nuevas ideas. El proceso evaluativo de la actividad se concreta a través de la observación del docente durante el desarrollo de esta y tiene en consideración la disposición y ánimo de los estudiantes. Existen dos posibilidades de trabajo, la primera es que cada pareja lea los problemas y decida por cual color de reto quiere iniciar y avanzar desde ahí. La segunda es hacer que cada pareja inicie por un reto diferente y se proponga avanzar hasta completar los dos. Cada forma de aplicar el instrumento permite observar diversas situaciones con relación a la dificultad de iniciar la solución de los retos.

Los problemas se han propuesto en un aparente orden de complejidad a fin de que el estudiante sienta confianza y se aventure a realizar el proceso de solución. Se espera del estudiante que deje por escrito sus argumentos. Entonces, faltando 20 minutos para el final de la sesión se les solicita a los estudiantes organizar, pero no borrar, sus procedimientos y estrategias, o incluirlos en la hoja que se va a entregar y por último, reflexionar y responder la pregunta adicional. Al finalizar debe entregar la hoja de trabajo al profesor

Materiales para utilizar: guía de trabajo, hojas blancas tipo examen, una sesión de dos horas de clase.

- **Conclusiones del capítulo 4**

Después de utilizar procesos iterativos para la elección de los problemas y la construcción de las actividades se obtiene una estructura de actividad de fácil aplicación. La decisión de separar los tipos de preguntas por colores hace que el estudiante se familiarice con las características del reto. Aunque la idea de la encuesta fue creativa, la segunda parte se torna compleja para los estudiantes. Y al final, permiten obtener resultados similares a la pregunta abierta que resulta ser más sencilla de entender. Como cambios relevantes, los dos tipos de reto (azul y naranja), utilizan el mismo número de preguntas en cada reto y una pregunta afectiva.

● CAPITULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES

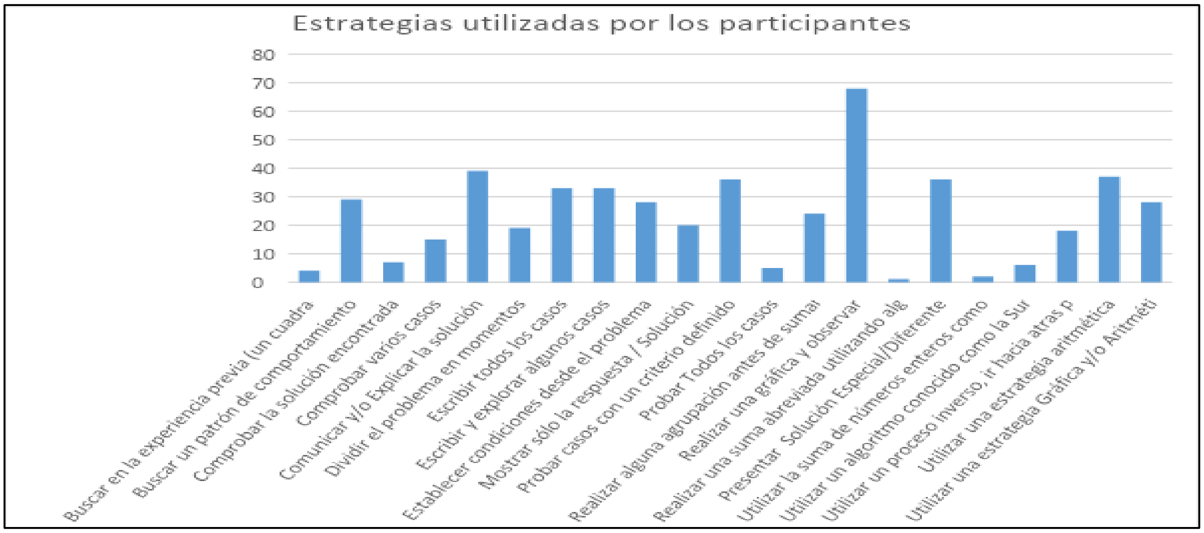
Se presenta el análisis de las soluciones de 57 estudiantes de la ronda final de olimpiadas de primaria, lo que da información de cómo enfocar la actividad con estudiantes en entrenamiento. Se presenta esta revisión que permite establecer el cómo observar las actividades realizadas en el aula regular.

5.1. Análisis de las soluciones las olimpiadas de primaria

Luego de un proceso de selección se presentan a la ronda final de la olimpiada 260 estudiantes. La prueba consta de 10 problemas de los cuales el participante debe solucionar los que más pueda. Después de que la organización de la olimpiada realiza su proceso de valoración y calificación, se toma como muestra las soluciones que corresponde a los estudiantes que obtuvieron los primeros 50 puntajes; como puede ocurrir que varios estudiantes tengan la misma puntuación, el número total de formularios es 57. A continuación se presentan y analizan las soluciones e intentos de solución que corresponden a los primeros 50 puntajes de la prueba final de olimpiadas de primaria 2022[63]. Aunque se analiza cada problema por separado y se determinan las estrategias más utilizadas en cada caso; se presentan los resultados resumidos de la prueba en general. Luego de la lectura y relectura de los documentos presentados por los 57 participantes (cerca de 500 soluciones), se identifican 21 estrategias diferentes (ver la gráfica 5-1) utilizadas al enfrentarse a los 10 problemas de la prueba, el conjunto de problemas se presenta en como Anexo 1.

Después de realizar lectura al conjunto de estrategias que aparecen en las soluciones, se determina que algunas están relacionadas y pueden ser parte de un conjunto mayor.

[63] ®*Todos los Derechos Reservados OCM y MOEMS*



Gráfica 5-1. estrategias utilizadas por los participantes de la ronda final.

Entonces, este grupo de 21 estrategias pueden agruparse en seis categorías cómo lo muestra la Tabla 5-2. A continuación, se da una breve descripción de cada una de las categorías.

Tabla 5-2 Agrupación de las estrategias utilizadas por los participantes.

- ARTIMETICA (MULTIPLICACION O SUMA) (5)
  - Realizar alguna agrupación antes de sumar
  - Realizar una suma abreviada utilizando alguna fórmula
  - Utilizar la suma de números enteros como estrategia
  - Utilizar un algoritmo conocido como la Suma normal
  - Utilizar una estrategia aritmética
- ESTRATEGIA GRAFICA-VISUALIZACIÓN (2)
  - Realizar una gráfica y observar
  - Utilizar una estrategia Gráfica y/o Aritmética
- EXPERIENCIA PREVIA-CONOCIDO (2)
  - Buscar en la experiencia previa (un cuadrado)
  - Mostrar sólo la respuesta / Solución
- REALIZAR LISTA Y/O PROBAR (3)
  - Probar casos con un criterio definido
  - Probar Todos los casos
  - Probar varios casos
- REGULARIDAD-PATRON (5)
  - Buscar un patrón de comportamiento
  - Dividir el problema en momentos
  - Escribir todos los casos
  - Escribir y explorar algunos casos
  - Establecer condiciones desde el problema
- TRABAJAR HACIA ATRÁS (4)
  - Comprobar la solución encontrada
  - Comunicar y/o Explicar la solución
  - Solución Especial/Diferente
  - Utilizar un proceso inverso, ir hacia atras para obtener la solución

Utilizar una estrategia aritmética (1), Reúne las estrategias que se apoyan en la aritmética para avanzar en la solución. Por ejemplo, en el problema 1 algunos estudiantes realizan una suma por agrupación, es decir, sumas abreviadas mediadas por la asociación de los números. Otros prefieren escribir todos los números y luego sumar de forma normal, que pudo ser visto en las clases del colegio y elegirse su estrategia para solucionar el problema. En el problema 4 se puede observar cómo los estudiantes utilizan los números enteros como una posible estrategia para avanzar en la solución de un problema, aunque la solución refiere al número de participantes en una carrera.

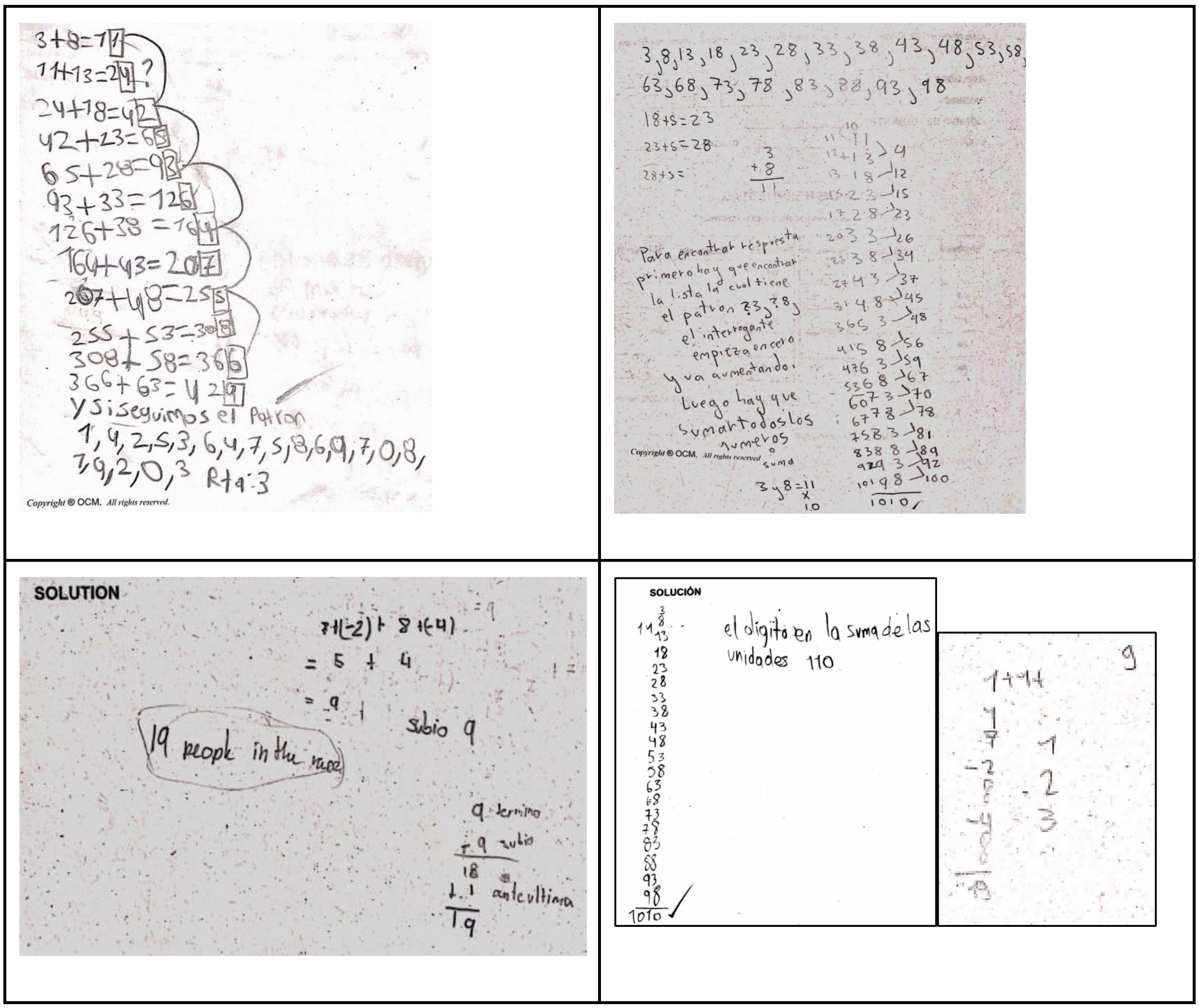


Figura 5-1 Algunos ejemplos de la estrategia aritmética

Realizar una gráfica o recurrir a la visualización (2) y desde ella algún tipo de observación es una, estrategia en la que los estudiantes suelen realizar gráficas o representaciones que les permiten entender y avanzar en la solución del problema. A veces la gráfica les permitía visualizar y razonar desde ella, pero en otros casos se utilizaba una gráfica asociada una estrategia aritmética y desde esa combinación se avanzaba para lograr la solución.

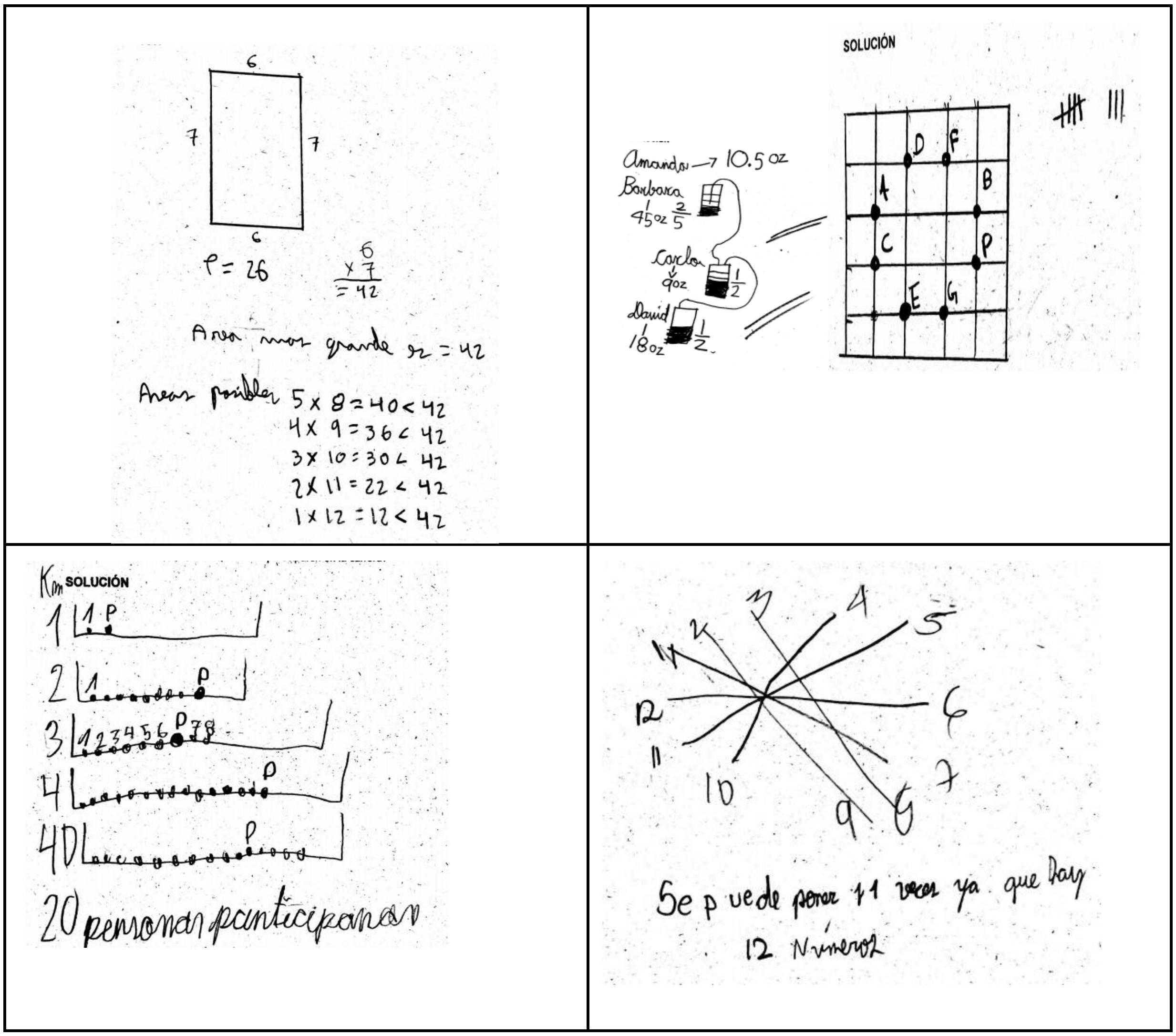


Figura 5-2 Algunos ejemplos de la estrategia visualización

Recurrir a la experiencia previa o buscar algún algoritmo conocido **(3)** básicamente los estudiantes buscaban algo que ya habían solucionado, por ejemplo, en el problema 2 se hace referencia al rectángulo con mayor área y algunos participantes, entendían que se debían acercar a un cuadrado, entonces ya se habían enfrentado a una situación similar. Otra estrategia es avanzar directamente a la solución del problema y mostrar sólo la respuesta sin dejar en evidencia su razonamiento, como si y para él fuera algo conocido, lo que permite suponer que el estudiante ha recurrido al conocimiento previo y desde ahí puede dar o exhibir únicamente la solución.

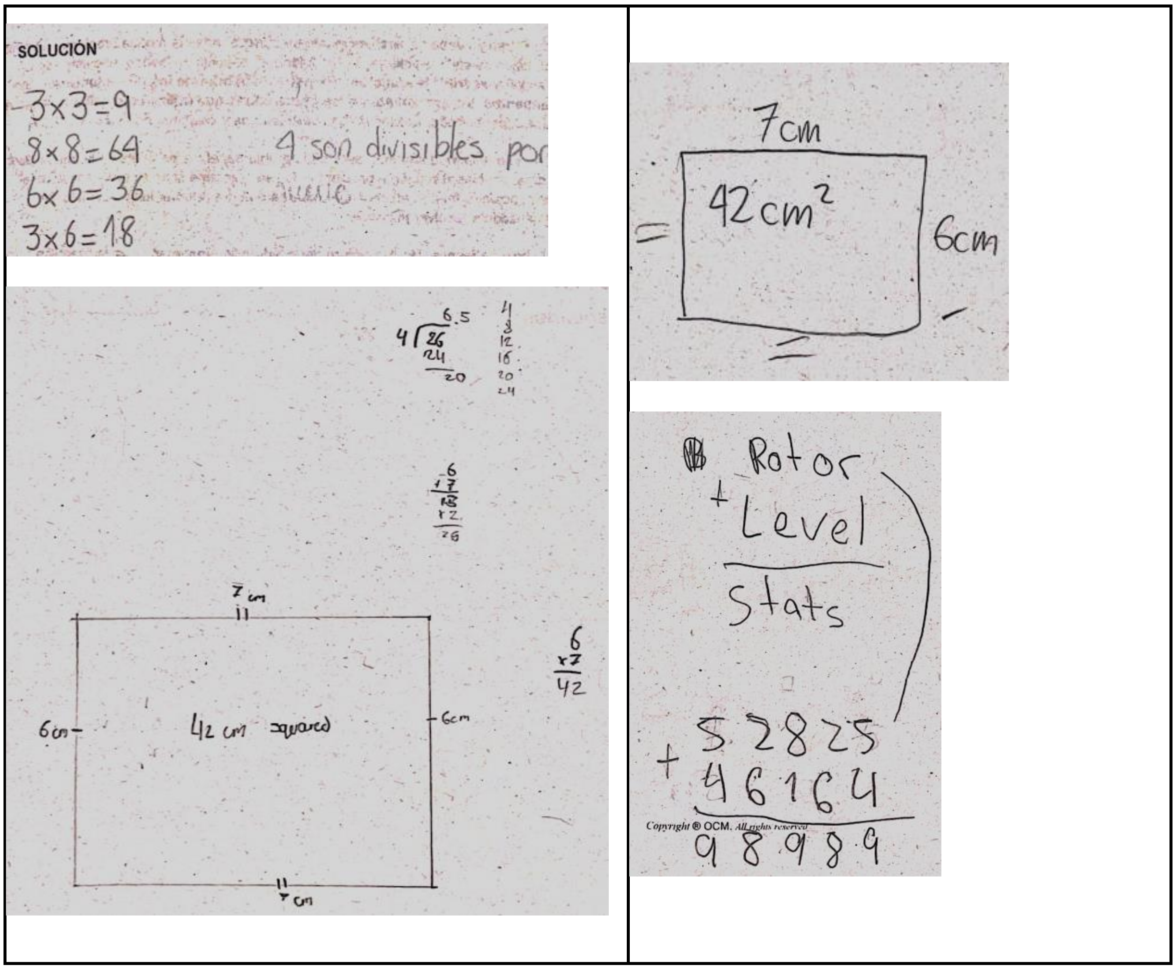


Figura 5-3 Algunos ejemplos de la estrategia experiencia previa

***Realizar una lista y comprobar* (4)**. En esta categoría se incluyen los estudiantes que comprueban la solución que encuentran. También el estudiante que decide comprobar algunos casos para avanzar hacia la solución o listan todos los casos de ser necesario, para encontrar la regularidad que se está buscando y así avanzar hacia la solución. Sin embargo, debe enfatizarse en que esta lista de casos por revisar se realiza con un criterio definido, es decir, no es una comprobación aleatoria, sino que está determinada por las condiciones del problema.

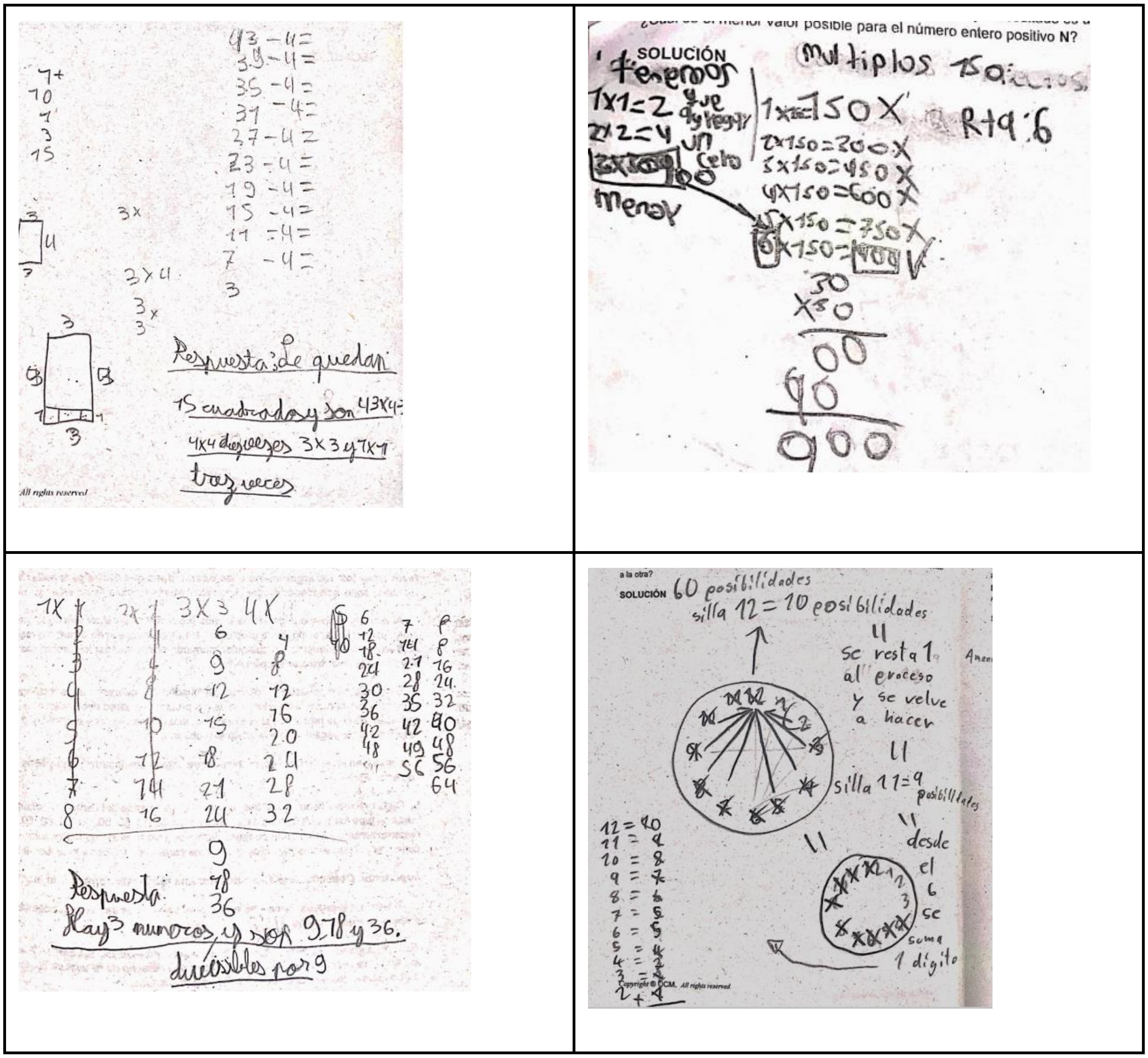


Figura 5-4 Algunos ejemplos de la estrategia realizar una lista y comprobar

Buscar un patrón de comportamiento o una regularidad (5) Al interior de esta categoría algunos estudiantes se dejan guiar por su intuición hacia algún tipo de patrón o regularidad. Esta categoría es muy cercana a la categoría anterior porque el estudiante realiza pruebas de diferentes casos, pero su intencionalidad está en encontrar regularidades, patrones de comportamiento y para ello, puede requerir escribir todos los casos, dividir el problema en momentos o etapas. Luego dentro de esos momentos escribir, listar y explorar detalles que le permitan establecer regularidades comparadas con las condiciones del problema y de esta forma avanzar hacia la solución.

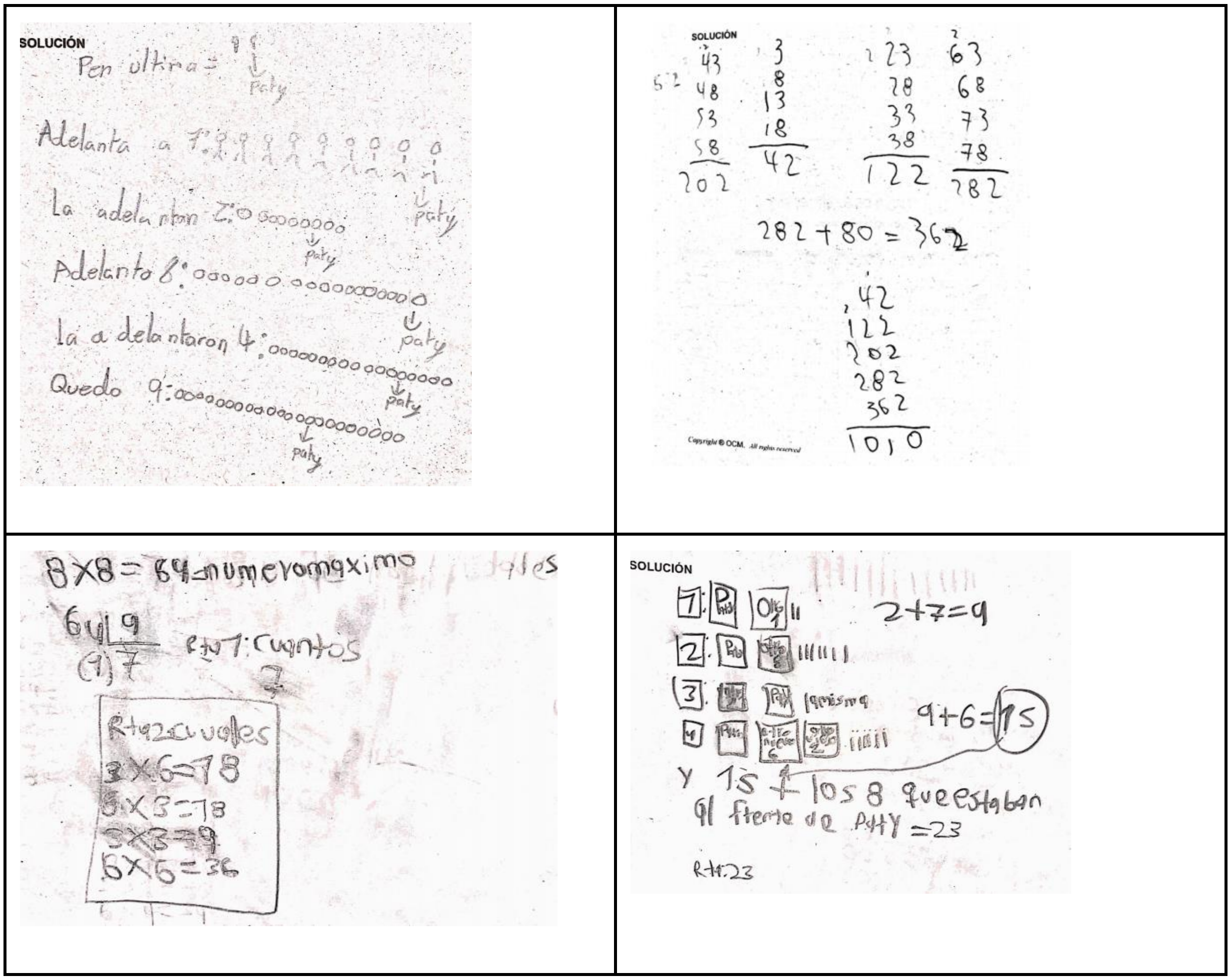


Figura 5-5 Algunos ejemplos de la estrategia buscar un patrón de comportamiento

Trabajar hacia atrás (6) en este caso los estudiantes comprueban sus soluciones o miran hacia atrás para comprobar. Otros participantes explican y presentan sus soluciones de una forma creativa que les permite revisar el procedimiento realizado. Particularmente en el problema 6 los participantes leen el problema y van caminando hacia atrás por medio de graficas u operaciones matemáticas, en la búsqueda de ese punto inicial que les permite dar la solución.

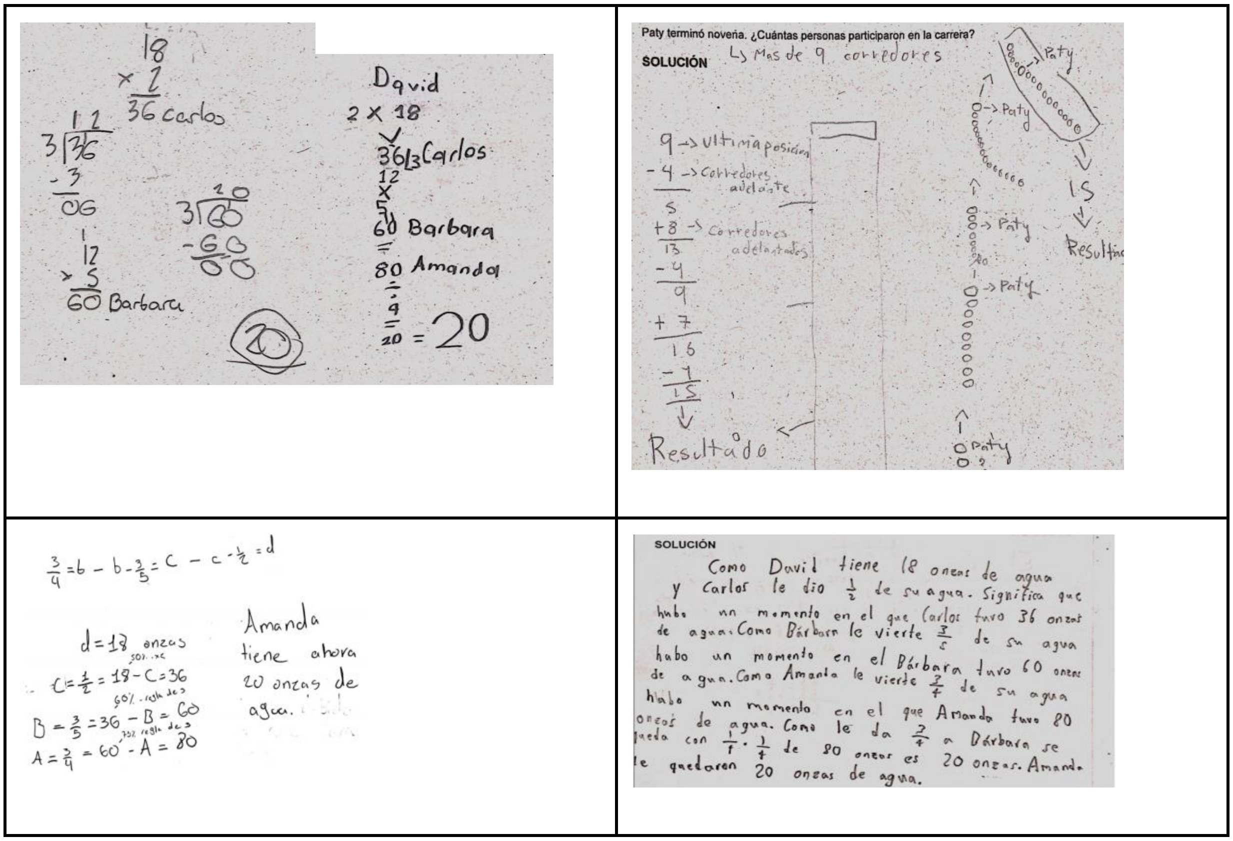


Figura 5-6 Algunos ejemplos de la estrategia mirar hacia atrás.

Análisis estadístico de los datos

Entonces, el primer análisis que se realiza consiste en responder a la pregunta ¿Todos los estudiantes utilizan la misma cantidad de estrategias?

La respuesta es no, porque los estudiantes con mejor puntaje en la prueba logran utilizar mayor cantidad de estrategias. Esto es muy importante, porque a la cantidad de estrategias que el estudiante logra poner en evidencia al solucionar problemas se puede definir como un indicador del desarrollo del pensamiento matemático.

Para responder esta pregunta se utiliza una tabla de doble entrada en la que se clasifican los 57 estudiantes en tres niveles (superior-alto, superior-medio, superior-bajo) cada uno con 19 estudiantes vs las 21 estrategias encontradas. Al realizar la prueba de dependencia se obtiene un p=0,0003, con 40 grados de libertad, y una significancia del 0,05, lo que permite determinar que el grupo en el que se clasificó el estudiante depende del número de estrategias que logra utilizar.

¿Se utilizan las mismas estrategias en todos los problemas? ***la respuesta es no, el tipo de estrategia depende del problema al que el participante se enfrenta.*** Con relación a las estrategias, se observa que no todas se utilizan con la misma frecuencia, ni tampoco son utilizadas por los participantes para resolver las mismas situaciones. Para responder esta pregunta se realiza una prueba de independencia estadística en la tabla de doble entrada que cruza las 21 estrategias utilizadas y los 10 problemas solucionados por los estudiantes. Por medio de una prueba Chi cuadrado (126 grados de libertad, Valor crítico de 153.6 y el estadístico de la prueba igual a 602.53) se determina que ***existe dependencia estadística entre las estrategias utilizadas por los estudiantes y cada uno de los problemas propuestos***. Esta conclusión estadística, es importante y en cierta medida esperada, porque el tipo de problema dirige la atención de los estudiantes hacia las diferentes estrategias.

Pero *¿cuáles son las estrategias que se utilizan de una manera especial o priorizada por aquellos estudiantes que tienen un mayor desarrollo del pensamiento matemático?*

Para dar una posible respuesta a esta pregunta, se realiza una matriz (21x57) en la que se registra el número de veces que la estrategia fue utilizada. Sobre la matriz se determina la proporción de uso de las estrategias y por medio de una técnica utilizada en la teoría clásica del ítem al tener en cuenta la diferencia entre el subgrupo de estudiantes que más utilizaron las estrategias y el subgrupo de estudiantes que menos reportaron uso de estas, loque permite establecer un referente de discriminación, tal cómo se presenta en la tabla 5-3.

Tabla 5-3 Estrategias proporción de uso y discriminante

Estrategia	Proporción de uso	Discriminante
Realizar una gráfica y observar	**1,000**	**0,793**

Comunicar y/o Explicar la solución	0,565	1,000
Presentar Solución Especial/Diferente	0,536	0,931
Utilizar una estrategia aritmética	0,536	0,586
Probar casos con un criterio definido	0,536	0,448
Escribir y explorar algunos casos	0,493	0,690
Escribir todos los casos	0,478	0,310
Utilizar una estrategia Gráfica y/o Aritmética	0,435	0,552
Buscar un patrón de comportamiento G	0,420	0,517
Establecer condiciones desde el problema	0,420	0,517
Realizar alguna agrupación antes de sumar	0,348	0,138
Mostrar sólo la respuesta / Solución	0,304	0,310
Dividir el problema en momentos	0,275	0,379
Utilizar un proceso inverso, ir hacia atrás para obtener la solución	0,261	0,345
Comprobar varios casos	0,217	0,379
Comprobar la solución encontrada	0,101	0,241
Utilizar un algoritmo conocido como la Suma normal	0,087	-0,138
Probar Todos los casos	0,072	0,034
Buscar en la experiencia previa (un cuadrado)	0,058	0,069
Utilizar la suma de números enteros como estrategia	0,029	0,069
Realizar una suma abreviada utilizando alguna fórmula	0,014	0,034

La proporción de uso está ligada a la cantidad de estrategias que fueron utilizadas por los diferentes estudiantes, entonces, *realizar una gráfica y observar* es una estrategia que se utiliza con bastante frecuencia. Por ejemplo, las estrategias: *Buscar en la experiencia previa (un cuadrado), Utilizar la suma de números enteros como estrategia, Realizar una suma abreviada utilizando alguna fórmula.* fueron muy poco utilizadas y no pueden considerarse como un criterio para discriminar a los estudiantes con mejores recursos. Sin embargo, hay otras estrategias con baja proporción de uso, *Utilizar una estrategia Gráfica y/o Aritmética, Buscar un patrón de comportamiento y Establecer condiciones desde el problema que son* *estrategia* utilizadas menos del 50% de las veces, es decir, en menor proporción, pero que discriminan en cierta medida a los estudiantes.

Por último, las estrategias que mejor discriminan a los estudiante resultan ser: *Comunicar y/o Explicar la solución, Presentar Solución Especial/Diferente, Realizar una gráfica y observar,* y *Escribir y explorar algunos casos,* y que según el discriminante, son estrategias utilizadas principalmente por los estudiantes que tienen un amplio desarrollo del pensamiento matemático, medido en términos de la cantidad de estrategias que disponen como recursos a la hora de enfrentarse a diferentes problemas y que pueden ser tenidas en cuenta a la hora de comparar estudiantes al solucionar problemas de este tipo.

Después de agrupar en categorías, ¿El número medio de estrategias utilizadas por los estudiantes en cada categoría es el mismo? Antes de avanzar, se verifica si las categorías luego de la agrupación de las estrategias en cinco categorías tienen una distribución normal. Entonces, se realiza una prueba de normalidad con los datos obtenidos sobre la cantidad de estrategias realizadas por los estudiantes en la prueba presentada. Al realizar la prueba de normalidad con Kolmogórov-Smirnov, se obtiene una significancia de 0.00 para todos los grupos.

Tabla 5-4 prueba de normalidad de los datos obtenidos.

TIPO ESTRATEGIA	**Kolmogorov-Smirnov**		
	Estadístico	gl	Sig.
Utilizar una estrategia aritmética	,231	57	,000
Realizar una gráfica o recurrir a la visualización	,175	57	,000
Recurrir a la experiencia previa o buscar algún algoritmo conocido	,399	57	,000
Realizar una lista y comprobar	,279	57	,000
Buscar un patrón de comportamiento o una regularidad	,163	57	,001
Trabajar hacia atrás	,237	57	,000

Los resultados comprueban que los datos no se distribuyen en aproximación a la distribución normal y para realizar pruebas estadísticas se debe utilizar pruebas no paramétricas. Entonces, en correspondencia al resultado de la prueba anterior, se realiza una prueba Kruskal-Wallis en la que se obtiene (p=0.0000) que las muestras independientes presentan medianas diferentes. Esto permite interpretar que la cantidad mediana de las estrategias utilizadas es mucho mayor en los estudiantes que obtuvieron un mejor puesto en la Prueba Final. Es decir, las estrategias se utilizan en diferentes proporciones que no corresponden a una elección aleatoria sino intencionada o condicionada, según se ha determinado, por al menos tres aspectos: (i) el problema que pretenden solucionar; (ii) el repertorio de estrategias disponible para ser utilizado por el estudiante; y (iii) la creatividad para utilizar estrategias en diferentes escenarios o generar nuevas opciones de estrategias de solución.

Entonces, se confirma la hipótesis de que la cantidad de estrategias es un indicador del desarrollo del pensamiento matemático y, por lo tanto, entre más estrategias logra poner en evidencia un estudiante a la hora de solucionar problemas, su nivel de desarrollo del pensamiento matemático es mayor.

5.1.1. ¿Desde la teoría de las competencias que se puede observar?

Lo primero que se realiza es un cruce entre las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes y las competencias propuestas en los resultados del proyecto KOM; para ello se realiza una lista de chequeo teniendo como base el centro de la definición de cada su competencia. Por ejemplo, el pensamiento matemático según Mogens Niss, se refiere a la capacidad de realizar preguntas y visualizar las posibles respuestas que pueden obtenerse.

El *razonamiento matemático* pone su centro de atención en las acciones para argumentar y justificar. La modelación matemática hace referencia al uso de la matemática y la resolución de problemas tiene como propósito responder las preguntas haciendo uso de conocimientos matemáticos. Por otra parte, la representación y los símbolos están ligados al uso del lenguaje, mientras que la comunicación hace referencia a la forma como se comunican las soluciones, Por último, las ayudas y herramientas refieren a la capacidad de utilizar diversas técnicas y diversos instrumentos dentro de la actividad matemática. Se puede observar en el conjunto de estrategias cómo los estudiantes se acercan a las ocho competencias planteadas en el proyecto. En la siguiente figura se realiza una lista de chequeo en la que se coloca el valor de X si en la evidencia obtenida se puede apreciar algún episodio que relacione estos dos mundos.

Pensamiento. Por definición queda involucrado en el pensamiento matemático aquellas preguntas y la estimación de posibles respuestas realizadas por los estudiantes; entonces cuando un estudiante utiliza las estrategias: *Realizar una gráfica o recurrir a la visualización, Realizar una lista y comprobar, Buscar un patrón de comportamiento-una regularidad o Trabajar hacia atrás* el estudiante continuamente se pregunta y realiza estimaciones con relación al problema.

Razonamiento. Según el autor el razonamiento tiene que ver con la intención de justificar o argumentar. Entonces cuando el estudiante comunica su respuesta de una forma estructurada presentando los pasos que ha realizado para obtener la solución o cuando explica su respuesta como si dialogara con la pregunta del problema.

Modelado. Para la teoría en competencias la modelación tiene que ver con el uso de la matemática escolar. Por ejemplo, cuando el estudiante utiliza algún tipo de algoritmo para sumar, cuando busca un patrón de comportamiento, realiza una solución diferente, utiliza fórmulas que ha aprendido o de una manera creativa se acerca a la solución del problema.

Resolución de problemas. Según la teoría de competencias, corresponde a la activación de las estrategias para solucionar el problema. Es una competencia muy cercana a la modelación y entre las dos permiten dar respuesta a los problemas. Se observan diferentes estrategias realizadas por los estudiantes: obtener la solución explorando algunos casos utilizando algoritmos, encontrando algún patrón de comportamiento, realizando una gráfica del problema que le han propuesto y sobre todo poniendo a prueba su ingenio a la hora de proponer una la solución.

Tabla 5-5 Estrategias Vs Competencias Activaciones simultáneas Elaboración propia

		Conjeturar-revisar	*Convencer- Argumentar*		
		Pensamiento	**Razonamiento**	**Modelamiento**	**Resolución de problemas**
		PREGUNTAR	**EVALUAR**	**RESPONDER**	
		Realizar preguntas y "visualizar" posibles respuestas	Centro en la justificación: Argumentar	Uso de la matemática responder a dichas preguntas en y por medio de las matemáticas	Activar diferentes estrategias de solución
	ESTRATEGIAS				
1	o Realizar una gráfica y observar Gr=68	X			
2	o Probar casos con el criterio definido por el problema Gr=36	X			
3	o Utilizar una estrategia aritmética Gr=37			X	X
4	o Escribir todos los casos Gr=33	X			
5	o Escribir y explorar algunos casos para entender Gr=33	X			
6	o Realizar alguna agrupación antes de sumarGr=24			X	X
7	o Buscar un patrón de comportamiento Gr=29	X			X
8	o Escribir una Solución Especial/Diferente Gr=36				X
9	o Establecer condiciones desde el problema Gr=28	X			
10	o Utilizar una estrategia Gráfica-Aritmética Gr=28			X	
11	o Utilizar un proceso inverso, ir hacia atrás para obtener la solución C	X			X
12	o Mostrar sólo la respuesta / SoluciónGr=20				X
13	o Comunicar y/o Explicar la solución Gr=39		X		
14	o Dividir el problema en momentos Gr=19	X			
15	o Comprobar algunos casos del patrón de comportamiento Gr=15	X			
16	o Comprobar la solución encontrada Gr=7		X		
17	o Utilizar un algoritmo conocido como la Suma normal Gr=6			X	X
18	o Probar Todos los casos Gr=5	X			X
19	o Buscar en la experiencia previa (ejm un cuadrado) Gr=4	X			X
20	o Utilizar la suma de números enteros como estrategia Gr=2			X	
21	o Realizar una suma abreviada utilizando alguna fórmula Gr=1			X	

		Especializar	*Generalizar*	*Comunicar*	
		Representación	**Simbolos y formalismo**	**Comunicación**	**Ayudas y Herramientas**
		LENGUAJE		**COMUNICACIÓN**	**HERRAMIENTAS**
		Ser capaz de dominar diferentes representaciones de entidades, fenómenos y situaciones matemáticas	Ser capaz de dominar las representaciones simbólicas y fórmulas especiales de las matemáticas.	Ser capaz de comunicar en, con y sobre las matemáticas.	Ser capaz de utilizar y relacionarse con las diversas ayudas técnicas para la actividad matemática
1	o Realizar una gráfica y observar Gr=68	X			
2	o Probar casos con el criterio definido por el problema Gr=36				
3	o Utilizar una estrategia aritmética Gr=37	X	X		
4	o Escribir todos los casos Gr=33				
5	o Escribir y explorar algunos casos para entender Gr=33				
6	o Realizar alguna agrupación antes de sumarGr=24		X		X
7	o Buscar un patrón de comportamiento Gr=29				
8	o Escribir una Solución Especial/Diferente Gr=36			X	
9	o Establecer condiciones desde el problema Gr=28				
10	o Utilizar una estrategia Gráfica-Aritmética Gr=28	X	X		
11	o Utilizar un proceso inverso, ir hacia atrás para obtener la solución Gr=18		X		
12	o Mostrar sólo la respuesta / SoluciónGr=20				
13	o Comunicar y/o Explicar la solución Gr=39		X	X	
14	o Dividir el problema en momentos Gr=19		X		
15	o Comprobar algunos casos del patrón de comportamiento Gr=15				
16	o Comprobar la solución encontrada Gr=7				
17	o Utilizar un algoritmo conocido como la Suma normal Gr=6		X		
18	o Probar Todos los casos Gr=5				
19	o Buscar en la experiencia previa (ejm un cuadrado) Gr=4				
20	o Utilizar la suma de números enteros como estrategia Gr=2				X
21	o Realizar una suma abreviada utilizando alguna fórmula Gr=1				X

Estas primeras cuatro competencias son muy relacionadas con el trabajo que se realiza en competiciones, sin embargo, si dejamos en el centro la competencia de resolución de problemas podemos pensar que ella se va enriqueciendo en la medida en que el estudiante se enfrenta a diversas situaciones, entonces cambiará el grado de cobertura el radio de acción y el nivel técnico que tiene esta competencia.

Las competencias relacionadas con el lenguaje son la competencia de representación y la competencia de símbolos y formalismo, estas dos competencias permiten al estudiante representar con el propósito de luego comunicar sus soluciones, pero no sólo de una forma verbal de manera que puede utilizar diferentes representaciones o símbolos a fin de dar a entender sus ideas. Se puede decir que las primeras dos competencias son fácilmente observables en todas las soluciones, es decir, los estudiantes utilizan diversas representaciones como apoyo para avanzar en sus soluciones. Sin embargo, comunicar las soluciones de una manera acertada se entiende como una estrategia destacada en este proceso y aunque los estudiantes participantes de la prueba son muy buenos en matemáticas, no necesariamente expresan de una forma explícita la solución que han encontrado. Esto posiblemente sea porque consideran que no es necesario y que basta con el procedimiento que hayan presentado para que su solución quede totalmente explícita. Sin embargo, un pequeño grupo de estudiantes que tienen un nivel matemático más desarrollado, en relación con sus otros compañeros, porque logran poner algunos de sus problemas en palabras y expresar su solución de manera sencilla.

Por último, la competencia de herramientas y ayudas, en este caso y para el nivel de los problemas se ve un poco opacada, es decir, el estudiante utiliza lo que tiene en el momento. Sin embargo, en otro tipo de problemas más avanzados puede adquirir mayor relevancia el uso o la activación de esta competencia. Entonces todas las competencias parecen estar activas en el proceso de solucionar problemas.

Al realizar la revisión, todas las competencias del grupo KOM se activan, aunque unas con mayor frecuencia o intensidad, lo cual indica que las preguntas tipo olimpiadas, teniendo como indicador las estrategias utilizadas por los estudiantes, permiten realizar seguimiento a la activación de las competencias propuestas por Niss y sus colaboradores.

Sin embargo, si se tiene como referente las tres dimensiones “grado de cobertura”, el “radio de acción” y el “nivel técnico” se puede afirmar que: ***grado de cobertura*** de estos estudiantes es amplio, porque se observan 21 estrategias utilizadas por los estudiantes. En el ***radio de acción***, se superan los temas curriculares, porque los problemas relacionan con diferentes áreas de la matemática, como aritmética, geometría, lógica, conteo y teoría de números. Y el ***nivel técnico***, no está limitado al currículo escolar, porque los estudiantes utilizan diferentes representaciones, algoritmos y fórmulas matemáticas, que pueden ser originales, ingeniosos y creativos.

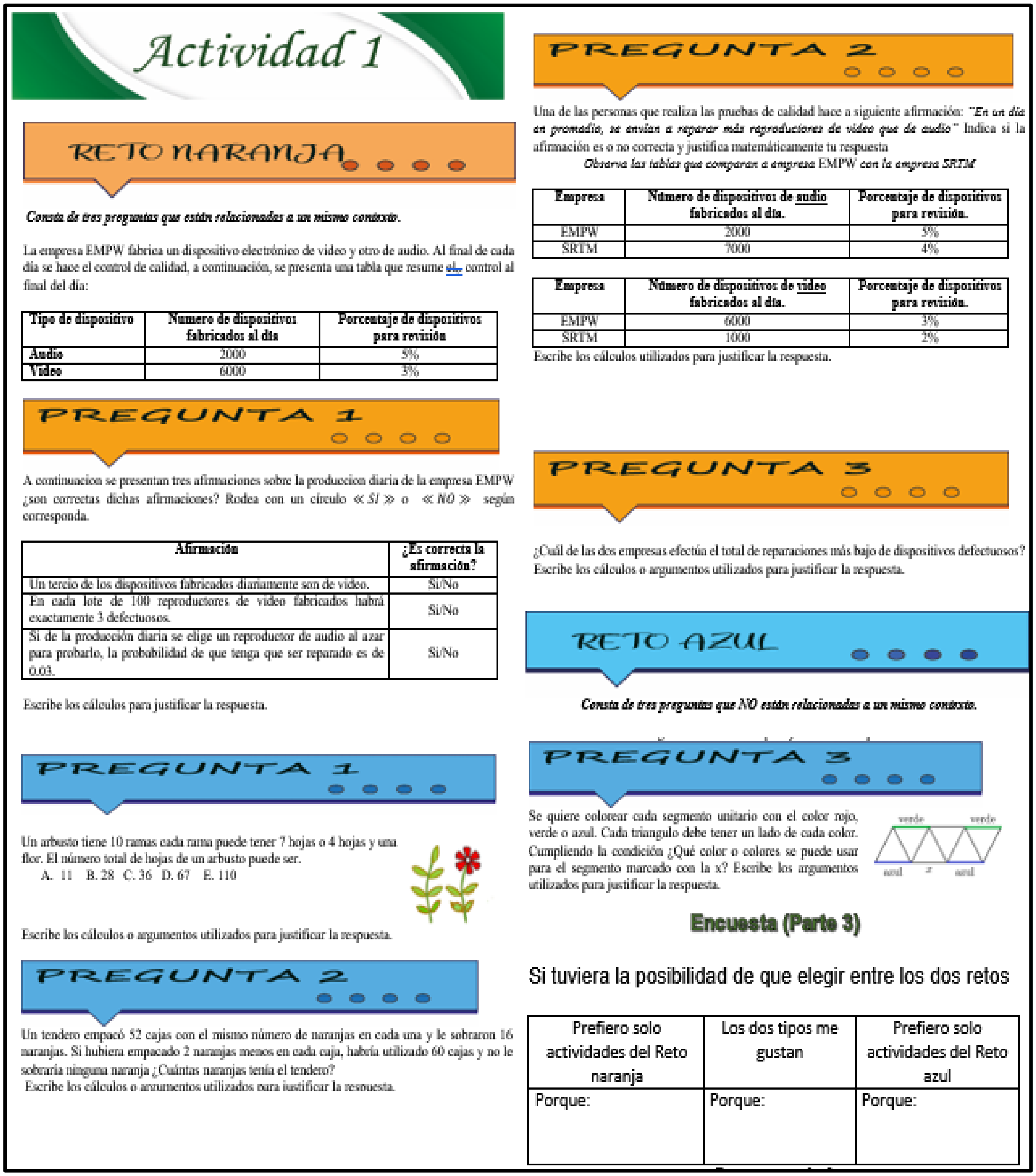
Para verificar cómo funciona el sistema de actividades, el primer paso es proponerlo a estudiantes que estén relacionados con problemas de olimpiadas, tal es el caso de los estudiantes que están en entrenamiento y que han superado evaluaciones de primer nivel. Los resultados permitirán verificar cómo funcionan los dos tipos de problema: los problemas tipo Pisa versus los problemas tipo Olimpiada. A continuación, se presentan los resultados obtenidos.

5.2. Resultados actividad con estudiantes de entrenamiento

Se realizan dos actividades con los estudiantes que se encuentran en entrenamiento.

El objetivo es aplicar las actividades en un escenario ideal, en el sentido que son estudiantes que tienen muy buena formación matemática y no es necesario motivarlos en ese sentido. Los resultados de estas actividades permiten realizar correcciones en la planeación de las actividades con los estudiantes de aula regular.

La estructura de estas actividades es la descrita en el Capítulo 4: un reto naranja y uno azul, cada uno con tres preguntas o problemas según el tipo de reto (PISA u Olimpiada) tal como se muestra en la Figura 1-7 y la Figura 1-8.



Actividad 1

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

La empresa EMPW fabrica un dispositivo electrónico de video y otro de audio. Al final de cada dia se hace el control de calidad, a continuación, se presenta una tabla que resume el control al final del día:

Tipo de dispositivo	Numero de dispositivos fabricados al dia	Porcentaje de dispositivos para revisión
Audio	2000	5%
Video	6000	3%

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones sobre la produccion diaria de la empresa EMPW ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo « *SI* » o « *NO* » según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
Un tercio de los dispositivos fabricados diariamente son de video.	Si/No
En cada lote de 100 reproductores de video fabricados habrá exactamente 3 defectuosos.	Si/No
Si de la producción diaria se elige un reproductor de audio al azar para probarlo, la probabilidad de que tenga que ser reparado es de 0.03.	Si/No

Escribe los cálculos para justificar la respuesta.

PREGUNTA 2

Una de las personas que realiza las pruebas de calidad hace a siguiente afirmación: *"En un día en promedio, se envían a reparar más reproductores de video que de audio"* Indica si la afirmación es o no correcta y justifica matemáticamente tu respuesta

Observa las tablas que comparan a empresa EMPW con la empresa SRTM

Empresa	Número de dispositivos de audio fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	2000	5%
SRTM	7000	4%

Empresa	Número de dispositivos de video fabricados al día.	Porcentaje de dispositivos para revisión.
EMPW	6000	3%
SRTM	1000	2%

Escribe los cálculos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 3

¿Cuál de las dos empresas efectúa el total de reparaciones más bajo de dispositivos defectuosos? Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Un arbusto tiene 10 ramas cada rama puede tener 7 hojas o 4 hojas y una flor. El número total de hojas de un arbusto puede ser.

A. 11 B. 28 C. 36 D. 67 E. 110

Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 2

Un tendero empacó 52 cajas con el mismo número de naranjas en cada una y le sobraron 16 naranjas. Si hubiera empacado 2 naranjas menos en cada caja, habría utilizado 60 cajas y no le sobraría ninguna naranja ¿Cuántas naranjas tenía el tendero?

Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 3

Se quiere colorear cada segmento unitario con el color rojo, verde o azul. Cada triangulo debe tener un lado de cada color. Cumpliendo la condición ¿Qué color o colores se puede usar para el segmento marcado con la x? Escribe los argumentos utilizados para justificar la respuesta.

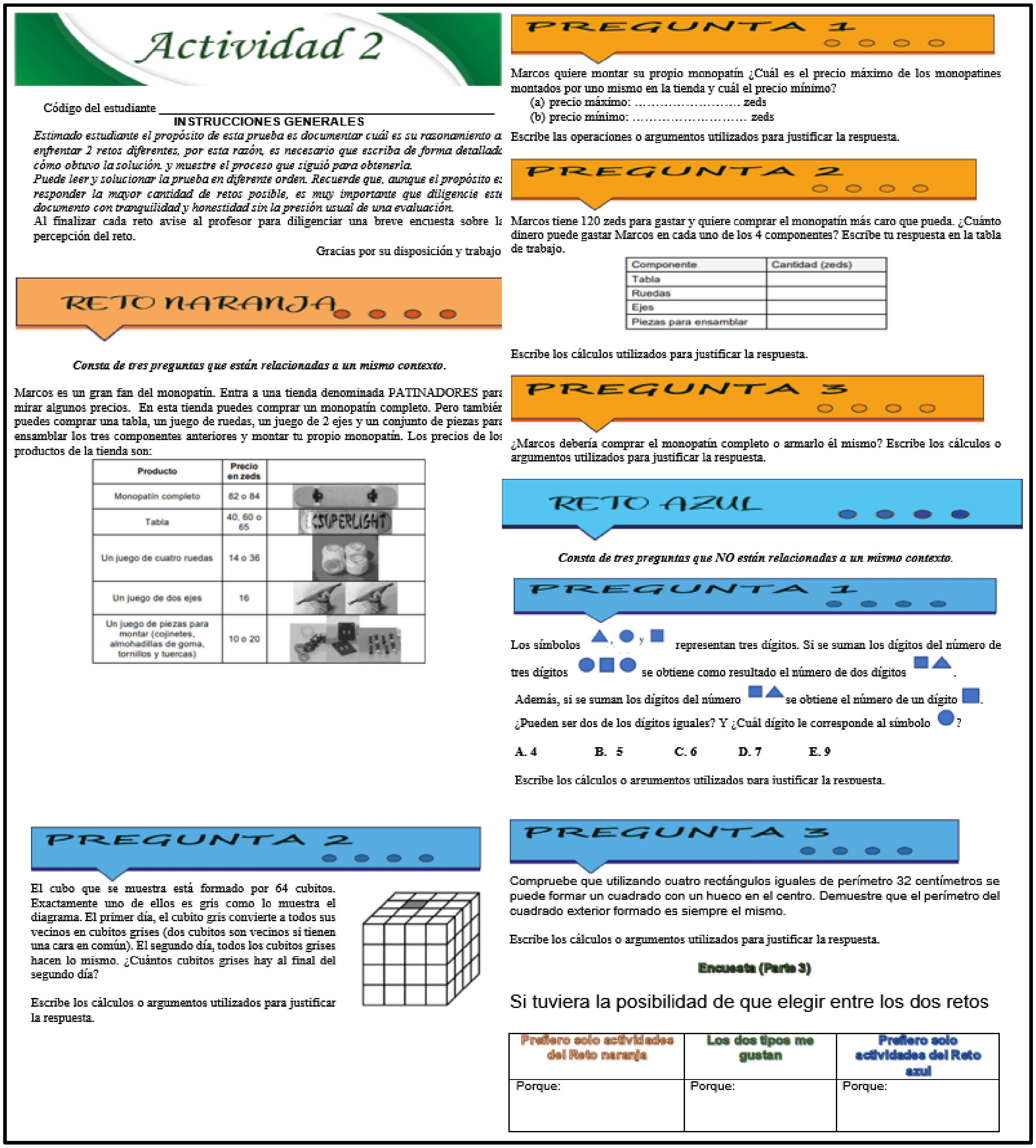
Encuesta (Parte 3)

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Figura 5-7 Actividad 1 Aplicada a estudiantes en entrenamiento.

La **Actividad 1** tiene un reto naranja que requiere de los estudiantes un buen manejo de los porcentajes, la regla de tres simple y relaciones de proporcionalidad directa. Además, requiere que el estudiante interprete la información proporcionada en tablas que establecen el contexto del problema, y así realizar la comparación de los valores de producción entre dos fábricas de artículos electrónicos.



Actividad 2

Código del estudiante ______________________________

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento a enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Puede leer y solucionar la prueba en diferente orden. Recuerde que, aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie este documento con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.

Al finalizar cada reto avise al profesor para diligenciar una breve encuesta sobre la percepción del reto.

Gracias por su disposición y trabajo

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

Marcos es un gran fan del monopatín. Entra a una tienda denominada PATINADORES para mirar algunos precios. En esta tienda puedes comprar un monopatín completo. Pero también puedes comprar una tabla, un juego de ruedas, un juego de 2 ejes y un conjunto de piezas para ensamblar los tres componentes anteriores y montar tu propio monopatín. Los precios de los productos de la tienda son:

Producto	Precio en zeds	
Monopatín completo	82 o 84	
Tabla	40, 60 o 65	SUPERLIGHT
Un juego de cuatro ruedas	14 o 36	
Un juego de dos ejes	16	
Un juego de piezas para montar (cojinetes, almohadillas de goma, tornillos y tuercas)	10 o 20	

PREGUNTA 1

Marcos quiere montar su propio monopatín ¿Cuál es el precio máximo de los monopatines montados por uno mismo en la tienda y cuál el precio mínimo?

(a) precio máximo: ……………………. zeds

(b) precio mínimo: ……………………… zeds

Escribe las operaciones o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 2

Marcos tiene 120 zeds para gastar y quiere comprar el monopatín más caro que pueda. ¿Cuánto dinero puede gastar Marcos en cada uno de los 4 componentes? Escribe tu respuesta en la tabla de trabajo.

Componente	Cantidad (zeds)
Tabla	
Ruedas	
Ejes	
Piezas para ensamblar	

Escribe los cálculos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 3

¿Marcos debería comprar el monopatín completo o armarlo él mismo? Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Los símbolos ▲, ● y ■ representan tres dígitos. Si se suman los dígitos del número de tres dígitos ●■● se obtiene como resultado el número de dos dígitos ■▲.

Además, si se suman los dígitos del número ■▲ se obtiene el número de un dígito ■.

¿Pueden ser dos de los dígitos iguales? Y ¿Cuál dígito le corresponde al símbolo ●?

A. 4 **B. 5** **C. 6** **D. 7** **E. 9**

Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 2

El cubo que se muestra está formado por 64 cubitos. Exactamente uno de ellos es gris como lo muestra el diagrama. El primer día, el cubito gris convierte a todos sus vecinos en cubitos grises (dos cubitos son vecinos si tienen una cara en común). El segundo día, todos los cubitos grises hacen lo mismo. ¿Cuántos cubitos grises hay al final del segundo día?

Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

PREGUNTA 3

Compruebe que utilizando cuatro rectángulos iguales de perímetro 32 centímetros se puede formar un cuadrado con un hueco en el centro. Demuestre que el perímetro del cuadrado exterior formado es siempre el mismo.

Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

Encuesta (Parte 3)

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Figura 5-8 Actividad 2 Aplicada con estudiantes en entrenamiento.

El reto azul tiene tres preguntas, la primera hace referencia a un problema que se soluciona con aritmética sencilla, pero requiere comparar casos. El segundo, requiere del estudiante ingenio para lograr determinar el número de naranjas total después de haber realizado un reparto en el que sobran naranjas y se propone uno nuevo en el que no queda resto.

El tercer problema, referencia la coloración de una figura cumpliendo las condiciones, pero, aunque el problema no lo manifiesta explícitamente, se debe verificar si se puede establecer más de una solución.

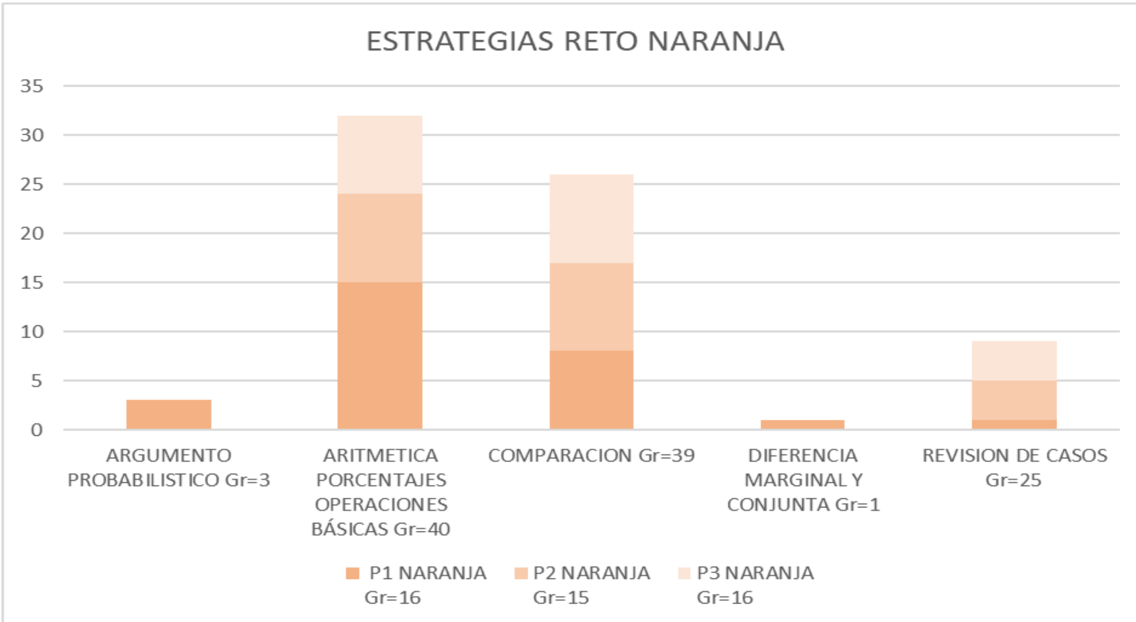
La segunda actividad tiene en el reto naranja tres preguntas en las que el estudiante requiere únicamente realizar operaciones de sumas y restas, pero tiene que hacer comparaciones entre diferentes valores y tomar decisiones.

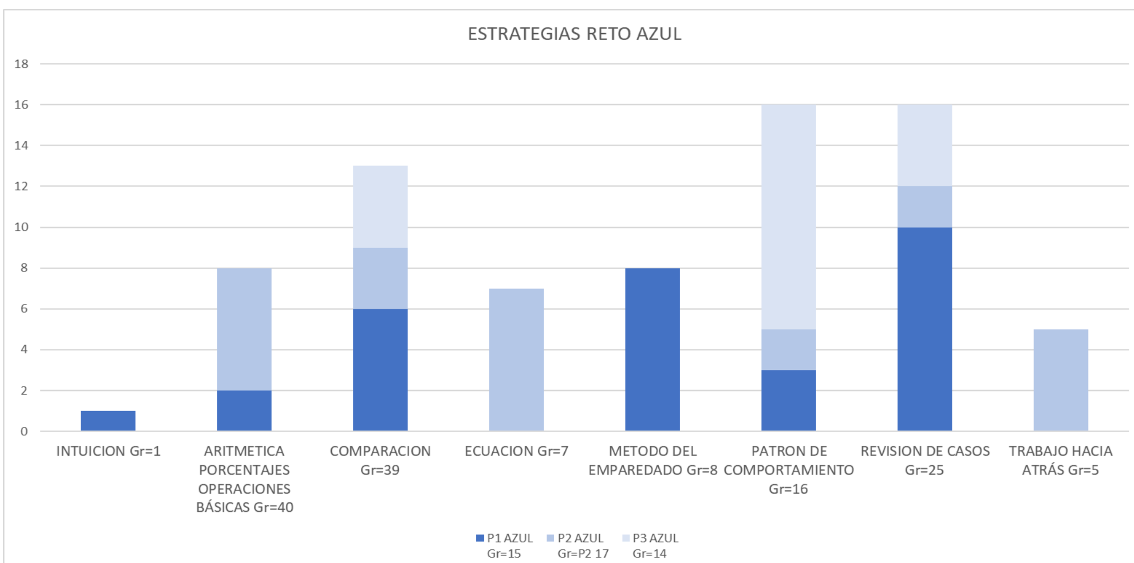
El reto azul. El primer punto también es numérico, pero requiere que el estudiante tenga clara la propiedad modulativa y comprenda las condiciones del problema. El segundo problema es geométrico y refiere a una figura en tres dimensiones, pero no requiere conocimientos especializados sino solo poner en evidencia la visualización espacial. El tercer punto también es geométrico, pero cambia en que su enunciado es textual y requiere de los estudiantes la interpretación de la información y su posterior análisis para entender cuál es el patrón regular en este problema, y así determinar la solución.

5.2.1. Resultados de las Actividades aplicadas a los estudiantes en entrenamiento para olimpiadas

Como criterio de revisión se presentan las estrategias encontradas en cada una de las actividades. En primer lugar, la Actividad 1 reporta el uso de 5 estrategias en el reto Naranja y 8 estrategias en el reto Azul como se presenta en la Tabla 1-6.

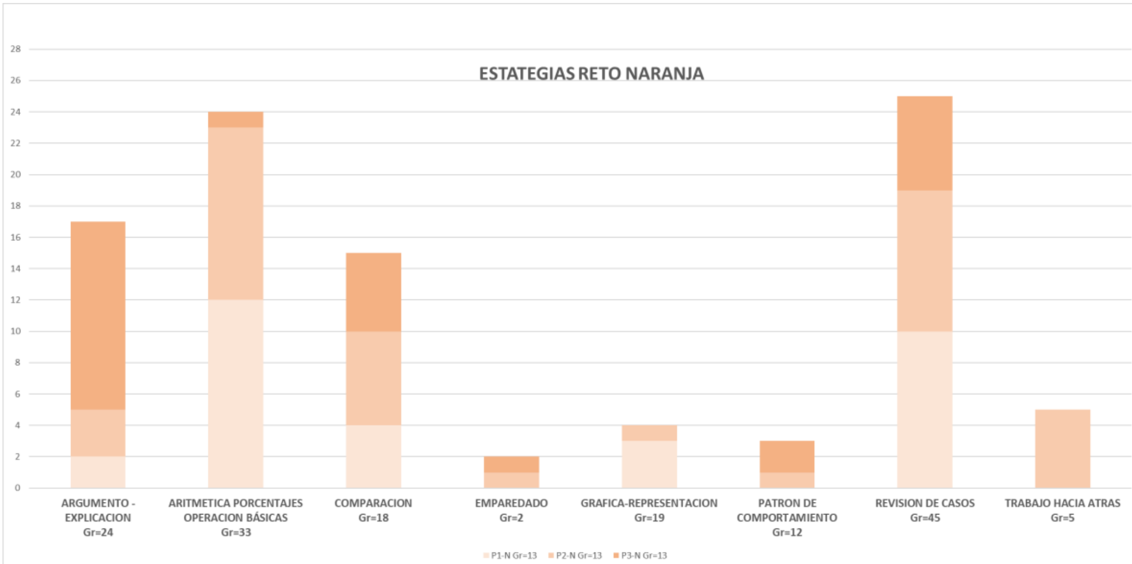
Tabla 5-6 Imágenes de Comparación Estrategias utilizadas en los dos retos de la Actividad 1.

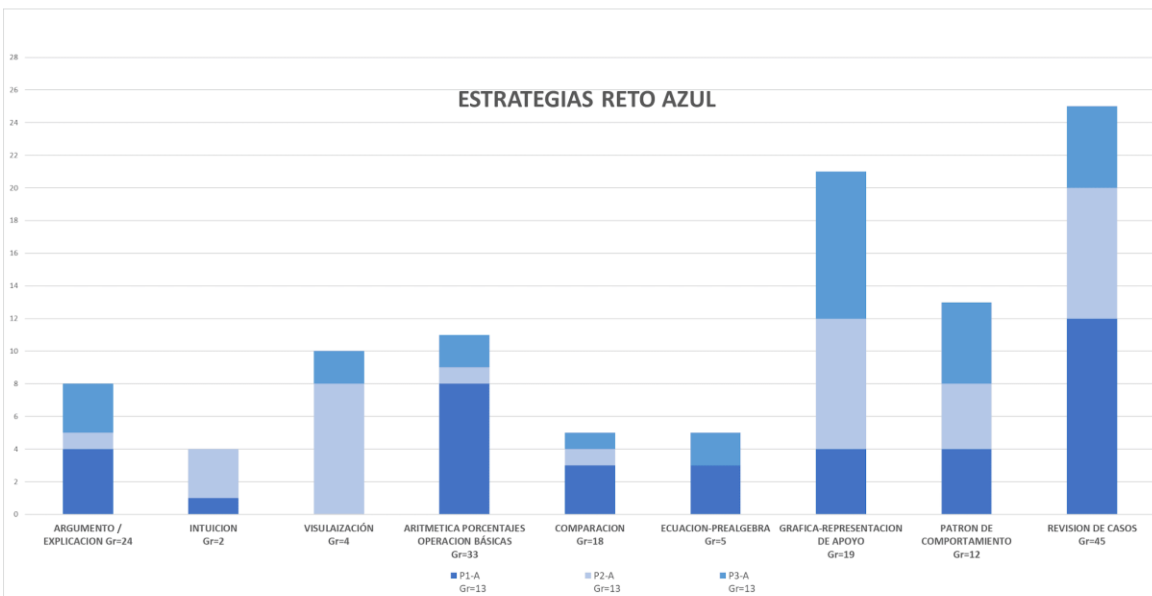




En la primera actividad se puede observar cómo las preguntas del reto naranja están encaminadas al uso de algunas estrategias en particular, principalmente el uso de la aritmética y la comparación.

Tabla 5-7 Comparación Estrategias utilizadas en los dos retos de la Actividad 2.





Al confrontar los resultados con el reto Azul, se puede apreciar que hay un desarrollo del pensamiento matemático más amplio, *medido en términos del número de estrategias utilizadas.* Por su parte, en la

Actividad 2 en el reto naranja se activan 8 estrategias, mientras que en el reto azul se activan 9 estrategias. Al parecer, el desarrollo del pensamiento matemático es similar en los dos retos.

¿Qué se observa desde la teoría de las competencias?

Principalmente se activan las competencias que se relacionan con la *habilidad de preguntar y responder de y por medio de las matemáticas* y del conjunto de estrategias observadas, se puede atribuir que corresponden en mayor medida a alguna de las competencias de este grupo. Así el uso de diferentes estrategias es indicador de que se activa la competencia de *solución de problemas*, cuando se utiliza la matemática se activa la *modelación,* y si el estudiante se cuestiona frente a los problemas que se le presentan y elabora posibles respuestas al respecto, la competencia del *pensamiento matemático* está presente. Finalmente, cuando se elabora una justificación se avanza en el *razonamiento matemático*.

Por otra parte, puede observarse que para la Actividad 1, el **grado de cobertura** de la competencia de *solución de problemas*, medido en relación con el número de estrategias que se activan, es mayor en el reto azul que en el reto naranja, mientras que en la Actividad 2, es muy similar.

En las dos actividades el **radio de acción** se observa con relación a los diferentes dominios que se utilizan para solucionar los problemas; los retos naranjas están más enfocados al dominio de la aritmética y temas específicos de la matemática escolar, mientras que los retos azules pueden extenderse al campo de la geometría, la teoría de números y la lógica.

En las dos actividades los estudiantes pueden demostrar un alto dominio técnico de la teoría matemática, es decir, dar cuenta del **nivel técnico** de la competencia, ya sean en la intención de especializar–generalizar, en la aplicación de teoremas o propiedades o en los cambios de representación. Sin embargo, por la naturaleza de los retos de color azul, son estos los que ofrecen mayor amplitud y posibilidades creativas.

En este análisis, se presenta que el enlace son las estrategias utilizadas. Sin embargo, al igual que el análisis realizado con los estudiantes de la prueba final, ¿Serán todas las estrategias consideradas igualmente relevantes? O ¿Algunas son utilizadas por algunos estudiantes en particular? Para dar respuesta a estas preguntas se utiliza un índice que nos permita discriminar a los estudiantes, de forma análoga a lo que se realiza con las preguntas en una evaluación desde la teoría clásica del Ítem.

Tabla 5-8 Proporción de uso y discriminante

Estrategia	Discriminante	Proporción de uso
Usar aritmética porcentajes operaciones básicas	0,398	1,000
Revisar casos con criterio	0,994	0,947
Comparar	0,398	0,763
Buscar un patrón de comportamiento	0,278	0,382
Escribir un Argumento - Adicional	0,517	0,329
Graficar o usar representaciones de apoyo	0,398	0,289
Utilizar Ecuación – pre álgebra	0,040	0,171
Realizar el “Emparedado”	0,000	0,132
Trabajar hacia atrás	0,080	0,132
Visualizar	0,119	0,066
Emplear la Intuición	-0,040	0,039
Utilizar la probabilidad	0,040	0,039
Utilizar la diferencia marginal y parcial conjunta	0,040	0,013

En la Tabla 5-8 se presenta el conjunto de estrategias organizado de forma descendente según la proporción de uso que los estudiantes dieron a la estrategia y se resaltan aquellas estrategias que tiene un índice de discriminación superior al 0.39.

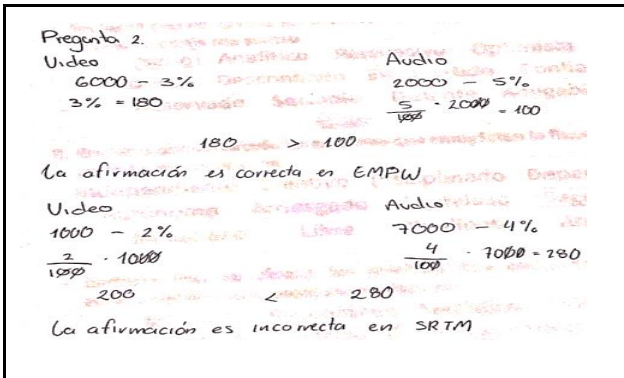
Entonces el conjunto de estrategias relevantes utilizadas por los estudiantes es: *utilizar la aritmética porcentajes u operaciones básicas, revisar casos, comparar, buscar un patrón de comportamiento, escribir un argumento – adicional, graficar o usar representaciones de apoyo*.

A continuación, se presenta una breve descripción de las estrategias representativas.

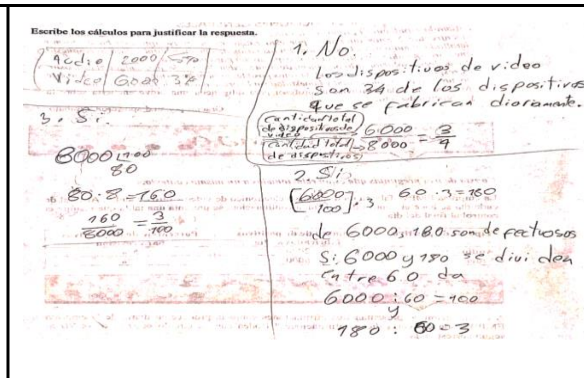
Usar aritmética porcentajes operaciones básicas

La estrategia más utilizada por los estudiantes para dar solución a las actividades 1 y 2 es el uso de operaciones aritméticas, el cálculo de porcentajes, sumas restas, entre otras como se muestra en la Tabla 1-9.

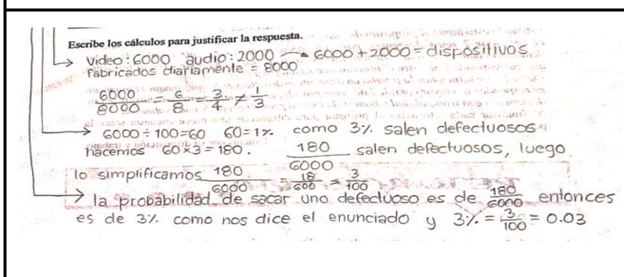
Tabla 5-9 Ejemplos del uso de la aritmética porcentajes operaciones básicas



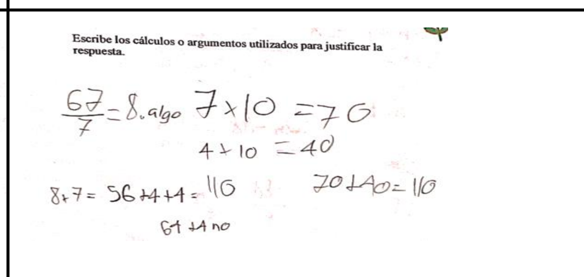
Pregunta 2.
Video Audio
6000 – 3% 2000 – 5%
3% = 180 5/100 · 2000 = 100
180 > 100
La afirmación es correcta en EMPW
Video Audio
1000 – 2% 7000 – 4%
2/100 · 1000 4/100 · 7000 = 280
200 < 280
La afirmación es incorrecta en SRTM



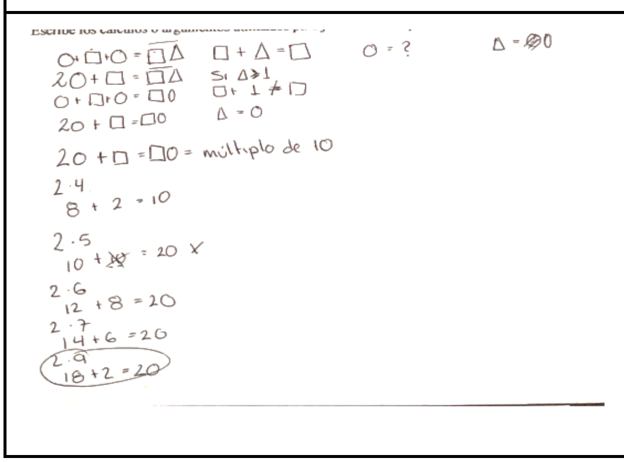
Escribe los cálculos para justificar la respuesta.
1. No.
Los dispositivos de video son 3/4 de los dispositivos que se fabrican diariamente.
2. Si
6000 ÷ 100 = 60 · 3 = 180
de 6000, 180 son defectuosos
Si 6000 y 180 se dividen entre 60 da
6000 : 60 = 100
y 180 : 60 = 3
3. Si



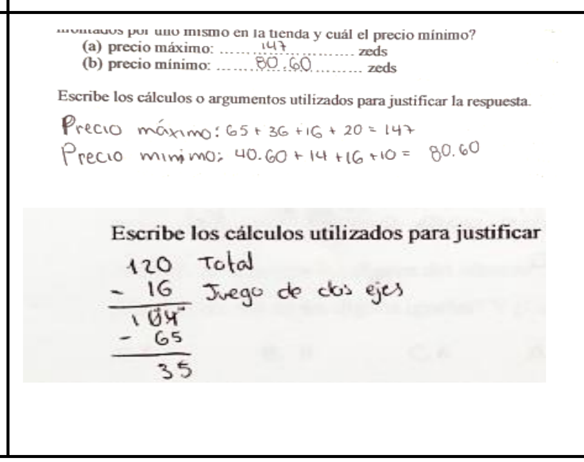
Escribe los cálculos para justificar la respuesta.
video: 6000 audio: 2000 → 6000 + 2000 = dispositivos fabricados diariamente = 8000
6000/8000 = 6/8 = 3/4 ≠ 1/3
6000 ÷ 100 = 60 60 = 1% como 3% salen defectuosos hacemos 60 × 3 = 180. 180/6000 salen defectuosos, luego lo simplificamos 180/6000 = 18/600 = 3/100
la probabilidad de sacar uno defectuoso es de 180/6000 entonces es de 3% como nos dice el enunciado y 3% = 3/100 = 0.03



Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.
67/7 = 8.algo 7 × 10 = 70
4 + 10 = 40
8 + 7 = 56 + 4 + 4 = 110 70 + 40 = 110
64 + 4 no



20 + □ = □0 = múltiplo de 10
2 · 4
8 + 2 = 10
2 · 5
10 + 10 = 20
2 · 6
12 + 8 = 20
2 · 7
14 + 6 = 20
2 · 9
18 + 2 = 20



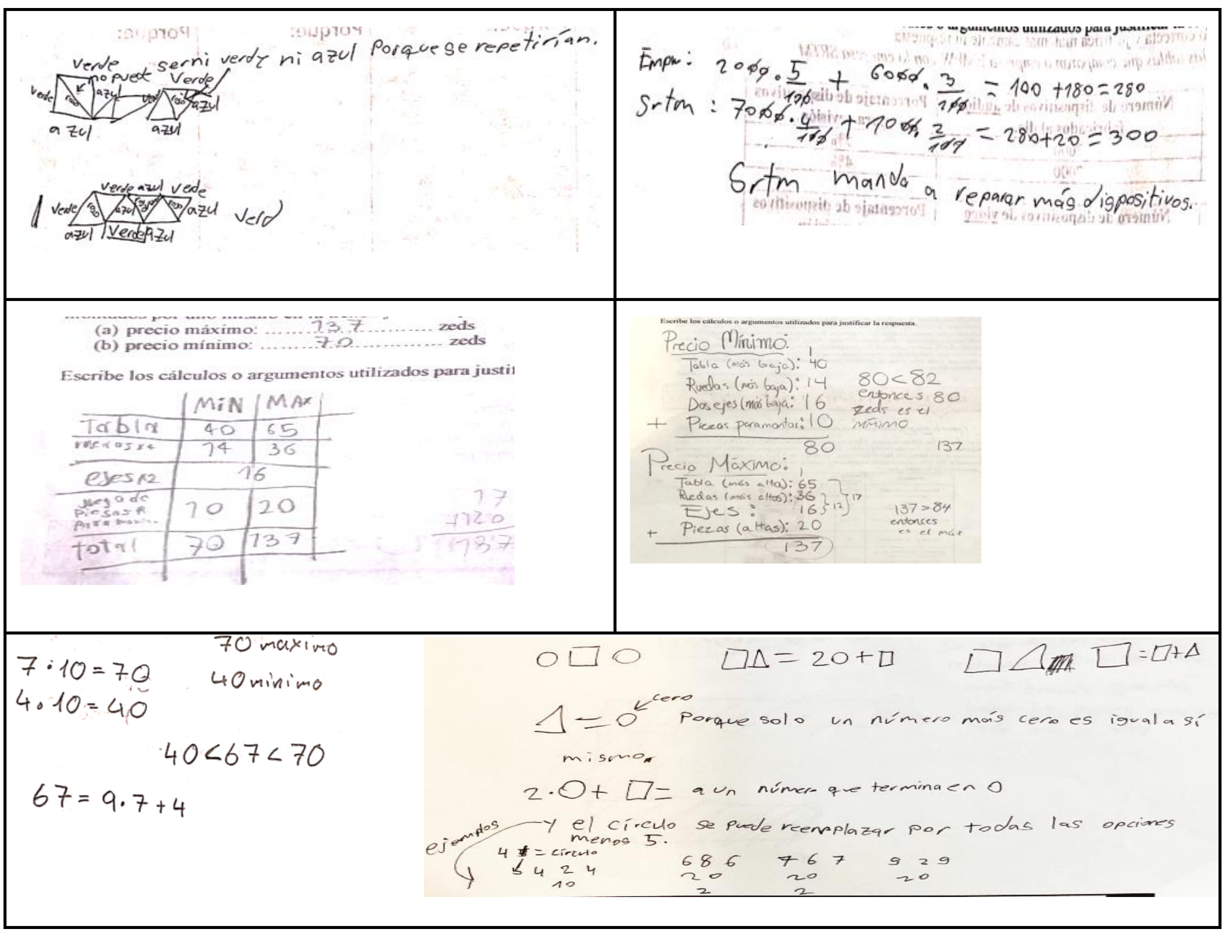
(a) precio máximo: 147 zeds
(b) precio mínimo: 80.60 zeds
Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.
Precio máximo: 65 + 36 + 16 + 20 = 147
Precio mínimo: 40.60 + 14 + 16 + 10 = 80.60
Escribe los cálculos utilizados para justificar
120 Total
– 16 Juego de dos ejes
104
– 65
35

Particularmente, los retos naranjas están muy enfocados hacia el uso de operaciones aritméticas. En los retos azules el trabajo aritmético es importante en algunos de los problemas, aunque como un apoyo intermedio para solucionarlos.

Revisar casos

Una de las estrategias más potentes es la revisión de casos utilizada con gran frecuencia en los dos tipos de retos. No es una revisión aleatoria, por el contrario, es realizada con criterio, y atendiendo a las condiciones del problema. Los estudiantes utilizan la revisión de casos para entender o para avanzar en alguna hipótesis que ellos tienen sobre la solución o condiciones de los problemas, en algunos casos, es un paso intermedio cuando se quiere establecer un patrón de comportamiento.

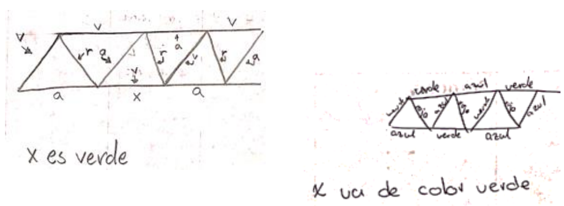
Tabla 5-10 Ejemplos del uso de la revisión de casos

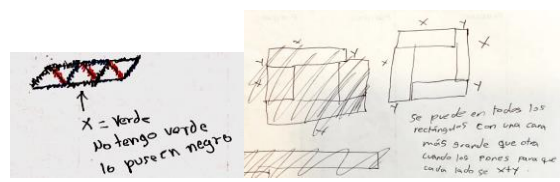


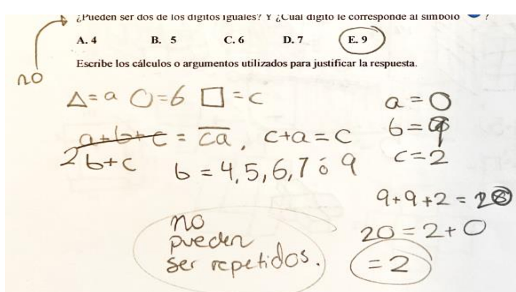
Buscar un patrón de comportamiento

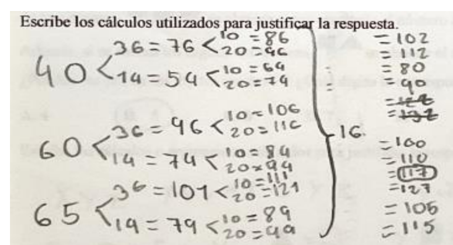
Esta estrategia requiere cierto nivel de entrenamiento, es decir no todos los estudiantes logran observar el patrón de comportamiento y es muy importante, porque de esta manera, partiendo de las condiciones del problema, se puede avanzar firmemente hacia la generalización de las propiedades lo que aporta tanto a la solución, como a la justificación de esta.

Tabla 5-11 Ejemplos de uso de la búsqueda de un patrón de comportamiento





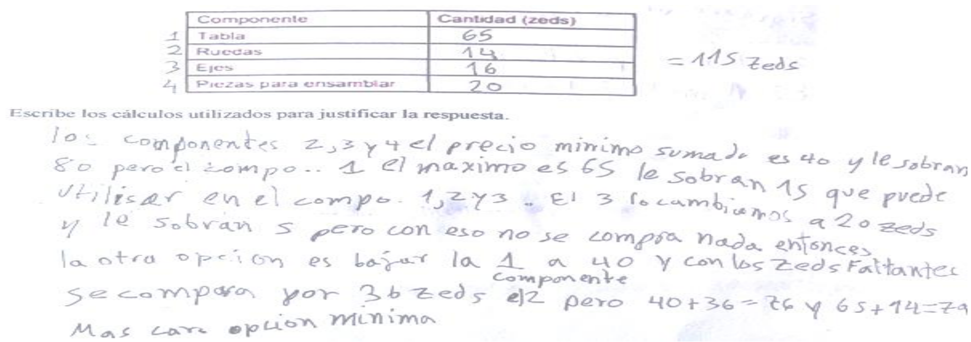




Escribir un Argumento - Adicional

Esta estrategia llamada argumento adicional hace referencia a aquellos estudiantes que escriben o comunican los argumentos que complementan su solución. No es una estrategia de trabajo frecuente, porque muchos estudiantes consideran que basta con exhibir la solución y todo está explicado. Esta estrategia le permite al estudiante hacer un recuento de su solución, es decir, realiza la mirada atrás que le permite reevaluar sus decisiones y reconectar el proceso de solución.

Tabla 5-12 Ejemplo del uso del argumento adicional

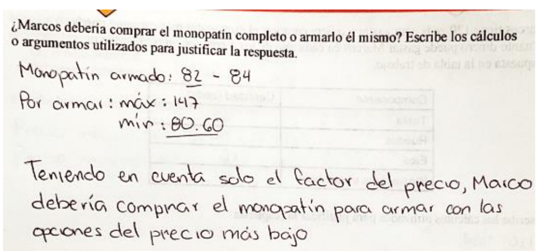


	Componente	Cantidad (zeds)
1	Tabla	65
2	Ruedas	14
3	Ejes	16
4	Piezas para ensamblar	20

= 115 zeds

Escribe los cálculos utilizados para justificar la respuesta.

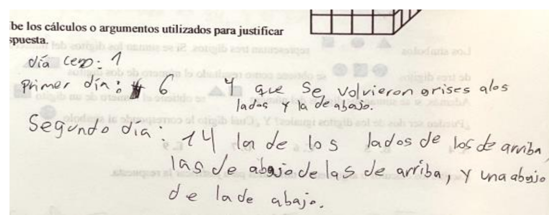
los componentes 2,3 y 4 el precio minimo sumado es 40 y le sobran 80 pero el compo.. 1 el maximo es 65 le sobran 15 que puede utilisar en el compo. 1,2 y 3 . El 3 lo cambiamos a 20 zeds y le sobran 5 pero con eso no se compra nada entonces la otra opcion es bajar la 1 a 40 y con los zeds faltantes se compra por 36 zeds el componente 2 pero 40+36=76 y 65+14=79 Mas caro opcion minima



¿Marcos debería comprar el monopatín completo o armarlo él mismo? Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar la respuesta.

Monopatin armado: 82 - 84
Por armar: máx: 147
mín: 80.60

Teniendo en cuenta solo el factor del precio, Marco debería comprar el monopatín para armar con las opciones del precio más bajo



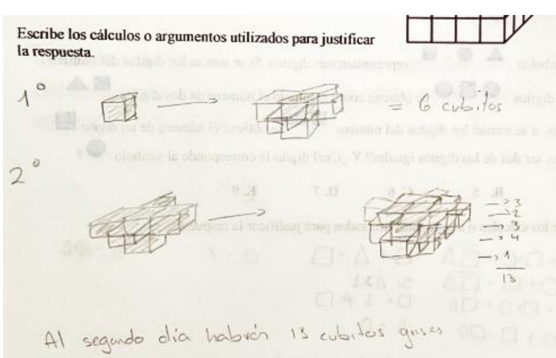
be los cálculos o argumentos utilizados para justificar
spuesta.

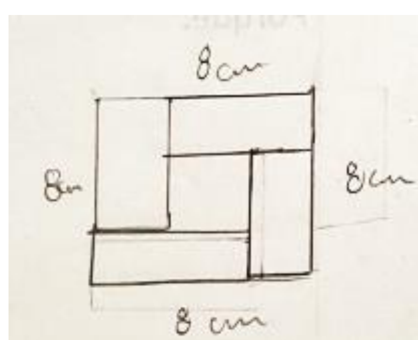
día cero: 1
Primer día: 6 y que se volvieron grises a los lados y la de abajo.
Segundo día: 14 la de los lados de los de arriba, las de abajo de las de arriba, y una abajo de la de abajo.

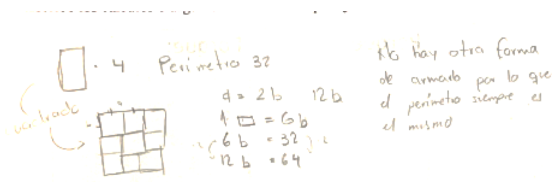
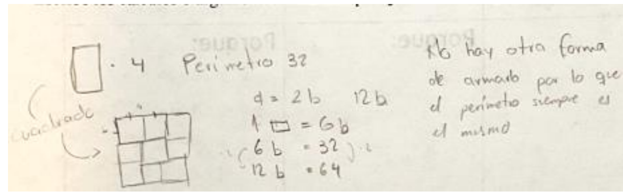
Graficar o usar representaciones de apoyo

Realizar una gráfica de apoyo es una de las estrategias que los estudiantes utilizan frecuentemente, sin embargo, por las condiciones de los problemas, fue utilizada en mayor medida en el reto azul. Esta estrategia está relacionada a la visualización y los cambios de representación, usadas como apoyo en el proceso de solución de los problemas.

Tabla 5-13 Graficar o usar representaciones de apoyo



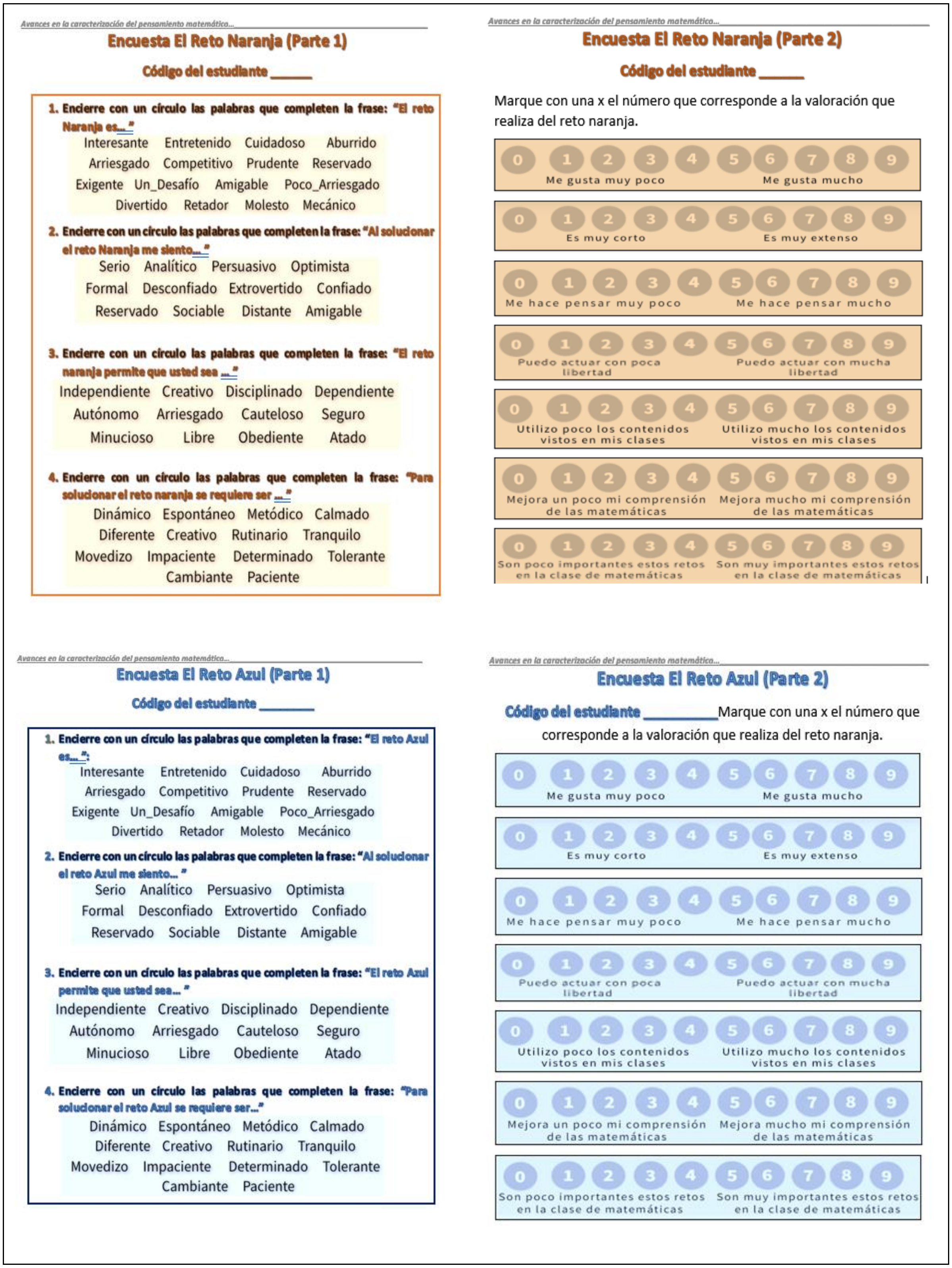


Por último, la estrategia de *Revisar casos* permite discriminar muy bien a los participantes (D=0,994), sin embargo, como es muy utilizada (P=0,947), no es un buen criterio para clasificar a los estudiantes que se consideran con mayor desarrollo del pensamiento matemático. Por su parte, *Escribir un Argumento - Adicional* tiene un buen índice de discriminación (D=0.517) y su uso no es tan frecuente (P=0.329); lo mismo ocurre con la estrategia *Graficar o usar representaciones de apoyo* que tiene un índice de discriminación aceptable (D=0,398) y su proporción de uso es baja (P=0,289). Estas dos estrategias son utilizadas por una menor proporción de estudiantes, de quienes se puede suponer que presentan un mayor desarrollo del pensamiento matemático al disponer de estrategias que sus compañeros no utilizan.

5.2.2. Resultados de percepción sobre el tipo de reto

Además de pretender comparar las estrategias que se utilizan en cada uno de los retos, se quiere preguntar a los estudiantes cuál es su percepción anímica y motivacional con relación a estos. En la Figura 1-10 se muestra las preguntas de la encuesta motivacional (parte 1 y parte 2), porque al interior de la actividad se encuentra la parte 3, en forma de una pregunta abierta. A continuación, se muestran los resultados.


Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Naranja (Parte 1)

Código del estudiante ______

1. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "El reto Naranja es...."**
   Interesante Entretenido Cuidadoso Aburrido
   Arriesgado Competitivo Prudente Reservado
   Exigente Un_Desafío Amigable Poco_Arriesgado
   Divertido Retador Molesto Mecánico
2. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "Al solucionar el reto Naranja me siento...."**
   Serio Analítico Persuasivo Optimista
   Formal Desconfiado Extrovertido Confiado
   Reservado Sociable Distante Amigable
3. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "El reto naranja permite que usted sea ...."**
   Independiente Creativo Disciplinado Dependiente
   Autónomo Arriesgado Cauteloso Seguro
   Minucioso Libre Obediente Atado
4. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "Para solucionar el reto naranja se requiere ser ...."**
   Dinámico Espontáneo Metódico Calmado
   Diferente Creativo Rutinario Tranquilo
   Movedizo Impaciente Determinado Tolerante
   Cambiante Paciente

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Naranja (Parte 2)

Código del estudiante ______

Marque con una x el número que corresponde a la valoración que realiza del reto naranja.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Me gusta muy poco	Me gusta mucho
Es muy corto	Es muy extenso
Me hace pensar muy poco	Me hace pensar mucho
Puedo actuar con poca libertad	Puedo actuar con mucha libertad
Utilizo poco los contenidos vistos en mis clases	Utilizo mucho los contenidos vistos en mis clases
Mejora un poco mi comprensión de las matemáticas	Mejora mucho mi comprensión de las matemáticas
Son poco importantes estos retos en la clase de matemáticas	Son muy importantes estos retos en la clase de matemáticas

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Azul (Parte 1)

Código del estudiante ________

1. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "El reto Azul es....":**
   Interesante Entretenido Cuidadoso Aburrido
   Arriesgado Competitivo Prudente Reservado
   Exigente Un_Desafío Amigable Poco_Arriesgado
   Divertido Retador Molesto Mecánico
2. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "Al solucionar el reto Azul me siento... "**
   Serio Analítico Persuasivo Optimista
   Formal Desconfiado Extrovertido Confiado
   Reservado Sociable Distante Amigable
3. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "El reto Azul permite que usted sea... "**
   Independiente Creativo Disciplinado Dependiente
   Autónomo Arriesgado Cauteloso Seguro
   Minucioso Libre Obediente Atado
4. **Encierre con un círculo las palabras que completen la frase: "Para solucionar el reto Azul se requiere ser..."**
   Dinámico Espontáneo Metódico Calmado
   Diferente Creativo Rutinario Tranquilo
   Movedizo Impaciente Determinado Tolerante
   Cambiante Paciente

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Encuesta El Reto Azul (Parte 2)

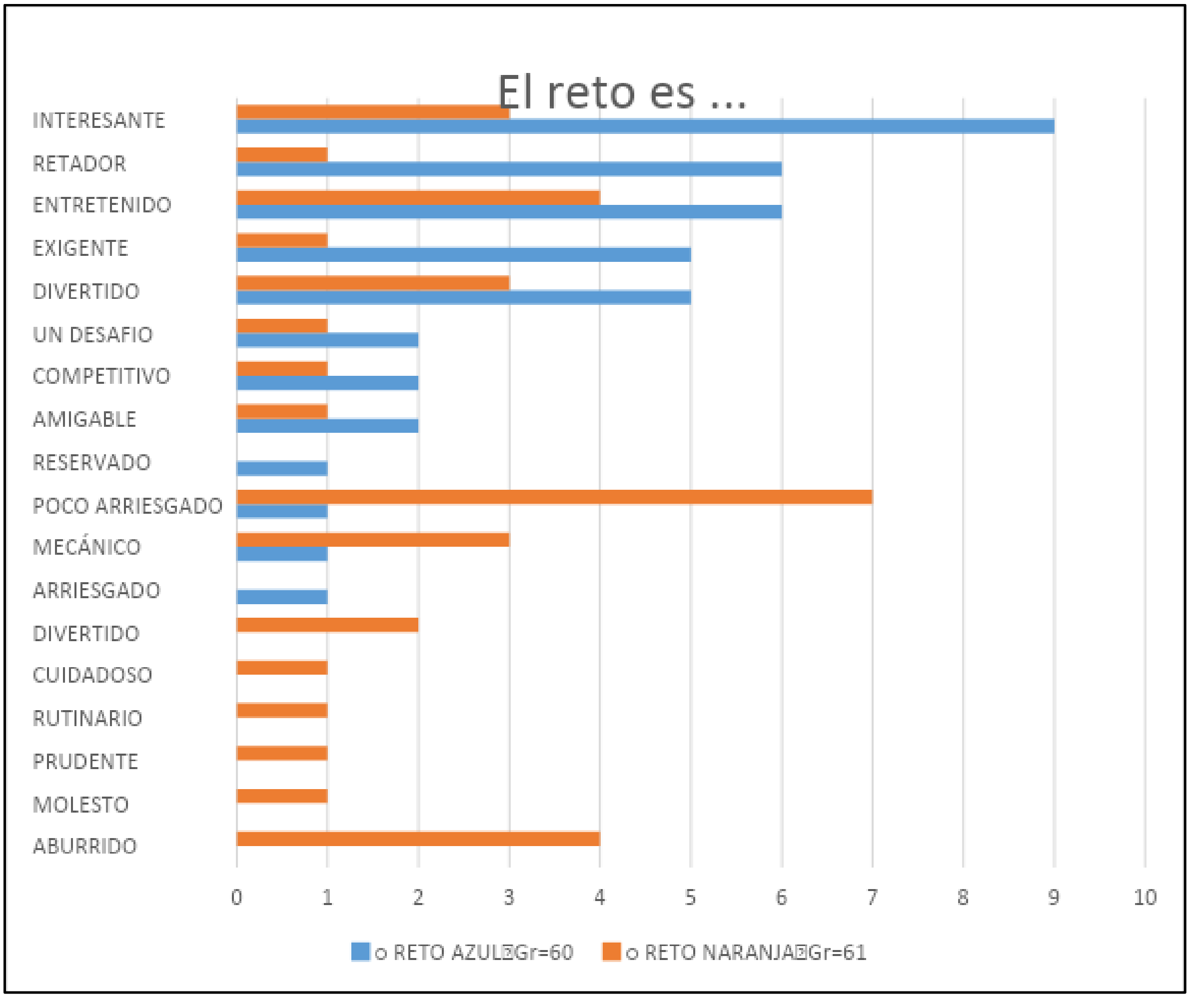
Código del estudiante _________Marque con una x el número que corresponde a la valoración que realiza del reto naranja.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Me gusta muy poco	Me gusta mucho
Es muy corto	Es muy extenso
Me hace pensar muy poco	Me hace pensar mucho
Puedo actuar con poca libertad	Puedo actuar con mucha libertad
Utilizo poco los contenidos vistos en mis clases	Utilizo mucho los contenidos vistos en mis clases
Mejora un poco mi comprensión de las matemáticas	Mejora mucho mi comprensión de las matemáticas
Son poco importantes estos retos en la clase de matemáticas	Son muy importantes estos retos en la clase de matemáticas

Figura 5-9 formato de encuesta reto Naranja arriba reto Azul abajo

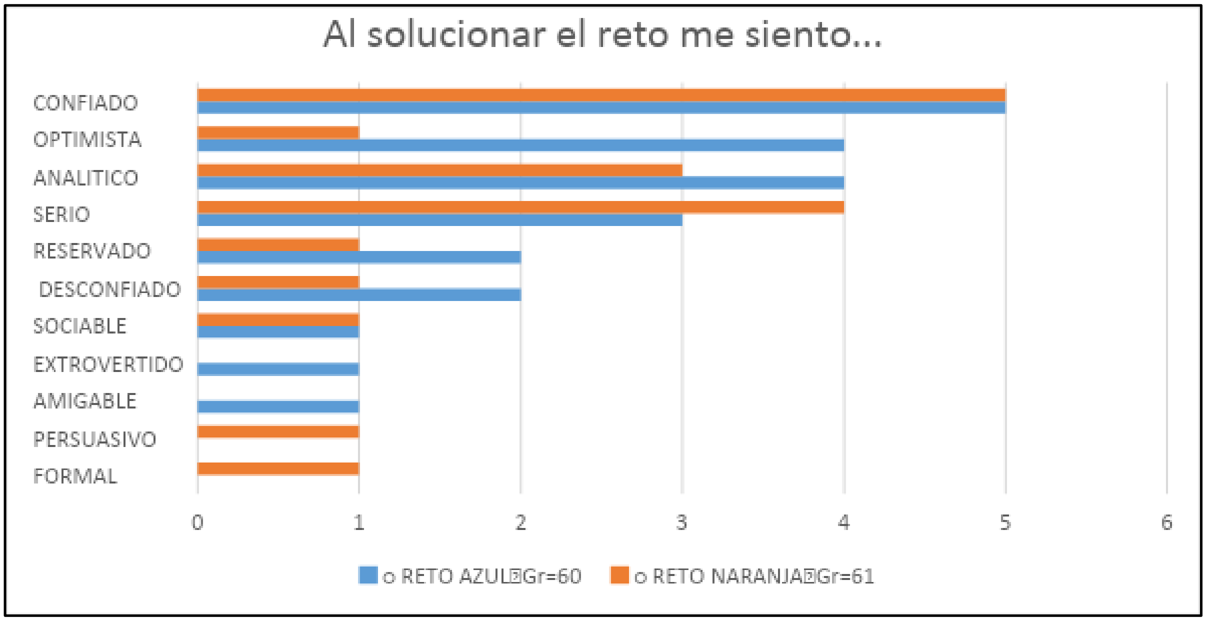
Parte 1 de la encuesta

En el instrumento se le pide al estudiante hacer un círculo a las palabras que mejor completen la frase que se les da. A continuación, se presentan las gráficas que resumen los resultados se las respuestas a cada una de las frases.



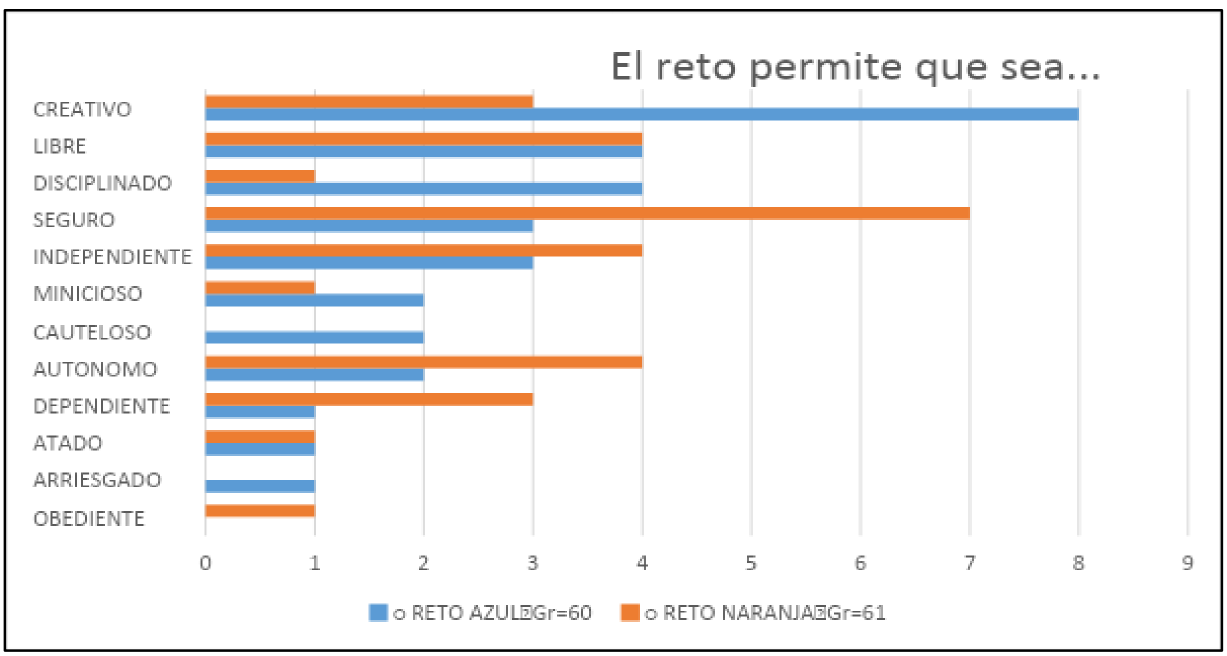
Gráfica 5-2 Frecuencia de las palabras que completan la Frase 1 de la encuesta

En general, para la mayoría de los estudiantes, el reto naranja puede resultar aburrido y poco arriesgado, mecánico y solo para unos pocos divertido. Por su parte, el reto azul puede ser interesante, retador, entretenido, exigente o divertido.



Gráfica 5-3 Frecuencia de las palabras que completan la Frase 2 de la encuesta

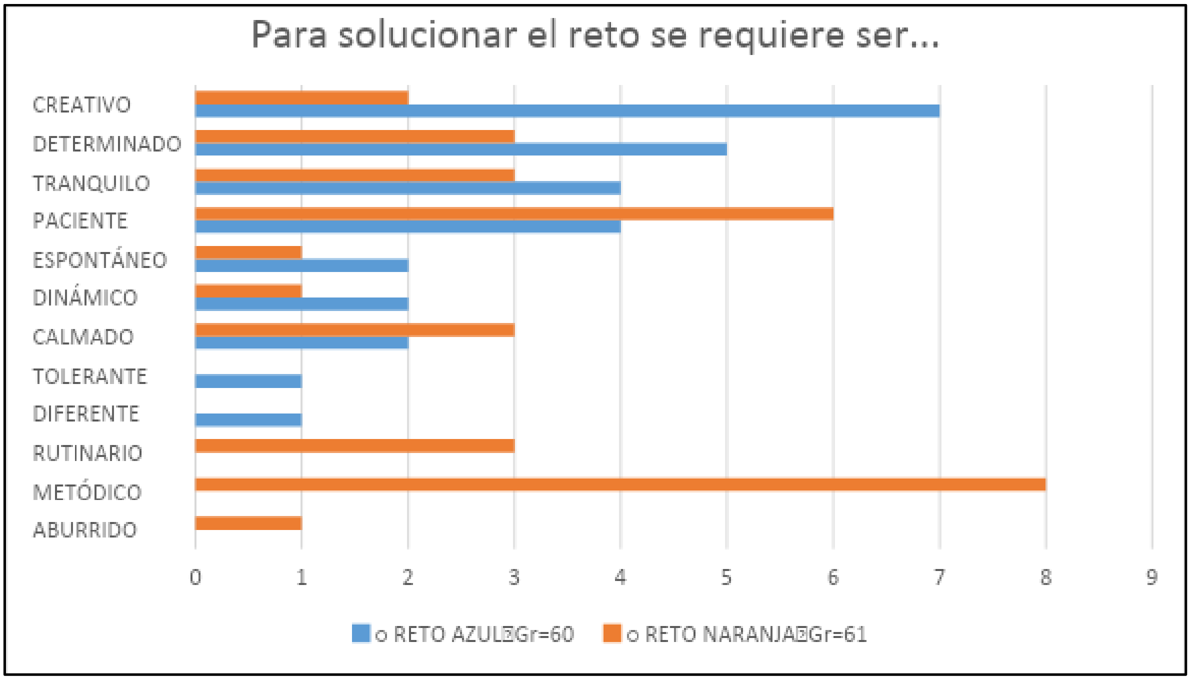
Los estudiantes manifiestan que al solucionar el reto azul se sienten analíticos, optimistas y confiados. Y con el reto naranja, se sienten analíticos, serios y confiados. La diferencia más marcada es que el reto azul está asociado a la palabra optimista.



Gráfica 5-4 Frecuencia de las palabras que completan la Frase 3 de la encuesta

El reto naranja a la mayoría de los estudiantes les permite ser seguros, y a algunos, autónomos, independientes y libres, pero, a ninguno les permitió ser arriesgados.

Por su parte el reto azul, permite a los estudiantes ser creativos, libres y disciplinados, pero a ninguno obediente.

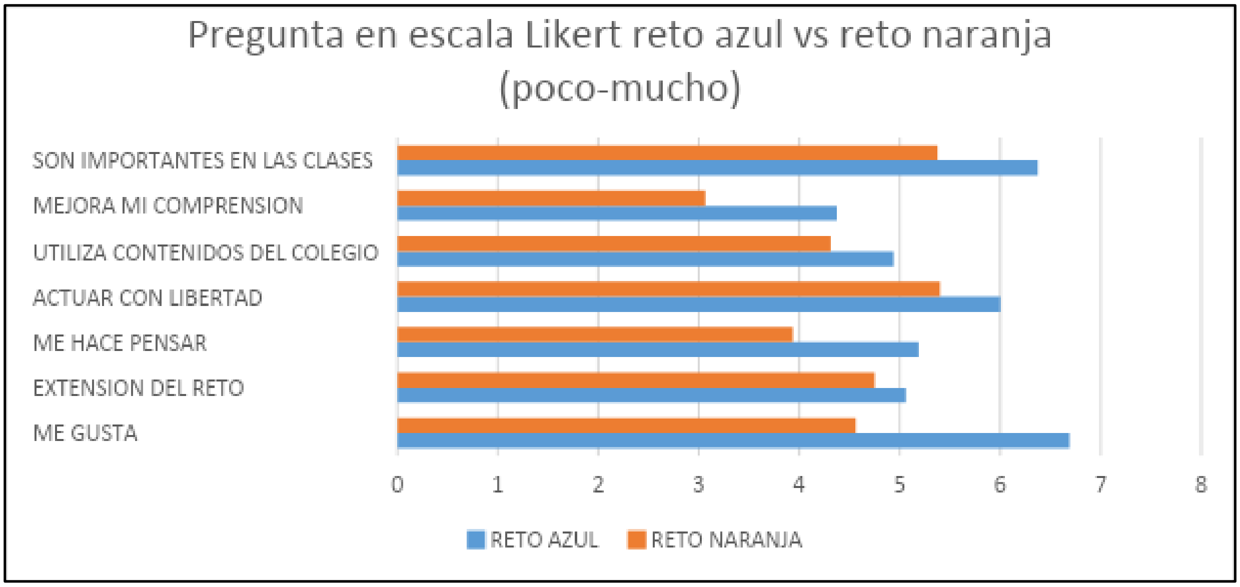


Gráfica 5-5 Frecuencia de las palabras que completan la Frase 4 de la encuesta

La creatividad, la determinación, la tranquilidad y la paciencia son muy importantes en el reto azul, pero no son importantes, lo rutinario, metódico ni lo aburrido. En el reto naranja se requiere ser metódico, paciente, determinado, tranquilo, calmado y rutinario. No es importante ser tolerante ni diferente.

Parte 2 de la encuesta

Después de las preguntas asociadas a palabras, se utiliza un formato con preguntas tipo Likert. El mayor puntaje asociado es en promedio nueve y el menor cero. A continuación, se presenta el resumen luego de promediar los resultados.



Gráfica 5-6 Promedio de las respuestas en escala Likert de la encuesta

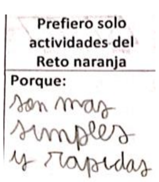
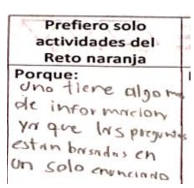
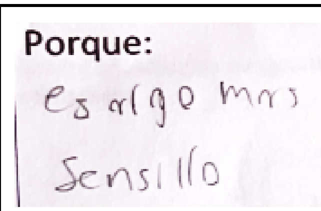
Se toman los valores entre 0 a 3, como muy Poco y entre 6 a 9 como mucho. Entonces los estudiantes consideran que el reto naranja mejora poco su comprensión. En contraste los estudiantes consideran que los retos azules, son importantes para las clases, les permitan actuar con libertad y les gustan mucho.

Parte 3 de la encuesta

Como parte final de la encuesta el estudiante podía realizar una breve justificación de ¿cuál es el tipo de reto que prefiere? A continuación, se muestran los resultados.

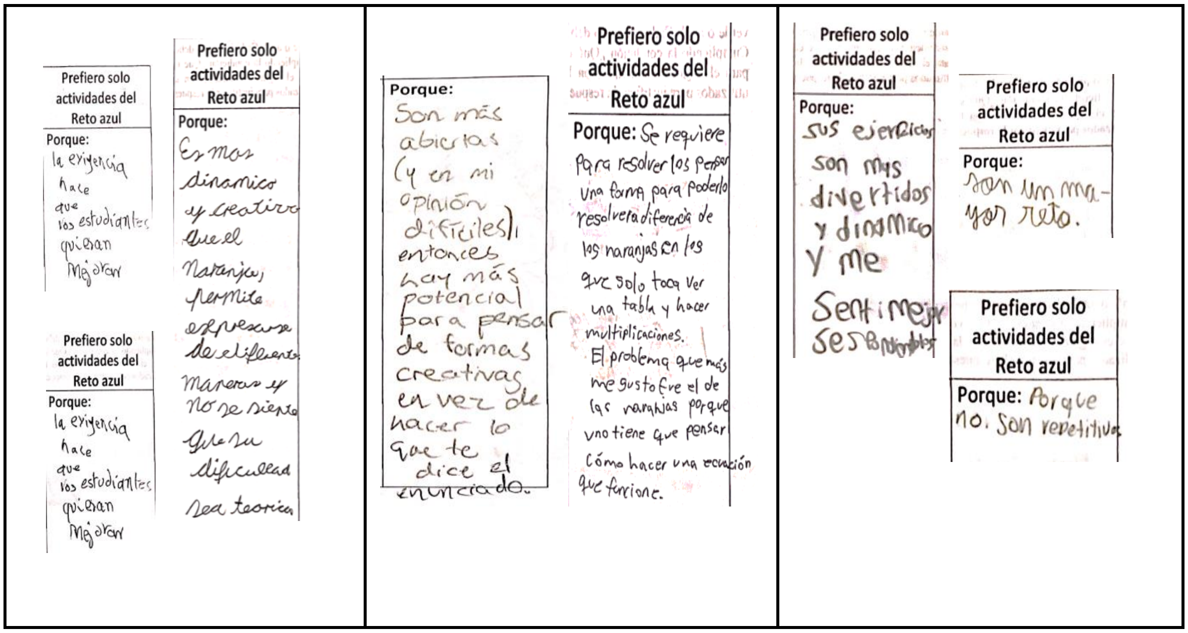
Algunos estudiantes prefieren sólo el reto naranja porque les parecen más fáciles o porque consideran que el enunciado les proporciona más información como lo presentan los resultados de la Tabla 1-14.

Tabla 5-14 Justificación para solo reto naranja

 Prefiero solo actividades del Reto naranja Porque: son mas simples y rapidas	 Prefiero solo actividades del Reto naranja Porque: uno tiene algo m de informacion ya que las preguntas estan basadas en un solo enunciado	 Porque: es algo mas sensillo

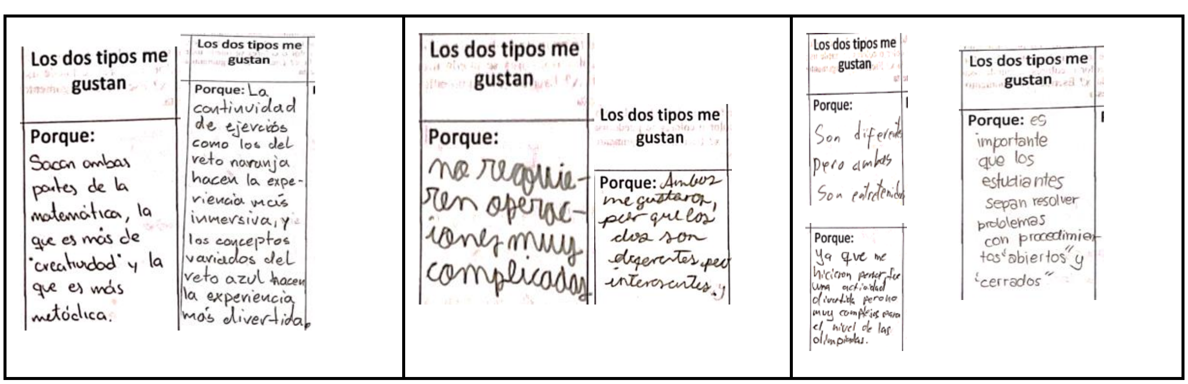
Como se presenta en la Tabla 1-15, los estudiantes que prefieren el reto azul consideran que son más abiertos, representan un mayor reto, les invita a pensar formas creativas o divertidas para ellos y que no consideran repetitivas.

Tabla 5-15 Justificación para solo reto azul



Finalmente, algunos estudiantes proponen los dos retos porque según ellos permiten el trabajo creativo vs el metódico, los consideran dos diferentes puntos de vista de la actividad matemática, a lo que refieren como procedimientos abiertos o cerrados y inmersivos o divertidos.

Tabla 5-16 Justificación para los dos tipos de reto



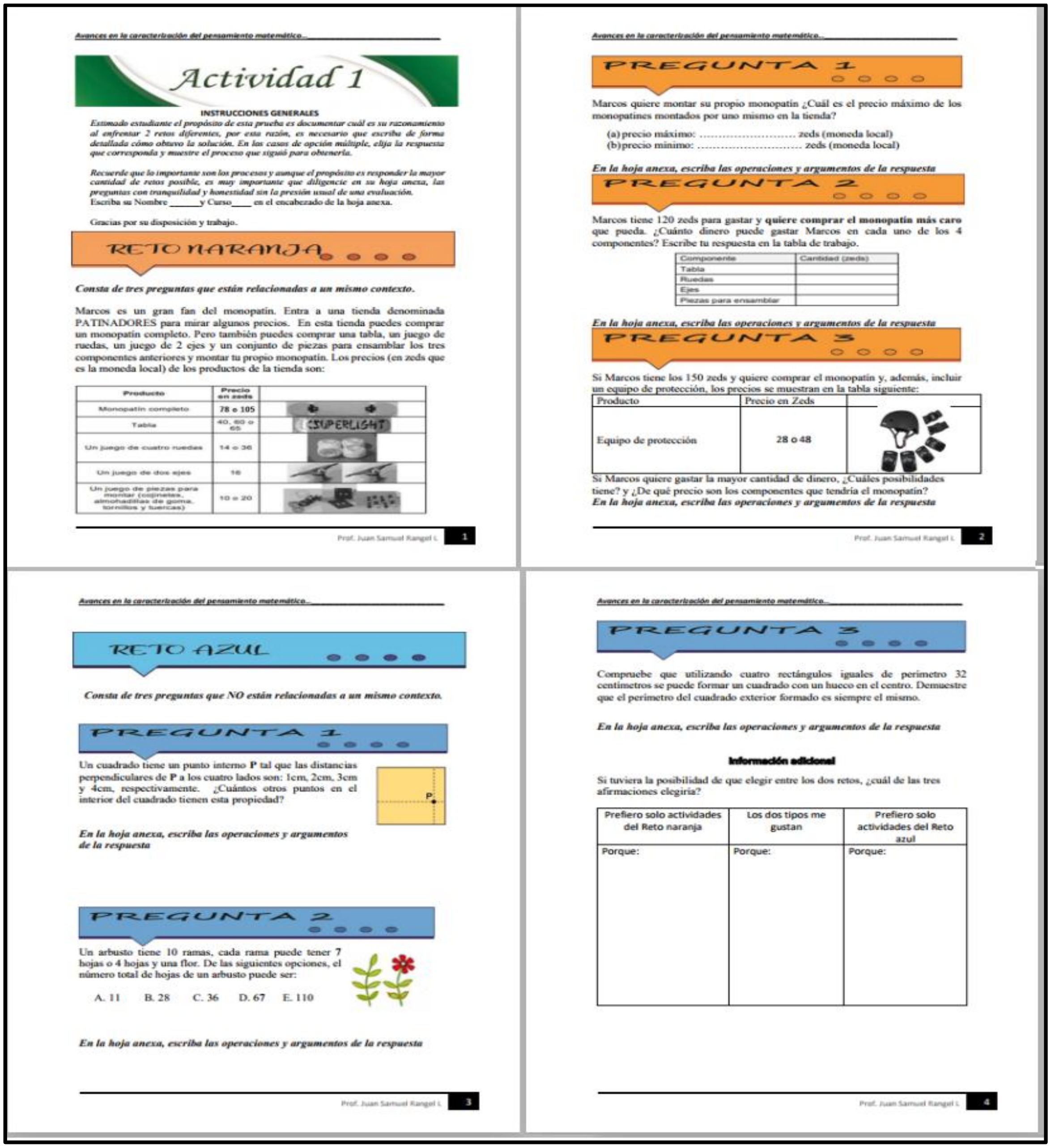
Al igual que en las partes 1 y 2 se describe una preferencia por los retos azules valorando la posibilidad de actividades creativas, amigables y divertidas. En contraste con los retos naranjas que se consideran importantes y útiles, pero se perciben como cerrados, repetitivos y muy metódicos. Se presentaron dificultades a la hora de aplicar los instrumentos en escala Likert, algunos estudiantes elegían los números sin reflexionar sobre la `pregunta demasiado. Con relación a la etapa de las palabras, es interesante, pero los resultados se enriquecen más con la parte 3. Entonces, se decide que lo mejor es aplicar solo la pregunta abierta, en la que se recogen percepciones similares al formulario 1 y 2 y se presenta de una forma explícita, cada estudiante escribe lo que piensa lo que permite analizar la información directamente.

5.3. Actividades con estudiantes de aula regular

A continuación, se presentan los resultados relevantes del análisis de las actividades con estudiantes de aula regular. Primero se muestran y describen las actividades utilizadas para este grupo de estudiantes. Después se presenta el análisis consolidado de las estrategias utilizadas en los retos azul y naranja, se determinan las estrategias de mayor relevancia obtenidas en investigación y se presentan algunos casos empíricos del trabajo con los estudiantes. Por último, se presentan resultados con relación a la pregunta ¿Cuál tipo de reto prefiere?

5.3.1. Actividades

Las actividades han sido diseñadas o reestructuradas del conjunto de estrategias que se eligieron en la parte inicial del estudio, presentan un formato parecido a las realizadas con los estudiantes de entrenamiento, pero tienen variaciones en sus enunciados y como el propósito es comparar los resultados de dos tipos de preguntas, la forma e intencionalidad de cada tipo se conserva. La estructura de las actividades es la descrita en el Capítulo 4, separa los tipos de pregunta en los retos naranja y azul (PISA u Olimpiada), cada uno con tres preguntas o problemas. A diferencia de las actividades con estudiantes en entrenamiento, en el instrumento de actividad no se dejó espacio para la solución de los problemas, por esta razón a los estudiantes se les entregan hojas cuadriculadas para realizar las soluciones y esas hojas se recogen al final de la sesión de trabajo.



Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Actividad 1

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.
Escriba su Nombre ______ y Curso ____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

Marcos es un gran fan del monopatín. Entra a una tienda denominada PATINADORES para mirar algunos precios. En esta tienda puedes comprar un monopatín completo. Pero también puedes comprar una tabla, un juego de ruedas, un juego de 2 ejes y un conjunto de piezas para ensamblar los tres componentes anteriores y montar tu propio monopatín. Los precios (en zeds que es la moneda local) de los productos de la tienda son:

Producto	Precio en zeds	
Monopatín completo	78 o 105	
Tabla	40, 60 o 65	
Un juego de cuatro ruedas	14 o 36	
Un juego de dos ejes	16	
Un juego de piezas para montar (cojinetes, almohadillas de goma, tornillos y tuercas)	10 o 20	

Prof. Juan Samuel Rangel L. 1

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 1

Marcos quiere montar su propio monopatín ¿Cuál es el precio máximo de los monopatines montados por uno mismo en la tienda?

(a) precio máximo: .... zeds (moneda local)
(b) precio mínimo: .... zeds (moneda local)

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Marcos tiene 120 zeds para gastar y **quiere comprar el monopatín más caro** que pueda. ¿Cuánto dinero puede gastar Marcos en cada uno de los 4 componentes? Escribe tu respuesta en la tabla de trabajo.

Componente	Cantidad (zeds)
Tabla	
Ruedas	
Ejes	
Piezas para ensamblar	

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

Si Marcos tiene los 150 zeds y quiere comprar el monopatín y, además, incluir un equipo de protección, los precios se muestran en la tabla siguiente:

Producto	Precio en Zeds	
Equipo de protección	28 o 48	

Si Marcos quiere gastar la mayor cantidad de dinero, ¿Cuáles posibilidades tiene? y ¿De qué precio son los componentes que tendría el monopatín?
En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L. 2

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Un cuadrado tiene un punto interno **P** tal que las distancias perpendiculares de **P** a los cuatro lados son: 1cm, 2cm, 3cm y 4cm, respectivamente. ¿Cuántos otros puntos en el interior del cuadrado tienen esta propiedad?

P

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Un arbusto tiene 10 ramas, cada rama puede tener 7 hojas o 4 hojas y una flor. De las siguientes opciones, el número total de hojas de un arbusto puede ser:

A. 11 B. 28 C. 36 D. 67 E. 110

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L. 3

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 3

Compruebe que utilizando cuatro rectángulos iguales de perímetro 32 centímetros se puede formar un cuadrado con un hueco en el centro. Demuestre que el perímetro del cuadrado exterior formado es siempre el mismo.

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiría?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Prof. Juan Samuel Rangel L. 4

Gráfica 5-7 Actividad 1

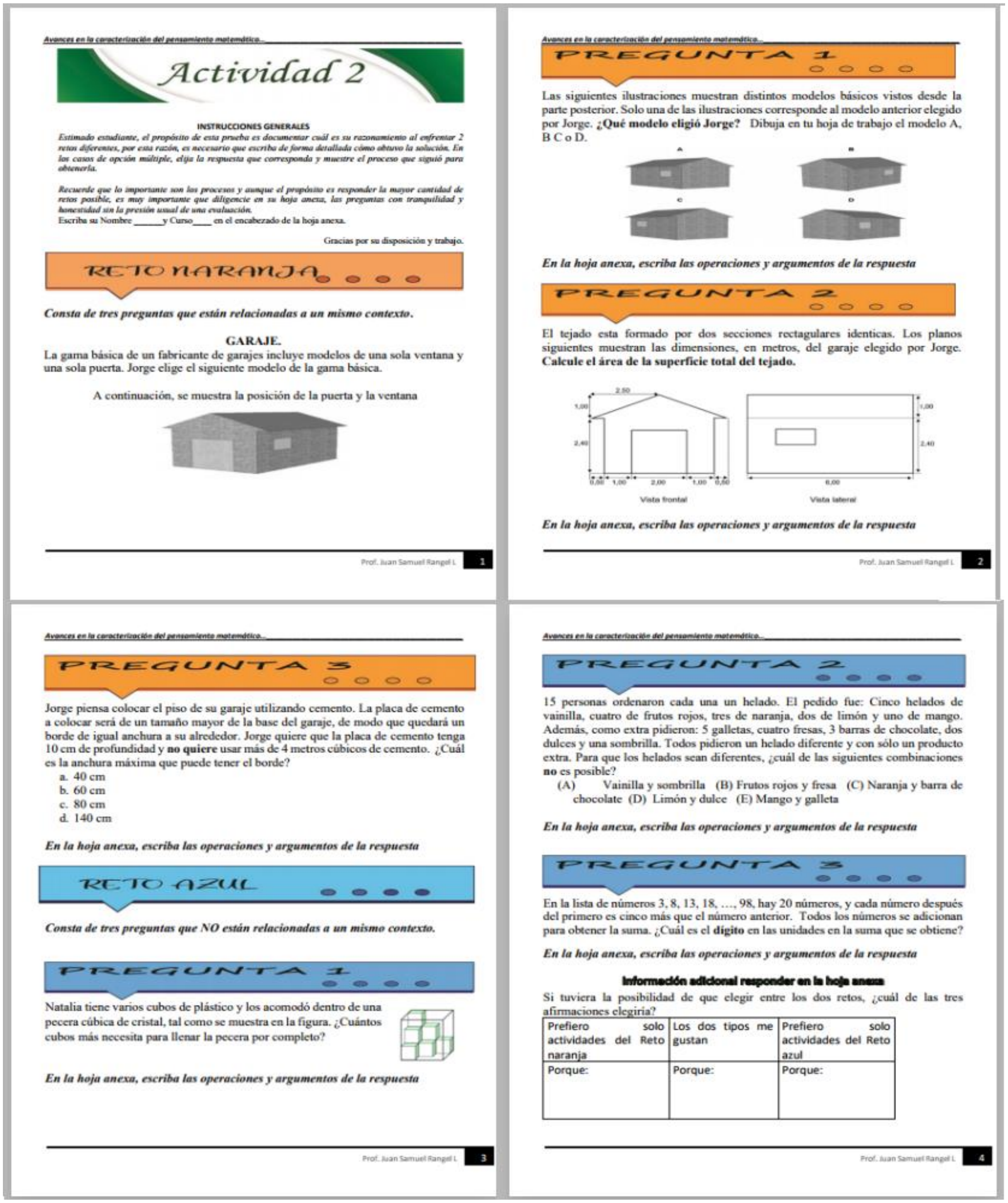
En la presentación de la actividad el uso del color es importante, las indicaciones son cortas y precisas; los retos son interesantes y bien elaborados, pero no pretenden tomar un tiempo mayor a 15 minutos por problema, teniendo en cuenta que la población a la que se le aplica el instrumento no ha tenido ningún acercamiento al tipo de problemas como los que les propone la actividad.

Sumado a la solicitud de explicación o justificación del porqué de sus elecciones o respuestas, cuando el estudiante puede estar acostumbrado a no tener que justificar. A continuación, se describen brevemente las actividades.

La **Actividad 1** tiene como contexto la compra de un monopatín. En este reto el estudiante requiere únicamente realizar operaciones de sumas y restas, pero tiene que hacer comparaciones entre diferentes valores y tomar decisiones. Se anexa una pregunta con relación a la compra de un equipo de protección para patinar y esta pregunta hace parte en el mismo contexto.

El reto azul. El primer problema es geométrico, no requiere conocimientos previos, solo comprender lo que la situación le solicita y activar la visualización. El segundo problema, parte de una situación gráfica y requiere realizar operaciones aritméticas para justificar la respuesta. El tercer problema también es geométrico, pero cambia que su enunciado es textual y requiere de los estudiantes la interpretación de la información y su posterior análisis para entender cuál es el patrón regular, y así determinar la solución.

En la **Actividad 2** el reto naranja tiene como contexto la construcción de un garaje. Inicia con una pregunta sencilla de visualización, luego se pide hallar el área del tejado partiendo de dos representaciones gráficas que el estudiante debe interpretar y determinar lo solicitado utilizando procesos aritméticos, para lo que se requiere calcular una longitud utilizando el teorema de Pitágoras. En la tercera pregunta se quiere que el volumen de material utilizado no exceda un valor determinado, y utilizando las dimensiones entregadas en una representación gráfica avanzar hacia el máximo borde posible alrededor del garaje.



Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Actividad 2

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.
Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

GARAJE.

La gama básica de un fabricante de garajes incluye modelos de una sola ventana y una sola puerta. Jorge elige el siguiente modelo de la gama básica.

A continuación, se muestra la posición de la puerta y la ventana

Prof. Juan Samuel Rangel L 1

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 1

Las siguientes ilustraciones muestran distintos modelos básicos vistos desde la parte posterior. Solo una de las ilustraciones corresponde al modelo anterior elegido por Jorge. **¿Qué modelo eligió Jorge?** Dibuja en tu hoja de trabajo el modelo A, B C o D.

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

El tejado esta formado por dos secciones rectagulares identicas. Los planos siguientes muestran las dimensiones, en metros, del garaje elegido por Jorge. **Calcule el área de la superficie total del tejado.**

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L 2

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 3

Jorge piensa colocar el piso de su garaje utilizando cemento. La placa de cemento a colocar será de un tamaño mayor de la base del garaje, de modo que quedará un borde de igual anchura a su alrededor. Jorge quiere que la placa de cemento tenga 10 cm de profundidad y **no quiere** usar más de 4 metros cúbicos de cemento. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener el borde?

a. 40 cm
b. 60 cm
c. 80 cm
d. 140 cm

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Natalia tiene varios cubos de plástico y los acomodó dentro de una pecera cúbica de cristal, tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos más necesita para llenar la pecera por completo?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L 3

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

PREGUNTA 2

15 personas ordenaron cada una un helado. El pedido fue: Cinco helados de vainilla, cuatro de frutos rojos, tres de naranja, dos de limón y uno de mango. Además, como extra pidieron: 5 galletas, cuatro fresas, 3 barras de chocolate, dos dulces y una sombrilla. Todos pidieron un helado diferente y con sólo un producto extra. Para que los helados sean diferentes, ¿cuál de las siguientes combinaciones **no** es posible?

(A) Vainilla y sombrilla (B) Frutos rojos y fresa (C) Naranja y barra de chocolate (D) Limón y dulce (E) Mango y galleta

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

En la lista de números 3, 8, 13, 18, …, 98, hay 20 números, y cada número después del primero es cinco más que el número anterior. Todos los números se adicionan para obtener la suma. ¿Cuál es el **dígito** en las unidades en la suma que se obtiene?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional responder en la hoja anexa

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiria?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Prof. Juan Samuel Rangel L 4

Gráfica 5-8 Actividad 2

El primer problema del reto azul es geométrico y pone a aprueba la visualización. El segundo problema requiere formar diferentes arreglos con las condiciones del problema y determinar cuál de las opciones de respuesta no es posible. En el tercer problema se solicita al estudiante realizar la suma de una sucesión de números de las cuales se entregan solo una parte de ellos.

La **Actividad 3** tiene un reto naranja que utiliza como contexto el control de calidad en dos empresas que fabrican dispositivos electrónicos. Requiere de los estudiantes un buen manejo de los porcentajes, la regla de tres simple y relaciones de proporcionalidad directa.

Actividad 3

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.
Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.
La empresa EMPW fabrica dos tipos de dispositivos electrónicos: Reproductor de video y reproductor de audio. Los reproductores se prueban al finalizar la producción diaria y los que presentan fallas se retiran y se envían a reparar.

A continuación, se presenta una tabla que resume el control al final del día:

Tipo de dispositivo	Numero de dispositivos fabricados al día	Porcentaje medio de dispositivos defectuosos al día
Audio	3000	5%
Video	9000	3%

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones ***sobre la produccion diaria de la empresa EMPW*** ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo ≪ *SI* ≫ o ≪ *NO* ≫ según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
Un tercio de los dispositivos fabricados diariamente son de video.	Si/No
En cada lote de 100 reproductores de video fabricados habrá exactamente 3 defectuosos.	Si/No
De la producción total diaria (reunidos audio y video) el porcentaje medio de reparaciones es del 8%	Si/No

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Una de las personas que realiza las pruebas de calidad en EPMW hace a siguiente afirmación: "*En un día, en promedio se envían a reparar más reproductores de video que de audio*" Indica si la afirmación es o no correcta y justifica matemáticamente.

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

La empresa *SRTM* también fabrica reproductores de video y reprouctores de audio. Los reproductores de la empresa *SRTM* se prueban al finalizar los ciclos de producción diaria y los defectuosos se retiran y se envían a reparar. Las siguientes tablas comparan el número medio de reproductores de cada tipo que se fabrican al día y el porcentaje medio de reproductores defectuosos al día correspondientes a las dos empresas.

Observa las tablas que comparan a empresa EMPW *con la empresa SRTM*

Empresa	Número medio de dispositivos de audio fabricados al día.	Porcentaje medio de dispositivos defectuosos al día
Empresa EMPW	3000	5%
Empresa SRTM	8000	4%

Empresa	Número medio de dispositivos de video fabricados al día.	Porcentaje medio de dispositivos defectuosos al día
Empresa EMPW	9000	3%
Empresa SRTM	4000	2%

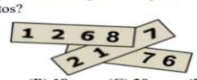
¿Cuál de las dos empresas EMPW o SRTM presenta el total de reparaciones más bajo de dispositivos defectuosos?
En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

En cada uno de tres trozos de papel, se escribe un número entero de cuatro dígitos. Luego se disponen los trozos de papel de tal manera que tres dígitos quedan cubiertos como se muestra en la figura. La suma de los tres números enteros de cuatro dígitos es 12041. ¿Cuál de las siguientes opciones es el resultado de la suma de los tres dígitos cubiertos?



(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 E(24)

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Un tendero empaco en 52 cajas con el mismo número de naranjas en cada una y le sobraron 16 naranjas. Si hubiera empacado 2 naranjas menos en cada caja, habría utilizado 60 cajas y no le sobraría ninguna naranja ¿Cuántas naranjas tenía el tendero?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

En la suma que se muestra, cada letra representa un dígito, letras diferentes representan dígitos diferentes y ningún dígito inicial puede ser igual a 0, de modo que **ROTOR**, **LEVEL** y **STATS** son números de cinco dígitos.

¿Cuál es el mayor valor posible para **STATS** en la suma que se muestra, dado que **V = 1**?

$$\begin{array}{r} \mathbf{ROTOR} \\ +\ \mathbf{LEVEL} \\ \hline \mathbf{STATS} \end{array}$$

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional responder en la hoja anexa

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiría?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Gráfica 5-9 Actividad 3

Además, requiere que el estudiante interprete la información proporcionada en tablas que establecen el contexto del problema y así realizar la comparación de los valores de producción entre dos fábricas de artículos electrónicos.

El primer problema del reto azul presenta una suma en la que faltan algunos valores que se pueden determinar siguiendo las reglas de una suma de números naturales. El segundo problema del reto azul es el reparto de un conjunto de naranjas realizado de dos formas diferentes y con esta información el estudiante debe determinar la cantidad inicial de naranjas, y el tercer problema es un criptograma relacionado con una suma de diferentes dígitos.

La Actividad 4. El reto naranja utiliza como contexto la compra de un apartamento. La primera pregunta pide describir cómo encontrar el área del apartamento utilizando un procedimiento que requiera tomar solo cuatro medidas. La segunda pregunta pide hallar el área del dormitorio, sin que el plano dé las medidas, pero como escala se indica que un cm es equivalente a un metro, por último, se pide recubrir la terraza con baldosas de una medida en particular y el estudiante debe determinar el número de baldosas aproximado y responder cuántas cajas deberán comprarse.

El primer problema del reto azul es geométrico y requiere visualizar el recorte de cuadrados de mayor tamaño de una pieza rectangular. El segundo es un problema de reparto de unos chocolates, en diferentes proporciones. El tercer problema, requiere del estudiante apoyarse en la gráfica de un rectángulo con algunas medidas interiores y compuesto de algunos cuadrados para determinar el área total.

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Actividad 4

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y, aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.

Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

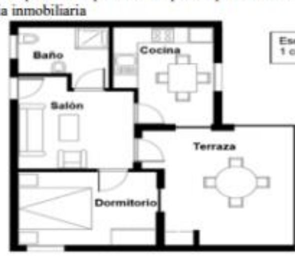
Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

COMPRA DE UN APARTAMENTO

Este es el plano del apartamento que los padres de Jorge quieren comprar en una agencia inmobiliaria



Escala:
1 cm representa 1 m

Prof. Juan Samuel Rangel L 1

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

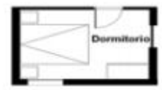
PREGUNTA 1

Para calcular el área total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular el área de cada una, calcular el área de las paredes, y sumar. No obstante, existe un método más eficaz para calcular el área total en el que sólo tienes que medir cuatro longitudes. Describe y realiza el procedimiento utilizando las cuatro longitudes necesarias para calcular el área total.

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Utiliza el siguiente plano para calcular el área interna del suelo del dormitorio redondeando a 0.1 metros cuadrados (m^2) más próximo.

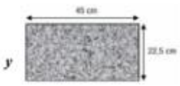


Escala:
1 cm representa 1 m

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

El suelo embaldosado de la terraza está gastado y debe cambiarse. Las nuevas baldosas elegidas por los padres de Jorge miden 22,5 cm por 45 cm (como las de la figura) y se venden en cajas de 30 baldosas. ¿Cuántas cajas de baldosas hay que comprar para recubrir toda la terraza?



En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta.

Prof. Juan Samuel Rangel L 2

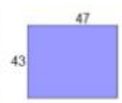
Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Sandra recorta cuadrados de papel de la siguiente manera: Comienza con un rectángulo de papel de 43 × 47, corta el papel para quitar el cuadrado más grande posible. Luego, con la pieza rectangular restante, la vuelve a cortar para quitar el cuadrado más grande posible. Sandra continúa haciendo esto hasta que la pieza restante sea un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados tiene Sandra al final y de qué tamaño son?



En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

Danilo tiene una bolsa de 120 chocolates. El lunes comió la décima parte. El martes comió la novena parte de lo que le quedaba, el miércoles la octava parte de lo que le quedaba, el jueves la séptima parte de lo que le quedaba, de igual forma siguió comiendo dulces los días siguientes. ¿Cuántos dulces le quedaban el domingo?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

Prof. Juan Samuel Rangel L 3

Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

El rectángulo grande se forma con cuadrados de diferentes tamaños. El área de un cuadrado pequeño es 1 cm^2. ¿Cuál es el área del rectángulo grande?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional responder en la hoja anexa

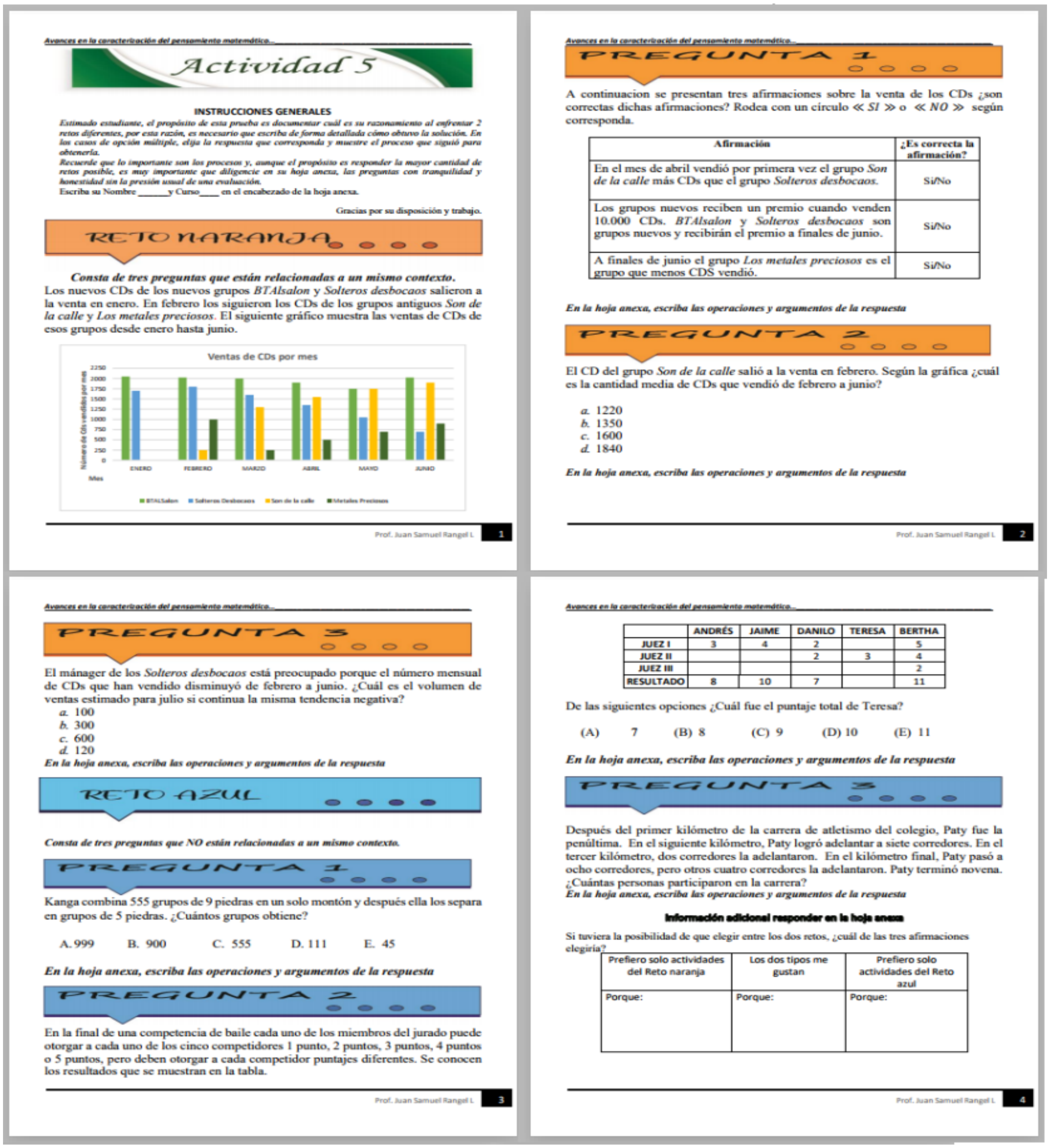
Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiría?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Prof. Juan Samuel Rangel L 4

Gráfica 5-10 Actividad 4

La Actividad 5. El reto naranja tiene como contexto una gráfica en la que se muestra el número de CDs vendidos en el mes por cuatro grupos musicales. La primera pregunta requiere del estudiante observar la gráfica e interpretar los números que se obtienen, en otras preguntas se requiere sumar y comparar los valores entre los grupos.



Avances en la caracterización del pensamiento matemático...

Actividad 5

INSTRUCCIONES GENERALES

Estimado estudiante, el propósito de esta prueba es documentar cuál es su razonamiento al enfrentar 2 retos diferentes, por esta razón, es necesario que escriba de forma detallada cómo obtuvo la solución. En los casos de opción múltiple, elija la respuesta que corresponda y muestre el proceso que siguió para obtenerla.

Recuerde que lo importante son los procesos y, aunque el propósito es responder la mayor cantidad de retos posible, es muy importante que diligencie en su hoja anexa, las preguntas con tranquilidad y honestidad sin la presión usual de una evaluación.

Escriba su Nombre ______y Curso____ en el encabezado de la hoja anexa.

Gracias por su disposición y trabajo.

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

Los nuevos CDs de los nuevos grupos *BTAlsalon* y *Solteros desbocaos* salieron a la venta en enero. En febrero los siguieron los CDs de los grupos antiguos *Son de la calle* y *Los metales preciosos*. El siguiente gráfico muestra las ventas de CDs de esos grupos desde enero hasta junio.

Ventas de CDs por mes

Prof. Juan Samuel Rangel L. 1

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones sobre la venta de los CDs ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo « *SI* » o « *NO* » según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
En el mes de abril vendió por primera vez el grupo *Son de la calle* más CDs que el grupo *Solteros desbocaos.*	Si/No
Los grupos nuevos reciben un premio cuando venden 10.000 CDs. *BTAlsalon* y *Solteros desbocaos* son grupos nuevos y recibirán el premio a finales de junio.	Si/No
A finales de junio el grupo *Los metales preciosos* es el grupo que menos CDS vendió.	Si/No

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

El CD del grupo *Son de la calle* salió a la venta en febrero. Según la gráfica ¿cuál es la cantidad media de CDs que vendió de febrero a junio?

a. 1220
b. 1350
c. 1600
d. 1840

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Prof. Juan Samuel Rangel L. 2

PREGUNTA 3

El mánager de los *Solteros desbocaos* está preocupado porque el número mensual de CDs que han vendido disminuyó de febrero a junio. ¿Cuál es el volumen de ventas estimado para julio si continua la misma tendencia negativa?

a. 100
b. 300
c. 600
d. 120

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas a un mismo contexto.

PREGUNTA 1

Kanga combina 555 grupos de 9 piedras en un solo montón y después ella los separa en grupos de 5 piedras. ¿Cuántos grupos obtiene?

A. 999   B. 900   C. 555   D. 111   E. 45

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 2

En la final de una competencia de baile cada uno de los miembros del jurado puede otorgar a cada uno de los cinco competidores 1 punto, 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos o 5 puntos, pero deben otorgar a cada competidor puntajes diferentes. Se conocen los resultados que se muestran en la tabla.

Prof. Juan Samuel Rangel L. 3

	ANDRÉS	JAIME	DANILO	TERESA	BERTHA
JUEZ I	3	4	2		5
JUEZ II			2	3	4
JUEZ III					2
RESULTADO	8	10	7		11

De las siguientes opciones ¿Cuál fue el puntaje total de Teresa?

(A) 7   (B) 8   (C) 9   (D) 10   (E) 11

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

PREGUNTA 3

Después del primer kilómetro de la carrera de atletismo del colegio, Paty fue la penúltima. En el siguiente kilómetro, Paty logró adelantar a siete corredores. En el tercer kilómetro, dos corredores la adelantaron. En el kilómetro final, Paty pasó a ocho corredores, pero otros cuatro corredores la adelantaron. Paty terminó novena. ¿Cuántas personas participaron en la carrera?

En la hoja anexa, escriba las operaciones y argumentos de la respuesta

Información adicional responder en la hoja anexa

Si tuviera la posibilidad de que elegir entre los dos retos, ¿cuál de las tres afirmaciones elegiría?

Prefiero solo actividades del Reto naranja	Los dos tipos me gustan	Prefiero solo actividades del Reto azul
Porque:	Porque:	Porque:

Prof. Juan Samuel Rangel L. 4

Gráfica 5-11 Actividad 5

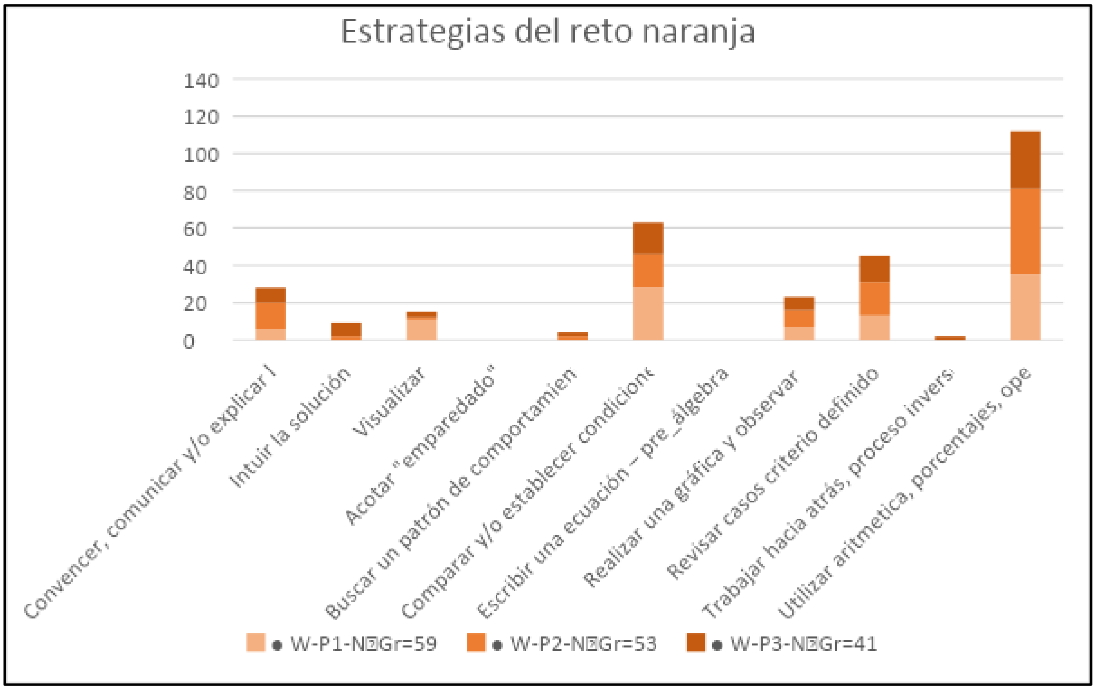
En la segunda pregunta del reto naranja se pretende que el estudiante identifique los valores para un grupo particular y hacer el promedio. En la tercera pregunta, se pretende que el estudiante visualice una línea de tendencia negativa que le permita determinar o proyectar el número de CDs es vendidos al siguiente mes.

La primera pregunta del reto azul hace referencia a los puntajes otorgados por tres jurados con una condición particular, se ofrece una tabla de puntuaciones incompleta desde la que el estudiante debe deducir la respuesta. La tercera pregunta hace referencia a la descripción de una carrera en la que la participante en algunos momentos logra adelantar corredores y en otros momentos es adelantada por otros, y al final se requiere determinar la cantidad de personas que participan en la carrera.

Para el análisis de esas actividades se utiliza como plantilla el conjunto de estrategias encontradas en la aplicación con estudiantes en entrenamiento. Esta información sirve de base para la revisión, lectura y relectura de los documentos observando cuáles estrategias se activan con cada uno de los retos. A continuación, se presentan los resultados.

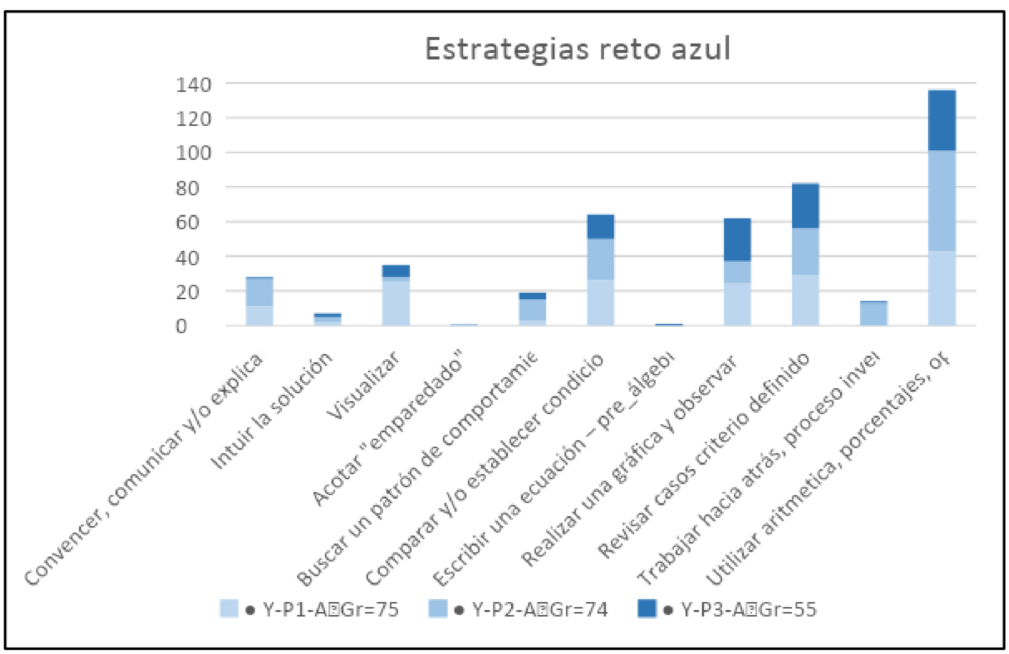
5.3.2. Análisis consolidado de las estrategias utilizadas

En esta sección se pueden presentar los resultados de cada una de las actividades, pero, se decide presentar el consolidado general, primero, porque permite resumirlos y están en correlación con lo observado de forma individual y, segundo, porque el propósito general es comparar los dos conjuntos de retos, y de esta forma se muestra un panorama general de las cinco actividades. En primer lugar, se separan las estrategias utilizadas en cada reto.



Gráfica 5-12 Consolidado de estrategias reto Naranja

Se observa en la Gráfica 2 como el uso de la aritmética y los porcentajes, seguido de la comparación y la revisión de casos son el centro de las estrategias usadas en la solución del reto naranja.



Gráfica 5-13 Consolidado de estrategias reto Azul

En el reto azul, se observa en la Gráfica 3 cómo el uso de la aritmética y los porcentajes, la revisión de casos, realizar una gráfica o representación, la comparación y la revisión de casos son el centro de las estrategias utilizadas en la solución del reto azul.

¿Qué se observa desde el desarrollo del pensamiento matemático?

La cantidad de estrategias utilizadas determina que los retos azules permiten mayor uso de las estrategias, en el consolidado puede observarse que los retos naranjas activan 264 estrategias en comparación con 449 estrategias de los retos azules. La activación de una estrategia de forma aislada permite acercarse a las formas de entender de los estudiantes, pero es su uso reiterado que permite determinar esas formas de pensar relacionadas a los diferentes tipos de reto.

¿Qué se observa desde la teoría de las competencias?

Como se ha manifestado en la revisión de las actividades con estudiantes en entrenamiento, principalmente se activan las competencias que se relacionan con la *habilidad de preguntar y responder de y por medio de las matemáticas*. **El uso de diferentes estrategias es indicador de que se activa la competencia de *solución de problemas***; cuando se solucionan problemas utilizando las matemáticas se activa el *modelamiento,* como es el caso de las soluciones presentadas por los estudiantes de aula regular. Además, las decisiones las toma con referencia a la revisión de casos teniendo un criterio definido y esto hace que el estudiante se cuestione frente a los problemas y elabore posibles respuestas al respecto, como lo es encontrar un patrón de comportamiento, es entonces que la competencia del *pensamiento matemático* está presente. Finalmente, cuando se elabora una justificación como es el caso de la estrategia de convencer, comunicar y/o argumentar, se avanza en el *razonamiento matemático*.

Por otra parte, puede observarse que el **grado de cobertura** de la competencia de *solución de problemas*, medido en relación con el número de estrategias que se activan es mayor en el reto azul (N=449) que en el reto naranja (N=264).

El **radio de acción** se observa con relación a los diferentes dominios que se utilizan para solucionar los problemas; entonces los retos naranjas están más enfocados al dominio de la aritmética y temas específicos de la matemática escolar, lo que es de esperarse porque su finalidad es medir el grado de avance en los diferentes currículos internacionales. Esta observación es consistente con la proporción de uso de las estrategias aritméticas que es P= 0.372, seguida de Comparar y/o establecer condiciones desde el problema con P=0.209. Por su parte los retos azules, pueden atender a temas curriculares, pero también extenderse a la teoría de números, geometría, el conteo, la lógica y, en general, a la matemática más allá de los currículos. En este reto también se activan las estrategias: *utilizar aritmética, porcentajes y operaciones básicas* con un valor P=0,302 y luego, *revisar casos con un criterio definido* con P=0,182, las demás estrategias también son utilizadas y en conjunto su volumen es mayor.

En los dos tipos de retos los estudiantes pueden dar cuenta del **nivel técnico** de la competencia, ya sean la intención de especializar – generalizar, en la aplicación de teoremas o propiedades o en los cambios de representación. Sin embargo, como se ha mencionado, dado un radio de acción más amplio de los retos azules porque no pretenden entrenar un tipo de estrategia particular sino incentivar a la creatividad y la generación de estrategias novedosas para solucionar los problemas propuestos. Entonces, desde la misma intencionalidad de los retos de color azul, son estos los que activan un mayor número de estrategias.

Es importante insistir en que el enlace entre las dos teorías son las estrategias utilizadas. Pero ¿Serán todas las estrategias consideradas igualmente relevantes? O ¿Algunas son utilizadas por algunos estudiantes en particular? Para dar respuesta a estas preguntas nuevamente se utiliza el discriminante. Al realizar la revisión de la proporción de uso y el discriminante de cada una de las actividades, se obtienen siempre con los mejores puntajes las estrategias: (1) Usar aritmética porcentajes u operaciones básicas, (2) Comparar, (3) Revisar casos, (4) Graficar o usar representación de apoyo, (6) Convencer -

Argumentar- Comunicar y (7) Visualizar. A continuación, se presenta el consolidado general con relación a la proporción de uso y el índice de discriminación de las estrategias, utilizadas en las cinco actividades en conjunto.

Tabla 5-17 Listado de estrategias, proporción de uso y discriminante

Estrategias	P	D
Usar aritmética porcentajes y operaciones básicas	1,000	0,963
Comparar	0,523	0,436
Revisar casos	0,502	0,593
Graficar o usar representación de apoyo	0,350	0,156
Convencer – Comunicar- Argumentar	0,230	0,247
Visualizar	0,218	0,074
Buscar un patrón de comportamiento	0,095	0,074
Trabajar hacia atrás	0,070	0,123
Intuir la solución	0,062	0,008
Acotar "emparedado"	0,004	0,008
Escribir una ecuación - pre álgebra	0,004	0,008

La estrategia con mayor proporción de aplicación es **usar aritmética porcentajes u operaciones básicas** y al tener un buen valor de discriminación, puede decirse que los estudiantes con mayor desarrollo del pensamiento matemático también la utilizan en mayor proporción.

Por su parte, la estrategia **comparar y revisar casos** es utilizada en una proporción menor y su índice de discriminación permite separar aquellos estudiantes que utilizan la aritmética, determinando unos con mayor desarrollo del pensamiento matemático, medido en el número de estrategias que se utilizan, porque utilizan una estrategia adicional en su repertorio.

En ese sentido, la estrategia **convencer, comunicar y usar el lenguaje** es usada por pocos estudiantes y aunque su índice de discriminación bajo (D=0.23) permite considerarla una estrategia utilizada por una menor población de estudiantes con un mayor grado del desarrollo del pensamiento matemático, ~~y que~~

es un resultado coherente con lo obtenido de las actividades aplicadas con los con los estudiantes en entrenamiento.

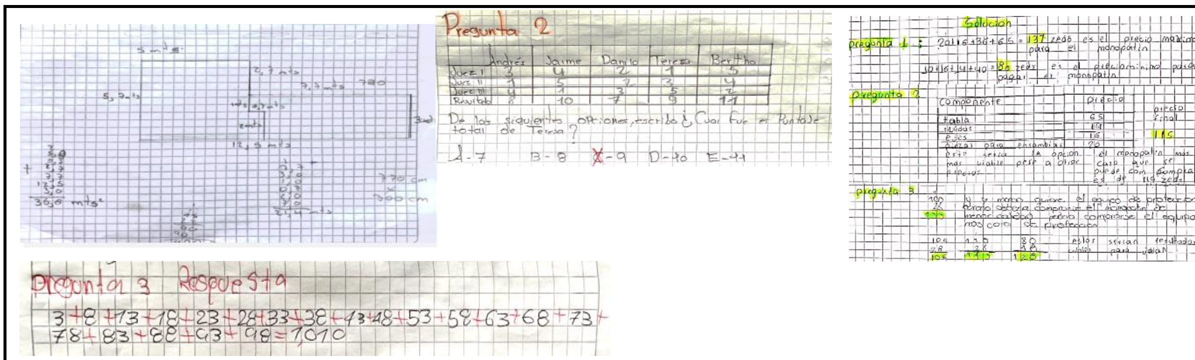
La estrategia **graficar: representación de apoyo,** es una estrategia utilizada con relativa frecuencia (P=0.35), pero es utiliza indiferentemente por todos los estudiantes y es preferible no tomarlo como indicador del desarrollo del pensamiento matemático debido a su bajo índice de discriminación (D=0.15).

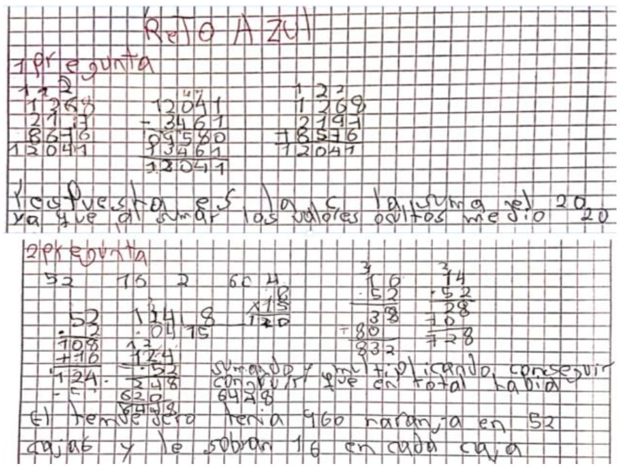
Las demás estrategias se utilizan con poca frecuencia y también su índice de discriminación es muy bajo, por esa razón, se dejan por fuera de la siguiente sección. A continuación, se presentan las estrategias que son más relevantes con sus respectivas imágenes de la aplicación empírica de la actividad realizada con los estudiantes.

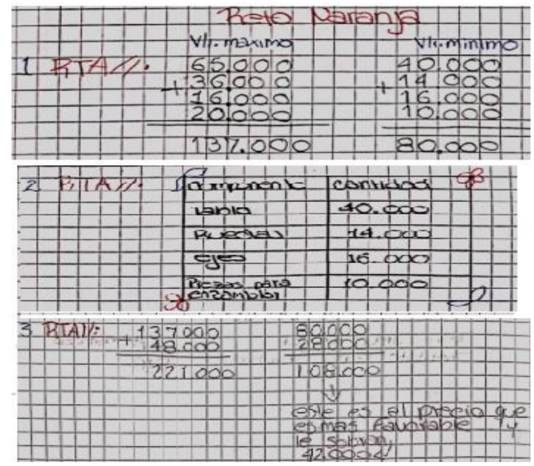
Usar aritmética porcentajes operaciones básicas

Por alguna razón es la primera estrategia en la que piensan algunos estudiantes, se quiere operar con los datos del problema así suceda que en muchos casos no tenga sentido.

Tabla 5-18 Ejemplos de la estrategia *Usar aritmética porcentajes operaciones básicas*





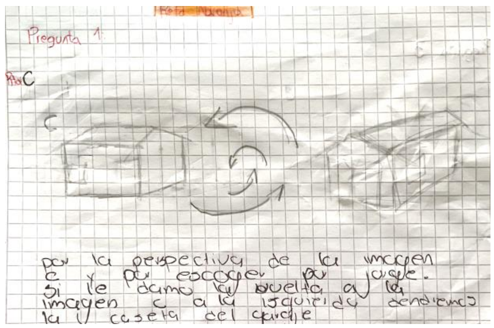


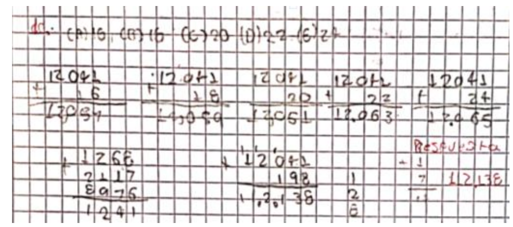
Sin embargo, esta es la estrategia más utilizada para dar solución a las actividades propuestas y se refiere al uso de operaciones básicas, el cálculo de porcentajes, promedios, radicales entre otros. Particularmente, los retos naranjas están muy enfocados hacia el uso y evaluación de operaciones aritméticas. La diferencia con los retos azules es que el trabajo aritmético es importante pero no siempre permite dar respuesta o solución, siempre requiere activar más de una estrategia de trabajo.

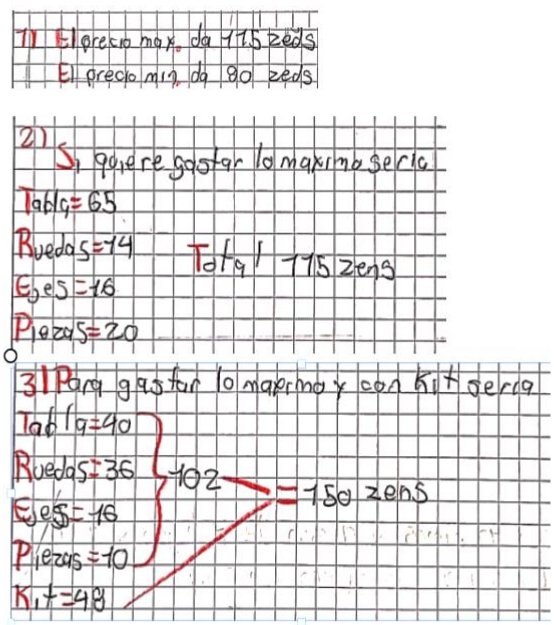
Comparar

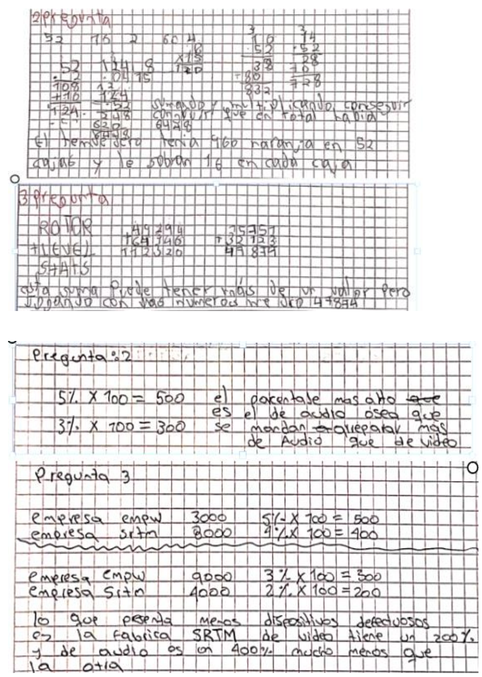
Es una estrategia que no es tan comúnmente utilizada, pero permite un buen grado de discriminación, y hace referencia a vigilar las condiciones del problema y estar comparando los resultados para avanzar. No es propiamente un mirar atrás, porque no se realiza al final de la solución, sino que permite al estudiante realizar controles continuos entre posibles soluciones o aplicar estrategias en las que se abren varias posibilidades. Es una estrategia útil para solucionar los dos tipos de retos.

Tabla 5-19 Ejemplos de la estrategia Comparar





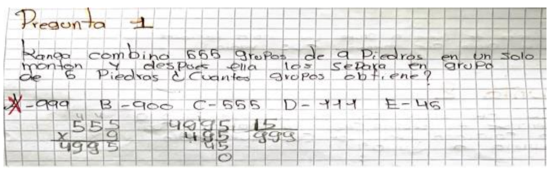
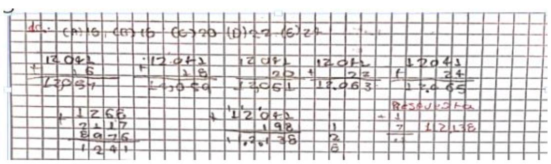
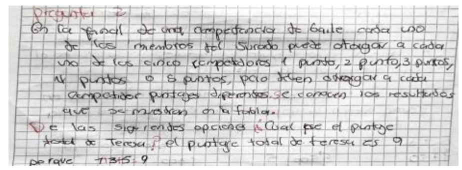
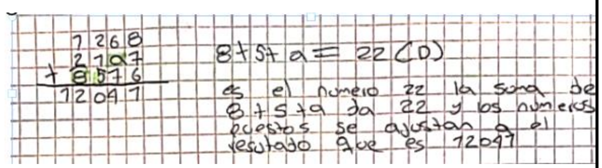




Revisar casos

Una de las estrategias más potentes, utilizada en mayor proporción en los retos azules, es la revisión de casos utilizada con gran frecuencia en los dos tipos de retos. Lo más importante es que no es una revisión aleatoria, por el contrario, es realizada con criterio, y atendiendo a las condiciones del problema y es posible que se requiera algún tipo de entrenamiento para realizarla, porque puede acompañarse de la estrategia de comparar. Los estudiantes utilizan la revisión de casos para entender o para avanzar en alguna hipótesis que ellos tienen sobre la solución o condiciones de los problemas.

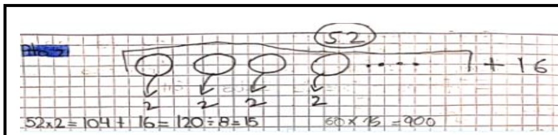
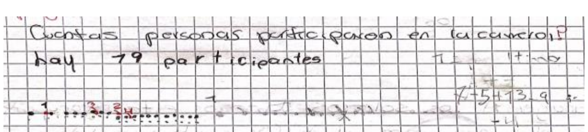
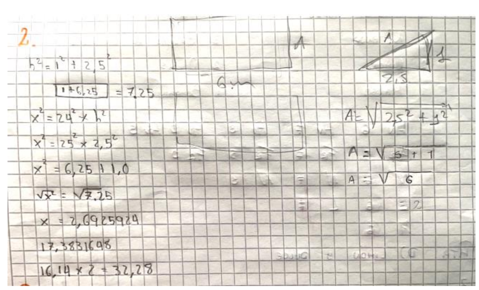
Tabla 5-20 Ejemplos de la estrategia Revisar casos

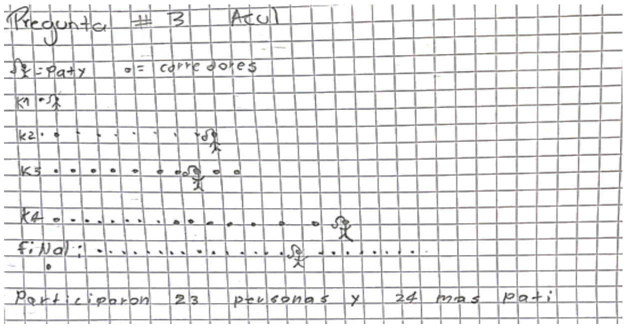
	
 	 

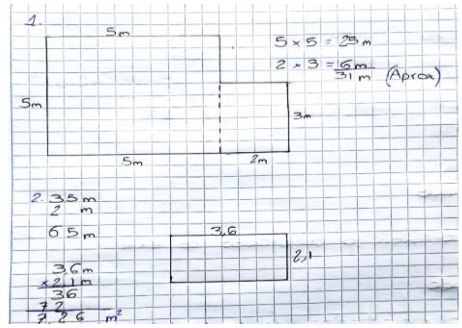
Graficar -representación de apoyo

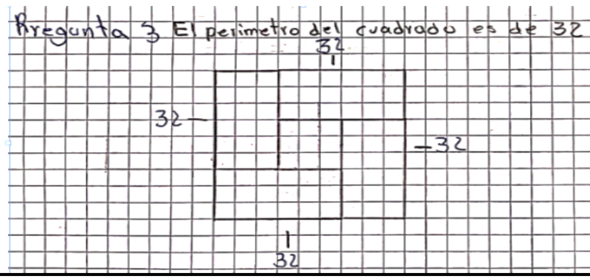
Es una estrategia en la que los estudiantes suelen realizar gráficas o representaciones que les permiten entender y avanzar en la solución del problema. No tiene un buen índice de discriminación, sin embargo, es más utilizada en los retos azules que en los retos naranja. Para algunos estudiantes la representación gráfica les permite visualizar y razonar desde ella o combinar con otra estrategia para lograr la solución.

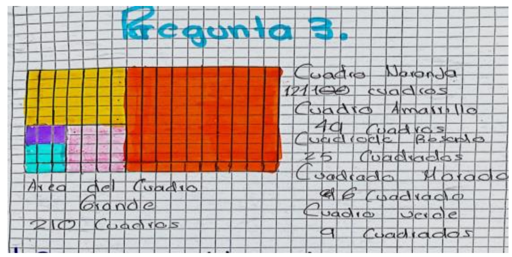
Tabla 5-21 Ejemplos de la estrategia Graficar -representar de apoyo





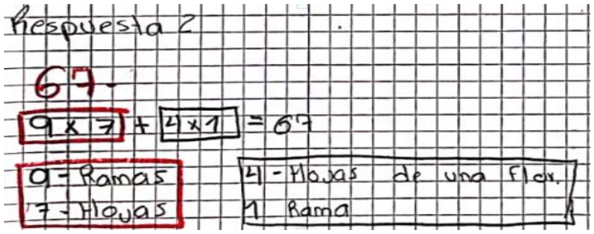


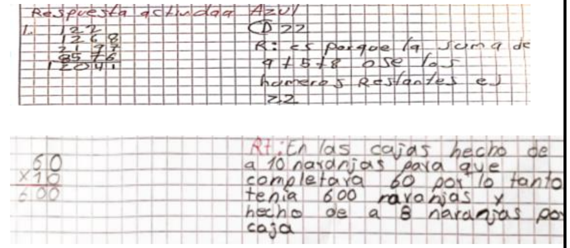


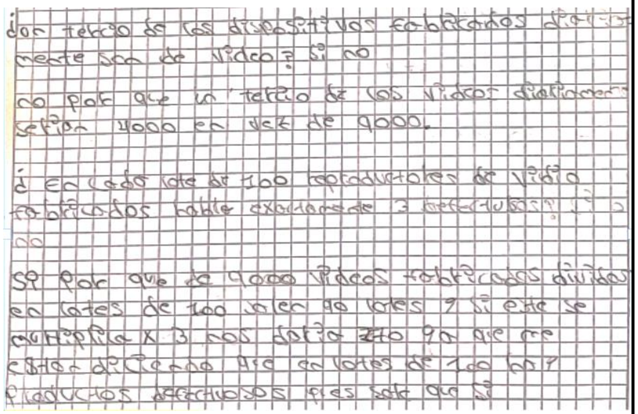
Convencer - usar del lenguaje

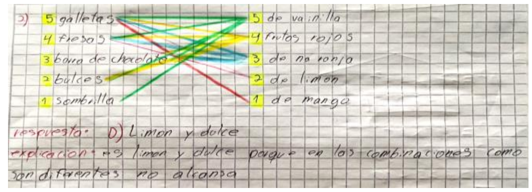
Esta estrategia referencia a aquellos estudiantes que escriben o comunican los argumentos que complementan su solución o que parece que dialogaran con el problema y sienten la necesidad de dar cuenta de lo que hicieron para obtener su solución. No siempre los argumentos son del todo correctos, pero hacen sentir en los estudiantes una confianza adicional que les permite hablar y exponer sus ideas con libertad y determinación. Como no es tan frecuente puede ser utilizada solo por los estudiantes que tienen alto desarrollo del pensamiento matemático en comparación con sus compañeros y en relación con las actividades propuestas.

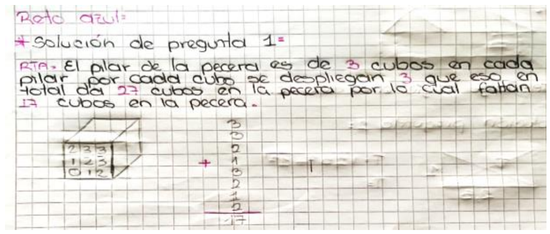
Tabla 5-22 Ejemplos de la estrategia Convencer - Comunicar





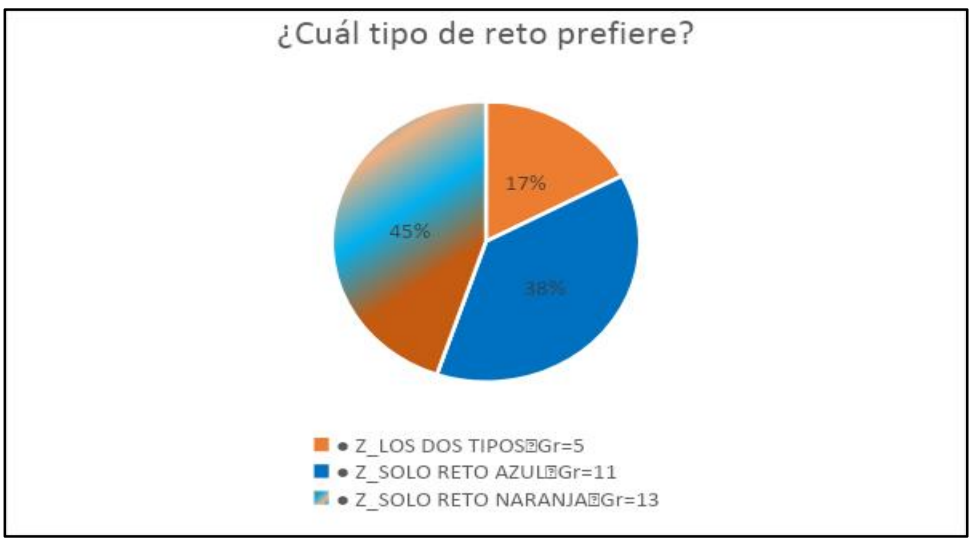






5.3.3. Resultados de percepción sobre el tipo de reto

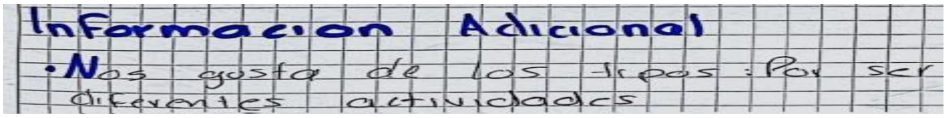
En esta sección se presenta los resultados a la pregunta ¿cuál es el tipo de reto que prefiere? como se presenta en la Gráfica 5-14.

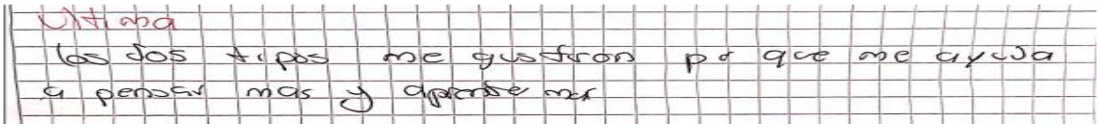


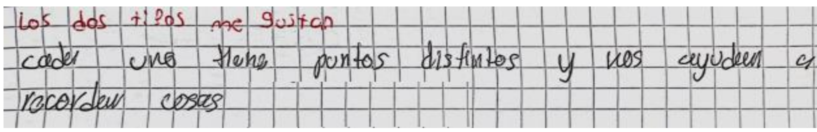
Gráfica 5-14 Proporciones de preferencia de los retos

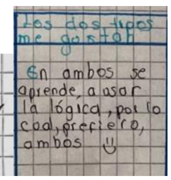
Muchos de los estudiantes prefieren **los dos tipos de retos**, pero si aprecian que son diferentes, que los hacen pensar de formas distintas y les permiten aprender más. Sin embargo, la sensación de dificultad es la que ocasiona que los estudiantes prefieran uno más que el otro.

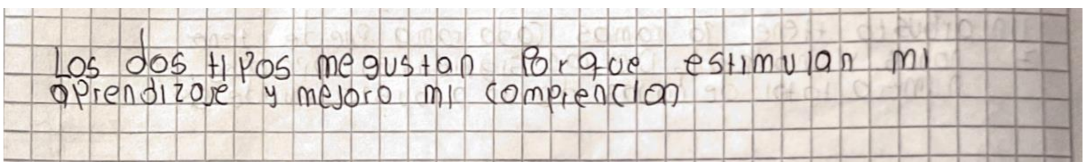
Tabla 5-23 Justificaciones de la preferencia de los dos tipos de reto

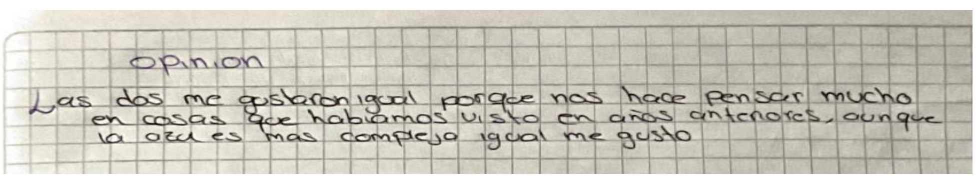












Se prefiere **Solo el reto azul**. En la mayoría de los casos los estudiantes prefieren el reto azul cuando sienten que pueden resolverlo con mayor facilidad en comparación con el reto naranja. Sin embargo, algunos estudiantes sienten que esta actividad es más dinámica y divertida, que les invita a pensar en formas creativas no repetitivas.

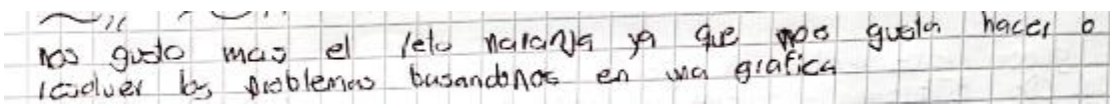
Tabla 5-24 Justificaciones de la preferencia del reto azul

3 las azules para son mas faciles y entendibles
El reto que mas me gusto fue el azul
Prefiero la actividad del Reto Azul porque seme hizo mas facil de comprender y resolver
el azul me gusto mas porque no estaba tan complicado Prefiero solo actividades del reto Azul porque. Porque se nos hacen más facil. Reto Azul lo prefiero porque es más divertido Nos gusta el reto porque son mas didacticos Reto Azul Preferimos el azul porque se nos hizo mas facil

Solo el reto naranja. Algunos estudiantes prefieren sólo el reto naranja porque los problemas les parecen más fáciles o porque consideran que el enunciado les proporciona más información.

Tabla 5-25 Justificaciones de la preferencia del reto Naranja

Prefiero sólo las actividades del Reto naranja Me parecieron más fáciles de resolver a mi y a mi compañera el Azul se nos dificulto y el naranja fue mejor. Porque: son mas entendibles y más interactivas.	Prefiero solo actividades del Reto Naranja. porque: me parece un buen metodo de matematica. Nosotros preferimos el reto naranja por que es mas easy Son entretenidos


nos gusto mas el reto naranja ya que nos gusta hacer o resolver los problemas basandonos en una grafica

Aunque los dos tipos de retos son importantes para los estudiantes, el criterio que utilizan los estudiantes para elegir cuál le gusta, es la facilidad, otros porque los hace pensar, aprenden y usan la lógica. Entonces, los retos azules pueden quedar en desventaja debido a que son problemas que no ofrecen gran cantidad de información y que les invita a pensar de maneras diferentes a las que están acostumbrados en sus clases regulares. Sin embargo, muchos estudiantes valoran el hecho de poder pensar libremente y exponer sus ideas con relación a los problemas.

- **Conclusiones del capítulo 5**

El análisis de la ronda final de olimpiadas permitió identificar 21 estrategias asociadas a la solución de problemas de este tipo, esta rejilla de estrategias fue refinada a un grupo de 13 estrategias obtenidas con la aplicación piloto de las actividades con estudiantes en entrenamiento. En los dos casos se observó cómo es posible establecer una relación entre las estrategias utilizadas y el desarrollo del pensamiento matemático y el avance en la competencia de solución de problemas. Luego con la aplicación con estudiantes de aula regular el número de estrategias se redujo a 11:

Usar aritmética porcentajes y operaciones básicas, Comparar, Revisar casos, Graficar o usar representación de apoyo, Convencer – Comunicar- Argumentar, Visualizar, Buscar un patrón de comportamiento, Trabajar hacia atrás, Intuir la solución, Acotar "emparedado" y Escribir una ecuación - pre álgebra.

¿Qué cambió? La población, el tipo de retos y el número de estrategias que se utilizaron finalmente y la cantidad de ellas en cada tipo de reto. ¿Que no cambió? De las 21 estrategias iniciales, se mantuvieron presentes estas 11 y fueron utilizadas por los estudiantes en los dos tipos de reto. Teniendo como referente el número de estrategias se logró identificar avances en el desarrollo del pensamiento matemático y avances en el radio de acción, el grado de cobertura y el nivel técnico de la competencia de solución de problemas. Además, tal como lo había propuesto el grupo KOM, al activarse la competencia de solución de problemas, las competencias de modelación, razonamiento y pensamiento, también se activan.

Una conclusión importante es que el indicador que se tomó como referencia para evaluar las competiciones y las competencias es el número de estrategias. Para las dos teorías, un mayor número de estrategias activas es indicador de mejora.

Desde la definición de competencias la habilidad de solución de problemas se observa al activar las estrategias y en esta investigación, se ha prestado especial interés en el número de estrategias. Entonces, el grado de cobertura de la competencia de solución de problemas es mayor en la posibilidad de utilizar un mayor número de estrategias.

Desde las competiciones, el centro es la actividad de solucionar problemas y tener la posibilidad de activar un mayor número de estrategias es un indicador de que hay un avance significativo del desarrollo del pensamiento matemático. ¿Por qué?

Según Harel (2021), un estudiante en la solución de un problema activa sus formas de entender, que en esta investigación son las estrategias y el uso reiterado es un indicador de las formas de pensar. Pero además de eso, se pudo establecer que hay unas estrategias que se utilizan solo por estudiantes que tienen un mayor repertorio de ellas, y se puede decir que son estudiantes que tienen un mayor desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, se observa que la estrategia *Usar aritmética porcentajes y operaciones básicas* se usa en gran proporción, los estudiantes utilizan porcentajes, sumas, restas multiplicaciones, y en general, conocimientos asociados al currículo escolar, pero no ocurre lo mismo con la estrategia de *Convencer – Comunicar- Argumentar* que es utilizada por una menor parte de los estudiantes y que según los resultados corresponde a un indicador de mejora en el desarrollo del pensamiento matemático.

¿Qué puede decirse con relación a los dos tipos de reto?

Aparentemente la solución de problemas de tipo PISA y del tipo olimpiadas ocasiona que los estudiantes de aula regular generen las mismas once estrategias, pero, el número de estudiantes que las usan cambia según el tipo de reto y tal como se comprobó estadísticamente, existe una dependencia entre el tipo de problema y las estrategias que se utilizan. Entonces en la aplicación con estudiantes de aula regular los retos azules (tipo olimpiada) duplican en cantidad de estrategias a las usadas en los retos naranja (Tipo PISA).

Finalmente, los dos tipos de retos son importantes para los estudiantes quienes manifiestan que les gustan, pero el criterio de elección para el estudiante de aula regular es la facilidad, aunque se puede observar cómo los estudiantes se sienten más creativos al realizar retos del tipo olimpiada, pero les cuesta manejar el hecho que son situaciones a las que no se han enfrentado, que se salen de su rutina académica y que no permiten sumar restar o multiplicar datos, sino que requieren algo de creatividad e ingenio. Pero esta característica de los retos de olimpiada es importante y muchos estudiantes valoran el hecho de poder pensar libremente y exponer sus ideas. En general, al lograr entender, solucionar y justificar, cualquiera de los dos tipos de reto; los estudiantes, manifiestan satisfacción y alegría y se empoderan para continuar con esas preguntas que aún no saben cómo responderlas.

- **CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES: RELACIONES Y APORTES MUTUOS ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPETICIONES Y LA TEORÍA SOBRE COMPETENCIAS**

Con relación al modelo de competencias, uno de los referentes internacionales es el Dr. Mogens Niss y sus colaboradores (Niss, 2015; Niss & Højgaard, 2019; Niss, Bruder, Planas, Turner, y Villa-Ochoa, 2016), quienes han determinado lo que internacionalmente se considera como la competencia matemática y han influenciado el proyecto PISA. Principalmente, Niss Y Højgaard (2011) presentan el documento *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, que corresponde a la traducción al inglés del informe del grupo KOM del 2002. Para determinar la competencia matemática, el grupo KOM identifica ocho competencias centrales que conforman la competencia general, entrelazadas en forma de flor (Ver Figura 6-1). Así la competencia matemática se describe como la pericia y experticia de una persona que le permite el dominio eficaz e incisivo de aspectos esenciales de un campo, en particular de la matemática.

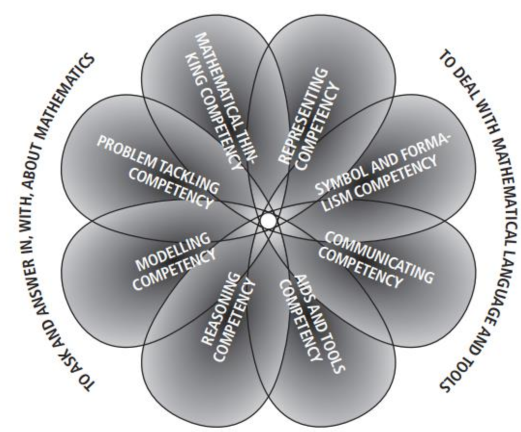


Figura 0-1 Flor de las ocho Sub competencias de la competencia matemática, Fuente: (Niss & Højgaard, 2011, p. 51).

En este sentido, Niss Y Højgaard (2011) proponen que estas sub-competencias están conectadas entre sí, pero cada una de ellas tiene su propia identidad y según los autores, ninguna de las competencias puede reducirse a las restantes. Entre las competencias se tiene “Problem Tackling competency”, que en NISS & Højgaard (2019) aparece como “Mathematical problem handling competency—posing and solving mathematical problems”, haciendo referencia a la solución de problemas.

En el modelo de Niss, la competencia de resolución de problemas es una sub-competencia de la “Mathematical competency”. Para los investigadores, la competencia matemática está conformada por ocho sub-competencias, dividido en dos grupos competencias encargadas de (I) preguntar y dar respuesta o (II) tratar con el lenguaje y las herramientas matemáticas. En el lado izquierdo de la flor en la Figura 1, se encuentra la Solución de problemas y, junto con la Modelación, dan cuenta de las respuestas matemáticas a cuestionamientos que puede provenir de un contexto intra o extra matemático. En particular, la Mathematical problem handling competency [posing and solving mathematical problems] permite solucionar (y proponer) problemas intra matemáticos (dejando los extra matemáticos a la modelación), mientras que, las competencias de Pensamiento y Razonamiento son las que se activan cuando se elaboran esas preguntas.

Un aspecto clave de esta competencia es la capacidad de idear y aplicar estrategias para resolver problemas matemáticos; el énfasis en la solución de problemas está en las estrategias, y posteriormente, en el uso de los resultados y métodos matemáticos, como cuando se realizan cálculos, aunque deben llevar a una respuesta y evaluar críticamente los intentos de solución de problemas propios y ajenos (Niss & Højgaard, 2019) y que posibilita la extracción de conclusiones.

La propuesta de Niss y sus colaboradores se manifiesta en que un problema requiere más que el empleo inmediato de métodos y procedimientos que son rutinarios para el solucionador de problemas, de tal forma que, lo que para una persona es un problema, puede ser a veces una tarea estándar para otra, de modo que la noción de problema es relativa a la persona que intenta resolverlo.

Por otra parte, en el escenario de las olimpiadas matemáticas la actividad de solución de problemas es primordial. En de Losada (2017, 2020a, 2020b) y de Losada & Taylor (2022) se argumenta que la solución de problemas es parte fundamental de hacer matemáticas, los retos y las competiciones de resolución de problemas forman parte de la historia de la matemática y de su avance, por ejemplo, los matemáticos compartían o intercambiaban los problemas con los que estaban trabajando. En la actualidad desde las competiciones, se hace énfasis en la naturaleza dual de hacer matemáticas, fundamentada en dos grandes actividades: la construcción de teorías (I) y la resolución de problemas (II), siendo la resolución de problemas la fuerza motivadora del avance de las teorías y del hacer matemático. Desde el enfoque de las competiciones, la solución de problemas no puede reducirse a una habilidad o incluso una competencia, porque ésta involucra la complejidad del desarrollo del pensamiento matemático, los procesos cognitivos, heurísticos, además de toda la carga afectiva que se activan al solucionar problemas matemáticos, sin la pretensión de evaluar el currículo o quedar limitado por este.

Soifer (2017a) cita el proverbio chino: “Dale a un hombre un pez y lo alimentarás durante un día. Enséñale a pescar y le darás de comer toda la vida”, advirtiendo que en la actualidad no basta con aprender una sola habilidad, en ese caso pescar, sino que es necesario un hombre solucionador de problemas que ante la eventual falta de peces pueda aprender a cazar, cultivar o enfrentarse y resolver los diferentes problemas que la vida le ponga en el camino; por lo tanto, se posiciona a favor de la solución de problemas y su papel en las competiciones matemáticas.

Según Kenderov (2006; 2009; 2022) la competición es esencial e intrínseca a la vida, los jóvenes son competidores por naturaleza, les gustan los retos y los concursos. Las competiciones de resolución de problemas son una buena herramienta motivadora para el trabajo independiente y el estudio en profundidad de las matemáticas por parte de los estudiantes (y, a veces, por parte de los profesores). La solución de problemas ofrece la oportunidad de elevar el nivel de exigencia personal, gestionar el estrés, lidiar con las emociones negativas y aprender de los errores; mientras se forjan el carácter y habilidades para toda la vida, como la perseverancia, el razonamiento, la comunicación y la independencia, porque resolver tareas difíciles no solo genera un mejor conocimiento, sino que también cultiva habilidades para lidiar con problemas de todo tipo, no solo matemáticos. Además, a través de la solución de problemas de competiciones, se descubren y desarrollan las habilidades matemáticas de los jóvenes.

Desde el análisis de cada marco referencial, se realiza una propuesta teórica, obtenida de la investigación del trabajo empírico realizado.

6.1. Aporte teórico

El desarrollo teórico pone en "juego" tres marcos referenciales, la teoría sobre competiciones, la teoría sobre las competencias matemáticas y la teoría de *"la instrucción basada en DNR" (*Harel, 2021*)*[64] que separa el entendimiento matemático del pensamiento matemático y propone que se enriquecen mutuamente, así las formas de entender y comprender estarían ligadas a las formas de pensar; cuando hay un uso reiterado de una forma de comprensión, estamos dando evidencia de una forma de pensar.

¿Cómo se enlazan las teorías? Para ello se realiza el esquema presentado en la Figura 6-2. A continuación, se presenta su interpretación.

En primer lugar, tal como se describió en el estado del arte, las competiciones y las competencias son dos marcos hasta el momento separados, por esa razón se presenta una línea divisoria en el esquema; también, se propone la hipótesis de que las competencias aportan más a las formas de entender mientras

[64] Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 709-721. DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In *Theories of mathematics education* (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg. p 13

que las competiciones de las olimpiadas matemáticas aportan al desarrollo del pensamiento, y a la construcción del aprendizaje robusto[65], y aunque estén separadas, la teoría del DNR asegura que interactúan y se complementan, por esa razón, se coloca el conocido logo del Yin-Yang.

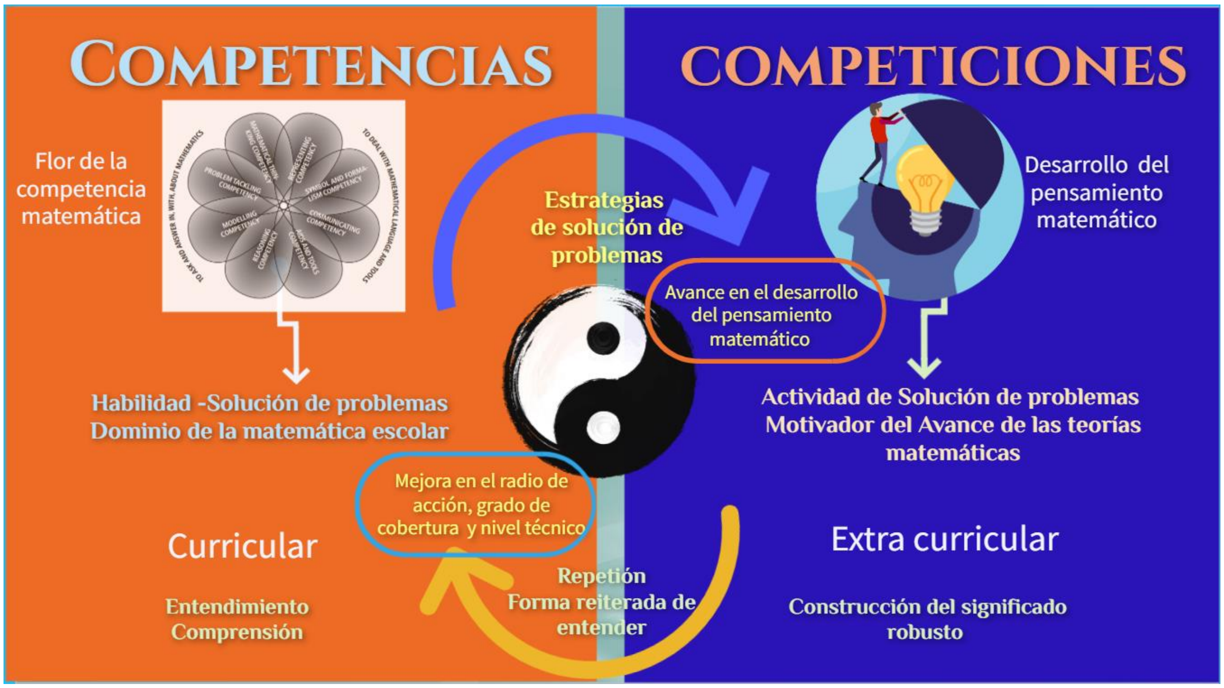


Figura 6-2 esquema de relación de las teorías competencia y competiciones

Al lado izquierdo de la figura, de color naranja se presenta el referente de las competencias, que inicia en la parte superior con la flor de la competencia matemática y de ahí se desprende la habilidad de solucionar problemas. Entonces suponemos que la solución de problemas está por debajo de lo que se llama la competencia matemática del modelo de Niss y sus colaboradores.

65 Pèrez, D. (2015). Construcción de significado robusto para el concepto de área y Caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (Tesis de doctorado). Universidad Antonio Nariño, Bogotá DC. Colombia. p 8.

Al lado derecho en color azul, está la teoría de competiciones, en la que se deja en la parte superior el desarrollo del pensamiento matemático como centro y de este se deriva la actividad de solución de problemas retadores.

Aparecen la primera convergencia, el uso de ***la solución de problemas***, pero se aclara en el esquema que los dos utilizan el término solución de problemas en un sentido diferente. En las competiciones es una de las dos actividades más importantes en matemáticas (solucionar problemas - desarrollar teorías), entendida como la actividad motivadora del avance de las teorías. Mientras que, en el escenario de la competencia la solución de problemas es una sub-competencia asociada a la capacidad de formular y responder preguntas en y con las matemáticas. La convergencia real es con relación a la definición de problema, ahí definitivamente hay un consenso y se entiende que un problema es relativo al individuo y una pregunta que se soluciona de una manera rutinaria ya no tendría tal categoría.

Otra característica importante entre las dos teorías tiene que ver con la parte curricular y la parte extracurricular. Entonces lo primero que se observa es que la teoría de competencias tiene un carácter curricular, y su objetivo es el dominio de la matemática escolar, en cambio las competiciones son de carácter extracurricular incluso recreativo y pretende contribuir al desarrollo del pensamiento matemático de cada individuo.

Es importante resaltar que *en esta investigación* el enlace entre estas dos teorías son las estrategias de solución y el número de estrategias es un indicador de avance de mejora de la competencia, en términos del radio de acción o el grado de cobertura y permite observar el nivel técnico de los estudiantes. También el número de estrategias es un indicador del desarrollo del pensamiento matemático.

También, en el esquema puede suponerse que el trabajo de competiciones es un nivel superior o contiene a la propuesta de las competencias. pero ¿que hace que no sean dos marcos teóricos que se relacionen?

La respuesta en el esquema es el carácter curricular o extra curricular de cada propuesta y también puede ser esa la razón de suponer que uno puede estar en un nivel más amplio que el otro.

Según se presenta en esta investigación la teoría de competencias empieza con la restricción de responder a cuestiones del currículo y al dominio de la matemática escolar. Por ejemplo, la propuesta del proyecto PISA, que elabora pruebas sobre competencias que estarían más enfocadas al desarrollo del entendimiento en el sentido que pretenden evaluar una o dos estrategias en particular, mejorarlas, practicarlas e interiorizarlas en contextos que refieren solo a algunos temas de la matemática en general.

En cambio, el escenario de las competiciones tiene unos problemas con más libertad lo que permite el uso simultáneo de diferentes estrategias como se ha comprobado empíricamente en cada una de las actividades que se han propuesto los dos tipos de retos. Sumado a esto, si hablamos en términos de los temas, las competiciones se propone cubrir un conjunto más amplio que el propuesto desde el campo curricular.

Por último, es muy importante resaltar que la definición de competencias se aleja de la parte afectiva, porque la competencia no quiere lidiar con esta. Esto crea una diferencia importantísima en relación con las competiciones. Entre los beneficios de trabajar con las competiciones tiene que ver con el manejo afectivo, el manejo de la frustración y el posible estrés que genera no poder avanzar en la solución de un problema, además de la idea de obtener el mejor rendimiento individual. Tal es el caso de los estudiantes que prefieren el reto naranja porque les parece más fácil, es decir, no los pone a lidiar con el estrés de algo que no saben hacer, pero se enfrenta con los estudiantes a quienes les gusta más el reto azul, porque se sienten libres y creativos.

Como resultado, aunque no se encuentra en la literatura documentos que relacionen explícitamente los marcos referenciales de las competencias y las competiciones en matemáticas, se obtienen como temas de convergencia entre las teorías: la solución de problemas, el planteamiento de problemas, el pensamiento matemático y un interés desde las competiciones por favorecer la educación matemática.

Las competencias y las competiciones tienen dos intencionalidades diferentes. Desde los promotores de las competiciones matemáticas, aparece la intención de incidir en el ambiente escolar, contribuir a desarrollar el pensamiento matemático y propiciar un fuerte interés por el trabajo matemático que pueden realizar los jóvenes talentosos o no, desde sus propias experiencias y capacidades, mientas que las investigaciones muestran cómo las competencias tienen un carácter curricular, enfocado hacia el desarrollo de habilidades, destrezas y la comprensión de teorías y conceptos institucionalizados que se deberían enseñar en la escuela. Por su parte, las competiciones, son de carácter extracurricular, centran su atención en la solución de problemas como actividad del hacer matemático, y pretenden ~~c~~contribuir a desarrollar el talento para las matemáticas.

Sin embargo, son pocas o nulas las investigaciones que ponen a dialogar estos dos marcos referenciales. Entonces, ¿Por qué no se encuentran investigaciones que relacionan los marcos referenciales de competiciones y las competencias? La respuesta está ligada a las diferencias desde las iniciativas, por su parte las competencias, entendidas como la reunión de habilidades, destrezas, capacidades, incluso como la reunión de un conjunto de competencias para explicar el dominio de la matemática escolar-curricular, mientras que las competiciones matemáticas, como las Olimpiadas presentan un enfoque hacia el desarrollo del pensamiento matemático, desde la premisa que la solución de problemas retadores ha sido la forma en la cual las teorías matemáticas han evolucionado, entonces solucionar problemas es la esencia del hacer matemático, pero no es una labor que nace desde una propuesta curricular, solo hasta ahora Nieto-Said & Sánchez-Lamoneda (2022) proponen acercamientos hacia el currículo de la matemática escolar.

Lo que sí se puede establecer desde las investigaciones es que los dos marcos referenciales tienen un punto en común que es el uso de la solución de problemas, pero la posición que le dan es totalmente diferente, para la competición es el eje central, mientras que para la teoría de competencias es solo una competencia adicional. Además, según las investigaciones revisadas existe un creciente interés por el planteamiento de problemas como potenciador de la resolución de problemas, la mejora de la comprensión y también la creatividad, que se centra en el uso de la heurística y el desarrollo del pensamiento matemático.

Otro punto común de los marcos teóricos presentados es que los problemas deben posibilitar un pensamiento flexible, adoptar diversos enfoques, utilizar estrategias y diversos modelos adecuados e incorporar el pensamiento creativo y crítico en la solución. Entonces, puede pensarse que, aunque las competiciones son preferentemente extracurriculares son una parte integral del proceso educativo aportándole pertinencia al plan de estudios y fortaleciendo su interacción con el campo de las matemáticas. Porque las competiciones representan los intereses y objetivos compartidos de "matemáticos en ejercicio, educadores de matemáticas, profesores y estudiantes" (de Losada & Taylor, 2022, p.18.).

6.2. Aporte práctico

Las conclusiones que se presentan a continuación no pueden ser generalizadas a toda la población y son relativas al estudio realizado y a las muestras utilizadas en la tesis, sin embargo, proporcionan un escenario de discusión y posibilidades de investigación.

¿Qué se observa (en términos de pensamiento matemático) en las soluciones realizadas por estudiantes de aula regular al solucionar actividades que contrastan problemas del tipo PISA y problemas del tipo olimpiadas (Canguro)?

- Existe dependencia estadística entre las estrategias y los problemas propuestos.

- La comunicación es un aspecto relevante en las soluciones presentadas.
- Se activan los dos subconjuntos de competencias, pero la que menos se observa es la del uso de herramientas tecnológicas.
- Los dos tipos de problemas favorecen el desarrollo del pensamiento matemático.
- Se utilizan más estrategias en el reto Olimpiada que en el PISA

En el reto PISA los estudiantes utilizan como estrategia operaciones aritméticas y la comparación. En el reto Olimpiada los estudiantes utilizan como estrategias: las operaciones aritméticas, la comparación, revisión de casos, apoyarse en una gráfica y buscar un patrón de comportamiento. Los dos tipos de problemas son pertinentes para el aula regular, aunque los resultados muestran que los problemas tipo Olimpiadas permiten aplicar más estrategias.

En la investigación se obtiene como favorable que **las competiciones** ofrecen: mayor cantidad de estrategias, aplicación a diversos temas de la matemática, su carácter es creativo y recreativo y no necesariamente curricular, ni se propone hacer énfasis en algún tipo de estrategia. Con relación a **las competencias**: su enfoque de evaluación ha cambiado en dirección al de las competiciones y en la investigación se observa la posibilidad de desarrollar el pensamiento matemático, pero está marcado su énfasis en la medición curricular y el trabajo especializado en un conjunto de estrategias que limitan la capacidad de este tipo de problemas. Entonces, la teoría de las competencias demuestra potencial, con relación al desarrollo del pensamiento matemático, sin embargo, queda limitada por el interés en el dominio de la matemática escolar. Por su parte, las competiciones son de carácter extracurricular e incluso recreativo y no esta necesariamente ligadas al currículo escolar, lo que permite avanzar en mayor medida en el desarrollo del pensamiento matemático de cada individuo.

El número de estrategias es un indicador del desarrollo del pensamiento matemático (competiciones) y del grado de cobertura de la competencia de los estudiantes (competencias). Pero, la libertad temática en las competiciones permite el uso simultáneo de un grupo variado de estrategias. El uso de la discriminante permitió determinar que algunas estrategias indican un mayor avance en el desarrollo del pensamiento matemático y es necesario en el aula regular de estas edades, avanzar hacia la estrategia *encontrar un patrón de comportamiento*, aunque pueda que para estudiantes de niveles superiores las estrategias relevantes sean otras. Las competiciones de resolución de problemas son una buena herramienta motivadora para el trabajo independiente y el estudio en profundidad de las matemáticas, y fomentan el desarrollo de habilidades para lidiar con problemas de todo tipo, no solo matemáticos. Finalmente, también para los estudiantes los dos tipos de reto son importantes y complementarios, porque permiten el trabajo creativo, los procedimientos abiertos y el trabajo divertido vs el enfoque metódico con procedimientos cerrados y especializados.

- **RECOMENDACIONES**

Aunque no se encuentran reportes de las investigaciones que relacionan las competencias y las competiciones, este documento es un comienzo, en el propósito de acercar dos marcos teóricos de especial importancia a nivel internacional tal como lo ratifican las investigaciones descriptas en el documento, sumado a la visibilidad internacional de los temas en las mesas de trabajo: TSG 17 Problem posing and solving in mathematics education, y TSG 46 Mathematical Competitions and Other Challenging Activities, del congreso internacional ICME 14 — International Congress on Mathematical Education.

Es muy importante para el uso de dos marcos referenciales que utilizan términos semejantes poner en evidencia si se refieren a lo mismo o son solo coincidencias en las expresiones que utilizan, porque pueden referir a atributos totalmente diferentes, como es el caso presentado en el trascurso de este escrito. Así, la competencia de resolución de problemas en matemáticas a la manera de Mogens Niss y sus colaboradores (Niss, 2015; Niss & Højgaard, 2019; Niss, Bruder, Planas, Turner, y Villa-Ochoa, 2016), es una sub competencia de la mathematical competency, mientras que para aquellos que pertenecen al campo de competiciones matemáticas (de Losada, 2017; Nieto-Said, Sánchez-Lamoneda, 2022) se refieren a la solución de problemas retadores como la actividad que permite promover el desarrollo del pensamiento matemático

Actualmente, el desarrollo de competencias tiene un impacto en las propuestas curriculares de diferentes países, pero también, es importante darle la oportunidad a las solución de problemas como actividad acercando entornos como las olimpiadas matemáticas al aula, como lo propone Kenderov (2006; 2009; 2022), la solución de problemas desde el enfoque de las competiciones es favorable y complementaria a la educación formal, al proceso de enseñanza y aprendizaje, y en general influye sobre el rendimiento del sistema educativo.

También se propone que juntamente con el enfoque de competencias, se realice el uso simultáneo de problemas retadores en las clases, a fin de que cada estudiante logre su mejor nivel personal de desarrollo matemático y también, avanzar en la solución de problemas mediante el uso de diferentes estrategias no necesariamente aprendidas en el ambiente escolar, sino acercar a los estudiantes a la experiencia aportada desde las olimpiadas matemáticas y permitir el ingenio y la creatividad. Pero teniendo presente que los dos marcos utilizan términos aparentemente iguales, desde dos intencionalidades diferentes. En este sentido se sugiere al lector revisar las evaluaciones internacionales del proyecto PISA, en comparación a las pruebas del Canguro Matemático.

Por último, una propuesta final hacia el marco de las competiciones. Desde lo realizado en la investigación, se observa que los estudiantes realmente apropian un *entendimiento conceptual,* se les puede ver en sus soluciones *fluidez procedimental* y en el conjuntos de estrategias y decisiones que se realizan se puede determinar una *competencia estratégica* que si se homologa a la teoría de competencias, corresponden al nivel técnico, el grado de cobertura y el radio de acción, Sin embargo, considero que las competiciones ofrecen una cuestión adicional, con relación al *razonamiento adaptativo*, porque se requiere ingenio, creatividad y también una *disposición productiva* que se ha mencionado como el manejo afectivo, la tolerancia a estar estancado, la autorregulación de carácter emocional en el proceso de solución de un problema, cuando se está estancado (Mason, Burton y Stacey) o el estudiante se enfrenta a solucionar situaciones totalmente nuevas, no necesariamente curriculares. Entonces, es muy recomendable el uso de los dos tipos de problemas, tanto PISA como Olimpiadas en el salón de clase teniendo como referencia los resultados presentados en esta investigación y reconocer que las competiciones matemáticas también pueden desarrollar habilidades afectivas como la tolerancia a la frustración y la autorregulación emocional, además de habilidades técnicas.

- **BIBLIOGRAFÍA**

Abdullah, A. H., Fadil, S. S., Abd Rahman, S. N. S., Tahir, L. M., & Hamzah, M. H. (2019). Emerging patterns and problems of higher-order thinking skills (HOTS) mathematical problem-solving in the form-three assessment (PT3). *South African Journal of Education*, 39(2). https://doi.org/10.15700/saje.v39n2a1552

Ahdhianto, E., Marsigit, Haryanto, & Nurfauzi, Y. (2020). Improving fifth-grade students' mathematical problem-solving and critical thinking skills using problem-based learning. *Universal Journal of Educational Research*, 8(5), 2012–2021. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080539

Alsawaie, O. N. (2012). Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(5), 1071–1097. https://doi.org/10.1007/s10763-011-9315-

As'ari, A. R., Kurniati, D., Abdullah, A. H., Muksar, M., & Sudirman, S. (2019). Impact of infusing truth-seeking and open-minded behaviors on mathematical problem-solving. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 7(4), 1019–1036. https://doi.org/10.17478/jegys.606031

Barros-Castro, R. A., Midgley, G., & Pinzón, L. (2015). Systemic Intervention for Computer-Supported Collaborative Learning. Systems *Research and Behavioral Science*, 32(1), 86-105.

Basri, H., Purwanto, As'ari, A. R., & Sisworo. (2019). Investigating critical thinking skill of junior high school in solving mathematical problem. *International Journal of Instruction*, 12(3), 745–758. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12345a

Bayazit, I. (2013). An investigation of problem solving approaches, strategies, and models used by the 7th and 8th grade students when solving real-world problems. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 13(3), 1920–1927. https://doi.org/10.12738/estp.2013.3.1419

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.). (2015). Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. *Springer Netherlands*. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.

Boote, D. N. (2010). Commentary 3 on re-conceptualizing mathematics education as a design science. In *Theories of mathematics education*. Springer, Berlin, Heidelberg

Carroll, C. D., & Kemp, C. (2015). Evaluating the inverse reasoning account of object discovery. *Cognition*, 139, 130–153. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.03.003

Cooper, B., & Harries, T. (2003). Children's use of realistic considerations in problem solving: Some English evidence. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 449–463. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.004

De Losada, M. F. (2017). Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done?. *In Competitions for Young Mathematicians* (pp. 329-350). Springer, Cham.

De Losada, M. F. (2020a). El impacto de las Olimpiadas Matemáticas en la Comunidad Matemática de Colombia. Involucrar a los jóvenes estudiantes en matemáticas a través de competencias—Perspectivas y prácticas mundiales: Volumen II: Competencias de matemáticas y cómo se relacionan con la investigación, la enseñanza y la movilidad, 139–159. *Científico Mundial*.

De Losada, M. F. (2020b). La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. Espacio Matemático Vol. 1 No. 1 (2020), pp. 1-18. ISSN: 2711-1792 (En línea)

De Losada, M.F, Taylor, PJ (2022). Perspectivas sobre las competencias matemáticas y su relación con la educación matemática. *Educación matemática ZDM* 54, 941–959 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110–136. https://doi.org/10.2307/30034902

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, 102, 101451.

Falk M, 2022. La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. *Espacio Matemático* Vol. 1 No. 1 (2020), pp. 1-18. ISSN: 2711-1792 (En línea). p. 18.

Freiman, V., Polotskaia, E., & Savard, A. (2017). Using a computer-based learning task to promote work on mathematical relationships in the context of word problems in early grades. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 49, 835-849.

Fujita, H. (2004). Goals of mathematical education and methodology of applied mathematics. *In Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education*. Springer, Dordrecht (pp. 19-36).

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), Learning and Teaching Number Theory. In C. Maher (Ed.), Journal of Mathematical Behavior (pp. 185–212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy*, 265-290.

Harel, G. (2008a). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: With reference to teacher's knowledge base. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(5), 893–907. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0146-4

Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 487–500. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In Theories of mathematics education (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. ZDM–Mathematics Education, 53, 709-721. DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In Theories of mathematics education (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., Mokhtar, M., & Rahimi, K. (2015). Designing learning strategy to improve undergraduate students' problem solving in derivatives and integrals: A conceptual framework. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(2), 227-238.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(5–6), 503–514. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0052-1

ICME ORG. (2021). Topic Study Groups: The 14th International Congress on Mathematical Education. *The 14th International Congress on Mathematical Education Shanghai*, 11th –18th July, 2021. https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1619938666894

Kapa, E. (1999). Problem solving, planning ability and sharing processes with LOGO. *Journal of Computer Assisted Learning*, 15(1), 73-84.

Kaiser, G. & Presmeg N. (2019). Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education, in *ICME-13 Monographs.* Springer Cham DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

Karlsson Wirebring, L., Lithner, J., Jonsson, B., Liljekvist, Y., Norqvist, M., & Nyberg, L. (2015). Learning mathematics without a suggested solution method: Durable effects on performance and brain activity. *Trends in Neuroscience and Education*, 4(1–2), 6–14. https://doi.org/10.1016/j.tine.2015.03.002

Keldibekova A. O. (2019) Sobre los enfoques para evaluar la solución de los problemas de las olimpiadas matemáticas de los escolares. *Perspectivas de la ciencia y la educación.* № 5 (41). С. 324-344. doi: 10.32744/pse.2019.5.23

Keldibekova A. O. (2021). La competencia matemática de los participantes de las Olimpiadas como indicador de la calidad del nivel de formación matemática. *Perspectivas de la ciencia y la educación. 2021. Nº 3 (51)*. págs. 169-187. doi:10.32744/pse.2021.3.12

Kenderov, P. S. (2006, August). Competitions and mathematics education. In *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Vol. 3, pp. 1583-1598). Madrid: IMU.

Kenderov, P. et al. (2009). Desafíos más allá del salón de clases: fuentes y problemas organizacionales. En: Taylor, P., Barbeau, E. (eds) Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. Nueva serie de estudios ICMI, vol 12. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09603-2_3.

Kenderov, PS (2022). Concursos de matemáticas: una parte integral del proceso educativo. *Educación matemática ZDM* **54**, 983–996 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01348-4

Kirisci, N., Sak, U., & Karabacak, F. (2020). The effectiveness of the selective problem solving model on students' mathematical creativity: A Solomon four-group research. *Thinking Skills and Creativity*, 38. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2020.100719

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 349-365.

Koichu, B. (2010). On the relationships between (relatively) advanced mathematical knowledge and (relatively) advanced problem-solving behaviours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 257–275. https://doi.org/10.1080/00207390903399653

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, 35(2), 99–139. https://doi.org/10.1007/s11251-006-9004-3

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, 101428.

Koichu, B., Cooper, J., & Widder, M. (2022). Implementation of problem solving in school: From intended to experienced. Implementation and Replication Studies *in Mathematics Education*, 2(1), 76-106.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. In *Theories of mathematics education* (pp. 123-146). Springer, Berlin, Heidelberg.

Lotero, A. A., Botero, A. L., & Andrade Londoño, E. A. (2017). The frames of meaning hypothesis: Children's mathematical problem-solving abilities. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 20(1), 39–70. https://doi.org/10.12802/relime.17.2012

MEN y Universidad de Antioquia (2016). Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas. *Contrato Interadministrativo 0803 de 2016*. Colombia

Nieto-Said, JH, Sánchez-Lamoneda, R. Un currículo para competencias matemáticas. *Educación matemática ZDM. 54*, 1043–1057 (2022). https://doi.org/10.1007/s11858-022-01389-9

Niss, M. (2003a). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics : the Danish Kom Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 115-124.

Niss, M. (2003b). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. Educating for the Future. *Proceedings of an International Symposium on Mathematics Teacher Education*, 179–192. Retrieved from https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6957.

Niss, M. (2004). Key issues and trends in research on mathematical education. *In Proceedings of the ninth international congress on mathematical education* (pp. 37-57). Springer, Dordrecht.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In Assessing Mathematical Literacy (pp. 35–55). *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_2

Niss, M. (febrero, 2022). Relationships Between modelling competency and the other mathematical competencies*. Conferencia plenaria presentada en el MEM 2022*, Bogotá, Colombia.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. English edition, October 2011, 485, 214.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM - Mathematics Education*, 48(5), 611–632. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem-solving processes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2(3), 33–54. https://doi.org/10.12973/ejmste/75463

OCDE, (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*.

Ostad-Ali-Askari, K., & Shayannejad, M. (2015). The study of mixture design for foam Bitumen and the polymeric and oil materials function in loose soils consolidation. Journal of Civil Engineering Research, 5(2), 39-44.

Özcan, Z. Ç., İmamoğlu, Y., & Bayraklı, V. K. (2017). Analysis of sixth grade students' think-aloud processes while solving a non-routine mathematical problem. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 17(1), 129–144. https://doi.org/10.12738/estp.2017.1.2680

Pappas, M. A., Drigas, A. S., & Polychroni, F. (2018). An Eight-Layer Model for Mathematical Cognition. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (Online)*, 13(10), 69.

Perales, R. G. (2016). Desempeño de los más capaces para la matemática en la prueba de rendimiento BECOMA: correlación de los resultados con el test psicométrico badyg-e3. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, 27(2), 45-61

Pèrez, D. (2015). *Construcción de significado robusto para el concepto de área y Caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado* (Tesis de doctorado). Universidad Antonio Nariño, Bogotá DC. Colombia.

Pighin, S., Girotto, V., & Tentori, K. (2017). Children's quantitative Bayesian inferences from natural frequencies and number of chances. *Cognition,* 168, 164-175.

Polotskaia, E., Savard, A., & Freiman, V. (2015). Duality of mathematical thinking when making sense of simple word problems: Theoretical essay. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(2), 251–261. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1325a

Pólya, G., & Conway, J. H. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1963) On Learning, Teaching, and Learning Teaching, *The American Mathematical Monthly*, 70:6, 605-619, DOI: 10.1080/00029890.1963.11992076

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM: the international journal on mathematics education* 47(6). DOI:10.1007/s11858-015-0722-3

Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kašuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). Challenging problems: Mathematical contents and sources. In Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. *Springer, Boston, MA.* (pp. 11-51)

Robinson, W. R. (2003). Chemistry problem-solving: Symbol, macro, micro, and process aspects. *Journal of Chemical Education*, 80(9), 978-978.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, L. (2014). Metodología de la investigación (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Salangsang, L. G., & Subia, G. S. (2020). Mathematical thinking on problem solving and self-regulation strategies of filipino primary grade pupils. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 9(2), 4000–4004.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334370.

Schoenfeld, A. H. (2001). Purposes and methods of research in mathematics education. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 221-236).

Siau, K., & Messersmith, J. (2003). Analyzing ERP implementation at a public university using the innovation strategy model. *International Journal of Human-Computer Interaction*, 16(1), 57-80.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.). (2015). Mathematical problem posing: From research to effective practice. Springer. Soifer, A. (2017). Goals of Mathematics Instruction: Seven Thoughts and Seven Illustrations of Means. In *Competitions for Young Mathematicians* (pp. 3-24). Springer, Cham.

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Citeseer*. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.550.1647&rep=rep1&type=pdf.

Stacey, K., & Turner, R. (2015). The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks. In *Assessing mathematical literacy* (pp. 5-33). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Surya, E., Sabandar, J., Kusumah, Y. S., & Darhim. (2013). Improving of junior high school visual thinking representation ability in mathematical problem solving by CTL. *Journal on Mathematics Education*, 4(1), 113–126. https://doi.org/10.22342/jme.4.1.568.113-126

Swartjes, I., Vromen, J., & Bloom, N. (2007). Narrative inspiration: Using case based problem solving to support emergent story generation. *Programme Committee and Reviewers*, 21.

Szabo, Z. K., Körtesi, P., Guncaga, J., Szabo, D., & Neag, R. (2020). Examples of problem-solving strategies in mathematics education supporting the sustainability of 21st-century skills. *Sustainability*, *12*(23), 10113.

Tall, D. (2009). The development of mathematical thinking: problem-solving and proof. In *Mathematical Action & Structures of Noticing* (pp. 15-29). Brill.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.

Tasni, N., Nusantara, T., Hidayanto, E., & Sisworo. (2019). Anticipating failure of students' productive connective thinking transformation in solving mathematical problems. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 8(9), 392–400. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85073419230&partnerID=40&md5=ed6f96ed1d6f7254cae3b7177ca5637e

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 275-294.

Turmudi, & Susanti, E. (2020). Productive connective thinking scheme in mathematical problem solving. *Pertanika Journal of Social Sciences and Humanities*, 28(1), 293–308.

https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85082090960&partnerID=40&md5=b1defbe855f1d391a6fc5d750205140d

Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In *Assessing mathematical literacy* (pp. 35-55). Springer, Cham.

Ukobizaba, F., Nizeyimana, G., & Mukuka, A. (2021). Assessment Strategies for Enhancing Students' Mathematical Problem-Solving Skills: A Review of Literature. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(3).

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201–221. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5

Vorobjovs, A. (2020, May). How to Measure Adolescents' Mathematical Competence. *In Rural Environment. Education. Personality.(REEP) Proceedings of the 13th International Scientific Conference* (Vol. 13, pp. 185-190).

Wahyudi, W., Waluya, S. B., Suyitno, H., & Isnarto, I. (2020). The impact of 3CM model within blended learning to enhance students' creative thinking ability. JOTSE: *Journal of Technology and Science Education*, 10(1), 32-46.

Wahyudi, W., Waluya, S. B., Suyitno, H., & Isnarto, I. (2021). Schemata and creative thinking ability in cool-critical-creative-meaningful (3CM) learning. International *Journal of Sustainability in Higher Education*, 22(1), 1-28.

Weatherby, K. (2016). *Ten Questions for Mathematics Teachers… and How PISA Can Help Answer Them. PISA*. OECD Publishing. 2, rue Andre Pascal, F-75775 Paris Cedex 16, France. http://dx.doi.or /10.1787/9789264265387-en.

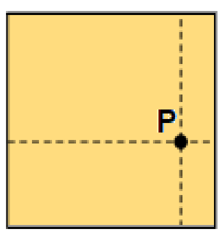
Wirebring, L. K., Wiklund-Hörnqvist, C., Eriksson, J., Andersson, M., Jonsson, B., & Nyberg, L. (2015). Lesser neural pattern similarity across repeated tests is associated with better long-term memory retention. *Journal of Neuroscience*, 35(26), 9595-9602.

Xin, Y. P., Park, J. Y., Tzur, R., & Si, L. (2020). The impact of a conceptual model-based mathematics computer tutor on multiplicative reasoning and problem-solving of students with learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100762.

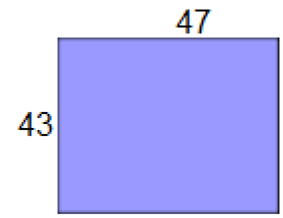
Yasin, M., Fakhri, J., Faelasofi, R., Safi'i, A., Supriadi, N., Syazali, M., & Wekke, I. S. (2020). The Effect of SSCS Learning Model on Reflective Thinking Skills and Problem Solving Ability. *European Journal of Educational Research*, 9(2), 743-752.

- **ANEXO 1**

Tabla Conjunto de problemas propuestos en la ronda final de primaria[66]

Problemas 1 al 5	***Problemas 6 al 10***
En la lista de números 3, 8, 13, 18, …, 98, hay 20 números, y cada número después del primero es cinco más que el número anterior. Todos los números se adicionan para obtener la suma. ¿Cuál es el dígito en las unidades en la suma que se obtiene?	Amanda vierte $\frac{3}{4}$ de su agua en la botella vacía de Bárbara. Luego, Bárbara vierte $\frac{3}{5}$ de su agua en la botella vacía de Carlos. Carlos luego vierte $\frac{1}{2}$ de su agua en la botella vacía de David. Si David ahora tiene 18 onzas de agua, ¿cuántas onzas de agua le quedaron a Amanda?
Un rectángulo tiene un perímetro de 26cm y el largo y el ancho son números enteros. ¿Cuál es la mayor área posible que este rectángulo puede tener, en cm cuadrados?	Un cuadrado perfecto es el resultado de multiplicar un número entero positivo por sí mismo exactamente dos veces. [**Ejemplo:** 49 es un cuadrado perfecto porque 7 × 7 = 49]. El número entero positivo **N**, se multiplica por 150 y el resultado es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor valor posible para el número entero positivo **N**?
Un cuadrado tiene un punto interno **P** tal que las distancias perpendiculares de **P** a los cuatro lados son: 1cm, 2cm, 3cm y 4cm, respectivamente. ¿Cuántos otros puntos en el interior del cuadrado tienen esta propiedad? (Tiempo sugerido 5 minutos) 	En la suma que se muestra, cada letra representa un dígito, letras diferentes representan dígitos diferentes y ningún dígito inicial puede ser igual a 0, de modo que **ROTOR**, **LEVEL** y **STATS** son números de cinco dígitos. $\begin{array}{r} \mathbf{ROTOR} \\ +\ \underline{\mathbf{LEVEL}} \\ \mathbf{STATS} \end{array}$ ¿Cuál es el mayor valor posible para **STATS** en la suma que se muestra, dado que **V = 1**?

[66] ®Todos los Derechos Reservados OCM y MOEMS. Olimpiada Colombiana de Matemáticas.

Después del primer kilómetro de la carrera de atletismo del colegio, Paty fue la penúltima. En el siguiente kilómetro, Paty logró adelantar a siete corredores. En el tercer kilómetro, dos corredores la adelantaron. En el kilómetro final, Paty pasó a ocho corredores, pero otros cuatro corredores la adelantaron. Paty terminó novena. ¿Cuántas personas participaron en la carrera?	Sandra recorta cuadrados de papel de la siguiente manera: Comienza con un rectángulo de papel de 43 × 47, corta el papel para quitar el cuadrado más grande posible. Luego, con la pieza rectangular restante, la vuelve a cortar para quitar el cuadrado más grande posible. Sandra continúa  haciendo esto hasta que la pieza restante sea un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados tiene Sandra al final y de qué tamaño son?
Hay 12 sillas igualmente espaciadas alrededor de una mesa circular, y enumeradas del 1 al 12. ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir dos sillas que no estén una frente a la otra?	Hay un dado octaédrico (dado de 8 caras) cuyas caras tienen cada una un número diferente del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Cualquier cara tiene la misma probabilidad de aparecer en la parte superior cuando el dado se lanza. El dado se lanza dos veces y el número que aparece en la parte superior  después de la primera tirada se multiplica por el número que aparece en la parte superior después de la segunda tirada. De todos los productos diferentes que se pueden obtener, ¿cuántos y cuáles son divisibles por 9?