Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES DE RIESGO AMBIENTAL

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Ana Elizabeth González González

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES DE RIESGO AMBIENTAL

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Autor: Ana Elizabeth González González

Director de tesis:

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. junio de 2023

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos a:

- A los doctores Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, por su gran colaboración, dedicación y entrega para con el desarrollo del presente proyecto.
- A la Dra. Mary Elizabeth Falk de Losada, por su colaboración y asesoría en el desarrollo del proyecto, ya que fue ella quien direcciono las ideas de la presente tesis.
- A todos los profesores participes en mi formación académica.
- A mi familia, por su colaboración y paciencia durante el proceso de mi formación profesional.
- A las directivas de la Institución Educativa Agroindustrial La Pradera, quienes muy amablemente me permitieron llevar a cabo y con éxito esta investigación.
- A todos mis compañeros, amigos y demás personas que de una u otra forma colaboraron con la elaboración del proyecto.
- Y al autor de quien permite que los sueños se hagan realidad, a Dios, que me ha animado y motivado a lo largo de mi vida y me ha dado la fortaleza y nuevas fuerzas en los momentos difíciles.

DEDICATORIA

A aquel que posee la supereminente grandeza del poder, la plenitud del que todo lo llena en todo, Aquel que hace obras mucho más grandes de las que entendemos o pedimos. Él es mi Dios, el artífice de mi vida, el dueño y el apoyo de mi existencia, quien conoce mis anhelos, prepara los triunfos con su multiforme sabiduría y los concede. Este es uno de ellos.

A mis padres, quienes pensaron siempre en ayudarme a labrar un futuro mejor. A mis hermanos, quienes presentan la amistad verdadera y que me enseñan a diario que la unidad y el apoyo incondicional se demuestran en todos los momentos de la vida.

A todos los profesores y amigos, de quienes además de todo lo que me enseñaron aprendí, que más que ser una excelente profesional es importante ser un mejor ser humano.

SÍNTESIS

La modelación se ha constituido en uno de los procesos generales de la actividad matemática que permite potenciar el pensamiento matemático. Por su parte, el pensamiento matemático contribuye al desarrollo del razonamiento lógico, la creatividad, y permite articular conocimientos de diferentes tipos y desde distintas áreas. En ese sentido, las matemáticas pueden ayudar a minimizar los riesgos ambientales y utilizar este recurso didáctico para motivar a los estudiantes hacia su estudio. Por lo anterior, esta investigación presenta un modelo didáctico enfocado en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo.

La investigación tiene un enfoque cualitativo, bajo un diseño de investigación acción. Los resultados indican que a través de la modelación matemática interdisciplinaria en la cual se involucran problemas del contexto ambiental, los estudiantes comprenden, construyen y aplican conceptos matemáticos, desarrollan técnicas para la solución de problemas y estrategias metacognitivas. Además, adquieren rigor en la comunicación y argumentación de sus modelos matemáticos, entre otros aspectos que conllevan al desarrollo de su pensamiento matemático. El modelo didáctico propuesto se ve reflejado en el desarrollo del pensamiento matemático, es decir, es funcional y responde al objetivo de la investigación.

ABSTRACT

Modelling has become one of the general processes of mathematical activity that allows enhancing mathematical thinking. For its part, mathematical thinking contributes to the development of logical reasoning, creativity, and allows the articulation of knowledge of different types and from different areas. In this sense, mathematics can help minimize environmental risks and use this didactic resource to motivate students towards their study. Therefore, this research presents a didactic model focused on the development of mathematical thinking through mathematical modelling in situations of environmental risk in seventh grade students.

The research has a qualitative approach, under an action research design. The results indicate that through interdisciplinary mathematical modelling in which problems of the environmental context are involved, students understand, construct and apply mathematical concepts, develop techniques for solving problems and metacognitive strategies. In addition, they acquire rigor in the communication and argumentation of their mathematical models, among other aspects that lead to the development of their mathematical thinking. The proposed didactic model is reflected in the development of mathematical thinking, that is, it is functional and responds to the objective of the investigation.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN **1**

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE **11**

1.1. El desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en grado séptimo en congresos y reuniones 11

1.1.1. Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education 14

1.1.2. Un panorama de la modelación matemática en los encuentros colombianos de matemática educativa entre 2012-2015 15

1.2. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en grado séptimo 16

1.2.1. Seventh-Graders' Mathematical Modelling on Completion of a Three-Year Program ………………………………………………………………………………………16

1.2.2. What Is Known about Secondary Grades Mathematical Modelling -A Review 17

1.2.3. Mathematical modeling in the secondary school curriculum............................ 18

1.2.4. Propuesta didáctica para el aprendizaje de la geometría plana a través de la modelación de patrones de la naturaleza, con estudiantes de grado séptimo en la Institución José Celestino Mutis del municipio de Fusagasugá 18

1.2.5. The Learning and Teaching of Mathematical Modelling 19

1.2.6. Mathematical Modelling From Theory to Practice 20

1.2.7. Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling.. 20

1.2.8. Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education......................... 21

1.2.9. The role of generating questions in mathematical modeling............................ 21

1.2.10. Sense of Reality Through Mathematical Modelling 22

1.2.11. Mathematical modeling in classroom 22

1.2.12. Modelling in lower secondary mathematics classroom – problems and opportunities 23

1.2.13. Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo 24

1.2.14. Modelación matemática del crecimiento del maíz para el mejoramiento de las competencias matemáticas de los estudiantes del grado 7° (séptimo) de la institución Educativa Valentín Manjarrez del corregimiento de La Loma del municipio de El Paso, Cesar……. 24

1.3. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática de situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo..……………………………………………………………………………………25
1.3.1. Modelización en el aula matemática.. 25
1.3.2. Intertwining mathematical modeling with environmental issues....................... 25
1.3.3. Environment Education in Mathematics Classroom: As an Effort to Develop the Critical Thinking Skills and for Environmental Sustainability Concerning 26
1.3.4. La Matemática Contextualizada en el Aula desde una propuesta Ambiental ... 26
1.3.5. Implementing the Environmental Education Policy in your school: Mathematics ……………………………………………………………………………………27
1.3.6. Introduciendo el medio ambiente en el aula de matemáticas 27
1.4. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática, específicamente de situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo en Colombia..28
1.4.1. Fortalecimiento del pensamiento variacional para la modelación matemática de funciones de proporcionalidad directa, a través de la medición de residuos sólidos en los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Sagrada Familia Potrerillo Valle del Cauca... 28
1.4.2. Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación........................ 29
1.4.3 Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática 29
Conclusiones del capítulo 1...30
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO...31
2.1. Fundamentos filosóficos, psicológicos, pedagógicos y didácticos 31
2.2. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores....37
2.3. Referentes sobre la Educación Matemática Crítica 39
2.4. Referentes sobre el desarrollo del pensamiento matemático.................................42
2.4.1. Referentes sobre situaciones de riesgo ambiental en la clase de matemáticas... 44
2.5. Referentes sobre la modelación matemática 46
2.6. Fundamentos de la comunidad de práctica de Wenger y su incidencia en situaciones de riesgo ambiental…………………..52
2.7. Referentes sobre contenidos matemáticos. Competencias asociadas a la modelación matemática. 54
Conclusiones del capítulo 2...55

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 57
3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación 57
3.2. Población y muestra o unidad de análisis 58
3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados 58
3.4. Trabajo de campo 60
3.5. Fases de la investigación 60
Conclusiones del capítulo 3...61
CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES DE RIESGO AMBIENTAL 62
4.1. Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental 62
4.2. Sistema de actividades para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental 86
4.2.1. Actividad 1. Me familiarizo con la resolución de problemas que generen la construcción de modelos matemáticos... 87
4.2.2. Actividad 2. Desarrollo de un problema de modelado matemático visual. 89
4.2.3. Actividad 3. Proporcionalidad y unidades de tiempo.. 90
4.2.4. Actividad 4. Representación gráfica de variables 92
4.2.5. Actividad 5. Diseño de cuerpos redondos reciclando llantas 94
4.2.6. Actividad 6. Patrones de comportamiento entre magnitudes 95
4.2.7. Actividad 7. Tabulación y análisis numérico 97
4.2.8. Actividad 8. Volumen de sólidos y líquidos 98
4.2.9. Actividad 9. Ecuaciones de primer grado... 99
4.2.10. Actividad 10. Construcción de estructuras geométricas con botellas de plástico ……………………………………………………………………………………...102
Conclusiones del capítulo 4...103
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS...103
5.1. Análisis de los resultados de las entrevistas...103
5.1.1. Entrevista Dr. Ole Skovsmose.. 104
5.1.2. Intervención de la Dra. Paola Valero 104
5.1.3. Entrevista Dra. Gloria Stillman.. 105
5.1.4. Entrevista Dra. Gabriele Kaiser 105
5.1.5. Entrevista Dr. Mogens Niss 106

5.1.6. Conclusiones de las entrevistas 107
5.2. Validación del modelo didáctico y del sistema de actividades..............................107
5.3. Análisis de los resultados 111
5.3.1. Resultados estudio exploratorio...111
5.3.2. Actividad 1. Me familiarizo con la resolución de problemas que generen la construcción de modelos matemáticos... 113
5.3.3. Actividad 2. Desarrollo de un problema de modelado matemático visual 117
5.3.4. Actividad 3. Proporcionalidad y unidades de tiempo... 122
5.3.5. Actividad 4. Representación gráfica de variables 125
5.3.6. Actividad 5. Diseño de cuerpos redondos reciclando llantas 128
5.3.7. Actividad 6. Patrones de comportamiento entre magnitudes 131
5.3.8. Actividad 7. Tabulación y análisis numérico 134
5.3.9. Actividad 8. Volumen de sólidos y líquidos 136
5.3.10. Actividad 9. Ecuaciones de primer grado... 139
5.3.11. Actividad 10. Construcción de estructuras geométricas con botellas de plástico ……………………………………………………………………………………...142
5.3.12. Actividades de modelación matemática inclusiva 146
5.3.13. Resultados de la encuesta de satisfacción a estudiantes 150
5.4. Avances en la caracterización para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo...152
Conclusiones del capítulo 5..154

CONCLUSIONES 156

RECOMENDACIONES...163

Bibliografía 164

ANEXOS..179

Anexo 1. Entrevista a especialistas en modelación matemática.................................179
Anexo 2. Encuesta a docentes 180
Anexo 3. Validación de la encuesta a docentes por el método Delphi 182
Anexo 4. Rejilla de evaluación del modelo didáctico 184
Anexo 5. Encuesta de satisfacción a estudiantes. 186

INTRODUCCIÓN

La labor de los docentes de matemáticas presenta retos en la búsqueda de una transformación en la formación integral de los estudiantes. Los retos van encaminados a mejorar la mediación del proceso de enseñanza aprendizaje y a desarrollar el pensamiento matemático, más allá de la aplicación de algoritmos, fórmulas o la realización de ejercicios descontextualizados en los cuales no se logra apreciar el sentido de las matemáticas.

Al respecto Takahashi (2007) establece que el objetivo de la Educación Matemática no es solo permitir que los estudiantes adquieran conocimientos y habilidades matemáticas, sino también desarrollar el pensamiento matemático. Este pensamiento matemático no se logra afianzar con escuchar las lecciones de profesores influenciados por el método tradicional.

Otra de las preocupaciones dentro de la Educación Matemática radica en el hecho de que los profesores se enfocan únicamente en enseñar apresuradamente los contenidos del plan de estudios, en lugar de brindar oportunidades para que el estudiante domine estos contenidos matemáticos utilizando su pensamiento matemático.

Sumado a lo anterior, se ha visto cómo algunos docentes tradicionalistas enseñan las matemáticas como a ellos mismos se las enseñaron, lo cual ocasiona una profunda crisis del desarrollo de la estructura mental del estudiante. Además, existen docentes que no diseñan o llevan a cabo una clase donde el objetivo sea el desarrollo del pensamiento matemático, sencillamente porque dentro de su formación no han experimentado tales actividades o planes de clase que generen este propósito. Lo anterior no suscita una evolución en el desarrollo del pensamiento matemático, el gusto por aprender y hablar de matemáticas fuera del salón de clases.

Es por ello que el fin de esta investigación consiste en desarrollar el pensamiento matemático involucrando problemas retadores, ya que según Takahashi (2007) considera la resolución de problemas como un enfoque poderoso para el desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas. En este sentido, el reto del docente está dado en el planteamiento de problemas retadores que propicien el desarrollo del pensamiento matemático.

Según el modelo educativo de Singapur el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas matemáticos depende de cinco componentes interrelacionados, ellos son: conceptos, habilidades, procesos matemáticos, actitudes y metacognición. La modelación matemática se encuentra dentro de los procesos matemáticos y aporta en gran manera al desarrollo del pensamiento matemático.

Lingefjard y Holmquist (2005) sostienen que la modelación matemática se considera como una competencia básica que dota a los estudiantes de capacidades para resolver problemas de la vida real en matemáticas y en otras disciplinas. Por lo anterior, para que el aprendizaje de las matemáticas sea más realista y ejemplifique como se utilizan las matemáticas en la vida cotidiana y ver cómo estas aportan a la solución de problemas del entorno se aborda la modelación matemática. La modelación matemática constituye una estrategia didáctica que permite comprender y construir conceptos matemáticos encontrando el sentido a las matemáticas.

Otro elemento por el cual se hace pertinente el desarrollo de la presente investigación es motivar hacia el estudio de las matemáticas y volver a cautivar la atención de algunos estudiantes, con el objetivo de que en el contexto de la modelación matemática y la resolución de problemas enfocados en los riesgos ambientales, ellos la valoren y aprendan más matemáticas.

En otras palabras, se pretende desarrollar el pensamiento matemático a través de la modelación matemática utilizando como recurso didáctico situaciones de riesgo ambiental, ya que al integrar las matemáticas en y para el medio ambiente se propicia por parte de los estudiantes un interés y motivación hacia el estudio de esta ciencia.

Además, la matemática proporciona los instrumentos para interpretar y modelar la realidad, lo cual permite formar en el estudiante el pensamiento matemático para la comprensión y resolución de problemas del contexto. Es importante propiciar espacios que promuevan el análisis detallado de diversos fenómenos de afectación ambiental, los cuales ayudan en la comprensión y toma de decisiones frente a los fenómenos ambientales en diferentes contextos, épocas y actores vinculados, dando paso a la Educación Matemática Crítica.

El desarrollo del pensamiento matemático, la modelación matemática en la cual interviene la resolución de problemas y el problema global que enfrenta la humanidad relacionado a las situaciones de riesgos ambientales, constituyen temáticas abordadas en congresos, eventos y reuniones. En particular el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre otros.

Específicamente en los Topic Study Groups (TSG) del ICME 13, el TSG 19 se titula *Problem solving in Mathematics Education*, el TSG 28 involucra Affect, beliefs and identity in mathematics education y el TSG 34 trata The social and political dimensions of mathematics education, aspectos relevantes en la presente tesis. De igual forma, las temáticas anteriores nuevamente son tenidas en cuenta en el ICME 14 realizado en Shanghai (2021), el TSG 17 titula *Problem posing and solving in Mathematics Education*, el TSG 34 aborda Affect, beliefs, and identity of mathematics teachers y el TSG 54 titula Social and political dimensions of mathematics education, este último incluye la preocupación por el cambio climático como una parte de los grandes riesgos ambientales.

También se tiene en cuenta lo expuesto por el TSG 44, el cual se titula Mathematics and interdisciplinary education porque este proyecto relaciona la interacción de las matemáticas con la parte ambiental. La finalidad del proyecto radica en intentar aportar a las grandes preguntas que dentro de este TSG se plantean tales como: ¿cuáles son las contribuciones de las matemáticas para dilucidar las "grandes" preguntas que a veces, quizás incluso cada vez más, se centran en el desarrollo sostenible? y ¿en qué medida las matemáticas se enseñan para cuestionar el mundo?

La modelación matemática ha sido tratada en el RELME 34, así como en el ICME 14 Shanghai (2021), el TSG 22 aborda las Mathematical applications and modelling in mathematics education y se ha constituido en un campo de investigación de renombre mundial en educación matemática. Su importancia radica en explorar las relaciones entre las matemáticas y el mundo real que se da en los entornos educativos.

Los aportes en eventos internacionales permiten concluir la simbiosis existente entre la matemática y la parte ambiental, esta simbiosis puede explicar y cambiar la realidad mediante la modelación matemática en favor de la sostenibilidad ambiental. Además, propicia que se desarrolle el pensamiento matemático mediante la modelación matemática, en la cual interviene la resolución de problemas que involucran fundamentos conceptuales propios del área.

Gámiz, Flores y Gutiérrez (1997) resaltan la importancia del contexto ambiental como recurso para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, como puntos de referencia básicos para "ambientalizar" las matemáticas escolares. Jianguo (2004) entrelaza las matemáticas y las situaciones de riesgo ambiental desde la pre-álgebra, álgebra y geometría en estudiantes de secundaria.

Por otra parte, Urbano y Rincón (2017) destacan como las actividades planteadas en el aula, las cuales integran las matemáticas contextualizadas con el medio ambiente permiten que los estudiantes se apropien de los conceptos matemáticos y sus aplicaciones. En este mismo sentido Arias (2017) hace énfasis en la transformación de la práctica docente mediante la aplicación de situaciones matemático-ambientales.

La revisión de la literatura sobre el tema permite establecer las siguientes potencialidades:

- ✓ Fortalecimiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática.
- ✓ Propicia la importancia de las situaciones de riesgo ambiental como recurso para el aprendizaje de contenidos matemáticos.

- ✓ Desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática involucrando problemas matemático-ambientales retadores. Progreso en resultados de pruebas saber en niveles muy superiores, superiores y altos en la Institución Educativa Agroindustrial La Pradera de Duitama.
- ✓ Difusión de estrategias de participación de la población docente en la ejecución de Proyectos ambientales escolares (*PRAE)* que mitiguen los riesgos ambientales. Incorporación en el Proyecto Educativo Institucional (P.E.I.) de la formulación y desarrollo de un *PRAE* desde el área de matemáticas.

Por las potencialidades expuestas anteriormente la presente investigación es innovadora y visionaria, ya que busca diseñar actividades matemáticas “atractivas” o “llamativas” para los estudiantes y facilitar a los docentes un recurso para el aprendizaje de contenidos matemáticos. Los anteriores, son puntos de referencia básicos que permiten “ambientalizar” las matemáticas escolares, desde el uso e importancia del contexto ambiental. También, se busca enfrentar las preocupaciones sobre la deserción de los estudiantes de los colegios y mejorar la efectividad del aprendizaje para lograr un mayor conocimiento matemático en los estudiantes.

Por otra parte, los aportes de las entrevistas realizadas a especialistas (ver Anexo 1), encuesta a docente validada por el método Delphi (ver Anexo 2 y 3), la revisión del estado del arte, producto de investigaciones recientes sobre el tema y la experiencia de la autora, permiten constatar las siguientes oportunidades de mejora:

Dar a conocer investigaciones que abarquen técnicas y estrategias de resolución de problemas de modelado en situaciones de riesgo ambiental desde la clase de matemáticas.

- ✓ Presentar investigaciones enfocadas en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación involucrando problemas matemático-ambientales. Lo anterior aporta a los objetivos mundiales del desarrollo sostenible.
- ✓ Proporcionar recursos didácticos que favorezcan la modelación matemática y que a la vez propicien la motivación hacia el estudio de las matemáticas.
- ✓ Proporcionar materiales (talleres, actividades) enfocados en la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental para el fortalecimiento de la estructura mental del estudiante.
- ✓ Dar a conocer un modelo didáctico que involucra el desarrollo del pensamiento matemático, la modelación matemática y las situaciones de riesgo ambiental.

Lo expuesto anteriormente brinda las razones por las cuales se realiza la presente investigación, pues también va enfocada a aportar a la construcción de una cultura ambientalista desde las clases de matemáticas, a la vez que se desarrollan y se fortalecen las competencias implícitas de los contenidos matemáticos.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo contribuir al desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de séptimo grado de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera de la ciudad de Duitama (Boyacá)?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en grado séptimo. El **objetivo general** pretende contribuir con un modelo didáctico que enfatice en la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental, al desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de grado séptimo de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera de Duitama. Como **objetivos específicos** se tienen:

- ✓ Diagnosticar las oportunidades de mejora para el aprendizaje de los estudiantes en torno a los procesos de modelado presentes en la resolución de problemas matemáticos ambientales.
- ✓ Construir una colección de problemas retadores donde se desarrolle el pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental.
- ✓ Diseñar una metodología para el trabajo con el sistema de actividades y las estrategias pedagógicas y didácticas que logre el desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental.
- ✓ Fortalecer las competencias y/o habilidades de modelado en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo. Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presenta las siguientes preguntas científicas:

- ✓ ¿Cuáles tendencias determinan el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática, en particular en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo?

- ✓ ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes en estudiantes de grado séptimo?
- ✓ ¿Cómo concebir un modelo didáctico que propicie el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera de la ciudad de Duitama (Boyacá)?
- ✓ ¿Cómo valorar la eficacia y el impacto del modelo didáctico y del sistema de actividades dirigido al desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de séptimo grado?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis son propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

- ✓ Elaborar el estado del arte sobre el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática, en particular en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo.
- ✓ Determinar los fundamentos teóricos sobre el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo.

- ✓ Elaborar un modelo didáctico para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental.
- ✓ Construir un sistema de actividades basado en el modelo didáctico para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental.
- ✓ Validar el modelo didáctico y el sistema de actividades.
- ✓ Analizar los resultados obtenidos.

El **aporte teórico** radica en el modelo didáctico y el sistema de relaciones que se establece entre sus componentes, en el cual la modelación matemática es el elemento dinamizador permitiendo modelar situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de séptimo de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera de la ciudad de Duitama.

Los **aportes prácticos** radican en un sistema de actividades basados en problemas retadores para desarrollar el pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en estudiantes de grado séptimo. Estrategias pedagógicas y didácticas dirigidas a desarrollar el pensamiento matemático mediante la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en los estudiantes de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera del departamento de Boyacá.

La tesis consta de introducción, seis capítulos, conclusiones, recomendaciones y cinco anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

El planeta está expuesto a constantes riesgos ambientales lo que constituye en uno de los graves y grandes desafíos que la humanidad debe enfrentar en el siglo XXI. La ciencia y la tecnología ofrecen caminos, perspectivas y soluciones para encarar la crisis ambiental que se está produciendo, pero es la educación la clave para que la sociedad comience a reaccionar y la vía más expedita para fomentar comportamientos en beneficio del medio ambiente.

Las matemáticas siendo una de las bases potentes de todas las ramas científicas se convierten en un eje vertebral de la presente investigación y un pilar importante dentro de las aulas. El desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática brindan elementos y técnicas para interpretar y modelar los cambios ambientales del entorno mientras que forman personas analíticas, críticas en la comprensión y resolución de problemas.

En este capítulo se abordan las investigaciones en el mundo y en Colombia en la educación básica relacionadas con el pensamiento matemático involucrando problemas matemático-ambientales, particularmente a través de la modelación matemática.

1.1. El desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en grado séptimo en congresos y reuniones

El desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática en bachillerato, específicamente en grado séptimo ha sido tratado en varios congresos y eventos nacionales como internacionales debido a la relevancia de aportes que presenta en la enseñanza aprendizaje de esta área. A continuación, se presentan los más importantes.

En el 14th International Congress on Mathematical Education (ICME 14) se aborda la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática y enseñanzas matemáticas interdisciplinarias donde en particular, se ha puesto de manifiesto la importancia de una relación bien entendida entre las matemáticas y el mundo real. Se destaca la metodología, principales hallazgos y la relevancia de estos en el contexto de STEM.

En este mismo congreso se enuncia la modelación, interdisciplinariedad y el mundo real en la educación matemática. Así, el modelado puede establecer diálogos entre las matemáticas y el mundo real y movilizar otras disciplinas como la física, la biología, la economía, etcétera, dando lugar a un enfoque interdisciplinario. Se estudian las relaciones teóricas entre la modelación, las matemáticas, el mundo real y la interdisciplinariedad.

El modelado matemático produce un resultado, un modelo, esa es la estructura que conecta los elementos útiles para describir una situación del mundo real. Esto es básicamente trabajo interdisciplinario para producir principios apropiados en el mundo no matemático, así como para fomentar la modelación, sus competencias y construir conocimientos matemáticos.

La 14ª Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de Modelado y Aplicaciones Matemáticas (ICTMA 14) describe las actividades en torno a desafíos de modelado matemático con el objetivo de fomentar aplicaciones y modelado en todos los niveles educativos y establecer investigaciones para evaluar la eficacia de estos enfoques.

Por su parte, el ICMI en su Estudio 14 presenta una investigación relacionada con la solución de problemas del mundo real desde la perspectiva del modelado, donde incluye aspectos que contribuyen a mejorar la calidad de vida ambiental desde el uso de fundamentos conceptuales matemáticos.

En el Mathematical Modelling Outreach (MMO) de 2010 el objetivo principal de MMO es llegar a las escuelas primarias y secundarias de Singapur e introducir el potencial de los modelos matemáticos como una plataforma para provocar el pensamiento matemático, la comunicación y el razonamiento entre los estudiantes. Sugiere cómo las perspectivas teóricas sobre el modelado matemático pueden transformarse en prácticas reales en las escuelas, todo dentro de la infraestructura existente del plan de estudios de matemáticas actual de Singapur.

El CIBEM (2013, 2017) abarca temáticas importantes que se consideran en la presente tesis, por ejemplo, la resolución de problemas como herramienta para la modelación matemática o como vehículo del aprendizaje matemático. A su vez el SEIEM (2018) se interesa por los riesgos ambientales al presentar el proyecto: “Las matemáticas del cambio climático: formación de profesores fuera de las aulas”.

El CIAEM (2015) mediante el proyecto: Consumo de bolsas plásticas, una experiencia de modelación (Modelos y modelación en Educación Matemática) demuestra desde la parte numérica y estadística, la importancia de reemplazar las bolsas plásticas por bolsas reutilizables. Además, considera importante que la información lograda se empiece a difundir, para tener un punto de partida desde la matemática y a través de ella prevenir esos riesgos ambientales.

También en el CIAEM-IACME (2019) involucra la modelación en el aula de matemáticas utilizando el ciclo y proceso de modelación.

En el RELME 32 se destacan los proyectos: “Una experiencia interinstitucional, para abordar el tema del cambio climático y su efecto en las plantas endémicas desde la Matemática Educativa”, de Salazar et al. (2018) y “Solucionemos problemas aditivos, reciclemos y ayudemos a otros a través de las matemáticas”, de Jimenez et al. (2018).

La problemática también se consideró importante en el I Congreso Iberoamericano de Docentes (2018) al concluir que el 68% de los encuestados piensa que la matemática puede realizar una importante contribución al tratamiento de temas de educación ambiental dentro de la investigación para prevenir daños al medio ambiente.

1.1.1. Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education[1]

En el 13th International Congress on Mathematical Education (ICME 13) Stillman y Brown (2019) en el TSG 21 enfatizan la importancia de los modelos matemáticos como solución de problemas del mundo real y la introducción de modelos en los planes de estudios, lo cual significa reevaluar cómo se enseñan las matemáticas.

Es claro que se necesitan estudiantes con experiencia en modelado a medida que se involucran en estas tareas desafiantes. Lo anterior, no es posible si los planes de estudio y/o los profesores no valoran la modelación y, por lo tanto, los estudiantes no participan en la modelización matemática con regularidad. Por lo cual, se sugiere la necesidad de aumentar las experiencias de los estudiantes con los modelos

[1] Stillman, G. y Brown, J. (2019). *ICME-13 Monographs: Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4

matemáticos y todas las actividades matemáticas contenidas en ellos (por ejemplo, simplificar, matematizar, interpretar, validar, verificar).

Se considera que el modelado brinda oportunidades para promover el pensamiento matemático, fomentar la perseverancia y aumentar el compromiso de los estudiantes con las matemáticas. Desde una perspectiva de modelado, cuantas más decisiones toman los estudiantes, más pensamiento matemático se involucra y mayor es su conexión con la situación del mundo real en el cual están usando las matemáticas para explorar. La anterior afirmación es tenida en cuenta en la presente investigación para establecer problemas de modelado que permitan a los estudiantes tener varias decisiones por tomar.

1.1.2. Un panorama de la modelación matemática en los encuentros colombianos de matemática educativa entre 2012-2015[2]

Ortiz y Camelo (2020) presentan el análisis, los resultados y el método de una revisión que consideran aspectos importantes, sobre el reconocimiento que diversos trabajos han venido haciendo sobre la modelación matemática en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME) celebrados entre 2012 y 2015. Los autores hacen un llamado a la comunidad de educadores matemáticos para generar canales que permitan conocer, los desarrollos que se están presentando en torno a la modelación matemática y desde tal reconocimiento avanzar en la construcción de colectivos de trabajo alrededor de ella.

[2] Ortiz, M. y Camelo, F. (2020). Un panorama de la modelación matemática en los encuentros colombianos de matemática educativa entre 2012-2015. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 15(2), 251–267. https://doi.org/10.14483/234.

También concluyen con una preocupación derivada de este estudio inicial, la cual tiene que ver con la interpretación que, tal vez, se le esté dando en las aulas colombianas a las prácticas de modelación matemática, por lo que invitan a la comunidad académica a unir esfuerzos con tal fin. Ortiz y Camelo (2020) se preguntan sobre la producción académica que pudiera estar aconteciendo en los municipios apartados de Bogotá, Cali y Medellín, ya que en estos eventos no se observa un trabajo en torno a la Modelación Matemática.

Por lo anterior en Boyacá se desea realizar un aporte hacia el desarrollo del pensamiento matemático utilizando lo que la comunidad internacional comprende por modelación matemática.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en grado séptimo

1.2.1. Seventh-Graders' Mathematical Modelling on Completion of a Three-Year Program[3]

Este documento aborda el modelado matemático para niños de grado al final de un programa de tres años (desde grado 5° hasta 7°). Los problemas involucran situaciones auténticas que necesitan ser interpretadas y descritas de manera matemática. Las autoras examinan la comprensión matemática y los procesos de matematización que los niños usan para construir sus modelos para el problema final. English y Fox (2005) utilizan situaciones problemáticas no rutinarias que suscitan el desarrollo de construcciones matemáticas significativas para la obtención de modelos.

3 English, L., y Fox, J. (2005). Seventh-graders mathematical modelling on completion of a three-year program MERGA *Building Connections: Research, Theory and Practice*, 321-328.

Los estudiantes debaten qué factores incluir en sus modelos y cómo cuantificarlos. Al cuantificar sus datos, asignan puntos de valor, utilizan cantidades de intervalo, sopesan algunos factores, agregan cantidades y aplican medidas informales. Lo anterior permite crear nuevas cantidades, transformar factores problemáticos en cantidades, transformar cantidades en otras cantidades y cuantificar una medida. Finalmente, crean principalmente fórmulas y listas para respaldar sus argumentos en la construcción de su modelo. En la construcción de modelos matemáticos ambientales del presente proyecto, también se tendrá en cuenta esta última premisa

1.2.2. What Is Known about Secondary Grades Mathematical Modelling -A Review[4]

Stohlmann et al. (2016) sostienen que el modelado matemático está atrayendo más atención y enfoque en el nivel secundario en muchos países debido al conocimiento y las habilidades que los estudiantes pueden desarrollar.

El proyecto permite evidenciar como el modelado matemático es una parte invaluable de las matemáticas para ayudar a los estudiantes a desarrollar las competencias y el conocimiento que necesitan para tener éxito en el mundo tecnológico, global y cambiante en el que vivimos. En este estudio participan estudiantes de 11 a 18 años.

Por lo anterior, el presente proyecto reconoce al modelado matemático como una forma efectiva de garantizar que los estudiantes sean capaces de aprender y desarrollar conceptos matemáticos poderosos, logrando el desarrollo del pensamiento matemático.

---

[4] Stohlmann et al. (2016). What Is Known about Secondary Grades Mathematical Modelling A Review. *Journal of Mathematics Research*. 8. 12-28. 10.5539/jmr.v8n5p12.

Stohlmann et al. (2016) señala la importancia del conocimiento y la experiencia de los docentes con los modelos matemáticos. Los autores al igual que Campbell et al., (2014) afirman que el conocimiento del contenido matemático de los profesores se relaciona positivamente con el rendimiento matemático de los estudiantes.

1.2.3. Mathematical modeling in the secondary school curriculum[5]

Swetz y Hartzler (1991) mencionan como en las conferencias y los comités nacionales que investigan el estado de la educación matemática estadounidense han abogado por un mayor énfasis en la resolución de problemas y situaciones de modelado matemático en el plan de estudios de la escuela secundaria.

Muestra con preocupación cómo existe poca formación de docentes en asuntos de modelado. No se incluye modelado matemático en situaciones de riesgo ambiental, por lo anterior la presente investigación se hace relevante.

1.2.4. Propuesta didáctica para el aprendizaje de la geometría plana a través de la modelación de patrones de la naturaleza, con estudiantes de grado séptimo en la Institución José Celestino Mutis del municipio de Fusagasugá[6]

Vega (2019) utiliza la modelación matemática como principal estrategia didáctica para favorecer y enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría y responder a la problemática observada, entendiéndose como la forma de explicar mediante las matemáticas una situación real.

---

[5] Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum*. NCTM.
[6] Vega, L. (2019). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la geometría plana a través de la modelación de patrones de la naturaleza, con estudiantes de grado séptimo en la Institución José Celestino Mutis del municipio de Fusagasugá*. Cundinamarca.

Este estudio resalta el papel de la contextualización como base para crear conexión entre el saber y el entorno (experiencias de contextos auténticos), para obtener un aprendizaje significativo y comprensivo, facilitando entonces el desarrollo del pensamiento matemático, reflexivo y crítico.

En la investigación se trabaja con estudiantes de grado séptimo utilizando patrones y elementos geométricos de la naturaleza para el aprendizaje de los polígonos. Ésta se contextualiza y logra que el aprendizaje sea más significativo, permitiendo además tener una visión de cuidado y conservación del medio ambiente.

1.2.5. The Learning and Teaching of Mathematical Modelling[7]

Niss y Blum (2020) afirman que la validación de las respuestas del modelo obtenidas consiste en evaluar en qué medida estas respuestas se ajustan a la realidad. Esta apreciación se tiene en cuenta en la validación de los modelos construidos por los estudiantes en la presente investigación quienes además de poseer conocimientos, competencias y estrategias, deben estar dispuestos a enfrentarse a tareas y problemas extramatemáticos.

Los autores consideran como importante la parte tecnológica y/o herramientas digitales para el modelado matemático. Niss y Blum (2020) consideran relevantes los componentes del proceso de modelación, debido a que constituyen la versión básica de lo que suele llamarse el ciclo de modelado: matematización; tratamiento matemático; desmatematización; y validación de respuestas y evaluación de modelos. Los procesos involucrados en la resolución de problemas verbales son: leer y

[7] Niss, M., & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

comprender la presentación del problema, identificar el problema matemático incluido en la presentación del problema, resolver el problema matemático y presentar la solución y escribir y justificar la respuesta.

1.2.6. Mathematical Modelling From Theory to Practice[8]

Lee y Ng (2015) a través de sus estudios tienen la misión de llegar a las escuelas primarias y secundarias de Singapur e introducir el potencial de los modelos matemáticos como una plataforma para desarrollar el pensamiento matemático, la comunicación y el razonamiento de los estudiantes. Señalan la importancia de la búsqueda y planteamiento de problemas para el modelado matemático.

Las actividades de modelado matemático están relacionadas con temáticas como diseño de un café, puntualidad en el avión, plan de telefonía móvil, el mejor avión de papel, diseño de una tienda, dream Home, el Titanic insumergible que son actividades, pero como se puede notar ninguna trata sobre la prevención de riesgos ambientales.

1.2.7. Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling[9]

Blomhøj (2009) propone enfatizar el modelado matemático como un elemento importante dentro de los currículos de secundaria de matemáticas. Sin embargo, la forma en que se organizan los modelos matemáticos y las aplicaciones en los currículos y, especialmente, cómo se evalúan estas partes del currículo revelan sólo

[8] Lee, N. H., & Ng, K. E. D. (Eds.). (2015). *Mathematical modelling: From theory to practice* (Vol. 8). World Scientific.
[9] Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling*. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*.

una influencia muy limitada de la investigación. Por lo anterior, se desea realizar aportes sobre aspectos didácticos para abordar el modelado matemático.

Blomhøj (2009) argumenta que para garantizar que el modelado y las aplicaciones estén completamente integrados en las aulas de matemáticas de secundaria, el modelado debe verse y entenderse como un medio didáctico. Los anteriores criterios se aducen para la presentación de las actividades.

1.2.8. Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education[10]

Arseven (2015) menciona los beneficios al trabajar la modelación en el aula: las matemáticas se vuelven más significativas para los estudiantes, ayudan a comprender mejor el mundo, apoyan el aprendizaje matemático (motivación, formación del concepto matemático, da significados, etc.). Sumado a lo anterior, mejora calificaciones y actitudes hacia las matemáticas, desarrolla habilidades al construir modelos matemáticos. En la presente investigación se espera constatar los beneficios y otros que proporcionan los problemas matemáticos desarrollados utilizando la modelación matemática.

1.2.9. The role of generating questions in mathematical modeling[11]

Fukushima (2021) aclara el papel de la generación de preguntas en el modelado matemático y su relevancia al construir principios para la enseñanza y el aprendizaje del modelado matemático con énfasis en la generación de preguntas. English et al., (2005) mencionan que al compartir preguntas para resolver problemas de modelado

[10] Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research* 3(12): 973-980, 2015 http://www.hrpub.org DOI: 10.13189/ujer.2015.031204
[11] Fukushima, T. (2021). The role of generating questions in mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* DOI: 10.1080/0020739X.2021.1977402

en la lección, los estudiantes generan ideas matemáticas importantes y usan varios modelos matemáticos para representar lo que descubren de ellos. Este estudio manifiesta el papel en el avance del modelado matemático desde varios puntos de vista, el papel de fomentar las competencias de modelado matemático y el papel en facilitar la extensión de la aplicabilidad del modelo matemático. Lo anterior se tendrá en cuenta en la presente investigación.

1.2.10. Sense of Reality Through Mathematical Modelling[12]

Villa y López (2011) sostienen que a pesar de que la modelación se incorpora como un proceso en el currículo lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN), no se ha encontrado suficientes evidencias para observar un importante desarrollo de este proceso en el aula, lo cual está en consonancia con la abundante información empírica reportada en la literatura internacional, entre los investigadores que coinciden en el mismo planteamiento están Kaiser y Maaß (2007).

En consecuencia a lo anterior, MEN (1998) y MEN (2006) sugieren incorporar procesos de modelado y resolución de problemas en el aula, ya que es allí donde la “realidad” cobra sentido.

1.2.11. Mathematical modeling in classroom[13]

Giuliani y Segal (2008) la actividad de modelización provee una visión integrada de la matemática que permite reconstruir en el aula el "quehacer" de esta disciplina. Estas

---

[12] Villa-Ochoa, J. y López, C. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* Springer (701-711). 10.1007/978-94-007-0910-2_67.
[13] Segal, S. y Giuliani, D. (2008) *Modelizacion matematica en el aula/ Mathematical modeling in classroom: Posibilidades y Necesidades.* Editorial Libros Del Zorza, 2008.

actividades se centran en problemas cuyas temáticas son: el problema del bebedero, el problema de las latas, la letra chica de un préstamo de banco y la modelación intramatemática.

Los problemas propuestos por las autoras dejan a cargo la responsabilidad de tomar decisiones sobre la pertinencia y la validez de los recursos que se ponen en juego, lo cual permite a los estudiantes analizar las situaciones de riesgos ambientales y de acuerdo a ello tomar decisiones proambientales.

1.2.12. Modelling in lower secondary mathematics classroom – problems and opportunities[14]

Kaiser y Maaß (2007) consideran la importancia de promover las competencias en el modelado, de resolver problemas del entorno y generar oportunidades de integración de la modelización y la aplicación en el aula de matemáticas en secundaria inferior. Las autoras establecen las clasificaciones de modeladores según su desempeño, afirmando que los mejores modeladores son aquellos que tienen actitudes positivas hacia las matemáticas mismas, así como hacia ejemplos de modelado.

La formulación abierta de problemas de modelización y la necesidad de simplificar la compleja realidad permite a los estudiantes desarrollar soluciones por sí mismos, de acuerdo con sus capacidades. Kaiser y Maaß (2007) sostienen que la actitud positiva hacia los ejemplos de modelado evocada por la conexión con la realidad y el éxito inusual de los estudiantes con rendimiento bajo permite un sentimiento afectivo hacia

[14] Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities. *In Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). Springer, Boston, MA.

las matemáticas y, si se continúan abordando situaciones de modelado, a largo plazo se puede mejorar positivamente la adquisición de competencias matemáticas.

1.2.13. Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo[15]

Los resultados de la investigación muestran cómo los estudiantes proponen cuestionamientos dirigidos a realizar consultas e indagaciones y se motivan frente al trabajo en grupo, aspectos que permiten promover y desarrollar posiciones críticas en su nivel de madurez conceptual (séptimo grado). Los criterios planteados por Martínez (2016) se consideran para la elaboración de actividades, pues contribuyen a que el aula sea un mejor espacio donde se desarrollen habilidades sociales y se aprenda matemáticas en ambientes contextualizados.

1.2.14. Modelación matemática del crecimiento del maíz para el mejoramiento de las competencias matemáticas de los estudiantes del grado 7° (séptimo) de la institución Educativa Valentín Manjarrez del corregimiento de La Loma del municipio de El Paso, Cesar[16]

El objetivo de Echávez (2021) es mejorar los procesos matemáticos a partir de la modelación matemática del crecimiento del maíz en los estudiantes del grado séptimo. La propuesta logró generar la motivación que se espera obtener en los estudiantes, y en la misma proporción, propicia los espacios para que se desarrolle el proceso matemático de la modelación como lo indican los lineamientos curriculares. Estas

---

[15] Martínez, E. (2016). *Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo.* Maestría tesis, Universidad de Antioquia.
[16] Echávez, Y. (2021). *Modelación matemática del crecimiento del maíz para el mejoramiento de las competencias matemáticas de los estudiantes del grado 7° (séptimo) de la institución Educativa Valentín Manjarrez del corregimiento de La Loma del municipio de El Paso, Cesar*.

ideas de cuidar el medio ambiente son consideradas para la elaboración de las actividades y su posible solución.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática de situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo

1.3.1. Modelización en el aula matemática[17]

Ortiz (2019) a través del taller *cuidemos el medio ambiente* en clase de matemáticas involucra el ciclo de modelado propuesto por Maaß (2006) para lograr dos aspectos:el primero, a través de un trabajo con problemas de modelado matemático poner a prueba habilidades, destrezas, conocimientos matemáticos, procesos de comunicación y argumentación y el segundo, analizar cómo ese proceso de modelación puede implementarse en el aula. Se tienen en cuenta estos aspectos.

1.3.2. Intertwining mathematical modeling with environmental issues[18]

Gürbüz y Çalik (2021) sostienen que las teorías, estrategias y modelos de aprendizaje contemporáneos ofrecen el enfoque interdisciplinario, en lo cual los educadores necesitan nuevas formas pedagógicas alternativas para lograrlo en la práctica.

Los investigadores concluyen que el modelado matemático interdisciplinario, como enfoque pedagógico alternativo, es aplicable para incorporar conceptos y problemas ambientales relevantes dentro del modelado matemático. Además, que tiene como

[17] Ortiz, et al. (2019). Modelización en el aula matemática. Eds. Ángel Ruiz*, Educación Matemática en las Américas 2019, XV Conferencia Interamericana de Educación Matemáticas* (XV CIAEM-IACME). pp. 2813-2820. *Aug 05, 2020.* ISBN: 978-9945-09-413-8
[18] Gürbüz, R., & Çalik, M. (2021). Intertwining Mathematical Modeling with Environmental Issues. *Problems of Education in the 21st Century*, *79*(3), 412-424.

objetivo entrelazar diferentes disciplinas entre sí, prepara a los estudiantes para el logro de las 21St habilidades del siglo que deben poseer, como es la indagación, el pensamiento crítico y el pensamiento innovador. Deveci y Karteri, (2021) insisten en que la educación juega un papel importante en el logro de la educación ambiental, la sostenibilidad ambiental y el desarrollo sostenible.

1.3.3. Environment Education in Mathematics Classroom: As an Effort to Develop the Critical Thinking Skills and for Environmental Sustainability Concerning[19]

Habibi (2014) enfatiza en que todos los estudiantes de cualquier nivel deben tener habilidades y competencias de modelado. También considera importante la educación ambiental en el aula de matemáticas como un esfuerzo para desarrollar las habilidades de pensamiento crítico y para contribuir en la sostenibilidad ambiental.

El beneficio de la educación matemática ambiental, radica en que será más fácil para los estudiantes comprender el medio ambiente porque serán ayudados por el cálculo matemático. A través de ese contexto, pueden desarrollar su competencia matemática, como: analizar, representar, modelar e interpretar datos.

1.3.4. La Matemática Contextualizada en el Aula desde una propuesta Ambiental[20]

Urbano y Rincón (2017) integran los conocimientos matemáticos previos y los que desea que sean adquiridos por los estudiantes utilizando actividades ambientales

---

[19] Habibi, M. (2014). Environment Education in Mathematics Classroom: As an Effort to Develop the Critical Thinking Skills and for Environmental Sustainability Concerning. *International conference on research, implementation and education of mathematics and sciences.*

[20] Urbano, A. Rincón D. (2017). *La Matemática Contextualizada en el Aula desde una propuesta Ambiental.*

(cuidado de la huerta y jardín) para fortalecer competencias de comunicación, representación y modelación. Las investigadoras añaden que la relación dada entre las matemáticas y su enseñanza contextualizada en un entorno ambiental, hace posible la integración de conocimientos previos con la nueva información que el estudiante recibe, lo cual genera así la reacomodación de sus estructuras cognitivas y por tanto la producción de aprendizaje significativo.

1.3.5. Implementing the Environmental Education Policy in your school: Mathematics[21]

Los autores declaran que existen oportunidades para incorporar la educación ambiental en materias que no tienen resultados específicos en esta área. La recopilación y representación gráfica de información ambiental puede respaldar el logro de algunos resultados en el Programa de Matemáticas. Dibley & Gould (2001) presentan algunas estrategias que se pueden implementar, tales como: usar datos estadísticos para brindar una mejor comprensión de los problemas ambientales a los estudiantes de 7-8 grado; calculando la esperanza de vida, población, tráfico y problemas de calentamiento global, es decir, situaciones que también se pueden utilizar en la presente investigación.

1.3.6. Introduciendo el medio ambiente en el aula de matemáticas[22]

En la investigación de España, Garcia & Valls (2001) diseñan y aplican un test de actitudes medioambientales (pretest y postest) con el objetivo de medir el cambio de

---

[21] Dibley, J. & Gould P. (2001). *Implementing the Environmental Education Policy in your school: Mathematics.* Brewongle Nueva Gales del Sur, Australia.
[22] Garcia, J. & Valls, M. (2001) Introduciendo el medio ambiente en el aula de matemáticas. *Red de información educativa.* España.

actitud de los estudiantes hacia el medio ambiente que repercute en la prevención de los riesgos medioambientales(agua, residuos sólidos urbanos, fuentes de energía, papel y el reparto de recursos del planeta). En esta investigación, aunque mencionan la importancia de modelos, no hay una aplicación profunda de la modelación matemática.

1.4. Investigaciones sobre el proceso de desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática, específicamente de situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo en Colombia

1.4.1. Fortalecimiento del pensamiento variacional para la modelación matemática de funciones de proporcionalidad directa, a través de la medición de residuos sólidos en los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Sagrada Familia Potrerillo Valle del Cauca[23]

Este proyecto de investigación es una muestra de cómo a partir de situaciones problema que involucran residuos sólidos, como el papel y el plástico, generados en la institución Educativa Sagrada Familia Potrerillo Palmira Valle del Cauca, se construye de la modelación (aprendizaje activo) de las funciones de proporcionalidad directa (función lineal) de dicha caracterización por parte de los estudiantes. Arango (2018) señala que el desarrollo del pensamiento variacional puede darse por medio de la modelación matemática.

[23] Arango, F. (2018). *Fortalecimiento del pensamiento variacional para la modelación matemática de funciones de proporcionalidad directa, a través de la medición de residuos sólidos en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Sagrada Familia Potrerillo Valle del Cauca.* Universidad Icesi.Cali.

1.4.2. Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación[24]

Esta investigación no es propia de grado séptimo, pero se utilizan aspectos propios de la modelación como lo son: la delimitación de un tema a indagar, la formulación de hipótesis a partir de fenómenos de la realidad y la construcción de una mirada más crítica y reflexiva frente al fenómeno que se estudia. En la experiencia expuesta en el CIAEM (2015) se describen una serie de momentos y se exponen consideraciones sobre cada uno de ellos, permitiendo ampliar su visión frente a las relaciones entre las matemáticas, otras disciplinas y la sociedad. Los criterios dados por Cardona (2015) son considerados para el desarrollo de las actividades de la presente tesis.

1.4.3 Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática[25]

Rivera, et al (2016) afirman que las actividades planteadas en grupo posibilitan hacer transformaciones, asociaciones, transitividades y conservaciones en el proceso de medición de las áreas. Además de articular algunos elementos del pensamiento numérico con el métrico, geométrico y el variacional. A través de la construcción del modelo y el proceso de la modelación los estudiantes desarrollan su pensamiento matemático. Por lo anterior se tiene en cuenta la Comunidad de Práctica de Wenger en la presente investigación.

---

[24] Cardona, A (2015). Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación. *Comité Interamericano de Educación Matemática.* http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1457/561.

[25] Rivera, S.; Londoño, S. y Jaramillo, C. (2016). Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* 48, 79-99. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/762/1288

Conclusiones del capítulo 1

Las investigaciones anteriores permiten considerar las siguientes tendencias con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática para generar el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental.

Proceso de modelado matemático involucrando la resolución de problemas donde se enfatice en competencias y habilidades de modelado según Gürbüz y Çalik, (2021) Stillman (2022) y (2015), Ortiz (2019); Arango (2018); Rivera, S. ; Londoño, S. y Jaramillo, C.(2016); Kaiser (2007); Maaβ (2006); English, L., Fox, J. y Watters, J. (2005); Galbraith y Clatworthy (1990).

Proceso de modelado matemático incluyendo la resolución de problemas y construcción del conocimiento orientado más a la comprensión de conceptos. Los investigadores que aportan a esta tendencia son Deveci y Karteri, (2021); Urbano y Rincón (2017); Habibi (2014); Dibley & Gould (2001); Cardona (2015).

Proceso de modelado matemático involucrando la resolución de problemas en la generación de preguntas generadoras y creencias de los estudiantes. Se destacan Fukushima (2021); Galbraith, P., Stillman, G., & Brown, J. (2017); Galbraith, P., Stillman, G., y Brown, J. (2017); Stillman (2019); Galbraith (2015); Garcia & Valls (2001) Treilibs, V., Burkhardt, H. y Low, B. (1980). El papel de propiciar la extensión de la aplicabilidad del modelo matemático, enfatizan en esta tendencia Fukushima (2021) y Gürbüz y Çalik (2021).

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El conocimiento matemático actualmente se considera como un pilar fundamental para el buen desempeño de las personas dentro de un mundo globalizado que exige el desarrollo de competencias en los estudiantes. Una de ellas consiste en interconectar las nuevas ideas matemáticas en beneficio de los distintos ámbitos que los rodea como el social, político, económico, pero sobre todo el ambiental.

Este capítulo hace referencia a los fundamentos teóricos de esta investigación: fundamentos filosóficos, psicológicos y didácticos; la teoría de la resolución de problemas, problemas retadores, la modelación matemática y la Educación Matemática Crítica. Además, se valoran los fundamentos de las situaciones de riesgo ambiental desde la clase de matemáticas; la Comunidad de Práctica de Wenger, el desarrollo del pensamiento matemático y los referentes sobre los modelos didácticos.

2.1. Fundamentos filosóficos, psicológicos, pedagógicos y didácticos

El aula de clase es un espacio que permite el desarrollo de la competencia argumentativa, propositiva, y el análisis de aspectos de tipo epistemológico, psicológico, comunicativo y cognitivo; competencias y habilidades fundamentales en la formación escolar.

En concordancia a lo anterior, desde las prácticas pedagógicas, el docente debe realizar una reflexión de su realidad académica donde se haga evidente su saber epistemológico, psicológico, pedagógico y didáctico. Díaz (2009) sostiene que “*la educación puede definirse como el proceso de socialización de los individuos. Al* *educarse, una persona asimila y aprende conocimientos*"[26]. Y cuando se habla de conocimiento se relaciona con la epistemología, lo cual va más allá del análisis y la comprensión de los fundamentos conceptuales de la matemática y de lo que interviene en su constructo. Estos procesos son la validez, el método, la objetividad, la verdad, la fiabilidad, la teoría, las hipótesis, las pruebas, entre otros.

Fundamentos filosóficos. Davis y Hersh (1988) consideran que "*la construcción de conocimiento matemático se realiza cuándo cada individuo se enfrenta a actividades en las que participa activamente, confrontado con otras y construyendo un conocimiento común*"[27] lo cual permite precisar algunos conceptos matemáticos elementales y, con base en todo lo anterior, revisar y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte, Lakatos (1978) plantea el papel de un problema y una conjetura para construir conocimiento matemático como valioso aporte para fortalecer las habilidades del pensamiento.

De acuerdo a lo anterior, los problemas que se encuentran dentro de las situaciones de aprendizaje contextualizadas en el riesgo ambiental contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático. El modelo didáctico propuesto concibe indispensables los resultados colectivos del pensamiento matemático y la relación que éste tiene con el medio cultural, ambiental y social.

Fundamentos epistemológicos. Radford (2016) afirma que "*El uso de la epistemología en el contexto de la educación no puede lograrse sin una reflexión teórica sobre la*

[26] Díaz, F. (2009). *Estrategias Instruccionales*. México: Editorial Trillas.
[27] Davis, J., Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática.* Editorial Labor, Barcelona.

forma en que la epistemología puede ayudar a los educadores en su investigación"[28], por lo cual en los docentes recae la labor inicial de hacer una amplia revisión de sus concepciones epistemológicas, de analizar y cuestionar sus implicaciones en la práctica.

Schoenfeld (1988), citado en Santos (1992) enfatiza "*Si uno desea que la gente emerja del salón de clases con el sentido real de las matemáticas, entonces el salón de clases tiene que reflejar actividades donde los estudiantes tomen parte del desarrollo de las matemáticas de tal manera que encuentren sentido estudiar matemáticas… es decir, que exista una motivación para que los estudiantes continúen estudiando matemáticas fuera del salón de clases*"[29].

Fundamentos psicológicos. Están dados en Vygotsky (1981) Ernest, et al. (2016) afirman que, "*para Vygotsky, el conocimiento no es algo que el alumno posee, sino una competencia que se infiere de la capacidad manifiesta del alumno para completar una tarea, ya sea sin ayuda o con la ayuda de otra persona más capaz, en lo que se denomina la zona de desarrollo próximo"* [30] y Vygotsky (1981) añade "*las relaciones sociales o entre personas sustentan todas las funciones superiores y sus relaciones"*[31], esto quiere decir que las personas se ayudan para construir un significado que dé sentido a algo, el cual ellos asimilan e interiorizan. Estos procesos de orden superior son claves en el desarrollo del pensamiento matemático.

---

[28] Radford, L. (2016). *Epistemology as a research category in mathematics teaching and learning Laurentian University*. Canadá. p. 3.

[29] Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática., 4*(2), 16. Obtenido de Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-2.pdf

[30] Ernest, Paul, et al. *The philosophy of mathematics education*. Springer Nature, 2016.

31 Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. En J. V. Wertsch (Comp.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, NY: Sharpe.

Vygotsky (1978) define la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como *"la distancia entre el nivel de desarrollo, lo que sabe, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo próximo, lo que puede llegar a saber, determinado a través de la resolución de unos problemas bajo la guía o mediación de un adulto o en colaboración con otro niño más capaz"*[32].

En este sentido, la Comunidad de Práctica de Wenger es fundamental para la resolución de problemas retadores donde interviene el modelado matemático. Desdde esta perspectiva, se aprende a regular los procesos cognitivos a partir de las indicaciones y directrices de los adultos y en general de las personas con quienes interactúa. De esta manera, se estimula y activa una variedad de procesos mentales.

En esta tesis se tiene en cuenta los aportes de Vygotsky, ya que las acciones físicas como las lógicas matemáticas se deben a los instrumentos sociales (mediadores) también por que en el presente trabajo se tiene en cuenta la metacognición.

Fundamentos Pedagógico-didácticos. En el constructivismo el conocimiento se forma del proceso dinámico en el cual el estudiante reinterpreta la realidad en su mente. Esta premisa se integra muy bien con el modelo didáctico que se plantea, ya que éste propende el papel activo del estudiante como constructor de su conocimiento. El objetivo es que el estudiante avance en la formulación de modelos matemáticos más complejos para comprender y actuar sosteniblemente con el entorno.

Hersh (1997) sostiene que "*Sabemos un poco acerca de cómo se aprenden las matemáticas. Las matemáticas se aprenden calculando, resolviendo problemas y*

---

[32] Vygotsky, L.S. (1978) *Mind In Society: The development of higher psychological processes* Cambridge: Harvard University Press, p. 86.

conversando, más que leyendo y escuchando"[33]. Por lo anterior, se plantea un sistema de actividades que incluyan problemas retadores que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático mediante la modelación de situaciones de riesgo ambiental. Según Schoenfeld (1992) las matemáticas proporcionan modelos que ayudan a comprender y a dar soluciones al mundo que está alrededor. Tanto la pedagogía como la didáctica son constructos determinantes para la construcción del conocimiento. Guerrero (2011) concibe la pedagogía "*como aquella que potencia la relación dialógica entre los profesores y sus estudiantes, es una disciplina de la formación a través del diálogo pedagógico. Ambos, son sujetos dialógicos que se respetan y construyen su identidad en esa interacción intersubjetiva"*[34].

Por lo anterior, la pedagogía permite que las metodologías y técnicas resignifiquen los procesos de enseñanza, aportando elementos que promuevan la orientación y construcción de los saberes, la asimilación de los conceptos, además de orientar estos saberes, coordinar los procesos educativos entre los integrantes del aula y direccionar la construcción de los conocimientos.

Brousseau (1986) define la Didáctica de la Matemática, desde un punto de vista sistémico, como aquella que *"… estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas"*[35]. Este concepto expone el problema del

---

[33] Hersh, Reuben (1997). *What is Mathematics, Really.* Oxford, England: Oxford University Press, p. 27.
[34] Guerrero, O. (2011*). La didáctica de la matemática como referente en la formación (inicial y permanente) del profesor de matemática*. En S. Arias (Ed.), Evaluación y retos globalizadores (1-35). San Cristóbal: Universidad de Los Andes – Táchira.
[35] Brousseau, G. (1986). Fodements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), p. 33-115 Tomado de https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

aprendizaje de la matemática desde una mirada sistémica al tener en cuenta al docente, el estudiante y el medio como subsistemas del sistema didáctico.

De esta manera permite llevar con calidad la tarea docente, desde seleccionar, diseñar y utilizar los materiales que facilitan el desarrollo de las habilidades, estrategias y competencias en los estudiantes. Lo anteriormente abordado se tiene en cuenta al orientar el modelo didáctico, ya que contiene una parte teórica que guía la práctica docente.

Fundamentos en Educación Matemática. Se asume la Educación Matemática Crítica (EMC) la cual ha sido abordada por Skovsmose y Valero (2012). La EMC permite que a través de la solución de situaciones y problemas planteados en la clase de matemáticas se puede contribuir a la creación de buenos ciudadanos, con posturas críticas hacia los efectos negativos de la sociedad. La clase de matemáticas se convierte en una micro sociedad, donde está presente también la justicia social, la equidad y la democracia. Sumado a lo anterior, la EMC pretende a su vez favorecer la construcción y comprensión de conceptos, apoyar el desarrollo de habilidades de pensamiento que permitan transformar el contexto, viendo su toma de decisiones reflejadas en una mejor la calidad de vida.

Los investigadores en matemáticas han detectado la resolución de problemas como el entorno privilegiado para poner en juego los conceptos, habilidades y procesos matemáticos que a la vez logran el desarrollo del pensamiento matemático. Al respecto Hersh (1997) señala que "*resolver problemas e inventar otros nuevos es la esencia de la vida matemática. Si las matemáticas se conciben separadas de la vida matemática,* *por supuesto que parecen muertas*”[36], por lo anterior, es fundamental en el modelo matemático considerar como elemento clave la resolución de problemas retadores, además de los objetivos, contenidos, métodos, estrategias, metodologías y la evaluación.

2.2. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

Diferentes investigadores abordan la definición de problema, entre los que se destacan: Pölya (1965), Kilpatrick (1967), Schoenfeld (1985,1992); Krulik y Rudnik (1980); Falk (2001), Pérez (2004) ,Lesh y Zawojewski (2007), y Sriraman y English (2010), Cai & Lester (2010), Toh, TL (2011) Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros.

Pölya (1965) expresa tener un problema es *“… buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”*[37].

En la tesis se asume la definición de Pérez (2004), pues se ajusta al objetivo del proyecto. Los problemas que se proponen en las actividades constituyen un reto para los estudiantes, por tal motivo se aduce lo expresado por Pérez (2004), acerca de que los “… *problemas retadores invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento”*[38].

Se ha visto la importancia que los investigadores presentan dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, porque desde que el estudiante comprende el problema abre

---

[36] Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really.* Oxford, England: Oxford University Press, p. 17.
[37] Polya, G. (1965*). Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas, p. 28.
[38] Pérez, J. (2004). *Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria.* Universidad Antonio Nariño.

nuevas posibilidades para tratarlo, innova y aprende a usar procesos matemáticos, además que genera un aprendizaje.

Falk (2001) afirma que un problema es aquel *"… cuya solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidas. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático en sí"*[39], definición que se tiene en cuenta en la tesis.

Diversos investigadores han abordado lo que significa resolver un problema, entre los que se destacan: Restle y Davis (1962), Pölya (1965), Fridman (1991), Schoenfeld (1995), Lesh y Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), entre otros.

En la investigación se toma lo dicho por Pölya (1965), donde expresa que: "… *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"*[40].

Esta tesis asume el modelo propuesto por Pölya (1965), el cual tiene las siguientes fases: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y evaluación de la solución y de la vía.

Las preguntas heurísticas son significativas al momento de resolver un problema, pues según Rojas (2009) estas pueden *"…comprenderse como una actividad externa que realiza el docente y que provoca un estímulo en el sistema de conocimientos y recursos*

[39] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana*, VIII(1), 21.
[40] *Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas*, p. 215.

del alumno. Este se realiza sobre una situación dada, de modo que lo impela a buscar lo que se requiere en un momento dado, para resolver una situación no conocida total o parcialmente, pero sin ofrecer directamente la vía de solución, la que debe ser encontrada por el alumno"[41].

Lo anterior señala aspectos relevantes para proponer el sistema de actividades (está conformado por problemas retadores) que se sustenta en el modelo didáctico que enfatiza en la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental para el desarrollo del pensamiento matemático.

2.3. Referentes sobre la Educación Matemática Crítica

Actualmente, el contexto social, político y ambiental repercute en los enfoques teóricos referentes a la enseñanza de las matemáticas, las cuales han generado propuestas pedagógicas que abordan problemáticas del sector, tal es el caso de Freire (1980), quien "*presenta la educación como una oportunidad de reflexión y transformación de problemáticas sociales"*[42]. Por su parte, D´ambrosio (2003) muestra a las matemáticas como una "*herramienta de emancipación ante la opresión, por medio de la presentación de las matemáticas como una actividad social, cultural es decir humana"*[43], con lo cual le da relevancia a las comunidades de construir sus propias inferencias e ideas matemáticas para llevarlas a la práctica en su entorno mediante el modelo. En este proceso se es consciente de que las matemáticas están alrededor de

---

[41] Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador*. Holguín: Tesis doctoral publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. p. 31.
[42] Freire, P. (1980). *La educación como práctica de la libertad*. Madrid, España: Siglo XXI. Disponible en https://asslliuab.noblogs.org/files/20
[43] D´Ambrosio, U. (2003). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. *Revista Números* 43(90), pp. 439-442.

todo lo que se hace y cuánto más compleja es la sociedad, más complejas serán las necesidades matemáticas.

Skovsmose (1999) afirma que la Educación Matemática Crítica "*produce nuevas invenciones de la realidad, no sólo en el sentido en que las nuevas percepciones cambian las interpretaciones sino también en el sentido en que las nuevas matemáticas penetran parte de la realidad y la reorganizan… las matemáticas dan forma a la realidad*"[44]. En otras palabras, las matemáticas con su poder formativo pueden generar valiosos aportes en beneficio de la comunidad ofreciéndole en primera instancia al educando espacios orientados que desarrollen su competencia crítica.

Skovsmose (2022) al respecto señala "*Las matemáticas no sólo operan como una herramienta para dar formato a las posibilidades, sino que también llegan a formar parte integral de las realidades. Muchos discursos con respecto al modelado matemático lo presentan como una descripción separada de una parte de la realidad. Al hablar de las matemáticas en acción, trato de resaltar que a través de las matemáticas se hacen intervenciones en la realidad*"[45], por lo anterior el sistema de actividades presenta situaciones ambientales, uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenibles ODS.

Skovsmose (2004) enuncia como la "*Matemática en acción, hace referencia a los procesos de observar cómo las abstracciones matemáticas pueden ser proyectadas*

[44] Skovsmose. O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática* (cap. 3 y 4). Una empresa docente. Bogotá, Colombia.
[45] Skovsmose, O. (2022). Concerns of Critical Mathematics Education–and of Ethnomathematics. *Revista Colombiana de Educación*, (86), 361-378, p. 368.

en la realidad"[46], los cuales son aspectos claves para pasar del pensamiento matemático a un modelo como resultado de un proceso analítico y lógico. Otros aspectos interesantes son los señalados por Skovsmose (1999) los cuales son:

- ✓ *"El conocimiento matemático son las habilidades matemáticas para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones, para ejecutar algoritmos y realizar cálculos y para inventar y descubrir nuevas matemáticas.*
- ✓ *El conocimiento tecnológico es la habilidad de aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos; y el conocimiento reflexivo en sí que tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se puede identificar como un fin tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de lograr tal fin con las herramientas seleccionadas.*
- ✓ *El conocer reflexivo permite identificar las nociones y comprensiones previas que se visten con un disfraz de neutralidad en su paso por las distintas transiciones de lenguaje que suceden en el modelaje matemático, entre los lenguajes natural, sistémico, matemático y algorítmico"*[47].

Por ende, para la Educación Matemática Crítica es necesario que los involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática asuman una actitud de autorreflexión, de crítica y a la vez puedan descubrir, apropiarse y transformar las relaciones de poder subyacentes en las prácticas pedagógicas y experiencias del desarrollo matemático.

---

[46] Skovsmose, O. (2004). Critical mathematics education for the future. *Regular Lectures in The 10th International Congress on Mathematical Education.* Extraído el 2 de mayo de 2013 de http://www.icme10.dk/pro ceedings/pages/regular_pdf/RL_Ole_Skovsmose.pdf

[47] Skovsmose. O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática* (cap. 3 y 4). Una empresa docente. Bogotá, Colombia.

Dentro de toda experiencia de aprehensión de conocimientos es fundamental diseñar y orientar ambientes de aprendizaje(AA). La investigación asume la concepción planteada por Skovsmose (2010) quien enfatiza en que un AA "*se desarrolla en una situación de la vida real próxima al estudiante, en ella el docente recurre a estrategias que orientan hacia el cuestionamiento de situaciones no precisamente matemáticas en las que se hace uso de ellas para dar respuesta a dichos cuestionamientos*"[48].

El trabajo de Skovsmose y Valero (2007) está dirigido a la conservación y mejora de los recursos naturales de la sociedad, a la vez que se especifican los tres tipos de conocimiento relacionados con la alfabetización matemática y se desarrollan las habilidades del pensamiento en el proceso de modelación.

2.4. Referentes sobre el desarrollo del pensamiento matemático

Investigadores destacan la importancia del uso de la resolución de problemas para desarrollar el pensamiento matemático, al respecto Takahashi (2007) enfatiza que "*Una de las formas de brindar a los estudiantes la oportunidad de adquirir no solo conocimientos y habilidades, sino también pensamiento matemático es enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas*"[49].

Así mismo, el docente debe motivar a sus estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y en la socialización de sus soluciones, como también a comunicar el proceso que le llevó a encontrar la respuesta correcta, o el camino transitado de conjeturas que lo condujo a la generalización.

[48] Skovsmose, O. (2010). Escenarios de investigación. *Revista EMA,* 24.
[49] Takahashi, A. (2007). Planning a lesson for students to develop mathematical thinking through problem solving. *DePaul University*. Vol 26, p.2.

Otra tarea desafiante para el docente es promover la creatividad, la empleabilidad y exploración de estrategias, técnicas y métodos alternativos de solución, así como rescatar las vías y los aportes de solución que destaquen por su belleza, genialidad, utilidad y beneficios al desarrollo del pensamiento matemático. Según Mason, Burton y Stacey (2010) "*El pensamiento matemático se puede considerar como un proceso dinámico que mejora las ideas complejas y amplía la comprensión"*[50].

Hıdıroğlu & Can (2020) destacan los tipos de pensadores matemáticos: visualistas, analistas y conceptualistas. Se pretende indagar el tipo de pensadores matemáticos que existen en clase, así como las formas que utilizan para solucionar un problema.

Este desafío rodea no solo al currículo que debe ser más *poderoso,* sino a la creación efectiva de ambientes pedagógicos vinculados con las estrategias didácticas y por supuesto, al sistema de actividades. Polya (1963) sostiene que *" uno de los objetivos principales del plan de estudios de matemáticas es desarrollar la capacidad del alumno para resolver problemas*"[51]. De esta manera se busca tener un apoyo en el desarrollo de dicho pensamiento matemático por lo cual se contempla los aportes de Stacey, Burton y Mason (2010), los cuales sostienen la importancia de particularizar y luego generalizar.

Los problemas retadores planteados van enfocados a lo expuesto por Schoenfeld (2020) el cual afirma que *"Un atributo de un buen problema es aquel que abre caminos para conjeturas, para hacer conexiones, para abstraer, generalizar y para nuevos*

[50] Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically.* Pearson Education Limited 2010, p, 161.
[51] Pólya, G. (1963). Sobre el aprendizaje, la enseñanza y la enseñanza del aprendizaje. *El Estadounidense Matemática Mensual, 70(6), 605-619. doi:10.2307/2311629*.

problemas… porque la forma en que se construye la matemática es mediante la búsqueda constante de ampliar lo que sabemos a través de generalizaciones, abstracciones y la búsqueda de cuestiones de estructura"[52].

Se pretende según Falk (2021) que el estudiante sea "*Una persona que tiene confianza en sus propios medios de analizar un determinado problema, que puede pensar autónomamente, desarrolla con total naturalidad formas de pensamiento creativo, y que la matemática es una de las áreas que promueve esta creatividad*"[53]. Lo anterior es fundamental para la construcción de los modelos por parte de los estudiantes.

2.4.1. Referentes sobre situaciones de riesgo ambiental en la clase de matemáticas

Es bien sabido que los problemas ambientales se han extendido a nivel mundial, lo que tiene grandes influencias en todos los ámbitos sociales, políticos y ambientales. Hacerles frente a los riesgos ambientales (naturales y antrópicos) es urgente, porque estos riesgos o factores provocados por el hombre o por la misma naturaleza favorecen la posibilidad de que el medio experimente algún daño.

Por lo cual, se busca prevenir los riesgos ambientales desde la clase de matemáticas. Eames, Cowie & Bolstad (2008) consideran como" *en las instituciones educativas el gran reto es pasar del planteamiento a la sensibilización y concienciación que genere cambios en la percepción y actitudes de los estudiantes frente a las problemáticas ambientales actuales, en pro de un cambio positivo que genere a futuro un manejo,*

---

[52] Schoenfeld, A. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM. 52. 10.1007/s11858-020-01162-w.*

[53] Falk, M. (2021). Desarrollo del pensamiento matemático por medio de la solución de problemas . *Seminario III. Pensamiento matemático y educación matemática.* Bogotá.

control y disposición adecuado de los recursos naturales al igual que el planteamiento de soluciones a problemas ambientales actuales"[54].

Steffensen, Herheim,y Rangnes (2021) afirman que *"Las matemáticas, o las formas en que se utilizan las matemáticas, contribuyen al cómo se entiende el cambio climático futuro. Considerar las matemáticas como un poder de formateo en la sociedad está en línea con el argumento de Skovsmose (1994) de que las matemáticas tienen una influencia social importante; de ello se deduce que comprender este poder se convierte en un aspecto esencial de la educación matemática crítica"*[55].

Skovsmose (1994) afirma que "*las matemáticas se usan para modelar y resolver problemas y, en consecuencia, no solo 'vemos' de acuerdo con las matemáticas, también 'hacemos' de acuerdo con las matemáticas*"[56]. La perspectiva de Skovsmose ofrece implicaciones sobre cómo las matemáticas pueden constituir la realidad social en el sentido de que el modo de pensamiento es utilizado para facilitar el razonamiento, y este tipo de abstracción se ejemplifica mediante conceptos matemáticos y modelos matemáticos.

Li y Tsai (2020) afirman que "*la pregunta que surge en cuanto a cómo definir y promover la sustentabilidad en la educación matemática permanece sin respuesta. Dado que las matemáticas son la espina dorsal de la civilización moderna D'Ambrosio*

[54] Eames, C., Cowie, B. & Bolstad R. (2008) An evaluation of characteristics of environmental education practice in New Zealand schools, *Environmental Education Research,* 14:1, 35-51.
[55] Steffensen, L. & Herheim, R. & Rangnes, T. (2021). The Mathematical Formatting of How Climate Change Is Perceived Teachers' Reflection and Practice, 185-209. *ResearchGate.* 10.1163/9789004465800_009
[56] Skovsmose, O. (1994). Towards a philosophy of critical mathematics education. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, p.55.

(2007)[57]. Por lo anterior la presente tesis puede contribuir a cómo desde la clase de matemáticas se puede además de desarrollar el pensamiento matemático promover una cultura ambiental y prevenir los riesgos ambientales que la humanidad posee aportando a los objetivos de desarrollo sostenible y al posible campo de educación matemática sostenible.

2.5. Referentes sobre la modelación matemática

La modelación matemática se convierte en una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos. Para Niss, Blum & Galbraith (2007) la modelación matemática es una estrategia didáctica que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto, por ende, se plantean problemas que potencien el desarrollo del pensamiento matemático.

Villa (2007) define "*un modelo matemático como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación"*[58], en este caso se abordan situaciones de riesgo ambiental como recurso didáctico.

English (2006) afirma que "*la modelización se asocia a cuando los niños generan y desarrollan sus ideas y procesos matemáticos propios, para formar sistemas de relaciones que son generalizables y reutilizables…estos procesos incluyen interpretar y reinterpretar el problema, información, tomar decisiones apropiadas, justificar las propias razonar, plantear hipótesis y problemas, presentar argumentos y*

[57] Li, H. C., & Tsai, T. L. (2020). Philosophy of education for sustainable development in mathematics education: ¿have we got one? *Journal Mathematics Teaching-Research Journal*, *12*(2), 136-140, p.136.
[58] Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85, p. 65.

contraargumentos, aplicar el aprendizaje previo y actuar metacognitivamente"[59]. Se asume la definición desde un punto de vista educativo, ya que los objetos matemáticos que interactúan en el ciclo de modelado tienen relación con el mundo real

Según Ang (2001) "*un modelo matemático puede ser considerado como una simplificación o abstracción de un (complejo) problema o situación del mundo real en una forma matemática convirtiendo el problema del mundo real en un problema matemático"*[60], para resolver problemas de modelado, es esencial construir un modelo de la situación. En Estados Unidos los Estándares Estatales Básicos Comunes en Matemáticas (CCSSM) (2010) definen el modelado como "*el proceso de elegir y usar matemáticas y estadísticas apropiadas para analizar situaciones empíricas, para comprenderlas mejor y mejorar las decisiones"*[61].

Para Ang (2001) *"El modelado matemático es un proceso de representación de problemas del mundo real en términos matemáticos en un intento de encontrar soluciones a los problemas. El problema se puede resolver usando cualquier técnica conocida para obtener una solución matemática. Esta solución es luego interpretada y traducida a valores reales"*[62], es decir que el proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno o situación real es a lo que se llama: modelización matemática.

[59] English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics*, 63(3), 303-323, p. 321.
[60] Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator,* 6(1), 62-74, p. 64.
[61] Common Core Standards for Mathematics. (2010). *National Governors Association Center for Best Practices.* Washington D.C.: Council of Chief State School Officers.
[62] Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator,* 6(1), 62-74, p. 64.

Según Blum (2011), "*la modelización matemática son tareas que requieren la traducción entre la realidad y las matemáticas. Una tarea de modelado real cambiaría la visión de una persona sobre las matemáticas como un campo preciso y exacto para comprender las inexactitudes de los métodos de medición y las estimaciones imprecisas en la realidad"*[63].

En este sentido, Villa (2007) establece que "*la modelación matemática es la actividad que se realiza en la clase de matemáticas cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización matemática. La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un "micromundo" que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real".*

Según Blum y Niss (1991) la modelación matemática es el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático, pero en este proceso de modelación se tendrá en cuenta lo expuesto por Alsina (2007) el cual señala que el trabajo colaborativo en la modelación matemática permite interacciones que favorecen un ambiente social y la promoción de discusiones para la solución de problemas más complejos.

El sentido de realidad mediante la modelación matemática, se dirige a la necesidad de develar las matemáticas de los contextos socioculturales. De acuerdo con Skovsmose (1994), la modelación matemática siempre activa una comprensión sobre el fenómeno

---

[63] Blum, W. (2011). Can Modeling Be Taught and Learnt? In G. Kaiser et al. (Eds), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp.15-30). London: Springer.

de estudio, él establece que un modelo matemático está siempre basado sobre una interpretación específica de la realidad.

Ang (2009) expresa que "*al pasar por las actividades de modelado matemático, se podría desarrollar un pensamiento de orden superior para resolver problemas del mundo real y aplicar habilidades de resolución de problemas en el proceso*"[64]. En correspondencia a lo anterior, Keitel (1993) señala de la modelización de situaciones que "*cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel, necesarias para enfrentar un mundo cada vez más matematizado*"[65].

Los procesos de modelación son importantes para desarrollar el pensamiento matemático y elaborar el producto, en este caso el modelo. Para la determinación del modelo matemático del presente proyecto se analizaron los ciclos de modelación propuestos por Swetz y Hartzler (1991), Maaß (2006), Blum y Leiβ (2007) ,Sriraman, Mousoulides y Christou, (2008), Blum-Borromeo (2010), Blum, (2013), Pollak y Garfunkel, (2013) y Anhalt y Cortez (2015) y Gürbüz y Çalik (2021). Finalmente se asume este último ciclo de modelado interdisciplinario que a continuación se explicita.

Gürbüz y Çalik (2021) presentan el proceso de modelado matemático interdisciplinario de matemáticas y ciencias (p. ej., química, física, biología, ciencias ambientales). Este tipo de modelado tiende a apoyar el aprendizaje contextual (aprendizaje basado en el contexto) y habilidades de pensamiento de orden superior (por ejemplo, resolución de

---

[64] Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator,* 6(1), 62-74, p. 64.
[65] Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood, 19-30, p.24.

problemas, 21st habilidades del siglo, pensamiento matemático, habilidades de razonamiento, pensamiento creativo y alfabetización científica), (ver Figura 1).

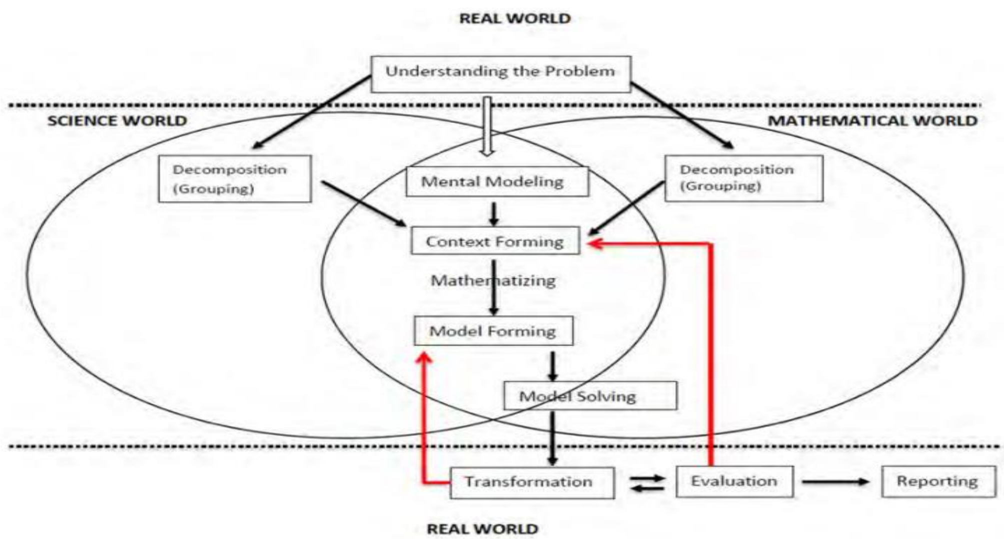


Figura 1. Proceso de modelado interdisciplinario. Fuente: tomado de Gürbüz y Çalik (2021)

También es relevante tener en cuenta las niveles de competencia de modelado de estudiantes, propuestos por Saijam y Seebut (2017) (ver Figura 2).

Total de estudiantes	Modelo matemático nivel de competencia
N° de estudiantes	Nivel 5: Es capaz de experimentar el proceso de modelado matemático y validar la solución de un problema matemático en relación con la situación dada.
N° de estudiantes	Nivel 4: El estudiante es capaz de recoger un problema matemático de la situación real, trabajar con este problema matemático en el mundo matemático, y tener resultados matemáticos.
N° de estudiantes	Nivel 3: El estudiante es capaz de encontrar no solo un modelo real, sino que también lo traduce a un problema matemático adecuado, pero no puede trabajar con él claramente en el mundo matemático.
N° de estudiantes	Nivel 2: Después de investigar la situación real dada, el estudiante encuentra un modelo real mediante la estructuración y la simplificación, pero no sabe cómo transferir esto a un problema matemático (crea una especie de problema verbal sobre la situación real).
N° de estudiantes	Nivel 1: El estudiante solo comprende la situación real dada, pero no es capaz de estructurar y simplificar la situación o no puede encontrar conexiones con ninguna idea matemática
N° de estudiantes	Nivel 0: El estudiante no ha entendido la situación y no es capaz de esbozar o escribir nada concreto sobre el problema.

Figura 2. Niveles de competencia de modelado. Fuente: tomado de Saijam y Seebut (2017)

Kaiser y Maaß (2007) distinguen cuatro tipos de modeladores: modeladores distantes de la realidad; modeladores matemáticos a distancia; modeladores reflejados y modeladores desinteresados. Las autoras, afirman que existe un cambio positivo de las creencias matemáticas de los estudiantes, reflejadas en sus competencias de modelado, ellos desarrollan especialmente un alto nivel de competencias meta-cognitivas.

Por otro lado, Bourguignon (1997) define la interdisciplinariedad teniendo en cuenta lo expuesto por Piaget (1972) como "*el caso cuando existe una cooperación real entre disciplinas autónomas para proporcionar una comprensión de un dominio particular del conocimiento; aquí, hay un objetivo común"*[66]. Ese objetivo común es la construcción de un modelo matemático apto para abordar los riesgos ambientales.

Reafirmando lo anterior Capone (2022) afirma *"La interdisciplinariedad es resolver problemas y responder preguntas que no pueden abordarse satisfactoriamente utilizando métodos o enfoques únicos. Ya sea que el contexto sea un instrumento de corto alcance o una reconceptualización de largo alcance de la epistemología, el concepto representa un intento significativo de definir y establecer un terreno común"*[67].

Por lo anterior un paso importante en la modelación es la generalización que permita contar con una expresión algebraica o analítica para resolver problemas, uno de los aspectos mencionados por Mason, Burton y Stacey (2010) donde la meta es que el estudiante generalice, esto lo lleva a la cúspide del desarrollo del pensamiento matemático.

---

[66] Bourguignon, A. (1997). *De la pluridisciplinarité à la transdisciplinarité* [From multidisciplinarity to transdisciplinarity]. Congrès de Locarno, 30 Avril-2 Mai, Annexe au document de synthèse [Locarno Congress, April 30-May 2, Annex to the summary document]. UNESCO, p. 2.

[67] Capone, R. (2022). Interdisciplinarity in Mathematics Education: From Semiotic to Educational Processes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(2), em2071. https://doi.org/10.29333/ejmste/11508 , p.10.

De esta manera, los procesos de modelación no solo enriquecen el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, sino que mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Por las razones descritas a lo largo del capítulo, en la presente tesis se desea integrar la modelación matemática en el currículo para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

2.6. Fundamentos de la comunidad de práctica de Wenger y su incidencia en situaciones de riesgo ambiental

Wenger (1998) invita a que el conocimiento se construya mutuamente y se aprenda de una manera activa mediante un proceso continuo social e interactivo. Se espera en la presente tesis, encaminar hacia el aprendizaje a través de la colaboración e interacción de los resolutores de problemas, quienes son los estudiantes.

A continuación, se abordan definiciones y algunas características que sustentan la Comunidad de Práctica de Wenger, basadas en la teoría social de aprendizaje

- ✓ *Significado*: se refiere a la posibilidad que individual y colectivamente se tiene de analizar y considerar el contexto en el cual se vive, las experiencias que son valiosas y adquieren sentido.
- ✓ *Práctica:* es la forma de abordar los recursos históricos y sociales, como también se tiene en cuenta el recurso ambiental en esta tesis. Las perspectivas compartidas y los marcos de referencia pueden sustentar el compromiso mutuo, estas guían las acciones para la consecución de un objetivo satisfactorio.
- ✓ *Comunidad:* sostiene que cada persona participa en una comunidad y aporta o cambia la estructura con las ideas que propone, de esta manera se va

consolidando un aprendizaje. Por lo anterior la participación es reconocida como competencia.

- ✓ *Identidad:* reconoce que el conocimiento o aprendizaje puede transformar o alterar lo que se es, lo que se piensa frente a las realidades y la forma en que se abordan.

En esta tesis se asume que comunidad de práctica es "*… un grupo de personas que comparten un interés, un conjunto de problemas, o una pasión sobre un tema, y quienes profundizan su conocimiento y experiencia en el área a través de una interacción continua que fortalece sus relaciones"*[68]*.*

Para implementar las actividades, los estudiantes se organizan en grupos de tres personas y bajo la orientación del mediador se da inicio a la consecución del objetivo propuesto en la investigación. El docente como mediador promueve la participación de los estudiantes en cada problema retador y la seguridad de que pueden desarrollarlo. Desde este punto de vista, la Comunidad de Práctica de Wenger en la clase de la Institución Técnico Agroindustrial La Pradera, posee los siguientes elementos dentro de este trabajo de investigación:

- ✓ *El dominio:* se tiene un mismo campo de interés, como es el de desarrollar el pensamiento matemático a través de la resolución de problemas retadores. De esta manera se llega a una comprensión avanzada de los conceptos matemáticos. También, el interés compartido es el de ayudar a transformar y valorar el entorno en el cual se vive.
- ✓ *La práctica:* en este aspecto los estudiantes comparten sus puntos de vista y toman decisiones proambientales, al participar en el desarrollo de las diferentes

[68] Wenger, E., McDermott, R., Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. p. 4.

actividades y problemáticas del entorno, que en un futuro les puede afectar. Esto genera al interior de los grupos un compromiso auto-consciente. El sistema de actividades está enfocado en la solución de problemas retadores.

- ✓ *La comunidad:* los protagonistas del presente proyecto de investigación son los estudiantes de grado séptimo de la Institución Agroindustrial La Pradera de Duitama.

Estos enfoques son tenidos en cuenta al trabajar el sistema de actividades como comunidades de práctica, pues propician la construcción de conceptos matemáticos.

2.7. Referentes sobre contenidos matemáticos. Competencias asociadas a la modelación matemática.

Según Rittle-Johnson, Siegler & Alibali (2001) "*Los dos tipos importantes de conocimientos necesarios para aprender y hacer matemáticas son el conocimiento conceptual y conocimiento procedimental,…, el conocimiento procedimental incluye el conocimiento de la sintaxis y las reglas paso a paso, mientras que el conocimiento conceptual se define como comprensión implícita o explícita de los principios que gobiernan un dominio y de las interrelaciones entre unidades de conocimiento en un dominio"*[69]*,* por tal razón en el diseño de las actividades se tiene en cuenta estos dos tipos de conocimiento.

En la presente investigación se consideran los siguientes contenidos matemáticos, sobre los cuales se basa el sistema de actividades que se sustenta en el modelo didáctico:

---

[69] Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346–362.

- ✓ Contenido estadístico: registro de datos, representación gráfica de datos, frecuencias y medidas de tendencia central.
- ✓ Contenido algebraico: pre álgebra o álgebra temprana.
- ✓ Contenido métrico: sistema métrico decimal, unidades de superficie y de tiempo.
- ✓ Contenido numérico-variacional: números enteros, números racionales, porcentaje, magnitudes y proporciones.

Según Niss y Blum (2020) existen competencias de modelado tales como ser capaz de analizar los modelos existentes, diseñar modelos en diferentes contextos y validarlos, analizar y construir modelos matemáticos relacionados con otras áreas y finalmente poder realizar comunicar resultados y monitorear el proceso de modelación.

En el modelado activo se debe tener la capacidad de estructurar el área o situación real que se va a modelar, luego implementar una matematización que da como resultado un modelo matemático. El investigador también debe analizar el modelo con relación a su uso y relevancia, así como para comunicarse con otros sobre el modelo y sus resultados, controlando el proceso de modelación.

Conclusiones del capítulo 2

Como se ha apreciado, los fundamentos epistemológicos, didácticos y psicológicos intervienen de forma positiva dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos matemáticos, que permiten fortalecer las habilidades del pensamiento. De esta manera se pretende desarrollar el pensamiento matemático a través de la modelación matemática.

En la presente investigación se consideran los postulados de la teoría de comunidad de práctica de Wenger (significado, práctica, comunidad e identidad); con el fin de construir el modelo matemático bajo el desarrollo de competencias de modelado y el aprendizaje a través de la colaboración y la interacción de los resolutores de problemas en situaciones de riesgo ambiental.

Un elemento poderoso para estimular el desarrollo del pensamiento matemático son los problemas retadores de modelado, en los cuales en los cuales se utiliza como recurso didáctico las situaciones de riesgo ambiental.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Un elemento decisivo a la hora de originar y conseguir información valorable para comprobar, corregir o concebir el conocimiento del tema de estudio es la metodología que se sigue en la investigación. A continuación, se presenta el conjunto de técnicas y procedimientos que se aplican de forma sistemática y ordenada en la elaboración del presente estudio. El objetivo es estandarizar, estructurar y organizar la manera de desarrollar la investigación, de forma que se logre cumplir a cabalidad con el objetivo del proyecto.

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

Sampieri et al. (2014) afirma que la decisión sobre la clase de investigación y el diseño a desarrollar depende del planteamiento del problema, el alcance del estudio y las hipótesis formuladas en la investigación.

En la tesis se asume el paradigma cualitativo, pues es un diseño flexible a partir de la información, que no implica un manejo estadístico riguroso, pues su estructura se orienta más al proceso, que a la obtención de resultados numéricos.

Según Sampieri et al. (2014) todo enfoque cualitativo utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación, pero la autora aclara que esto no implica que no se trabaje con cantidades numéricas estadísticas para analizar datos o inferir sobre los mismos, en los instrumentos que se apliquen como la encuesta a docentes o la de satisfacción, entre otros.

Ahora bien, este enfoque cualitativo amerita una metodología concordante que permita desarrollar los procesos investigativos y lograr diferentes perspectivas, ángulos y apreciaciones de una misma situación o tema de estudio, en este caso es el de desarrollar el pensamiento matemático mediante la resolución de problemas de modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental. En el caso del enfoque cualitativo, la metódica que se expone está representada por el diseño de investigación/acción, que orienta los procedimientos, técnicas e instrumentos acordes con la visión onto-epistémica asumida por el investigador.

Se considera como diseño de investigación/acción lo expuesto por Stringer (1999) quien señala que esta es democrática, equitativa y detonadora de la mejora de las condiciones de vida. Así, la investigación-acción se integra con fases secuenciales de acción: planificación, identificación de hechos, análisis, implementación y evaluación

Las principales acciones del diseño de investigación-acción son: identificar la problemática, elaborar el plan, implementar y evaluar el plan y retroalimentarse.

3.2. Población y muestra o unidad de análisis

La población son los estudiantes de grado 7° de la Institución Educativa Agroindustrial La Pradera (Duitama) y la muestra corresponde a 18 estudiantes de 702.

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico – lógico: para estudiar la evolución y desarrollo que ha tenido el proceso de pensamiento matemático a través de problemas de modelación matemática.

Análisis y síntesis: en la concreción del estado del arte y para determinar las tendencias actuales sobre el proceso del pensamiento matemático.

En la construcción del marco teórico y en el análisis para sintetizar los resultados de las actividades basadas en problemas retadores. Además, para establecer las conclusiones y recomendaciones de la presente investigación.

Enfoque sistémico y modelación: para la construcción del modelo didáctico flexible e integrado y del sistema de actividades que enfatice en la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental para el desarrollo del pensamiento matemático. Además, para el análisis de la relación de los elementos del modelo didáctico.

Análisis de fuentes: para constatar el estado del arte y sentar las bases teóricas que sustentan la investigación sobre cómo desarrollar el pensamiento matemático utilizando la modelación matemática en clase de matemáticas.

Del nivel **empírico** son empleados algunos instrumentos tales como:

Encuesta: realizar una encuesta a los docentes de matemáticas de Duitama para obtener información sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática a través de la modelación matemática en contextos ambientales. También se aplican encuestas a los estudiantes, como es la de satisfacción.

Pretest: con el objetivo de conocer la percepción que tienen los estudiantes sobre el desarrollo de su pensamiento matemático involucrando la modelación matemática en contextos de riesgos ambientales.

Observación participante: consiste en la observación de clases para obtener información sobre el desarrollo del pensamiento matemático empleando problemas retadores que permitan formar acciones en beneficio del medio ambiente.

Entrevistas: realizada a expertos en el tema de investigación que plantea la presente tesis, cuyos aportes guían o direccionan la investigación.

Bitácora: lleva el registro de datos importantes o de interés de las actividades enmarcados en el desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental.

Análisis de videos: para identificar de forma profunda los aportes y los resultados integrados que contribuyen al objetivo de la presente investigación.

3.4. Trabajo de campo

La autora se introduce en el entorno escolar-ambiental de la Institución Educativa Agroindustrial La Pradera de Duitama para que los estudiantes proporcionen datos valorativos que sean de gran aporte al objetivo de la investigación. Este proceso se lleva a cabo como resultados de la aplicación de actividades matemáticas bajo el modelado matemático con ciertas estrategias pedagógicas y didácticas. Además de las intervenciones de los estudiantes, las cuales son grabadas y fotografiadas con previo permiso de los padres.

3.5. Fases de la investigación

Para el desarrollo de esta tesis se concretan las siguientes fases: diagnóstico, diseño de aportes, trabajo de campo, análisis de resultados e informativa. A continuación, se explican cada una de estas fases.

Fase de caracterización: se elaboran y se validan los instrumentos como también se realiza un análisis acerca de la pertinencia y actualidad de la temática en congresos y eventos actuales. En este proceso, se establece el estado del arte y las tendencias relacionadas***.*** Estos fundamentos y elementos permiten establecer el problema de investigación.

Fase diseño de aportes: se concreta el marco teórico de la investigación, se elabora el modelo didáctico y el sistema de actividades que involucra el pensamiento matemático, resolución de problemas matemático-ambientales y la modelación matemática.

Fase de trabajo de campo: se implementan los instrumentos y el sistema de actividades para desarrollar el pensamiento matemático a través del uso de problemas retadores que involucran la modelación, además, se valida el sistema de actividades.

Fase de análisis de resultados: se analizan los resultados de la implementación de las actividades, se perfecciona y se enriquece el modelo didáctico, además, se establecen las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

Fase informativa: se socializan las conclusiones y aportes generados de la presente investigación mediante la sustentación de la tesis, la presentación de avances de los resultados de la investigación en eventos, y la publicación de artículos.

Conclusiones del capítulo 3

La investigación asume el paradigma cualitativo, bajo un enfoque cualitativo y un diseño de investigación acción, donde se hace uso de varias fases o etapas: diagnóstico, diseño de aportes, trabajo de campo, análisis de resultados e informativa.

Para llevar a cabo la investigación se concreta la implementación de métodos teóricos y empíricos que orientan y permiten dar cumplimiento al objetivo de la investigación. Es de destacar los aportes dados por los expertos en modelación matemática.

CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES DE RIESGO AMBIENTAL

A partir de los referentes teóricos y de las categorías establecidas, en este capítulo se presenta el modelo didáctico elaborado para el desarrollo del pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental. Este modelo consta de cuatro partes: fundamentos, caracterización, resolución y finalmente la concreción práctica.

4.1. Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental

Un modelo didáctico es una herramienta para abordar y analizar la realidad educativa con el propósito de hacer intervenciones prácticas efectivas, en esta investigación se propone diseñar un modelo didáctico alternativo. Este tipo de modelo según García (2000) hace énfasis en la investigación en el aula que propicie el enriquecimiento progresivo del conocimiento de los estudiantes. A continuación, se presenta la estructura del modelo didáctico, con los elementos o componentes que se abordan en cada una de estas partes.

Primera parte: Fundamentos del Modelo

El modelo didáctico toma como base los Fundamentos Filosóficos, Psicológicos, Pedagógico-Didácticos (abordados en la sección 2.1.) y de la Educación Matemática, que integrados permiten comprender y articular el vínculo entre el análisis teórico y la intervención práctica que se realiza en el aula. A continuación, se explican los fundamentos relacionados con la Educación Matemática.

*Fundamentos de Educación matemática***.** Se asume la Educación Matemática Crítica (EMC) la cual ha sido abordada por Skovsmose y Valero (2012). La EMC permite que a través de la solución de situaciones y problemas planteados en la clase de matemáticas se puede contribuir a la creación de buenos ciudadanos, con posturas críticas hacia los efectos negativos de la sociedad. La clase de matemáticas se convierte en una micro sociedad, donde está presente también la justicia social, la equidad y la democracia. Sumado a lo anterior, la EMC pretende a su vez favorecer la construcción y comprensión de conceptos, apoyar el desarrollo de habilidades de pensamiento que permitan transformar el contexto, viendo su toma de decisiones reflejadas en una mejor la calidad de vida.

Los investigadores en educación matemáticas han detectado la resolución de problemas como el entorno privilegiado para poner en juego los conceptos, habilidades y procesos matemáticos que a la vez logran el desarrollo del pensamiento matemático. Al respecto Hersh (1997) señala que "*resolver problemas e inventar otros nuevos es la esencia de la vida matemática. Si las matemáticas se conciben separadas de la vida matemática, por supuesto que parecen muertas*"[70], por lo anterior, es fundamental en el modelo matemático considerar como elemento clave la resolución de problemas retadores, además de los objetivos, contenidos, métodos, estrategias, metodologías y la evaluación.

Fin y objetivos del modelo didáctico: Con los elementos ya explicitados se tiene como objetivo elaborar un modelo didáctico dirigido a realizar aportes a la comprensión y reflexión de procesos encaminados al desarrollo del pensamiento matemático, a

[70] Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really.* Oxford, England: Oxford University Press, p. 17.

través de la modelación matemática involucrando situaciones de riesgo ambiental. Este modelo proporciona una guía teórica, y metodológica de cómo utilizar los procesos de modelación para el desarrollo de las habilidades en los estudiantes de grado séptimo.

La finalidad de este modelo didáctico radica en:

- ✓ Aportar al desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades sustentadas en la solución de problemas de modelado matemático en estudiantes de secundaria.
- ✓ Favorecer la competencia de la modelación matemática en los estudiantes para dotarlos de habilidades en la solución de problemas de la vida real en matemáticas y en otras disciplinas.
- ✓ Fomentar el interés de los docentes de matemáticas por el diseño y uso de actividades en torno al modelado matemático dentro de su práctica docente.
- ✓ Motivar a los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas a través de la construcción de modelos matemáticas, donde los conceptos, habilidades, procesos matemáticos, actitudes y metacognición sean vivificados y aplicados.
- ✓ Propiciar el uso de recursos didácticos, en este caso, en situaciones de riesgo ambiental para apoyar el aprendizaje y sentido de las matemáticas.

Segunda parte: Caracterización y Necesidad.

En esta etapa se describen las características principales de los procesos didácticos teniendo en cuenta el contexto, la población de estudio y el fin del modelo, a partir de la triangulación de los resultados de la entrevista a expertos, encuesta a docentes, estudio exploratorio, pretest, la revisión del estado del arte y la experiencia de la investigadora. También, se presenta la necesidad de implementar el modelo didáctico alternativo, debido a que se han encontrado algunas tendencias teóricas en el aula. A continuación, se presenta la caracterización.

Docentes.

- ✓ Reconocen la modelación matemática como una de los cinco procesos generales de la actividad matemática, pero no tienen claridad en cómo modelar procesos matemáticos y fenómenos de la realidad en las clases. En este sentido, hay una mayoría de profesores que desconocen las fases del ciclo de modelado. Lo anterior porque dentro de su formación secundaria no les implementaron actividades en torno a la modelación.
- ✓ En su formación como licenciados en Matemáticas y áreas afines se les enfocó más en teorías y didácticas que en diseñar actividades interdisciplinarias o ambientales.
- ✓ Tienen dificultades para plantear situaciones que tributen a problemas matemáticos retadores que puedan llevarse al plano de la modelación matemática.
- ✓ Es limitado el uso de recursos de aprendizaje o en situaciones ambientales, suelen relacionarla más con finanzas, economía, etc.
- ✓ Es limitado el planteamiento de problemas en los cuales el estudiante construya un modelo matemático interdisciplinario, al punto de inquietarlo y asustarse, porque se sale de su zona, desconocen cómo abordarlos.

Estudiantes.

- ✓ Insuficiencias en la construcción de modelos matemáticos, porque no están familiarizados con la forma como se desarrollan dichos problemas.

- ✓ Presentan diferentes concepciones en relación a lo que se entiende como modelo matemático y sus fases.
- ✓ Muestran dificultades en las técnicas y estrategias para la resolución de problemas.
- ✓ Falencias en el reconocimiento de las variables que intervienen en las situaciones planteadas, además de su relación con las demás.
- ✓ Escaso rigor en la argumentación y validez de las soluciones matemáticas.

Concepción del proceso.

- ✓ Los problemas que se abordan en las clases son rutinarios, donde se aplican generalmente fórmulas. Las respuestas resultan de algoritmos fácilmente aplicados sin llegar a desarrollar el pensamiento matemático.
- ✓ El proceso de construcción del modelo matemático propuesto por los estudiantes requiere más tiempo en la clase del habitual.
- ✓ Desconocimiento del proceso de la resolución de un problema que requiere de la modelación matemática para su solución.

Contenidos y Métodos.

- ✓ Se abordan los contenidos del área utilizando el método tradicional y reproductivo. Se abarca título, concepto, ejemplo y ejercicios o problemas rutinarios. Se evidencia la memorización de fórmulas y conceptos. Lo anterior no permite promover la creatividad porque los estudiantes se ven sujetos a una forma mecánica de trabajar la matemática.

Organización de la clase.

- ✓ Existe una notable premura por abarcar contenidos propios del plan de aula en tiempos cortos, lo que impide trabajar problemas de modelado matemático junto con sus etapas.
- ✓ Se conciben clases magistrales, limitando la planificación de clases abiertas en contexto, donde el estudiante tenga un papel protagónico.
- ✓ Escaso liderazgo en proyectos que utilicen la modelación dentro de las clases de matemáticas, debido a la falta de conocimiento de cómo enfocar esta competencia y articularla con las demás disciplinas.

Evaluación.

- ✓ No se evalúan los modelos matemáticos construidos como evidencia del desarrollo del pensamiento matemático, ya que no se promueve su concepción ni su aprendizaje.

Tendencias. Los resultados del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en situaciones de riesgo medioambiental, producto de la práctica pedagógica de la comunidad académica, permite conocer las tendencias teóricas más relevantes, las cuales se tienen en cuenta en la presente investigación. A continuación, se presentan los resultados de las tendencias:

- ✓ Se carece de aportes desde la Educación Matemática Crítica en el campo didáctico que influencian la práctica docente y el proceso de aprendizaje en los estudiantes desde el contexto de situaciones de riesgo ambiental.
- ✓ Limitados recursos didácticos y estrategias interdisciplinares en situaciones de riesgo y sostenibilidad ambiental, que permiten hacer las matemáticas aplicables y con sentido para los estudiantes.

- ✓ Se carece de metodologías que propicien la creatividad y la resolución de problemas para un currículo más retador, donde se integren las matemáticas con otras disciplinas en situaciones medioambientales.

Los anteriores argumentos permiten constatar que dentro de la educación matemática se pueden establecer oportunidades de mejora, debido a la falta de un modelo didáctico que favorezca estos aspectos y sean integrados en las clases.

Factores. Existen varios elementos que integrados inciden en que no se desarrolle el pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental. Algunos de ellos son:

- ✓ Desvalorización de las preguntas que realizan los estudiantes en torno a los procesos de modelación.
- ✓ Inadecuada interpretación de lo que es la modelación matemática (concepción, función, proceso y habilidades que permite en el estudiante)
- ✓ Temor para explorar nuevos escenarios, recursos y estrategias de aprendizaje.
- ✓ Desconocimiento por parte de docentes de las características que determinan un problema retador, desde el contexto de la modelación.
- ✓ Limitadas actividades que familiaricen a los estudiantes con el desarrollo de problemas de modelado en primaria y secundaria.
- ✓ Escaso uso de las matemáticas en otros ámbitos diferentes a su estructura disciplinar.
- ✓ Uso frecuente de métodos rutinarios tradicionales, que desvían el florecimiento de la creatividad del estudiante con otros campos del saber.

- ✓ Limitado dominio y valor matemático de conceptos dentro de la modelación como simplificar, matematizar, etc.
- ✓ Escasas investigaciones enfocadas en la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental, para el desarrollo del pensamiento matemático en Colombia.

Necesidad.

Los resultados de la revisión de la literatura y la entrevista a expertos, permite corroborar la inexistencia de un modelo didáctico encaminado a desarrollar el pensamiento matemático, mediante la modelación matemática usando situaciones de riesgo ambiental. Por lo anterior se espera hacer contribuciones en este tipo de modelo de corte alternativo.

Fazenda (2014) afirma que "*En la Ciencia Pedagógica se sugiere el empleo de un modelo como resultado científico, cuando se requiere conocer la esencia del objeto de estudio y esta no se puede apreciar de manera inmediata, por lo que se vale de una representación del objeto y sus relaciones intrínsecas, como medio auxiliar*"[71]. Por lo anterior, hace falta plantear un modelo didáctico que sea utilizado como instrumento educativo, que transforme positivamente las prácticas pedagógicas y enriquezca el campo teórico.

Este modelo didáctico incluye como elemento dinamizador de todos los componentes la modelación matemática. Ortiz y Camelo (2020) identifican en los trabajos investigados en Colombia escasos aportes en cuanto a la modelación matemática.

[71] Fazenda, J. (2014). *Modelo didáctico basado en la integración sistémica de los diferentes enfoques para la resolución de problemas de Investigación Operacional.* Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas Centro de Estudios de Educación, p. 63.

Además, Swetz y Hartzler (1991) abogan por hacer énfasis en los elementos que componen el modelo propuesto en el plan de estudios de la escuela secundaria, prioridad máxima en la educación matemática.

"Dado que las teorías, estrategias y modelos de aprendizaje contemporáneos ofrecen el enfoque interdisciplinario, los educadores necesitan nuevas alternativas pedagógicas para lograrlo en la práctica"[72], por lo cual, como necesidad el modelo didáctico también involucra la interdisciplinariedad de la matemática.

La importancia del modelo didáctico con énfasis en la interdisciplinariedad ayuda a dar respuesta a la preocupación de English (2006), quien afirma que existen investigaciones limitadas sobre las formas en que se puede involucrar otras disciplinas dentro del plan de estudios de matemáticas.

En este sentido, se necesita un modelo didáctico que posea como elemento dinamizador la modelación matemática, donde se integre la resolución de problemas, las situaciones de riesgo ambiental y estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático. Modelo que sirve de guía a otros docentes al momento de planificar el proceso de enseñanza aprendizaje que desafía la abstracción de la matemática y el aprendizaje memorístico.

Por lo anterior, se necesita presentar un modelo didáctico alternativo que contenga las siguientes características:

---

[72] Gürbüz, R., & Çalik, M. (2021). Intertwining Mathematical Modeling with Environmental Issues. *Problems of Education in the 21st Century, 79*(3), 412-424, p. 412.

- ✓ Robustezca el conocimiento del estudiante con base en modelos complejos, para comprender el mundo y la forma en que se debe interrelacionar con él.
- ✓ Contiene referentes disciplinares integrados con las problemáticas sociales y ambientales.
- ✓ Considere las ideas de los estudiantes tanto en relación con el conocimiento propuesto como en la construcción del mismo.
- ✓ Desarrolle el pensamiento abordando problemas dentro de secuencias de actividades, en la cual se fomenta un papel activo del estudiante.

La validación del modelo se realiza a través de la aplicación y seguimiento de las actividades propuestas, el enfoque basado en argumentos (Kane, 2013), la prueba estadística no paramétrica de Wilcoxon, descritos en la sección 5.2.

Tercera parte: Resolución.

Los componentes de esta fase son: Situaciones de Riesgo ambiental desde la Educación Matemática Crítica; Modelación matemática; Interdisciplinaridad; Resolución de problemas; Comunidad de Práctica de Wenger y Pensamiento matemático. El elemento dinamizador del modelo didáctico está dado por la modelación matemática, pues es base para el desarrollo de cada una de las fases de resolución. A continuación, se explican cada uno de los componentes de la fase de resolución del modelo didáctico, sus funciones y las relaciones que se establecen entre ellos.

- ✓ Situaciones de riesgo ambiental contextualizadas (SRAC)

Son aquellas situaciones enfocadas en factores que favorecen la posibilidad de que la naturaleza experimente algún daño. Las SRAC se constituyen en herramientas que tienen la oportunidad de vincular los aprendizajes y aplicarlos en contextos que le son cercanos, con el propósito de favorecer su propio aprendizaje y encaminarlo en pro del bienestar colectivo.

Para la presente investigación, las SRAC tienen la función de brindar un escenario para aumentar su conocimiento, sus competencias en matemáticas y reflexionar sobre el poder formativo que esta área brinda.

Además, las SRAC tienen la función de potencializar en los estudiantes su razonamiento, la lógica, la creatividad, la deducción, la abstracción además de fomentar el aprendizaje significativo. Las SRAC pueden integrar elementos de otras áreas mediante actividades que permitan resolver problemas de manera creativa y cooperativa.

Las SRAC se abordan desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica, pues les da el poder a las matemáticas de preparar a los estudiantes para ser buenos ciudadanos críticos, evidenciándose en la toma de decisiones que involucran la matemática y el contexto. Según Skovsmose (2022) "*el punto de partida debe ser los problemas de la vida real…, los estudios deben basarse en problemas y organizarse en proyectos*"[73]. A continuación, se establece la relación de las SRAC con los componentes del modelo didáctico.

[73] Skovsmose, O. (2022). Concerns of Critical Mathematics Education–and of Ethnomathematics. *Revista Colombiana de Educación*, (86), 361-378, p. 369.

Las SRAC aportan a la modelación matemática los diversos entornos y ambientes, complejos y con dificultades que permiten aplicar los conocimientos, en las cuales para su solución se necesita transitar del campo matemático al campo real y viceversa.

Las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas contribuyen a la modelación matemática en el desarrollo de las estrategias de metacognición en los estudiantes (individuales y grupales). Estas orientan los procesos de pensamiento no solo de sus ideas, sino de los otros estudiantes. Estás capacidades son importantes para moverse entre las etapas del modelado.

Las estrategias de metacognición en el modelado son propiciadas por el trabajo con problemas interdisciplinarios en los cuales intervienen procesos de planificación, seguimiento y validación del mismo. En cada una de estas fases los estudiantes discuten sus conjeturas, articulan el conocimiento, justifican, validan, interpretan soluciones y establecen conclusiones.

English (2009) considera importante el tema de la interdisciplinariedad en el currículo de matemáticas. Las situaciones de riesgo ambiental contribuyen en datos y relaciones numéricas que evidencian la interrelación de campos o áreas integradas desde los cuales se analizan y resuelven problemas. Las SRAC fomentan aspectos de interés común, de convivencia democrática, de sostenibilidad, de la cual la comunidad educativa debe apropiarse para responder con eficacia a los retos del siglo XXI.

Las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas ofrecen entornos reales aptos para el planteamiento, diseño, proceso y solución de problemas retadores. Lo anterior dado que las SRAC presentan factores, variables y relaciones numéricas en las cuales se evidencia que hay y se puede hacer matemáticas. Se recomienda que las SRAC estén diseñadas bajo actividades que impliquen solución de problemas de creciente complejidad como las de modelado matemático, ya que estas conllevan a la construcción de nuevos aprendizajes.

Las SRAC despiertan el interés y la motivación de los estudiantes por aprender y resolver problemas de la vida diaria que afectan a una comunidad. Estas también deben proponer escenarios en los que el estudiante actué de forma colaborativa en la solución de un problema. Este compromiso se adquiere en el trabajo de la Comunidad de Práctica de Wenger, donde se interactúa con las situaciones de aprendizaje en contextos medioambientales.

Las SRAC constituyen un fuerte componente del modelo que influye en el pensamiento matemático siempre y cuando están bien planteadas y atrapen el interés de los estudiantes. Estas influyen en las redes de pensamientos que permiten la generalización e ideas contenidas plasmadas en los productos finales de los estudiantes, lo que anima a desarrollar el pensamiento matemático.

- ✓ Modelación Matemática

Es una herramienta didáctica que transita entre la matemática y el contexto real, útil para el trabajo de problemas retadores, que para su solución necesitan de la construcción de modelos matemáticos.

La función que cumple la modelación matemática es impulsar el desarrollo de las habilidades y competencias para que el estudiante sea capaz de hacer matemáticas y desarrollar su pensamiento matemático.

La modelación matemática le aporta en gran medida a las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas, porque la construcción de los modelos matemáticos permite no sólo comprender los factores matemáticos que intervienen en estas, sino que proporciona soluciones para interactuar en pro del contexto ambiental. Sumado a lo anterior, la modelación matemática viste de matemáticas la realidad para el estudiante, haciéndolas más comprensibles de tal forma que él les vea el sentido. Desde esta perspectiva permite tomar decisiones a favor de las situaciones de riesgo ambiental, como resultado de haberse producido una sensibilización a través del ciclo de modelado.

En este sentido, la modelación matemática utiliza las situaciones de aprendizaje contextualizadas para hacer visibles y relacionables los objetos matemáticos con la realidad, además de desarrollar conceptos matemáticos. Este tipo de situaciones motivan al estudiante a aprender y entender cómo resolver matemáticamente problemas del mundo.

La modelación matemática aporta a la situación de riesgo ambiental la visualización disciplinaria, es decir, la capacidad de contemplar con rasgos visibles alguna disciplina que no se tiene a la vista. El objetivo de esta visualización disciplinaria es elaborar un modelo matemático que favorezca las situaciones de riesgo ambiental desde la elección asertiva de las disciplinas que intervienen en la solución del problema. Estos aportes en el campo educativo permiten ver como el estudiante despierta su sentido crítico, creativo y propositivo como ciudadano democrático, aspectos influenciados por la Educación Matemática Crítica.

La modelación matemática interdisciplinaria ayuda al estudiante a evidenciar la funcionalidad, los aportes y el sentido que tienen las matemáticas con otras disciplinas. Además de animar a comportarse de forma responsable con el contexto ambiental y servir como vehículo del aprendizaje matemático.

La modelación matemática le aporta a la resolución de problemas la integración de ideas claves de diversas disciplinas, la cual se convierte en un vehículo unificador del plan de estudios. Además, los problemas centrados en la modelación matemática estimulan la aplicación de estrategias de metacognición, la comprensión de conceptos, propiedades y los objetos presentes en las matemáticas, que influyen notablemente en el dinamismo, la evolución y avance de las ciencias.

La modelación matemática aporta a la Comunidad de Práctica de Wenger el desarrollo de estrategias de metacognición, ya que al presentar una solución a un problema de modelado matemático se favorece el aprendizaje, la argumentación y la comunicación.

Desde esta perspectiva, la modelación matemática contribuye al pensamiento matemático en proporcionar en cada fase de su ciclo, un proceso dinámico que promueve la integración de ideas avanzadas lógicas y las competencias matemáticas y transversales.

- ✓ Interdisciplinariedad

La interdisciplinariedad es la interrelación e interacción de diversas disciplinas en el cual su cooperación permite la comprensión de una realidad y el logro de un objetivo común. Actualmente la interdisciplinariedad juega un papel primordial en la educación.

La matemática no puede estar ajena a intervenir en los cambios del mundo, a analizar, explicar, proponer, a tomar decisiones y aplicar los conocimientos.

En este sentido, la interdisciplinariedad tiene la función de aportar desde diferentes disciplinas a la solución de un problema matemático-ambiental real; el objetivo común en este caso es la construcción del modelo matemático que favorezca situaciones ambientales. Lo anterior es propiciado por las situaciones de riesgo ambiental las cuales permiten a los estudiantes crear, discutir, descubrir y desarrollar competencias, poner en práctica nuevas ideas y validar sus soluciones involucrando otras disciplinas. Estos criterios repercuten en la adquisición de habilidades necesarias para que el estudiante sea un ciudadano reflexivo y propositivo, muy de acuerdo con lo que propone la Educación Matemática Crítica.

La interdisciplinariedad le aporta a la modelación matemática una plataforma adecuada para transitar entre las fases de modelación según propósitos, objetivos de investigación y práctica para dar solución al problema retador. Desde esta perspectiva, el objetivo del entramado de disciplinas es dar solución a un problema teniendo en cuenta enfoques y conocimientos que no se encuentran en la misma disciplina, sino que entrelazados potencian y validan los saberes y las ideas. Ideas que interconectadas contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático y de forma implícita a la comprensión del mismo lenguaje simbólico y formal que tiene esta área.

La Comunidad de Práctica de Wenger al estar conformada por estudiantes que presentan diferentes habilidades y destrezas cognitivas y creativas, permite dar solución a una situación interdisciplinar, porque sus diversos enfoques, experiencias y conocimientos propician la construcción de un modelo matemático válido. No solo la interdisciplinariedad se relaciona con las SRAC, la resolución de problemas, el pensamiento matemático y la Comunidad de Práctica de Wenger sino también con el elemento dinamizador que en este caso es la modelación matemática.

Según Borromeo Ferri y Mousoulides (2017) el modelado matemático promueve la educación matemática interdisciplinaria. Se debe partir de una situación real que se entrelaza con diversos aspectos sociales, económicos, ambientales y/o culturales para que puedan desarrollarse actividades de modelación.

- ✓ Resolución de problemas

La resolución de problemas es un proceso dinámico mental complejo en el que el fin último es el desarrollo del pensamiento matemático. En este sentido la resolución de problemas se convierte en una herramienta idónea que dota de sentido a los objetos matemáticos que se vivifican y favorecen el pensamiento matemático.

Desde esta postura, no puede haber desarrollo del pensamiento matemático sin resolver problemas de tipo retador. Por lo anterior, la función primordial de resolver problemas es desarrollar el pensamiento matemático.

La resolución de problemas aporta en las situaciones de riesgo ambiental contextualizada su favorecimiento, creando conciencia de actuar de manera proambiental desde el marco de la Educación Matemática Crítica.

La resolución de problemas proporciona a la Comunidad de Práctica de Wenger escenarios de investigación y ambientes de aprendizaje, ya que son los mismos estudiantes que hacen y dan respuesta a preguntas de modelación. También comparten y argumentan sus ideas y conocimientos cuando algún par no comprende.

Desde esta interacción se facilita la comprensión de los conceptos, operaciones, propiedades y relaciones de las matemáticas.

La resolución de problemas contribuye a la interdisciplinariedad en la articulación de nuevos saberes y enfoques vinculados con otras áreas.

La resolución de problemas imbrica el uso de la modelación matemática en su solución. El proceso de resolución de problemas es el ambiente natural de la modelación matemática. Los modelos matemáticos construidos por los estudiantes dependen de cómo ellos ven y comprenden el problema retador. Los problemas de modelado redundan en una optimización del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la Comunidad de Práctica de Wenger se consideran importantes los modelos matemáticos, los cuales son productos finales que incluyen variables, factores, relaciones y operaciones. La socialización realizada al interior de los grupos de trabajo hace que la modelación matemática permita construir un conjunto de conocimientos poderosos, que ratifican el desarrollo progresivo del pensamiento matemático de los estudiantes.

- ✓ Comunidad de Práctica de Wenger

Constituye un conjunto de personas que se inquietan por alguna situación o problema y con base a su constante investigación, experiencia y aportes logran su objetivo. La función de la Comunidad de Práctica de Wenger es contribuir al aprendizaje de la matemática en situaciones de riesgo ambiental a través de las relaciones sociales entre estudiantes.

Las Comunidades de Práctica de Wenger (2006) tienen efecto en el campo educativo en algunas dimensiones, tales son:

a) "*Internamente, organizan las experiencias educativas vinculando diferentes materias"*[74]. Lo cual quiere decir que la Comunidad de Práctica de Wenger interactúa con otras disciplinas (interdisciplinariedad) a través de las situaciones de aprendizaje contextualizadas aportando soluciones.

b) "*Externamente, analizan cómo vincular las formas de participación y experiencias de los estudiantes con escenarios más allá de la escuela"*[75]*.* Lo anterior evidencia la relación entre la Comunidad de Práctica de Wenger y la modelación matemática, porque da lugar a la matematización, pues intervienen escenarios extramatemáticos.

La Comunidad de Práctica de Wenger aporta a las situaciones de riesgo ambiental contextualizados argumentos que permiten la participación del estudiante como un ciudadano reflexivo, de buenas prácticas en beneficio de la comunidad.

La Comunidad de Práctica de Wenger contribuye a la resolución de problemas al proporcionar habilidades de argumentación y validez de las soluciones proporcionadas por los estudiantes, además de fomentar la creatividad, técnicas y estrategias diversas.

c) "A*nalizan cómo mantener que el interés de los estudiantes trascienda el período de aprendizaje escolar"*[76]*.* La Comunidad de Práctica de Wenger se vincula con los problemas retadores logrando a través de su planteamiento el interés hacia el

[74] Wenger, E. (2006). Communities of practice: A brief introduction. Recuperado de: http://www.ewenger.com/theory/
[75] IDEM
[76] IDEM

aprendizaje de la matemática, lo cual favorece de forma constante el desarrollo del pensamiento matemático.

- ✓ Pensamiento matemático

El pensamiento matemático es el proceso dinámico producto de la sistematización, reflexión, búsqueda de la solución de un problema y articulación con las distintas etapas que se siguen dentro del problema de modelado matemático, como lo son simplificar, matematizar, interpretar, validar y verificar. A medida que el estudiante considere más atributos y tenga en cuenta un conjunto de variables complejas desarrolla su pensamiento matemático.

El pensamiento matemático tiene como función resolver una variedad de problemas relacionados con las mismas matemáticas. Su aporte a las situaciones de riesgo ambiental está en favorecer la sostenibilidad ambiental, a través del desarrollo de ideas encadenadas que permiten la validación de la respuesta.

El pensamiento matemático aporta a la Comunidad de Práctica de Wenger en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, además de generar motivación hacia el estudio de esta área. El pensamiento matemático contribuye en el campo interdisciplinario en las soluciones que favorecen al entramado de varias disciplinas contribuyendo a la superación de las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas.

El pensamiento matemático aporta a la solución de un problema proporcionando a los estudiantes estrategias para simplificar la realidad, matematizar, argumentar y validar a través de ideas lógicas y reales. Además, contribuye en la elaboración y validación de conjeturas, y en la búsqueda de las mejores heurísticas, para llegar al resultado de una forma óptima.

El pensamiento matemático aporta a la solución de problemas en la invención y articulación de métodos, estrategias y técnicas de alto nivel. Estos problemas hacen referencia a los relacionados con la modelación matemática. También, aporta en el planteamiento de nuevos problemas y preguntas que surgen de problemas de modelado matemático.

Las actividades de modelación matemática son fundamentales para investigar el pensamiento matemático de los estudiantes. Por lo anterior, el pensamiento matemático se consolida con los problemas de modelado matemático, en los cuales se enfatiza la parte disciplinaria, para esta investigación en el campo ambiental.

Características del modelo didáctico

- ✓ Dinámico: el modelo brinda la posibilidad de que los estudiantes asuman un papel activo en la utilización de la modelación matemática como constructores de su pensamiento matemático. Además, permiten que tomen la iniciativa de usar diferentes estrategias, herramientas y trabajen en equipo para abordar la solución de un problema. También propende por un papel activo por parte del docente como investigador y director de procesos de aprendizaje.
- ✓ Contextual: tiene en cuenta intereses, necesidades, e ideas de los estudiantes en entornos interdisciplinares.

- ✓ Significativo - Funcional: interpreta situaciones matemáticamente las cuales dan respuesta a un problema real. Los conocimientos en matemáticas son útiles para aplicarlos en situaciones que requieren tomar algún tipo de decisión.
- ✓ Complejo: promueve el uso de conocimientos, el desarrollo de habilidades y de competencias en torno a la modelación matemática para desarrollar su pensamiento matemático.

Como resultado de la interrelación entre estos componentes surge la nueva cualidad: construcción robusta de pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental contextualizadas.

Relaciones del modelo didáctico

Se parte de los fundamentos Filosóficos, Psicológicos, Pedagógico-Didácticos y la Educación Matemática (ya explicitados anteriormente) como principios básicos de la formación y construcción del conocimiento. Sobre estos fundamentos se diseña el sistema de actividades, se desarrolla la metodología y se orienta la apropiación de conceptos matemáticos hacia la consecución del desarrollo del pensamiento matemático.

El sistema de actividades interactúa con los contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas (estrategias heurísticas) destinados a la construcción y aplicación de conceptos y habilidades. La resolución de problemas aborda componentes que están interrelacionados como lo son las habilidades o capacidades, los conceptos, los procesos, las actitudes y la metacognición.

Los problemas retadores planteados presentan situaciones de riesgo ambiental sustentados en la Educación Matemática Crítica, dichos problemas se resuelven a través de la modelación matemática, para lo cual se sigue el ciclo asociado al modelo matemático interdisciplinario. Por lo anterior, la interdisciplinariedad abordada en los problemas hace que el estudiante le halle el sentido a hacer matemáticas y su aplicabilidad en el contexto. En la construcción de modelos matemáticos interdisciplinarios es clave el trabajo colaborativo que se da desde la Comunidad de Práctica de Wenger, porque las ideas producto del razonamiento, el pensamiento creativo y lógico sumado al desarrollo de habilidades de orden superior conciben como fin último el desarrollo del pensamiento matemático, objetivo del modelo didáctico.

Lo anterior al llevar a cabo o concretarlo en la práctica, redunda en la construcción robusta de pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental contextualizadas en estudiantes de grado séptimo. Estas interrelaciones se concretan en tres grandes relaciones:

- ✓ Entre los fundamentos Filosóficos, Psicológicos, Pedagógico-Didácticos y Educación Matemática como base indispensable para plantear la caracterización y la necesidad del modelo.
- ✓ Entre los componentes de la fase de resolución del modelo didáctico tomando como elemento dinamizador la modelación matemática para propiciar una nueva cualidad.
- ✓ Entre los fundamentos teóricos, la caracterización y necesidad, y la fase de resolución del modelo, para la elaborar una propuesta didáctica que permita una

adecuada concreción práctica, en función de alcanzar el objetivo de la investigación.

Cuarta parte: Concreción práctica.

A continuación, se presenta los componentes de esta fase:

- ✓ Sistema de actividades: constituye la salida a la práctica educativa del modelo didáctico. Se elaboran 10 actividades (ver epígrafe 4.2), en las cuales se concretan los componentes de la fase de resolución.
- ✓ Forma de instrumentación en la práctica: en este componente se valora las sugerencias metodológicas para implementar el sistema de actividades, el cual se muestra en cada una de las actividades del epígrafe 4.2.
- ✓ Forma de evaluación: se precisa la evaluación de las actividades, para lograr el objetivo en cada una de ellas.
- ✓ Análisis de resultados: el análisis de los resultados de cada una de las actividades se realiza tomando como referencia el marco teórico asumido, a través del desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, los logros y las dificultades.

A continuación, se presenta el esquema del modelo didáctico para lograr el objetivo de la investigación (ver Figura 3).

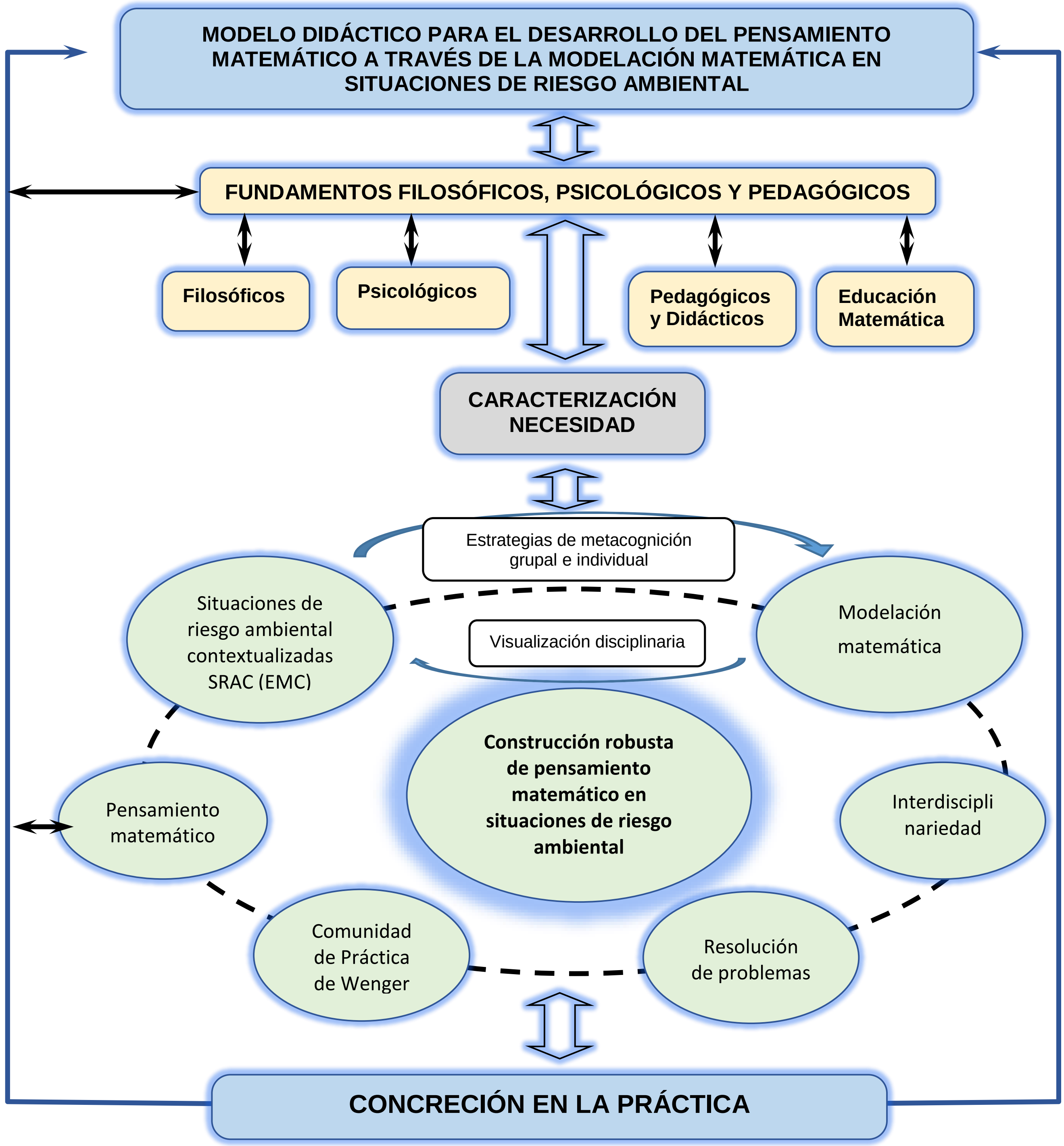


Figura 3. Esquema del Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental.

4.2. Sistema de actividades para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental

4.2.1. Actividad 1. Me familiarizo con la resolución de problemas que generen la construcción de modelos matemáticos.

Objetivo: Usar las habilidades de la resolución de problemas enfocados en situaciones de riesgo ambiental a través de la modelación matemática.

Sugerencia metodológica. Primero se precisa que en las siguientes situaciones se requiere del uso de competencias, estrategias y técnicas que presentan los estudiantes al momento de enfrentarse a un problema.

Para el desarrollo de las actividades, el aula se organiza en grupos de 3 estudiantes, donde la posición del líder emergerá naturalmente en el transcurso del desarrollo de las actividades. Teniendo en cuenta la teoría de la Comunidad de Práctica de Wenger se implementan las actividades, con un tiempo estimado de tres horas realizadas en diferentes sesiones.

Con el objetivo de desarrollar el pensamiento matemático a través de la resolución de problemas, se orientaron las acciones a implementar por los estudiantes a través de preguntas que propicien la búsqueda del conocimiento matemático. Al concluir el desarrollo de las actividades se realiza una socialización y evaluación de los resultados. El docente estará presente en la implementación y ejecución de las actividades. La autora de esta tesis además pretende fomentar un ambiente positivo y de confianza en los estudiantes para motivarlos en la realización de las actividades. Para la resolución de las actividades propuestas se pretende que los estudiantes utilicen las fases propuestas por Polya (1965).

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Tu Huella De Carbono

Parte introductoria: en el día a día, realizamos actividades que dejan huella de carbono. La huella de carbono es una medida o indicador ambiental que refleja la cantidad de gases de efecto invernadero (GEI), expresada como CO2 equivalente. Por ejemplo, cuando consumimos energía al prender la luz, al bañarnos con agua caliente o al mandar un mensaje por correo o por celular, etc.

Puedes determinar tu huella de carbono personal la cual se genera de las actividades de consumo asociadas el uso de energía eléctrica en el hogar, los medios de transporte, entre otras.

Problema: ¿cómo puedes disminuir tu huella de carbono asociada al uso de la energía eléctrica? Las respuestas de las siguientes preguntas pueden ayudarte:

a. Sabías que el consumo de energía depende de dos cosas: los vatios de potencia de tus electrodomésticos y el tiempo de uso en horas al mes. ¿Sabes cómo identificar los vatios de energía en un electrodoméstico?
b. ¿Qué actividades realizas al día que consumen energía eléctrica y qué cantidad de horas la realizas?
c. ¿Cómo convertir un vatio en kilovatio?
d. ¿Qué podrías hacer para disminuir los kilovatios por hora?
e. ¿Cuál será el factor de conversión de la huella de carbono producidos por kilovatios por hora? ¿Qué recomendaciones podrías hacer para disminuirla?

4.2.2. Actividad 2. Desarrollo de un problema de modelado matemático visual.

Objetivo: desarrollar un modelo de ruta óptima para la recolección de residuos involucrando las habilidades de la resolución de problemas.

Sugerencia metodológica. La actividad presenta el plano vial de una de las zonas de la Duitama. En el mapa se evidencian los colegios del sector, entre ellos la Institución Educativa Agroindustrial La Pradera con el propósito de propiciar en los modeladores el interés por la solución del problema, además porque la familiarización con la zona les permite identificar más facilmente algunas variables, rutas, presencia de semáforos, entre otros aspectos. Se estima para el desarrollo de la actividad tres horas de clase. Para el desarrollo de las actividades, el aula se organiza en pequeños grupos de tres estudiantes. El problema es adaptado de Greefrath, Siller, Vorhölter y Kaiser (2020). Para la resolución de la actividad se pretende que los estudiantes utilicen las fases de Polya (1965).

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Ruta de recolección de residuos sólidos

Parte introductoria: Urbaser es la empresa contratada para el servicio de aseo en Duitama. Esta empresa se encarga de la recolección de los residuos no aprovechables, del barrido y la limpieza de las calles, tratamiento de lixiviados, de la poda de árboles y corte de césped. Urbaser siempre está tratando de encontrar la mejor ruta para la recolección de los residuos no aprovechables.

Problema: ¿cuál es una ruta óptima que permita ahorrar tiempo y combustible para la recolección de los residuos no aprovechables de los colegios del sector?

Las respuestas de las siguientes preguntas pueden ayudarte:

a. ¿Qué criterios debe cumplir la ruta?

b. ¿Qué información necesitas del mapa de la ciudad para resolver este problema?

c. ¿Existen diferencias entre las rutas de recogida de basura, de barrido de calles, de la poda de árboles y corte de césped?

d. ¿Cómo debería ser un plano de calles que haga particularmente fácil encontrar la mejor ruta del vehículo de recolección de basura?

A continuación, se presenta el área de la recolección de basuras (ver Figura 4).

Figura 4. Plano de zona nororiental del Duitama.

4.2.3. Actividad 3. Proporcionalidad y unidades de tiempo

Objetivo: usar o aplicar la proporcionalidad y las unidades de tiempo (mínimo y máximo) para la resolución de problemas que generan la construcción de modelos matemáticos ambientales.

Sugerencia metodológica. A las comunidades de práctica conformadas en grupos de tres estudiantes se le entregará la guía de trabajo, la cual será resuelta teniendo en cuenta los pasos de Polya (1965). El docente asumirá un rol investigativo y orientador para llevar a los estudiantes hacia la consecución de modelos y los estudiantes tendrán un rol activo. El tiempo estipulado para la solución de la actividad es de 5 horas. Para la construcción de los modelos matemáticos interdisciplinarios se sigue lo dispuesto por Gürbüz y Çalik (2021).

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Erradicación de la plaga: retamo espinoso

El retamo espinoso (ulex europaeus l.) se ha convertido en una plaga para los ecosistemas, puede acabar con la humedad en las zonas donde se ubica, y es una planta que provoca incendios. Por lo anterior, CorpoBoyacá ha realizado esfuerzos por erradicar esta especie invasora y agresiva. Para el proceso de erradicación se tiene en cuenta los siguientes pasos (ver Figura 5).

Figura 5. Pasos de erradicación: se arranca la mata con raíz, se corta en trozos adecuados para trituración y finalmente se tritura y almacena.

Según Corredor (2022) los tiempos de erradicación por metro cuadrado de plantas de 0 a 2 m de altura es de 2 horas en promedio, por 4 profesionales. Si la planta es de 2 a 4 m el tiempo se duplica. Una vez que el área se encuentra totalmente despejada se deberá realizar seguimientos constantes cada cuatro meses durante tres años. La Secretaria de protección y medio ambiente en Duitama solo cuenta con 40 personas encargadas para esta labor. A continuación, se presentan las áreas con Retamo espinoso de Duitama (ver Figura 6).

SECTOR/VEREDA	**ÁREA TOTAL AFECTADA (m^2)**
Santa Ana	65200
Sirata	2830
Zona urbana	3132
Quebrada de Becerras	3479
Tocogua	1072
TOTAL	**75713**

Figura 6. Áreas con Retamo espinoso de Duitama. Fuente: tomado de Gutiérrez (2021)

Problema: ¿Cuál es el cronograma (actividad y tiempo) que permite erradicar completamente el retamo espinoso de Duitama en Boyacá?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Qué variables cuantitativas pueden intervenir en la erradicación del retamo espinoso y cuál es su relación?

b. ¿Conviene asumir que todas las plantas tengan entre 2 a 4 metros ó 0 a 2 metros de longitud? ¿Cómo influyen estos datos en el tiempo total de erradicación?

c. ¿Cuál es el tiempo (años, meses y días) mínimo y máximo según el número de veces que se requiere intervenir el área afectada para la erradicación del retamo?

4.2.4. Actividad 4. Representación gráfica de variables

Objetivo: Representar gráficamente la relación entre variables (dependiente e independiente).

Sugerencia metodológica. Se invita a las comunidades de práctica a aplicar las fases de Polya (1965) para dar solución al problema y establecer las partes claves del problema. Se invita a avanzar en cada pregunta heurística cuando el grupo lo requiera. Se estima tres horas para el desarrollo y socialización de la actividad. Se invita a utilizar los elementos geométricos en caso de existir gráficas sobre el plano cartesiano, etc. Posteriormente los grupos darán a conocer la solución al problema y validación a los modelos construidos.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: La hora del planeta para recuperar la Amazonia

Parte introductoria: el sábado 25 de marzo se realizó la actividad *la hora del planeta* en la cual el Fondo Mundial para la Naturaleza (WWF) invitaba a los colombianos a apagar la luz y desenchufar los electrodomésticos desde las 8:30 a las 9:30. Esta actividad se ha convertido en uno de los movimientos más grandes a nivel mundial en defensa del medio ambiente. Aunque algunos hogares Duitamenses participaron de la actividad faltan algunos por tomar conciencia.

"*Si alguna vez han pensado qué pasaría si se apaga la luz durante una hora a nivel nacional, la respuesta es contundente: se podrían reducir más de mil toneladas de Gases de Efecto Invernadero, lo que equivale a conservar casi 2 hectáreas de bosque amazónico por un año.*"[77] Y es que "*para el periodo abril de 2021 a marzo de 2022, se identificó que en un año el Parque Nacional Natural Tiniguala (ubicado en el Meta) perdió 352 hectáreas de bosque a causa de la deforestación.*"[78]

Problema: ¿qué modelo o cronograma a partir del 2024 propone para recuperar las 352 hectáreas de bosque amazónico perdido en el año 2021 a 2022?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la solución del problema.

a. ¿Cuántas "*horas del planeta"* propones al año para conservar por lo menos dos hectáreas de bosque anualmente?

b. ¿Qué variables intervienen en el problema y como se relacionan?

c. ¿Cómo podrías representar gráficamente la información utilizando el plano cartesiano?

[77] World Wildlife Fund (WWF) (23 marzo 2023*).* ¿Qué se puede hacer por el planeta al desconectarse una hora? https://www.wwf.org.co/?uNewsID=381935

[78] Fundación para la Conservación y el Desarrollo Sostenible (FCDS). https://fcds.org.co/publicaciones/la-amazonia-colombiana-perdio-113-572-hectareas-de-bosque/

4.2.5. Actividad 5. Diseño de cuerpos redondos reciclando llantas

Objetivo: Diseñar estructuras en 3d teniendo en cuenta unidades de área y volumen para la construcción de modelos matemáticos ambientales.

Sugerencia metodológica. El planteamiento de esta actividad permite a los estudiantes que, tras la socialización del anterior taller, ellos puedan consolidar sus modelos matemáticos interdisciplinarios con mayor motivación, seguridad y eficiencia. Se estará atenta a los procesos de metacognición que se realicen al interior de las comunidades de práctica. Se estima cuatro horas para el desarrollo de la actividad. Se validarán los modelos matemáticos construidos y se socializarán.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, papel de colores, tijeras, pegastic, compás, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Reciclando llantas

Parte introductoria: La revista *Semana* (2023) en su sección de Economía tituló *"En Colombia, cada año 950 000 llantas usadas van a parar a la basura"*[79] mientras que el periódico *El Tiempo (*2018) se refirió a la crisis ambiental que están produciendo las llantas en Duitama. "*La problemática es cada vez más grave, si se tiene en cuenta que Duitama es considerada la 'Capital del transporte de carga en Colombia' debido al alto número de tractocamiones que tienen los Duitamenses, situación está que ha desencadenado en la presencia de cientos de talleres de cambio de llantas que no tienen ningún tipo de control*"[80]. Actualmente, en Duitama se está pensando

[79] Revista Semana (14 de marzo de 2023). En Colombia, cada año 950.000 llantas usadas van a parar a la basura. https://www.semana.com/economia/inversionistas/articulo/en-colombia-cada-ano-950000-llantas-usadas-van-a-parar-a-la-basura/202129/
[80] El Tiempo (30 de octubre de 2018). Cementerio de llantas tiene en crisis ambiental a la zona de Duitama. https://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-4634998

reutilizarlas con diferentes propósitos entre las que se proponen como sillas y mesas para los parques o los colegios.

Problema: ¿qué diseño usted propone reutilizando llantas para aprovechar al máximo 4 x 3 metros cuadrados de terreno plano (pastizal) del colegio?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Qué medidas se necesitan conocer de las llantas para construir el diseño?

b. ¿Cuál es la cantidad de llantas reutilizables en el modelo construido?

c. ¿Grupo poblacional que se beneficiaría del diseño?, ¿será necesario conocer el peso de la llanta?

4.2.6. Actividad 6. Patrones de comportamiento entre magnitudes

Objetivo: calcular el caudal volumétrico desperdiciado teniendo en cuenta las relaciones entre distintas magnitudes.

Sugerencia metodológica. Para esta actividad se organizan grupos conformados por tres estudiantes a los cuales se les cambia de rol en las diferentes actividades desarrolladas. Esta actividad de tipo inicial tiene como propósito que el estudiante analice la relación entre magnitudes (tiempo, número de litros, etc) ya sea de forma proporcional o inversamente proporcional. Para lo anterior se dará el problema a resolver, posteriormente si la Comunidad de Práctica de Wenger requiere orientaciones para avanzar en la solución se realizarán algunas preguntas heurísticas. Se estima tres horas para el desarrollo de la actividad. Se validarán los modelos matemáticos construidos y se socializarán.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: La llave de agua

Parte introductoria: "*4 de cada 10 litros de agua potable se malgastan en Colombia. Principalmente, el derroche de este líquido se deriva de pérdidas técnicas y de descuidos humanos"*[81](ver Figura 7). En esta se puede evidenciar como el agua del grifo del colegio no cae en su totalidad en el balde, sino que una parte se desperdicia.

Problema: ¿en qué cantidades y actividades de la institución se puede emplear el agua que se desperdicia?

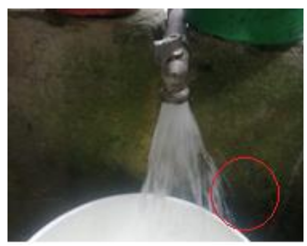


Figura 7. Desperdicio de agua por descuido en la sección de aseo.

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Si aumenta el tiempo de abierta la llave o el grifo, aumentará también la cantidad de agua que se desperdicia? y ¿cuáles son las variables que intervienen y cómo es su comportamiento?

b. ¿Cómo saber qué cantidad de agua se desperdicia? y ¿qué cantidad de litros de agua se está desperdiciando en el colegio por este uso inadecuado?

c. ¿Qué actividades de la institución requieren del uso del agua y en qué proporciones?

[81]Diario La República (julio de 2017). Cuatro de cada 10 litros de agua potable se malgastan en Colombia.https://www.larepublica.co/responsabilidad-social/cuatro-de-cada-10-litros-de-agua-potable-se-malgastan-en-colombia-2530612

4.2.7. Actividad 7. Tabulación y análisis numérico

Objetivo: Tabular datos y realizar un análisis numérico variacional que permita solucionar problemas ambientales.

Sugerencia metodológica. Se cambian los roles de la comunidad de práctica con respecto a la actividad anterior. Se estima que la actividad de clase se desarrolla en dos horas y se proporciona la guía de estudio la cual no emplea ningún material didáctico. Se pretende que los resolutores sigan las fases de Polya (1965) con la intervención del docente, el cual estará atento a direccionar el objetivo de la clase.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Cepillo de dientes de plástico vrs. de bambú

Parte introductoria: *"Sabías que una persona utiliza de media unos 300 cepillos de dientes de plástico a lo largo de su vida y cada uno de ellos puede tardar más de 75 años en degradarse. Una buena alternativa son los cepillos de bambú, fabricados con una planta de rápido crecimiento y que son biodegradables tardan 6 meses en degradarse"[82].*

Problema: ¿qué beneficios ambientales estadísticos trae el uso de cepillos de dientes a base de bambú y no de plástico por parte de los miembros de tu casa? y ¿cuál es el impacto ambiental cuantitativo positivo de los habitantes de Duitama al utilizar cepillos de dientes a base de bambú y no de plástico?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

[82] National Geographic (03 de enero de 2023). 12 ideas para reducir el uso de plástico en casa. https://www.nationalgeographic.com.es/mundo-ng/12-ideas-para-reducir-uso-plastico-casa_14717

a. ¿Cuántos cepillos de dientes hay en tu casa, todos ellos están hechos de plástico?

b. ¿Cuántos cepillos de dientes han utilizado los miembros de tu casa a lo largo de su vida?

c. ¿Cuál es el intervalo de precio de los cepillos de plástico y los de bambú?

d. ¿Será conveniente conocer la población actual de Duitama (ver Figura 8)?

POBLACIÓN DE DUITAMA AÑO 2022	
Edad (e)	total
$0 < e < 1año$	1527
$1ño \leq e \leq 99años$	126827
$e \geq 100\ años$	46
Total	**128400**

Figura 8. Población de Duitama Año 2022.Tomado de Rodríguez (2022)

4.2.8. Actividad 8. Volumen de sólidos y líquidos

Objetivo: Determinar el volumen de las cámaras (sólidos) presentes para el transporte de agua y el volumen de agua aprovechada para actividades de agricultura y ganadería.

Sugerencia metodológica. Para esta actividad no se organizan en grupos inicialmente las comunidades de práctica, sino que se expone la situación y se resuelven dudas. Esta presenta un contexto desconocido para los estudiantes al estar vinculada con la hidrología, lo cual requerirá resolver inquietudes del estudiantado. Posteriormente se organiza el salón en pequeños grupos de tres estudiantes, estableciendo un líder diferente al de las anteriores actividades. Se estima que el tiempo estimado para el desarrollo es de dos horas realizadas en diferentes sesiones.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, vídeo, regla y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: El nacimiento de agua. Riesgos antes o beneficios después

Parte introductoria: en el kilómetro 8 de la vía Duitama Charalá a 12 m de la carretera principal se detectó un manantial difuso (el agua no sale de un punto definido sino de un sector más grande). El área de captación corresponde a 40 metros cuadrados. Dicho Manantial se encuentra en una finca donde viven cuatro personas adultas y se realizan actividades de ganadería (reses) y de agricultura (papa).

Problema: ¿cuáles son las medidas mínimas óptimas de las cámaras de carga, cámaras de conducción de agua (tuberías) y la cámara seca para el aprovechamiento del recurso hídrico? y ¿cuántos metros cúbicos de agua semanal destinarías para las diferentes actividades de la finca según la cantidad de agua recolectada?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Cómo saber qué cantidad de agua brota por segundo?

b. ¿Qué riesgos y consecuencias conllevaría que no se recoja el agua del nacimiento de agua?

c. ¿Qué harías con la cantidad de litros de agua que se estaría desperdiciando si toda no se destina para las diferentes actividades de la finca?

d. ¿Cuáles son las medidas de la finca destinadas a la siembra de papa?

4.2.9. Actividad 9. Ecuaciones de primer grado

Objetivo: Proponer y resolver ecuaciones de primer grado interpretando el resultado en situaciones de riesgo ambiental.

Sugerencia metodológica. Inicialmente se propone exponer la difícil situación que está viviendo Ráquira por la contaminación del aire. Para lo cual se muestra en tiempo real el Índice de la Calidad del Aire (ICA) y exactamente la cantidad de material particulado presente en el aire que puede estar causando enfermedades respiratorias. También se muestra que dicha página web presenta en tiempo real el ICA en los lugares del mundo, esto con el propósito de que la exploren. Anexo a ello, se compara con el Índice de la Calidad del Aire (ICA) de Duitama la cual es buena. Esta etapa es clave para responder inquietudes y analizar la disciplina que estará vinculada al problema de modelado, en este caso, la ingeniería ambiental.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, página web y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Calidad del aire en Ráquira

Parte introductoria: "Boyacá es uno de los departamentos con peor calidad de aire: Ráquira a la cabeza"[83] según el Índice de Calidad del Aire ICA que establece los rangos de medición de la contaminación del aire y los efectos que esta ocasiona, (ver Figura #). A causa de los 258 hornos no ecológicos que utilizan los campesinos para realizar sus artesanías se instalaron dos estaciones de monitoreo (Ráquira 1 y Ráquira 3) para alertar sobre la calidad del aire. La estación Ráquira 3, el día 6 de abril del 2023 registró 89,8 $\mu g/m^3$ de PM2,5 (Material particulado 2,5) (ver Figura 10). El material particulado PM 2,5 está conformado por partículas muy pequeñas en el aire que tiene un diámetro de 2,5 micrómetros de diámetro, lo que ocasiona en el sistema respiratorio enfermedades pulmonares (ver Figura 9).

ICA	Calidad del Aire	PM2,5 $\mu g/cm^3$ 24 horas	Proteja su Salud
0 - 50	Buena	0 a 12	No se anticipan impactos a la salud cuando la calidad del aire se encuentra en este intervalo.

[83] Boyacá 7 días. (marzo de 2019). Boyacá es uno de los departamentos con peor calidad de aire: Ráquira a la cabeza https://boyaca7dias.com.co/2019/03/19/boyaca-es-uno-de-los-departamentos-con-peor-calidad-de-aire-raquira-a-la-cabeza/

51 -100	Moderada	12.1 a 35.4	Las personas extraordinariamente sensitivas deben considerar la limitación de los esfuerzos físicos excesivos y prolongados al aire libre.
101-150	Dañina a la Salud de los Grupos Sensitivos	35.5 a 55.4	Los niños y adultos activos, y personas con enfermedades respiratorias tales como el asma, deben evitar los esfuerzos físicos excesivos y prolongados al aire libre.
151-200	Dañina a la Salud	55.5 a 150.4	Los niños y adultos activos, y personas con enfermedades respiratorias tales como el asma, deben evitar los esfuerzos excesivos prolongados al aire libre; las demás personas, especialmente los niños, deben limitar los esfuerzos físicos excesivos y prolongados al aire libre.
201-300	Muy Dañina a la Salud	150.5 a 250.4	Los niños y adultos activos, y personas con enfermedades respiratorias tales como el asma, deben evitar todos los esfuerzos excesivos al aire libre; las demás personas, especialmente los niños, deben limitar los esfuerzos físicos excesivos al aire libre.
300+	Arriesgado	250.5 a 500.5	

Figura 9. Puntos de corte del Índice de Calidad del Aire -ICA Tomado de http://aqicn.org/station/@373042/es

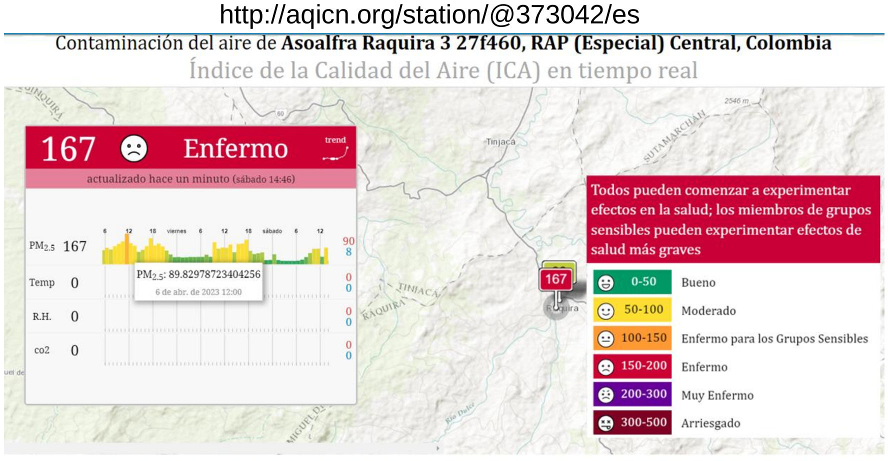


Figura 10. Calidad del aire en estación Ráquira 3. Tomado de http://aqicn.org/station/@373042/es

Problema: ¿cuál debería ser la concentración medida del contaminante PM2,5 que permita reducir los 89,8 $\mu g/m^3$ de aire en la estación de Ráquira 3?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Qué variables influyen para determinar la Calidad del Aire?

b. ¿Conoces la metodología de cálculo para encontrar el Índice de calidad del aire para el contaminante PM2,5 de una estación de monitoreo?

4.2.10. Actividad 10. Construcción de estructuras geométricas con botellas de plástico

Objetivo: construir estructuras en 3d teniendo en cuenta unidades de longitud, área y volumen, además de la consideración de vistas de los sólidos construidos.

Sugerencia metodológica. Los estudiantes recibirán una guía de trabajo que contiene los problemas a resolver. También contarán con botellas de plástico y las medidas promedio de un canino para darle solución al problema. El docente realizará algunas preguntas que orientaran el trabajo y estará atenta a las estrategias de metacognición individual y grupal en cada comunidad de práctica. Posteriormente se socializa el modelo construido. Vale la pena aclarar que en todas las actividades se sigue el modelado matemático interdisciplinario para dar respuesta al problema. El tiempo de resolución de las actividades es de dos horas de clase.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, botellas de plástico, bisturí, tijeras, cinta, regla o metro y hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad: Casas para caninos

Parte introductoria: Como puedes observar en las cestas de basura del colegio se depositan semanalmente muchas botellas de plástico. Por lo anterior se propone diseñar casas para los caninos que no la tienen o que están abandonados.

Problema: ¿Cómo diseñaría su propio modelo de casa para estos caninos?

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:

a. ¿Qué medidas necesita tener en cuenta para el diseño de las casas para los caninos? ¿cómo evitar el aislamiento térmico y reducir la pérdida de calor?

b. ¿Qué área tendría cada una de las vistas de la casa de los caninos?

Conclusiones del capítulo 4

El modelo didáctico está estructurado en cuatro partes las cuáles son: fundamentos, caracterización y necesidad, resolución y concreción práctica.

Los componentes expuestos en la fase de resolución del modelo: situaciones de riesgo ambiental (EMC), modelación matemática, interdisciplinariedad, resolución de problemas, Comunidad de Práctica de Wenger, pensamiento matemático, interrelacionados originan la nueva cualidad, la cual es la *Construcción robusta de pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental*.

El modelo didáctico presenta una relación intrínseca entre la modelación matemática y las situaciones de riesgo ambiental. Las situaciones de riesgo ambiental aportan las estrategias de metacognición grupal e individual a la modelación matemática y de igual manera la modelación matemática aporta la visualización disciplinaria a las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas. Las actividades diseñadas responden al modelo didáctico propuesto y van en correlación con los componentes del mismo.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de las entrevistas aplicadas a investigadores. Además, se presentan los resultados de la implementación del Sistema de actividades.

5.1. Análisis de los resultados de las entrevistas

Las siguientes entrevistas se realizan a expertos internacionales con el objetivo de aclarar más el panorama de investigación, así como de conocer información, aportes y de considerar ideas que tal vez no se habían tenido en cuenta.

5.1.1. Entrevista Dr. Ole Skovsmose

El problema del cambio climático es un problema de justicia social importante de estudiar. La matemática es fundamental para frenar lo que se está presentando y con un solo ejemplo se logra comprender la importancia de esta ciencia, por ejemplo, el pronóstico del tiempo llueve ahora, ¿tienes experiencia en el cambio de clima matemático? para el pronóstico futuro tiene material del planeta, y ¿cómo se conoce de ese cambio? Con probabilidad, las matemáticas son la única posibilidad. El modelado matemático es una posibilidad de crear una expectativa positiva en el futuro.

Skovsmose (2022) tiene en cuenta los planteamientos de Gutstein, E. (2006) ya que se puede leer y escribir el mundo a través de las matemáticas, además sostiene que la educación matemática crítica debe preparar a los estudiantes para investigar y criticar la injusticia, y para desafiar, en palabras y acciones, estructuras y actos opresivos. Son importantes algunos tipos de problemas relacionados con el proceso de modelado sobre todo porque permiten desarrollar un conocimiento reflexivo.

5.1.2. Intervención de la Dra. Paola Valero

¿Qué elementos debe tener un problema matemático retador ambiental para que genere el desarrollo del pensamiento matemático?

Valero (2021) responde que esa es una buena pregunta que creo que yo no puedo contestar como tal, tal vez dentro de un tiempo la podamos resolver conjuntamente, estamos tratando de pensar en cómo podríamos trabajar con problemas matemáticos que aborden las ideas de los problemas científicos tecnológicos no resolubles, como las matemáticas pueden estar presentes ahí y esto quiere decir que se trasforma en situaciones que son tan complejas para resolver pero que son importantes para encontrar distintos puntos de entrada.

5.1.3. Entrevista Dra. Gloria Stillman

¿Cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de grado séptimo usando la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental?

Rta. La minería ilegal ha ocasionado daños en los ríos y en las comunidades, sería interesante hablar con los estudiantes sobre algunos de los riesgos en el sentido de cuál es el riesgo antes de que ocurra o cuál es el riesgo para la comunidad después de que haya ocurrido. También Stillman (2022) orienta posibles temáticas de actividades y dan ideas de las mismas.

5.1.4. Entrevista Dra. Gabriele Kaiser

¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático en un estudiante de séptimo grado utilizando modelos matemáticos en situaciones de riesgo ambiental?

Rta. Se podrían abordar situaciones como ¿cuántos árboles se podrían salvar en los últimos diez años porque la cantidad de periódicos que se compran y venden ha disminuido? Por lo tanto, debe tener tareas bastante elementales que deben ser comprensibles en relación con el contexto del mundo real y deben ser lo suficientemente elementales como para abordarse con estos estudiantes.

Kaiser (2022) afirma que preguntas como las anteriores fomentan la creatividad y realmente pensarían en lo que podrían hacer los estudiantes. Así que el principal problema es encontrar muy buenas tareas o problemas que sean lo suficientemente elementales del contexto del mundo real y de las matemáticas.

5.1.5. Entrevista Dr. Mogens Niss

1. ¿Cómo lograr desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de séptimo grado utilizando la modelación matemática en situaciones de riesgo medioambiental?

Rta. Lo primero y más importante es encontrar cuál es el problema matemático que va porque no se puede idear una estrategia o procedimiento para resolver problemas antes de haber especificado el problema que se quiere resolver. Diferentes problemas requieren diferentes enfoques, estrategias y procedimientos.

2. ¿Puede sugerir alguna estrategia o procedimiento para el proceso de resolución de problemas en el aula apoyado en modelos matemáticos en situaciones de riesgo ambiental?

Rta. Podrían interesar a los estudiantes problemas que presenten contaminación química, desechos industriales que fluyen hacia los canales de agua, hacia los ríos, hacia los lagos, etcétera. Niss (2022) agrega que la estrategia consistiría en averiguar cuánto de los desechos peligrosos generalmente estarán contenido en una cantidad de agua que fluye hacia el río, cuántas sustancias químicas malas entran en el medio ambiente por los ríos, etcétera, etc. Lo anterior requiere hacer algunas investigaciones extra matemáticas.

3. ¿Conoce investigaciones que aborden el modelado matemático en situaciones de riesgo ambiental?

Rta. No conozco investigaciones que traten de esto, es un tema muy específico y no tengo información al respecto.

5.1.6. Conclusiones de las entrevistas

Los aportes de los expertos proporcionan respuestas valiosas, profundas, llenas de detalles para la investigación. También ayudan a clarificar las respuestas, proporcionando información más precisa. Por la anterior información se reconoce considerar la modelación matemática como aporte positivo que robustece la presente investigación con el propósito de desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de grado séptimo en torno a situaciones de riesgo ambiental.

5.2. Validación del modelo didáctico y del sistema de actividades

Para validar el modelo didáctico se emplea el enfoque basado en argumentos (EBA) el cual fue propuesto por Kane (2013). Padilla, et al (2007) sostiene que los beneficios de adoptar el esquema de validación basado en argumentos de validez son también evidentes. Según Padilla (2007) integra la validación de las consecuencias dentro de un único esquema de validación; y plantea la validación de las consecuencias en los mismos términos que la validación de las interpretaciones: formulación e identificación de los supuestos en que se basa y búsqueda de evidencias para determinar si las consecuencias positivas del uso del test superan las consecuencias negativas.

De acuerdo a lo anterior, y luego de aplicar el sistema de actividades, se analizó el desempeño de los estudiantes, sus logros y dificultades, tal como se señaló en la cuarta parte del modelo didáctico correspondiente a la concreción práctica.

En cada actividad se establecieron unos criterios o categorías las cuales fueron valoradas en todas las actividades, estas fueron las fases del ciclo de modelación: Entender el problema, descomposición/agrupación, modelado mental, formación del contexto, formación y construcción del modelo, transformación y evaluación y reporte.

A continuación, se presentan los resultados del Pretest y del Postest, este último corresponde al desempeño promedio en las actividades de los estudiantes de grado séptimo (ver Figura 11). Se aclara que se valoraron seis comunidades de práctica.

Comunidad de Práctica	**Pretest** Acti.1	Acti.2	Acti.3	Acti.4	Acti.5	Acti.6	Acti.7	Acti.8	Acti.9	Acti.10	**Postest**
1	2,4	3,3	2,3	2,3	3,9	2,6	2,6	2,6	3,8	4,4	3,1
2	2,7	3,8	3,3	3,5	4,7	3,9	3,4	3,9	3,3	4,6	3,8
3	3,5	4,6	4,3	4,8	4,9	4,8	4,3	5,0	4,6	4,8	4,7
4	3,8	4,4	4,8	4,9	4,9	4,9	4,8	4,9	4,7	4,9	4,8
5	3,0	3,8	3,7	3,5	4,8	4,6	3,5	3,5	3,6	4,8	4,0
6	3,2	3,8	2,4	3,5	3,5	3,9	3,4	3,6	3,0	4,3	3,5
Promedio curso	**3,1**	3,9	3,5	3,7	4,4	4,1	3,7	3,9	3,8	4,6	**4,0**
Porcentaje	**62**	79	69	75	89	82	73	78	77	92	**79**

Figura 11. Desempeño de las comunidades de práctica

Como se observa el desempeño del curso aumentó en un 17%, lo cual índica que las actividades enmarcadas en el modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental es viable. En consecuencia, el desempeño de los estudiantes en matemáticas aumentó de 3,1 a 4,0, sobre 5,0.

Para contrastar los resultados del sistema de actividades y por ende la viabilidad del modelo didáctico, se utilizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon. Para este trabajo se asume que:

H_0= El sistema de actividades basado en el modelo didáctico no produce cambios significativos, en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes mediante la modelación, utilizando como recurso didáctico las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas. Siendo de esta manera la hipótesis nula.

H_1= El sistema de actividades basado en el modelo didáctico sí produce cambios significativos, en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes mediante la modelación, usando como recurso didáctico las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas. Siendo la anterior la hipótesis de la investigadora.

Para el caso se considera el nivel de significancia α=0.05 (ver Figura 12).

VALIDACIÓN A TRAVÉS DE LA PRUEBA DE WILCOXON						
Pre-test	**Pos-test**	**Diferencia**	**Diferencia absoluta (Orden menor a mayor)**	**Ranking**	**Valores Estadísticos**	
4	5	-1	1	1	Suma de Ranking(+)	0
3	4	-1	1	2	Suma de Ranking(-)	15
4	5	-1	1	3	**Valor W**	**0**
3	4	-1	1	4	**Valor Crítico W**	**3**
2	3	-1	1	5	**Población N(n)**	**6**
3	3	0	0		Hipótesis nula (No hay diferencia significativa)	
				Si el valor "W"es menor al valor crítico se rechaza la hipótesis nula y se acepta la del investigador		✓
				Si el valor "W"es mayor al valor crítico se rechaza la hipotesis del investigador y se acepta la hipótesis nula		

TABLE A12 Quantiles of the Wilcoxon Signed Ranks Test Statistic

	$w_{0.005}$	$w_{0.01}$	$w_{0.025}$	$w_{0.05}$	$w_{0.10}$	$w_{0.20}$	$w_{0.30}$	w
$n = 4$	0	0	0	0	1	3	3	
5	0	0	0	1	3	4	5	
6	0	0	1	3	4	6	8	
7	0	1	3	4	6	9	11	

Figura 12. Análisis de los aportes teórico y práctico.

Se concluye que hay evidencias suficientes para plantear que el sistema de actividades enmarcado en el modelo didáctico propuesto, sí produce cambios significativos para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes mediante la modelación, empleando como recurso didáctico las situaciones de riesgo ambiental contextualizadas. El valor "w"es menor al valor crítico por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis del investigador. De esta manera los aportes teóricos y prácticos que proporciona la presente investigación son fiables y enrriquecen la nueva cualidad, la cual esta enmarcada en la construcción robusta del pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental. Lo anterior a través del elemento dinamizador: la modelación matemática.

Las actividades y el modelo didáctico, también fueron validados por especialistas en el tema a través del Método Delphi (Criterios Consensuados de Argumentos), en esta parte intervinieron: Dra. Mary Falk de Losada, Dra. Yuriko Yamamoto-Baldin, Dra. Soledad Estrella, y Dra. Gloria García y Dra. Mabel Rodríguez. La rejilla evaluativa para validar el modelo didáctico se encuentra en el Anexo 4.

Para las actividades los expertos señalaron que estas verdaderamente deben conducir al estudiante a construir un modelo matemático en el cual se haga seguimiento a cada fase del ciclo de modelación, se espera que el problema permita al estudiante generalizar. Para el modelo, los expertos indicaron que los fundamentos que se tienen en la primera fase del modelo son indispensables, con respecto a la fase de resolución, si se diseña el conjunto de actividades involucrando las estrategias metodológicas bajo los componentes dispuestos, esta fase será viable, pero es muy ambicioso.

Estructura de las actividades

Las actividades están conformadas por el objetivo (logro del estudiante en la clase), la sugerencia metodólogica, los materiales a utilizar y el problema de modelado. En todas las actividades se sugiere abordar los mismos parámetros metodológicos como son el uso en la resolución de problemas de los pasos de Polya (1965), y en la construcción de los modelos matemáticos interdisciplinarios dispuesto por Gürbüz y Çalik (2021). Además, se especifica el tiempo mínimo del desarrollo de la actividad. A las comunidades de práctica conformadas por grupos de tres estudiantes se les entrega la guía de trabajo, la cual es resuelta por ellos. El docente asume un rol investigador y orientador quien realiza preguntas heurísticas para lograr los objetivos del conjunto de actividades propuestas.

5.3. Análisis de los resultados

5.3.1. Resultados estudio exploratorio

Para este tipo de estudio se tuvo en cuenta los aportes de los expertos en modelación matemática y en Educación Matemática Crítica. Por lo anterior, se presentó a los estudiantes una actividad relacionada con la Huella de Carbono con características extramatemáticas, temáticas elementales, comprensibles en relación con el contexto del mundo real, en las cuales ellos se puedan apropiar del proceso de solución. También se presentan en cada actividad preguntas heurísticas que al resolverlas ayudan a reflexionar y pensar en la solución al problema matemático ambiental. A los estudiantes no se les comentó sobre las fases del ciclo de modelado antes de presentar las actividades ni durante su desarrollo.

Fortalezas evidenciadas

A continuación, se reportan algunas de las fortalezas vistas en la construcción de modelos matemáticos.

- ✓ Existe un interés por los problemas planteados porque cada resolutor se sentía participe en la construcción del modelo. Por ejemplo, se cuestionaban sobre su consumo eléctrico mensual y las acciones que tenían que hacer para reducirlo.
- ✓ Consideraban otras ideas, variables y situaciones que podían favorecer la solución del problema matemático ambiental. Por ejemplo, que se validará el modelo comparando los consumos mes a mes. Con los conceptos matemáticos y de los que van asociando lograron comunicar el modelo matemático construido.

Dificultades evidenciadas.

A continuación, se presentan algunas de las limitaciones evidenciadas en la construcción de modelos matemáticos.

- ✓ Desarticulación del concepto con su funcionalidad en la vida real como por ejemplo potencia, área, conversión de unidades, entre otras.
- ✓ Emplean procedimientos asociados a las temáticas vistas que no conducen a la solución del problema, solo porque lo vieron en las últimas clases. Dificultades al simplificar las variables, relacionarlas y matematizar la situación.
- ✓ Desmotivación por no comprender el problema y entender el significado de algunas palabras, objetos e integración de los objetos matemáticos.
- ✓ Dificultades para tomar decisiones, planificar y hacer seguimiento a procesos secuenciales lógicos para dar solución al problema, es decir, dificultades metacognitivas, lo que les impide llevar una organización de su modelo.

A continuación, se muestra el progreso en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática involucrando situaciones de riesgo ambiental, que se evidenció en la ejecución de las actividades.

5.3.2. Actividad 1. Me familiarizo con la resolución de problemas que generen la construcción de modelos matemáticos

Esta actividad fue diseñada con el propósito de indagar en la apropiación de conceptos, operaciones, relaciones y propiedades matemáticas de los estudiantes de grado séptimo, además de tener conocimiento de cómo los estudiantes abordan un problema de modelado matemático. Para el desarrollo de esta actividad se utilizaron algunos electrodomésticos con la finalidad de que los estudiantes constrastaran los vatios de estos.

En las actividades los estudiantes fueron distribuidos en comunidades de práctica, aspecto organizacional que no es muy usual en las clases de matemáticas del colegio; pues por recomendación de las directivas, los estudiantes trabajan de forma individual. El grado presenta educandos que por segunda vez cursan séptimo.

Se hace necesario intervenir constantemente en el desarrollo de la actividad, puesto que los estudiantes no estaban familiarizados con este tipo de problemas de modelado, además desconocían los términos que hacían parte de él. Lo anterior llevó a ratificar la importancia de tener claridad sobre qué disciplina involucra el problema de modelado y cómo sus conceptos y relación aportan a la solución.

Para dar solución al problema matemático “Tu huella de carbono” el cual integra la física con las ciencias ambientales, se requiere que los estudiantes posean conocimientos previos en conversión de unidades de longitud y operaciones básicas con números naturales, enteros y racionales. Se entregó una hoja la cual contenía la tabla con las principales potencias de consumo para los electrodomésticos y equipos más comunes en casas y el factor de emisión de electricidad para la huella de carbono.

A continuación, se detalla lo realizado por los estudiantes en cada fase del ciclo de modelación.

En la fase *Entender el problema* fue necesario explicar en qué consiste la huella de carbono y los efectos que esta puede causar en la naturaleza si no se reduce. Si bien estaba escrito en el enunciado del problema, los estudiantes no tenían claridad en este concepto y más aún de su relación con la energía eléctrica.

Aunque se proporcionaron preguntas heurísticas a las diferentes comunidades de práctica, tampoco comprendían algunos conceptos que hacían parte de estas (vatios, kilovatios, entre otros), por lo cual fue necesario volver a interrumpir el trabajo de cada grupo y aclarar.

En un 71 %, las comunidades de práctica obtuvieron resultados favorables de la fase *Descomposición/agrupación*. Algunas de las comunidades determinaron las variables necesarias como las actividades en las cuales requirieron el uso de electrodomésticos, la potencia, el tiempo (hora) de uso, la potencia en kilowatts y los kilowatts por hora.

En la fase *Modelado mental*, el 72 % determinó sus hipótesis, tales como entre más tiempo está prendido un electrodoméstico mayor será el consumo y el valor del recibo. También realizaron suposiciones tales como si un kilometro tiene mil metros entonces un kilowatts tendrá mil watts. Algunos consideraron resolver el problema en dos secciones; una con actividades y tiempo que destinan actualmente a ellas y posteriormente otra tabla para denotar la reducción en el tiempo de las actividades.

La fase *Formación del contexto,* invitó a los estudiantes a pensar en los conceptos que rodean la situación tales como consumo eléctrico, Kg CO_2, gas invernadero y el factor de emisión de electricidad. Para lo anterior, se hizo necesario asociar las variables y términos de la física con la matemática y el mundo real.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* cinco comunidades de práctica, construyeron su modelo teniendo en cuenta la potencia en watts, el tiempo, la potencia en kilowatts, los kilowatts por hora, el consumo por día y luego por mes entre otros. Posteriormente determinaron su huella de carbono y ajustaron su modelo manipulando las variables para reducir su huella.

En la fase de *Transformación y evaluación* cuatro de los grupos se dieron cuenta del error en las operaciones realizadas, con lo cual tuvieron que volver a corregir el modelo. Solo un grupo llegó a la fase *Reportando* lo cual corresponde al 17%. El expositor del grupo explicó la solución de su modelo (ver Figura 13 y 14).

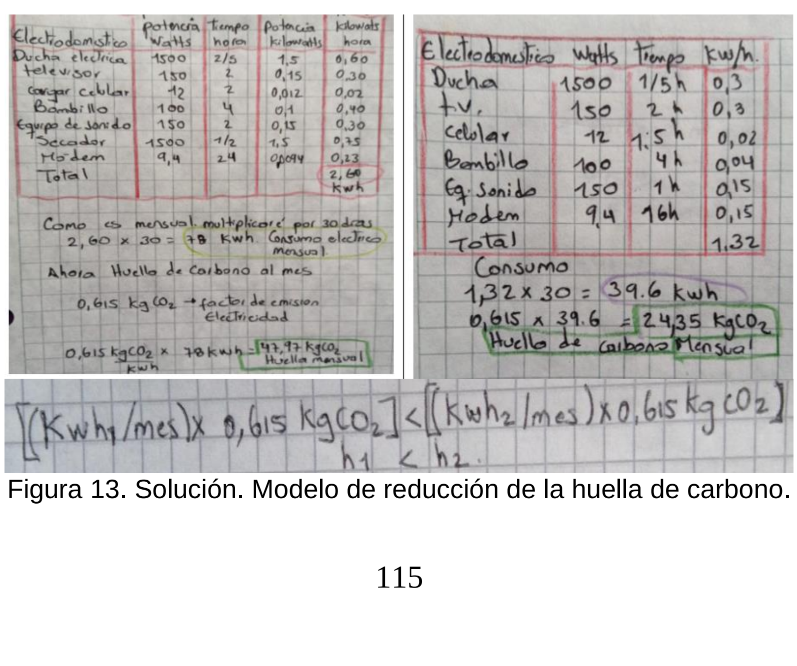


Figura 13. Solución. Modelo de reducción de la huella de carbono.

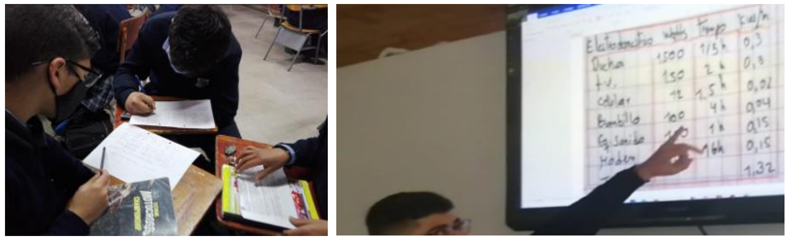


Figura 14. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 1.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Interés del estudiantado en conocer qué es la huella de carbono y cómo pueden reducirla.
- ✓ Los estudiantes describieron las actividades que realizan usando electrodomésticos, así como también el tiempo de su uso.
- ✓ Interés por conocer en qué lugar del electrodoméstico se evidencia los vatios, etc.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Desconocimiento de lo que es potencia, vatios, entre otros términos que rodean la física, cómo se vinculan con las matemáticas y en qué momento se tienen en cuenta para resolver el problema.
- ✓ Falta de análisis en las relaciones entre operaciones y errores en el desarrollo de operaciones básicas.
- ✓ Dificultad en las unidades que acompañan los números, porque no saben cómo estas se relacionan en un conjunto de operaciones.
- ✓ Dificultad para relacionar conceptos de la física con la matemática y su integración con el contexto real.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 2 del CD.

5.3.3. Actividad 2. Desarrollo de un problema de modelado matemático visual

La actividad fue desarrollada por seis comunidades de práctica conformadas en su mayoría por tres estudiantes, quienes tenían diversos roles en el transcurso de su desarrollo. Esta actividad inicial presenta un problema de teoría de grafos, con el propósito de mostrar posibilidades para promover el vínculo entre el modelado matemático y las matemáticas discretas en las clases de matemáticas escolares. La naturaleza visual del problema permitió a los estudiantes conectarse con él y darle solución a pesar de las variables que debían analizar y tener en cuenta.

Dentro de los objetivos que se tienen como investigadora está el de indagar qué fases del ciclo de modelado de Gürbüz y Çalik (2021) requieren una atención particular, por lo cual, a continuación, se hace un análisis de estas.

En la fase *Entender el problema* que también plantea Polya (1965), las comunidades de práctica comprendieron que la pregunta estaba enfocada en determinar la ruta óptima que podía utilizar la empresa Urbaser para recolectar la basura de los colegios del sector y no malgastar el tiempo y el combustible. Los estudiantes se conectaron rápido con el problema, porque conocen del servicio que presta la empresa y han sido parte de esta, debido a que muchas veces sacan la basura en sus hogares.

En la fase *Descomposición/agrupación*, dos de las seis comunidades de práctica, esto es el 89% de los grupos identificaron las variables necesarias de las innecesarias. Como necesarias, el tiempo, modalidad de la vía (única: carros que circulan de derecha a izquierda, viceversa, vía en la que solo suben o bajan los vehículos o doble vía, vía cerrada, etc.). Además, número de semáforos en la ruta escogida, longitud de la vía y velocidad permitida. Como innecesarias, número de vías que algunas veces presentan trancones y marca del vehículo.

En la etapa *Modelado mental*, equivalente a configuración de un plan según Polya (1965), las comunidades de práctica pensaron en sus planes apropiados para establecer la ruta adecuada. Como se observa en la Figura 15, un grupo trazó una cuadrícula sobre el mapa, para analizar mejor el área y la longitud de las zonas establecidas en el plano. Lo anterior, permite evidenciar que utilizan recursos vinculados con otras disciplinas, en este caso dibujo técnico para conseguir solucionar el problema.

Figura 15. Fase de *Formación y resolución del modelo de la actividad*

La fase *Formación del contexto,* invitó a los estudiantes a pensar en la mejor ruta asociando las variables y términos de la disciplina con el mundo matemático. De esta manera, tuvieron la capacidad de clasificar conceptos simplificados de la matemática y de la matemática discreta, pues tomaron las esquinas como vértices y las carreteras como aristas. En esta etapa el 86% de las comunidades de práctica avanzó sin notorias dificultades.

En la fase de *Formación y resolución del modelo,* los modeladores asociaron sus modelos teniendo en cuenta la relación entre las variables establecidas en el contexto real. Cabe anotar que algunos estudiantes se devolvían a fases anteriores del ciclo de modelación porque no consideraron algunos factores iniciales para la resolución. Todas las comunidades construyeron el modelo. La Figura 16 muestra la red de carreteras que hacen parte de la ruta óptima de recolección de residuos sólidos unida mediante vértices y aristas.

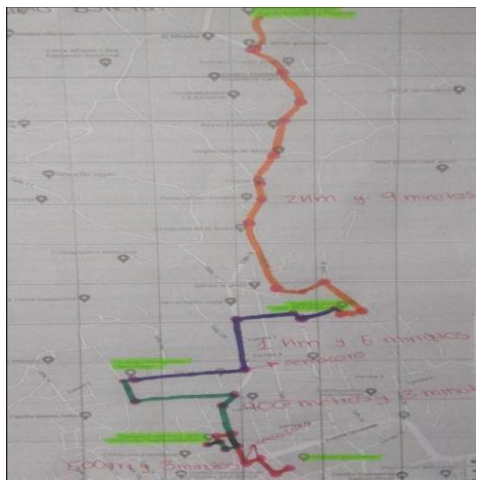


Figura 16. Solución, ruta óptima del área seleccionada.

También, el grupo de estudiantes propuso establecer la nomenclatura que denotaba la ruta de recolección de colegio a colegio, así como la longitud y el tiempo aproximado (utilizaron colores).

“Docente: ¿Por qué trazas rectas sobre el mapa?

Estudiante A: Para comprender mejor el área del mapa, esto lo aprendí en artística”

Docente: ¿Cómo hallaste las diferentes distancias en metros y kilómetros que están sobre el mapa?

Estudiante A: Tomando la regla y midiendo, cada cm en la regla corresponde a 100 metros en la realidad”[84]

En la fase *Transformación y evaluación,* los estudiantes analizaron los modelos construidos, inclusive al escuchar los comentarios de otras comunidades de práctica con respecto al sentido de las vías, se percataron de sus errores dentro del modelo y que debían considerar la ruta propuesta. En la fase *Reportando,* una comunidad de práctica satisfecha con su modelo, respondió funcionalmente a cuestiones, problemas del contexto y compartió los análisis a sus compañeros (ver Figura 17).

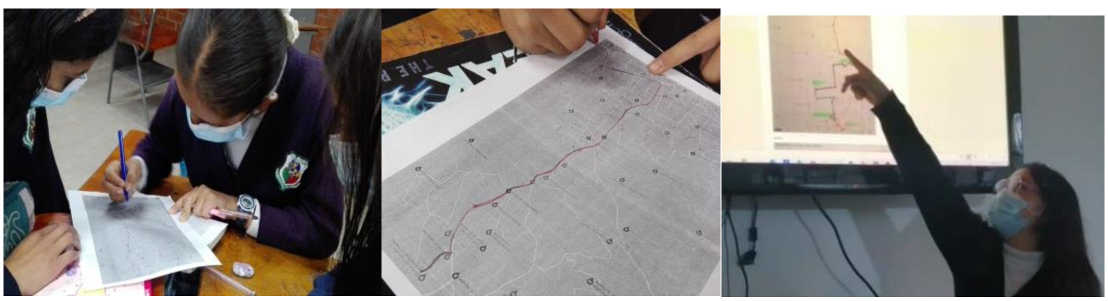


Figura 17. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 2.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Los estudiantes pudieron evidenciar la importancia de la matemática para determinar las rutas óptimas de recolección de residuos sólidos, establecer las variables y ver cómo estas se relacionan.
- ✓ Las comunidades de práctica utilizaron su creatividad para proponer situaciones enfocadas a establecer la ruta en la cual se disminuyera el tiempo y el combustible. Ejemplos de lo anterior, plantearon que la recolección de basuras se realizará

[84] Criterio de estudiantes de la Comunidad de Práctica.

únicamente en la noche o que se utilizará en Duitama el pico y placa para mejorar los tiempos de la ruta.

- ✓ Los estudiantes se sintieron motivados por trabajar un problema de modelado retador de naturaleza visual.
- ✓ Existen comunidades de práctica que vincularon técnicas y estrategias trabajadas en otras disciplinas para dar solución al problema, pero cabe aclarar que estas presentan una relación y origen tangencial con la matemática.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se constatan las siguientes dificultades.

- ✓ A algunos estudiantes no se les facilitó contemplar y vincular las variables que intervienen para la realización del modelo, tampoco las relaciones entre estas.
- ✓ Al no conocer el sector presentan falencias al integrar los diferentes aspectos relevantes tales como: sentido de la vía, lugar y número de semáforos presentes en un determinado recorrido, entre otros.
- ✓ Algunos estudiantes se desmotivaron porque tenían que pensar en cómo relacionar y estar pendiente de muchos factores a la hora de establecer la ruta óptima del plano vial dado.
- ✓ Limitaciones en el uso de estrategias de metacognición, ya que se les dificulta tomar decisiones, planificar y hacer seguimiento a estas.
- ✓ Debido a la escasa vinculación de este tipo de problemas y el uso de ejercicios abordados en la clase de matemáticas, los estudiantes no están familiarizados con la resolución de problemas. Generalmente abordan situaciones que involucran una

fórmula, ya que únicamente se reemplaza y se obtiene un dato que no logran interpretar.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 2 del CD.

5.3.4. Actividad 3. Proporcionalidad y unidades de tiempo

La actividad también fue trabajada en comunidades de práctica. Para esta, se procuró que los estudiantes tuviesen como conocimientos previos temáticas relacionadas a la proporcionalidad, análisis de situaciones que se comportan de forma directamente proporcional e inversamente, entre otras.

En la fase *Entender el problema* fue necesario explicar qué era el *Retamo espinoso* y los efectos negativos que causa en la naturaleza. En esta clase se contó con la presencia de la profesora de Ciencias Naturales, la cual comentó que en Duitama también existe la planta *el Ojo del poeta* que es invasiva como el Retamo. La intervención contribuyó a que los estudiantes captaran más la atención en la actividad.

En el diálogo desarrollado los estudiantes manifestaron no conocer la planta y comprendieron el problema, sin embargo, les inquietaba las muchas medidas presentes en el enunciado. Lo anterior impulsó a la investigadora a dar claridad graficando el problema en el tablero.

El 98% de las comunidades de práctica obtuvieron resultados favorables de la fase *Descomposición/agrupación*. Este progreso se debió al direccionamiento que las preguntas heurísticas propiciaron en los análisis realizados por los estudiantes para *"atacar"* el problema, como número de metros invadidos de *Retamo* (ver Figura 18).

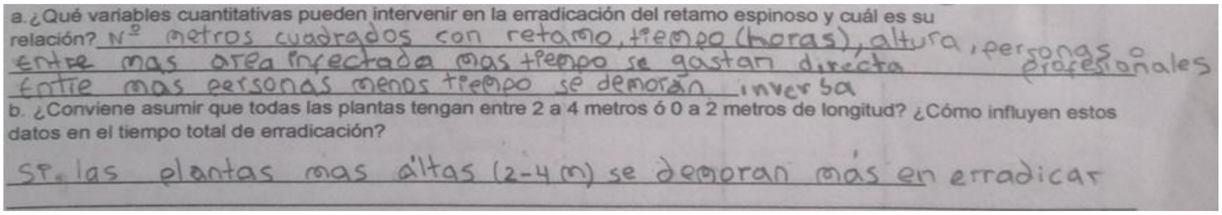

a. ¿Qué variables cuantitativas pueden intervenir en la erradicación del retamo espinoso y cuál es su relación? Nº metros cuadrados con retamo, tiempo (horas), altura, personas o profesionales
entre mas area infectada mas tiempo se gastan directa
entre mas personas menos tiempo se demoran inversa
b. ¿Conviene asumir que todas las plantas tengan entre 2 a 4 metros ó 0 a 2 metros de longitud? ¿Cómo influyen estos datos en el tiempo total de erradicación?
Si. las plantas mas altas (2-4 m) se demoran más en erradicar

Figura 18. Respuesta de la comunidad de práctica.

En la fase *Modelado mental*, el 90% de las comunidades de práctica denotaron sus propias hipótesis como por ejemplo entre más metros cuadrados infectados más tiempo se demoran en erradicar la planta invasora. Por lo anterior, pensaron utilizar la regla de tres e iniciar el análisis por las plantas de menor altura y posteriormente duplicar el tiempo según la instrucción dada en la guía.

La fase *Formación del contexto,* invitó a los estudiantes a pensar en el mejor cronograma para erradicar el retamo. Por lo cual determinaron el conjunto de variables, factores y conceptos que rodean el problema sin los cuales no se puede comprender y resolver correctamente. Ejemplo de lo anterior es que en la revisión del tiempo no se puede contar con ocho horas del día, ya que los erradicadores no trabajan en la noche, es decir, tuvieron que integrar aspectos laborales para mejorar el modelo. Estos aspectos que rodean el contexto son los que lo forman.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* cuatro comunidades de práctica consiguieron resolver el problema. En esta fase es importante la capacidad que tengan los modeladores para matematizar, es decir, la habilidad de identificar las relaciones matemáticas y el proceso secuencial lógico que las debe integrar. El trabajo de las comunidades de práctica en esta fase *Transformación y evaluación* fue valorado cuantitativamente, encontrándo errores en el análisis del conjunto de las variables y en las operaciones entre conjuntos numéricos.

En la fase de *Reportando,* el mejor modelo (ver Figura 19 y 20) fue presentado a los demás compañeros. En esta fase los estudiantes aclararon sus inquietudes y se dieron cuenta de algunos aspectos que no habían considerado.

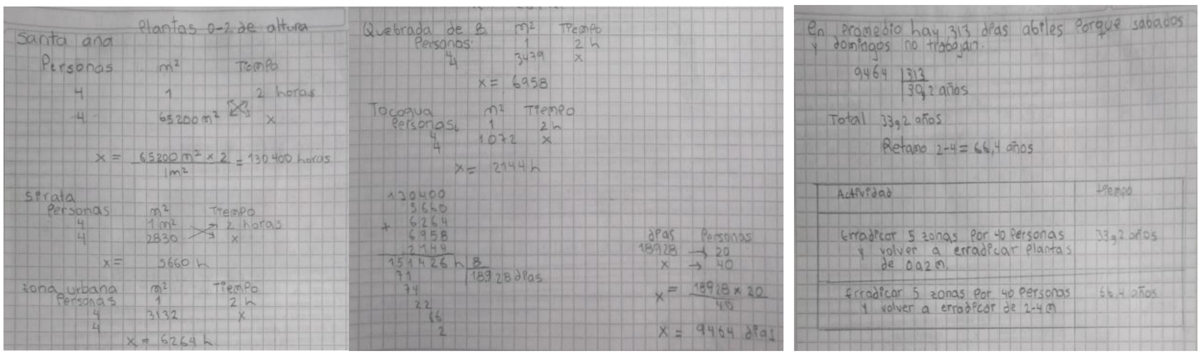


Figura 19. Solución, cronograma de erradicación de Retamo Espinoso en Duitama.

Figura 20. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 3.

Logros. Se constataron durante la actividad que:

- ✓ Se fortalecieron los conceptos de magnitudes directamente e inversamente proporcionales.
- ✓ Los estudiantes analizaron variables no solo de las matemáticas sino también del campo laboral y ambiental.
- ✓ Se consolidaron reglas de proporcionalidad y las medidas de tiempo más usuales.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se muestran las siguientes dificultades:

- ✓ Aunque la mayoría de estudiantes identificó las variables que hacen parte de la situación, no saben cómo integrarlas y en qué momento vincularlas.
- ✓ Falta de claridad en identificar situaciones que modelan magnitudes directamente e inversamente proporcionales.
- ✓ Incoherencia a interpretaciones que dan a los datos o resultados numéricos con la realidad.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 3 del CD.

5.3.5. Actividad 4. Representación gráfica de variables

La actividad se realizó con la participación de seis comunidades de práctica. Para su desarrollo se entregó inicialmente la guía la cual contenía una lectura introductoria del problema. Esta parte inicial del problema invitaba al estudiantado a sensibilizarse frente a la deforestación desmedida del Amazonas, para lo cual se pretendía participar de la hora del planeta propuesta por el Fondo Mundial para la Naturaleza.

En este problema se requería proponer un modelo o cronograma para contribuir con una solución ambiental igual que en la actividad anterior, por lo cual les fue inicialmente más fácil de comprender. Lo anterior es sustentado por los trabajos realizados de los estudiantes. Las seis comunidades de práctica obtuvieron resultados significativos de la fase *Descomposición/agrupación*. Este progreso estuvo marcado por el trabajo realizado en la anterior actividad y su socialización.

En la fase *Modelado mental*, las comunidades de práctica hacen suposiciones y plantean hipótesis para determinar la mejor hora(s) o día (s) del planeta de tal forma que les ayude a conservar las 352 hectáreas perdidas.

La fase *Formación del contexto,* indujo los estudiantes a pensar en analizar las situaciones que rodean el modelo o cronograma a partir del 2024 para recuperar las hectáreas del Parque Nacional Natural Tiniguala. En esta fase tuvieron en cuenta aspectos del entorno tales como que las horas establecidas no perjudiquen el comercio, la seguridad, ya que se deben apagar las luces y el transporte, entre otros factores a considerar.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* el 76% de los modeladores logró presentar el modelo de horas del planeta. Para lo anterior algunos decidieron proponer el cronograma dentro del año 2024 y otros lo extendieron por muchos más años. En la fase *Transformación y evaluación,* algunos resolutores propusieron un modelo que sobrepasaba la recuperación de las 352 hectáreas, con lo cual no se puso problema, pues dentro de sus análisis lo anterior beneficiaba a la Amazonía (ver Figura 21). También representaron gráficamente el modelo, sin embargo, hubo elementos que se debieron corregir.

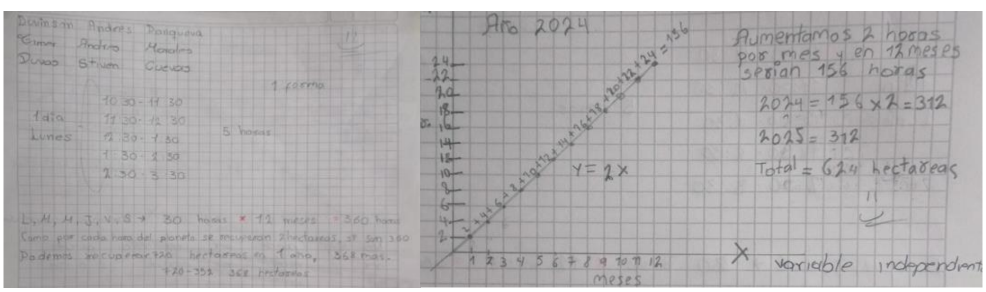


Figura 21. Solución, modelo de recuperación de las 352 hectáreas amazónicas.

En la fase *Reportando* dieron a conocer sus propios procesos y las consideraciones matemáticas que tuvieron en cuenta (ver Figura 22). Cabe anotar que las estrategias de metacognición grupal tuvieron más éxito que en la anterior actividad, pues se sentían más seguros de como planificar, hacer seguimiento y dar continuidad al cronograma. Además, se les invitó a pensar como ambientalistas lo que los motivó a proponer ideas proambientales.

Figura 22. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 4.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ La comprensión del problema permitió la conexión con la propuesta de modelo matemático ambiental.
- ✓ Se fortalecieron conocimientos relacionados con la representación de variables en el plano cartesiano.
- ✓ Los estudiantes realizaron procesos de predicción a través de la determinación y proyección de las horas del planeta.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenció:

- ✓ Dificultad en identificar la variable dependiente e independiente en una situación y la forma de ubicarla en el plano cartesiano.
- ✓ Algunos modeladores no plasman en el plano cartesiano, las etiquetas de los ejes y título del gráfico, entre otros aspectos, lo cual impide interpretar lo que quieren dar a entender.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 3 del CD.

5.3.6. Actividad 5. Diseño de cuerpos redondos reciclando llantas

Las seis comunidades de práctica trabajaron con material didáctico para simular el diámetro de las llantas de los carros. Los modeladores contaron con papel de tres colores para relacionar el radio de la llanta del carro. Los estudiantes se mostraron motivados al presentar la propuesta del modelo reciclando las llantas.

Los resolutores no tuvieron inconveniente al *entender el problema,* sabían que tenían que diseñar el espacio reutilizando llantas para aprovechar al máximo *4m x 3m* de terreno del colegio. Una de las inquietudes que se puntualizaron fue la medida promedio de las llantas, ya que tenían desconocimiento de estas. En la fase *Descomposición/agrupación* el 98% determinó como variables necesarias, las dimensiones de las ruedas (diámetro), unidades de longitud en pulgadas y metros, y unidades cuadradas (ver Figura 23).

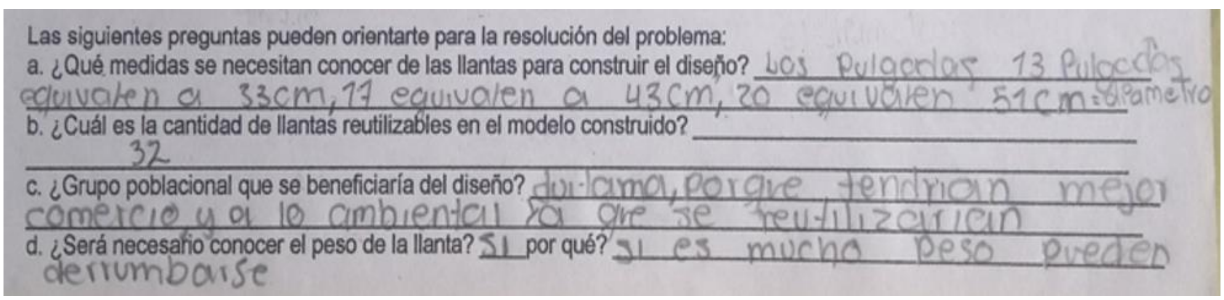

Las siguientes preguntas pueden orientarte para la resolución del problema:
a. ¿Qué medidas se necesitan conocer de las llantas para construir el diseño? Los pulgadas 13 pulgadas equivalen a 33cm, 17 equivalen a 43cm, 20 equivalen 51cm = diametro
b. ¿Cuál es la cantidad de llantas reutilizables en el modelo construido? 32
c. ¿Grupo poblacional que se beneficiaría del diseño? dui·lama, porque tendrian mejor comercio y a lo ambiental ya que se reutilizarian
d. ¿Será necesario conocer el peso de la llanta? Si por qué? si es mucho peso pueden derrumbarse

Figura 23. Respuesta por una comunidad de práctica.

En la fase *Modelado mental*, los estudiantes pensaron en qué uso podrían darles a las llantas y cómo podrían colocarse, según los 12 m^2. El éxito en esta fase fue del 83%.

La fase *Formación del contexto,* invitó a los estudiantes a determinar cuáles serían las medidas de sillas, mesas, elementos de recreación como columpios, entre otros. Al existir otros factores que rodean la situación, algunos estudiantes manifestaron que por seguridad sería bueno reutilizar las llantas como cercas, esta idea les llevó a aumentar la cifra reciclada. También consideraron las ruedas como mesas y especificaron que para evitar accidentes colocar debajo las de mayor volumen. En esta fase el 83% avanzó a la siguiente parte del modelo.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* los modeladores proporcionaron sus propios diseños por medio de su conocimiento matemático. Primero establecieron el espacio (4m x 3m) en el cual iban a realizar el diseño, luego trabajaron con el diámetro de las ruedas de diferentes pulgadas, las cuales convirtieron a centímetros, ya que esta medida les es más familiar (ver Figura 24).

Figura 24. Respuesta por una comunidad de práctica.

En la fase *Transformación y evaluación* algunos modelos propuestos inicialmente presentaron fallas, pues el diseño realizado no se ajustaba a los 12 m^2, con lo cual algunos grupos tuvieron que corregir y volver a presentarlo.

En la fase *Reportando* los modelos construidos fueron presentados a los compañeros dándo tiempo para preguntas. El 92% de las comunidades de práctica participó de la fase respondiendo a inquietudes (ver Figura 25 y 26).

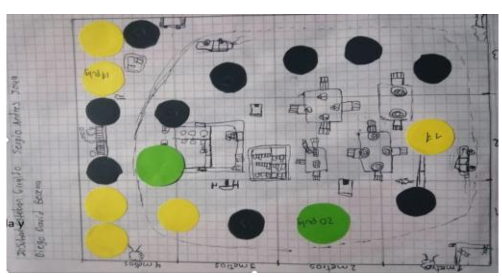


Figura 25. Solución, propuesta de uso con llantas recicladas.

Figura 26. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 5.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Los modeladores utilizaron las estrategias de metacognición individual y grupal, hubo mayor participación y creatividad, lo cual se reflejó en la funcionalidad y servicio del modelo construido.
- ✓ La fase de reportar les fue más agradable, ya que el modelo construido era más geométrico visual que numérico.
- ✓ Los estudiantes mostraron interés por proponer el diseño para una zona del colegio porque ellos podrían posteriormente hacer uso de él.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Incoherencia entre las conversiones realizadas de pulgadas a centímetros o metros.
- ✓ Inconsistencia de medidas, por un lado las dimensiones de la llanta y por otro lado las dimensiones del plano bidimensional.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 4 del CD.

5.3.7. Actividad 6. Patrones de comportamiento entre magnitudes

Los modeladores fueron distribuidos en seis comunidades de práctica, ellos ya tenían claras las fases y metodología presente a lo largo de la clase, debido a su participación en la solución de los distintos problemas abordados anteriormente. Para esta actividad solo se utilizó la guía y se estimaba un tiempo de dos horas para su solución. El problema de modelado que incluye esta actividad hace énfasis al derroche de agua al abrir una de las llaves destinada a realizar el aseo al colegio.

Los estudiantes, al estar inmersos en problemas que se ven en su institución, se apropian de estos y pueden identificar, para este caso, ¿en qué actividades de la institución pueden emplear el agua que se desperdicia y en qué medida? Por lo anterior la comprensión del problema fue más inmediata. En la fase *Descomposición/agrupación* las comunidades de práctica identificaron las variables necesarias para "*atacar*" el problema particularmente el tiempo y el volumen desperdiciado de agua.

El inconveniente de los modeladores radicó en cómo saber cuánta agua se desperdicia en un determinado tiempo, lo que les invitó a pensar más. Este razonamiento formó parte de la fase de *modelado mental* porque entre las demás hipótesis y planes en los cuales debían pensar, el análisis de esta situación era fundamental. Luego de un tiempo y previendo esta situación, se mostró una de las formas para conocer la medida lo cual contribuyó a matematizar y visualizar el problema de modelado (ver Figura 27).

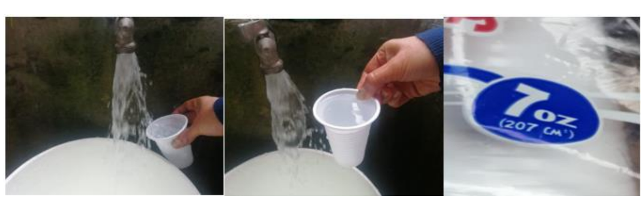


Figura 27. Explicación del docente.

Existen algunas medidas que no se trabajan en clases de matemáticas porque no son comunes o relevantes, pero como medida comercial juega un papel importante, tal es el caso de las onzas utilizadas en vasos de plástico. Lo anterior hizo parte de la fase *Formación del contexto,* ya que se debía identificar otros conceptos y factores que rodean el problema de modelado tales como las onzas.

El 78% de los modeladores en la fase *Formación y resolución del modelo* pudieron establecer la cantidad de litros de agua destinados a las diferentes actividades de la institución que utilizan este recurso no renovable. En esta fase, fue importante el análisis referente a la relación de las variables, es decir, si se trataba de magnitudes inversamente proporcionales o directamente y en qué momento se debían usar.

En la fase *Transformación y evaluación,* los modeladores se dieron cuenta de algunos errores en el desarrollo de las operaciones básicas como también en la integración de conceptos, entre otros, lo que les permitió reiniciar su modelo matemático ambiental.

El desempeño de los estudiantes en esta fase *Reportando* fue del 72%, al estar satisfechos con la solución del problema, explicaron a los compañeros la forma como llegaron a la propuesta de modelo proambiental, partiendo de su desarrollo de pensamiento matemático (ver Figura 28 y 29).

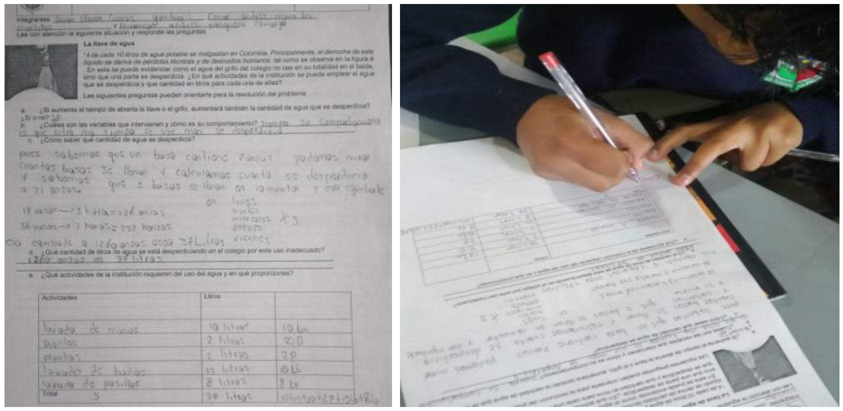


Figura 28. Solución, cantidad de agua aprovechada en la institución.

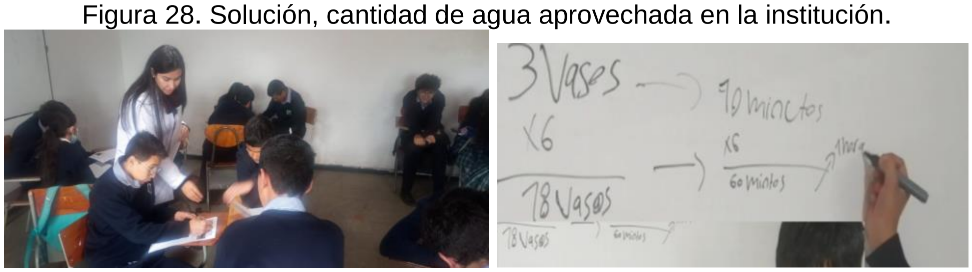


Figura 29. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 6.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Se observan estrategias de metacognición grupales, por ejemplo, los modeladores llegan a acuerdos para delimitar las actividades que requieren en aprovechamiento del agua y las cantidades que piensan emplear para cada una de ellas.
- ✓ Los resolutores manejaron varias variables las cuales integraron en la formación del modelo. Además de darse cuenta que las matemáticas están en todo y permiten dar solución a todo.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Errores en operaciones básicas y realización de operaciones que no corresponden entre variables, además no tienen en cuenta las unidades de las magnitudes, determinan un número y no saben interpretarlo dentro del problema de modelado.

- ✓ Debido a la mala distribución de recursos educativos dentro del salón, los estudiantes siempre que apreciaban el modelo o explicación de los compañeros a través del televisor debían levantarse del puesto y girarlo, y si querían analizar la explicación en el tablero igualmente debían también girar la silla. Lo anterior siempre alteraba el normal desarrollo de la clase y se perdía tiempo.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 4 del CD.

5.3.8. Actividad 7. Tabulación y análisis numérico

Las comunidades de práctica no habían escuchado hablar acerca de los cepillos de bambú por lo cual se les explicó sobre los beneficios que estos proporcionan al medio ambiente. El propósito inicial fue motivar a los estudiantes a pensar en el problema y establecer la mejor forma de analizar los beneficios cuantitativos que trae este tipo de cepillos biodegradables por parte de los habitantes de Duitama. Por tal motivo esta fase *Entender el problema* no presentó dificultad.

El progreso en la fase *Descomposición/agrupación* se debió a la orientación que las preguntas heurísticas ocasionaron para facilitar los análisis encaminados a solucionar el problema. El número de cepillos, su precio, el tipo de cepillos (plásticos y de bambú), y el tiempo de uso como variables necesarias, permitieron avanzar al 97% de los resolutores a la siguiente fase (ver Figura 30).

La fase de *Modelado mental* estuvo marcada por la búsqueda de datos cuantitativos pertinentes sobre la temática. Pensaron en comparar resultados de precios, tiempo de degradación de los cepillos de dientes a base de bambú y de plástico.

En la *Formación del contexto* el 73% tuvo presente que variables rodeaban el problema, tales como el total de personas en Duitama actualmente. Lo anterior permitía establecer cuántos cepillos de dientes utilizaron los habitantes en un año, entre otros aspectos. Algunos estudiantes tuvieron en cuenta que los niños de un año no utilizan cepillos de plástico sino de goma, por lo cual eliminaron esa población dentro de sus cálculos.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* como estrategia de metacognición grupal, los estudiantes decidieron en la etapa de planificación realizar la tabulación del total de cepillos de plástico a lo largo de su vida de los integrantes de una sola familia de la comunidad de práctica. También tuvieron en cuenta el intervalo de precio de los cepillos de plástico y de bambú.

El desempeño del curso en la fase *Transformación y evaluación* fue del 60% algunos se cansaron debido a los constantes cálculos que debían realizar .Los resolutores se dieron cuenta de que los cepillos de dientes a base de bambú son más caros que los de plástico y sólo las personas proambientales los utilizarían por su beneficio al planeta y no económico (ver Figura 30 y 31). Esto en la fase de Reporte.

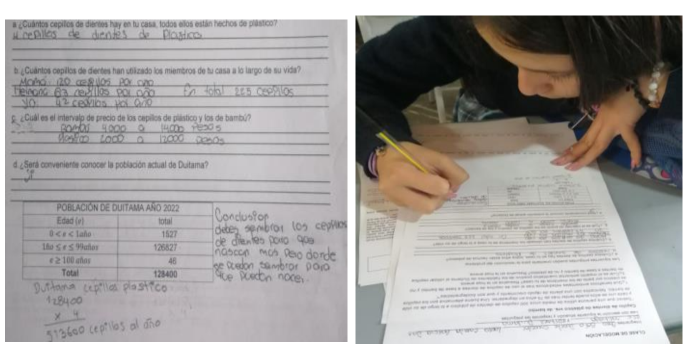


Figura 30. Solución, cantidad de agua aprovechada en la institución.

Figura 31. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 7.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Integración del pensamiento variacional con procesos de tabulación, pues identificaron que magnitud cambia y cual permanece constante en el problema. Además de saber cómo cambian a través del tiempo.
- ✓ Uso de las estrategias de metacognición grupal sobre todo en la fase de planificación y seguimiento.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Los estudiantes no poseen conocimientos previos sobre diagramas estadísticos que permitan representar las conclusiones a las que llegan. Por lo cual no determinaron el impacto ambiental estadístico de forma global.
- ✓ Desconocimiento de productos biodegradables que ofrece el comercio proambiental, ya que al estar separado de este campo de conocimiento no se tienen en cuenta algunos factores, ventajas y beneficios que prestan.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 5 del CD.

5.3.9. Actividad 8. Volumen de sólidos y líquidos

Para la motivación de los estudiantes, comprensión y resolución del problema, la autora de la presente investigación decidió realizar un video explicativo de la situación de riesgo ambiental que se evidencia en la vía Duitama Charalá (ver Figura 32).

El presentar un ambiente de vida, es decir, agua brotando de la tierra y como fondo natural el canto de los pájaros, permitió a los estudiantes estar en el contexto de la situación, valorar el entorno en qué vivimos y aplicar las matemáticas para determinar las medidas mínimas óptimas de las cámaras de carga, de conducción y la seca para su aprovechamiento. Lo anterior favoreció la fase *Entender el problema*. Cabe aclarar que se explicó sobre la funcionalidad de las cámaras que expresan el problema ya que los estudiantes no sabían de estos elementos.

El haber participado en las anteriores actividades contribuyó a que los estudiantes establecieran como variables necesarias: el volumen de agua, el tiempo, las dimensiones de las cámaras, entre otras. El 90% continuó hacia la siguiente fase, a los demás estudiantes se les orientó a través de preguntas que les hiciese avanzar en sus razonamientos.

En la etapa de *Modelado mental*, tuvieron que hacer suposiciones de la situación, sobre todo, lo referente al volumen de consumo de agua para la parte de agricultura y de ganadería, ya que el problema no los manifestaba.

En la fase de *Formación y resolución del modelo, el 77%* de los modeladores construyeron las cámaras de carga teniendo en cuenta el área de captación para el manantial difuso (40 m^2) y la función de las distintas zonas o cámaras para el aprovechamiento del agua. En la fase *Transformación y evaluación* el desempeño del curso fue del *70%*, las fallas estuvieron en las dimensiones de las distintas cámaras o tanques como algunos prefirieron llamarles. En la fase *Reportando,* se presentó una de las tres que pudieron construir e indicar la función de cada cámara (ver Figura 33).

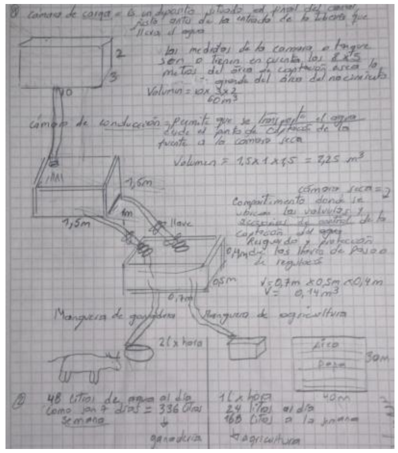


Figura 33. Solución, cantidad de agua aprovechada en la institución.

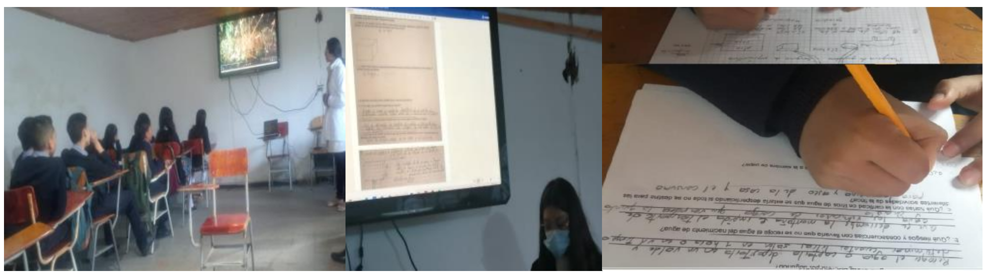


Figura 32. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 8.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Progreso en las fases del modelado, debido a que el trabajo en las distintas actividades que parten de la situación de riesgo ambiental les han permitido familiarizarse con la resolución de problemas de modelado.
- ✓ El problema de modelado presente en la actividad, logró articular los contenidos matemáticos con situaciones y fenómenos reales, de tal forma que el conocimiento matemático escolar fue abordado en un plano diferente al teórico y conceptual.
- ✓ La integración del problema matemático ambiental y su relación con la hidrología para su solución, propició una mayor motivación e interés por parte de los estudiantes permitiendo ver el carácter funcional, los aportes y el sentido del conocimiento matemático.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Algunos de los estudiantes no poseen conocimientos previos para determinar el volumen de las cámaras de carga, conducción y secas, es decir, desconocían como determinar el volumen de los prismas de base rectangular, entre otros sólidos.
- ✓ Desconocimiento del por qué el volumen de los tanques estaba dado por cm^3 o m^3, entre otras.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 5 del CD.

5.3.10. Actividad 9. Ecuaciones de primer grado

Esta actividad inició con la explicación del problema de contaminación del aire sobre todo de la Estación tres de Ráquira la cual informaba que las personas con enfermedades respiratorias deben evitar los esfuerzos excesivos prolongados al aire libre. Los estudiantes pudieron observar en tiempo real lo que estaba aconteciendo. Lo anterior favoreció la fase *Entender el problema,* ya que se aclararon preguntas, puesto que los estudiantes no estaban familiarizados con la situación ambiental de este municipio.

Los estudiantes ya intuían que las matemáticas estarían inmersas en otro campo de conocimiento, pero no sabían cual, esta vez la ingeniería ambiental. El desconocimiento de esta nueva disciplina no permitió que el cien por ciento determinará las variables asociadas a la resolución del problema. Propusieron como variables: la cantidad de material particulado 2,5 $\mu g/cm^3$

Para la fase *Modelado mental* fue necesario presentar y explicar mediante un ejercicio la siguiente expresión que aborda el índice de contaminación del aire (ver figura 35). Lo anterior se realizó debido a que los estudiantes desconocían esta temática y no tenían conocimientos previos para entenderla lo cual impedía el surgimiento de hipótesis o planes apropiados, propios de esta fase.

$$I_P = \frac{I_{Hi} - L_o}{BP_{Hi} - BP_{Lo}} \left(C_p - BP_{Lo}\right) + I_{Lo}$$

$I_P = índice\ de\ contaminación\ p$
$C_p = Concentración\ medida\ para\ el\ contaminante\ p$
$BP_{Hi} = Punto\ de\ corte\ mayor\ o\ igual\ a\ Cp$
$BP_{Lo} = Punto\ de\ corte\ menor\ o\ igual\ a\ Cp$
$I_{Hi} = Valor\ del\ índice\ de\ calidad\ del\ Aire\ correspondiente\ a\ BP_{Hi}$
$I_{Lo} = Valor\ del\ índice\ de\ calidad\ del\ Aire\ correspondiente\ a\ BP_{Lo}$

Posteriormente, la fase de *formación del contexto,* invitó a los estudiantes a pensar en ¿cuál debería ser la concentración del contaminante PM2,5 que permita reducir los 89,8 $\mu g/m^3$ de aire en la estación de Ráquira 3? Los estudiantes mencionaron que si se redujeran los hornos artesanales y se cambiaran por ecológicos disminuiría la cantidad de PM2,5 en el aire. Lo anterior nos permite concluir que pueden establecer en una situación la presencia de una variable dependiente e independiente y su relación. El éxito en esta fase fue del 82%.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* luego de la vinculación de otras variables referidas en la expresión del Índice de Calidad del Aire (ICA), los estudiantes pudieron utilizar sus conocimientos sobre despeje de ecuaciones para dar solución al problema de modelado (ver Figura 34). También analizaron los valores que debían despejar en la ecuación para determinar la concentración del contaminante PM2,5 en este caso. Luego de ello concluían que dicha concentración debía ser menor de 30,58 $\mu g/m^3$.

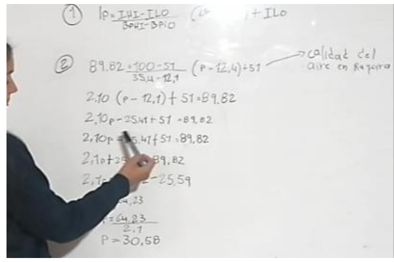


Figura 34. Solución, concentración mínima del contaminante Material particulado.

En la fase *Transformación y evaluación* la falta de dominio del orden de operaciones, así como las reglas al despejar una variable en una ecuación dificultaron a algunos resolutores llegar a la solución correcta del problema. El éxito en la fase *Reportando fue de un 47%. L*os estudiantes a pesar de que en las explicaciones de las clases se utilizan expresiones como “dividiendo a ambos lados” los estudiantes dicen “como 2,1 está multiplicando pasa a dividir” expresiones que no son propias del lenguaje formal del área disciplinar.

Figura 35. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 9.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ La comprensión de la relación entre las variables que componen la expresión del índice de la calidad del aire.

- ✓ Los modeladores proponen números y operaciones que satisfacen una igualdad y usan propiedades como la distributiva de la multiplicación para resolver ecuaciones. Además de describir procedimientos para desarrollar ecuaciones lineales.
- ✓ Se amplió el escenario para que los estudiantes reconocieran las diferentes formas en que las matemáticas están inmersas en otras disciplinas.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Los estudiantes utilizan expresiones que no son adecuadas para referirse al proceso realizado al despejar una variable, no reconocen el inverso multiplicativo, entre otras falencias.
- ✓ Cuando los modeladores desconocen la disciplina que está inmersa en la solución del problema de modelado, les es más difícil identificar, concatenar las variables y superar la fase agrupación y descomposición.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 6 del CD.

5.3.11. Actividad 10. Construcción de estructuras geométricas con botellas de plástico

Para la actividad se recolectó de las canecas de basura, el número máximo de botellas plásticas de agua de la institución, pero la cantidad de botellas no superó las 70 con lo cual los estudiantes propusieron que cada grupo formara las paredes de la casa para los caninos. Esta actividad de cierre motivó a los estudiantes a participar, sobre todo por la aplicación de las matemáticas en una casa que beneficiaría a *Pepas* y lo que ellos podían proponer.

El 98% de las comunidades de práctica superó la fase *Entender el problema* y avanzó hacia la siguiente fase *Descomposición/agrupación*. En esta, el 97% identificó las variables necesarias como las medidas promedio del canino, no sólo de alto, largo sino también de ancho y medidas de las botellas. En consecuencia, se tomaron las medidas de "*Pepas",* la mascota adoptada por la institución (ver Figura 36).

Figura 36. Medidas de *Pepas,* la mascota.

Posteriormente, la fase *Modelado mental* invitó a pensar en cómo conectar las botellas para formar las paredes de tal forma que *Pepas* se sintiera cómoda dentro de su casa, para lo cual los estudiantes analizaron sus hipótesis. El éxito en esta fase fue del 91%. En la fase *Formación del contexto,* los estudiantes analizaron otras variables que no habían considerado, cómo por ejemplo cómo evitar el aislamiento térmico y reducir la pérdida de calor, qué medida de botella se necesitan para la base y la altura, qué dirección de la boca de las botellas es pertinente mantener para unir paredes y base. Además de cómo hacer para proporcionar la estabilidad de la casa para que no fuese arrastrada por el viento, entre otras inquietudes. El progreso fue del 89%.

En la fase *Formación y resolución del modelo,* los modeladores clasificaron las botellas por su tamaño, luego empezaron a unir las de mayor tamaño, recortando algunas de ellas para poder ensamblarlas, posteriormente las pegaron (ver Figura 37).

“Docente: ¿cuéntanos sobre las medidas de la casa?

*Estudiante B: para la base se utilizaron 5 botellas, con 6 cm de diámetro cada una, entonces 5 * 6 = 30 más 12 cm de los extremos de las paredes serían 42 cm de largo para la base y el techo tendría la misma medida que la base. Para las paredes laterales, como son 17 cm en cada botella y como son dos botellas ensambladas corresponde a 34 cm de altura, más 6 cm del techo, entonces serían 40 cm de alto. Luego, multiplicamos el ancho, largo y alto de la casa para caninos, ver cuántos cm^3 tendría la casa y nos dió 70560 cm^3.*

Docente: ¿qué hicieron para reducir la pérdida de calor?

Estudiante B: se dejó la tapa en las botellas para que quede concentrado el calor, también analizamos que entre más grande sea la botella más fácil va a ser la concentración de calor ”[85]

En la fase *Transformación y evaluación* algunos grupos tuvieron que reorganizar nuevamente las botellas porque tenían diferentes medidas. Para esta casa a base de botellas y no de ladrillos debía quedar las paredes con una altura uniforme. La validación de la casa para el canino estuvo marcada en la solidez de la estructura (no colapsó). Una de las recomendaciones dadas por una comunidad de práctica consistió en que las botellas de la base deberían estar contenidas de plástico reciclado para evitar que el viento la transporte.

[85] Criterio de estudiantes de la comunidad de práctica.

En la fase *Reportando* cada grupo presentó cada una de las partes de la casa: la base, el techo y las cuatro paredes laterales, el éxito en esta fase correspondió al 87%. Al final una de las comunidades de práctica tomó la vocería y sustentó el procedimiento y las medidas tenidas en cuenta para la construcción de la casa para caninos (ver Figura 38).

Figura 38. Solución, diseño de la casa para caninos.

Figura 37. Momentos del trabajo de los estudiantes de la actividad 10.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Los estudiantes emplearon relaciones y conceptos matemáticos mientras desarrollaban cada una de las fases del ciclo de modelación.
- ✓ Este tipo de actividades también desarrolló su pensamiento matemático, ya que al integrar la modelación matemática en y para el medio ambiente los estudiantes tuvieron que simplificar, matematizar, interpretar y validar su modelo, en este caso la casa para *Pepas*.
- ✓ El desarrollo de la actividad propició un interés en ver la aplicabilidad de la matemática y generó una motivación hacia el estudio de esta ciencia porque evidenciaron cómo modela la realidad.

- ✓ Los estudiantes tomaron decisiones proambientales frente a las diversas situaciones que afectan el contexto.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Debido a la escasez de botellas recicladas las comunidades de práctica no pudieron presentar diversos diseños de casas para caninos.
- ✓ El porte de elementos prohibidos en la institución tales como el bisturí para cortar las botellas, ocasionó demora en la fase de formación y resolución del modelo.

Otras evidencias fotográficas de la actividad se muestran en el Anexo 6 del CD.

5.3.12. Actividades de modelación matemática inclusiva

Algunas de las actividades de modelación matemática fueron aplicadas a una estudiante invidente (*S*) de grado séptimo con el propósito de fortalecer y analizar de forma general el modelo que se presenta en la investigación. También, porque es importante desarrollar el pensamiento matemático de todas los estudiantes, sin excluirlos por sus limitaciones mentales, sensoriales, entre otras.

A continuación, se precisan algunos aspectos en el desarrollo de las actividades.

Las guias de clase fueron escritas en Braille por la autora de la tesis y dadas a la estudiante invidente. Por instrucción de los padres se orientaban las actividades extraclase con el propósito de que la estudiante se familiarizará con este tipo de competencia matemática.

En la clase se leía el problema y se aclaraban las dudas para lo cual se debía ser más detallado en la información y en las explicaciones dadas. Lo anterior para superar la fase *Entender el problema* y avanzar hacia la fase *Descomposición/agrupación,* en está es comprensible que en ocasiones la población con esta barrera de aprendizaje no identifique todas las variables porque no han estado en contacto con este tipo de situaciones. Es importante también el material didáctico diseñado para el desarrollo de las actividades, pues en su etapa infantil aprenden más matemáticas, tocándolas. Este tipo de material exige al docente más tiempo, más creatividad, más exigencia para presentar las variables y elementos asociados claros, a través de la variedad de relieves, formas, tamaños, nomenclaturas y texturas. Lo anterior son factores clave para que ellos puedan determinar, en este caso la ruta óptima y establecer sus propias conclusiones.

La Figura 39, muestra el problema de modelado en Braille, la nomenclatura del sentido de las vías en Duitama, es decir, si los carros circulan de norte a sur, de oriente a occidente etc, ó si es permitido la doble vía, etc y apartes de la clase.

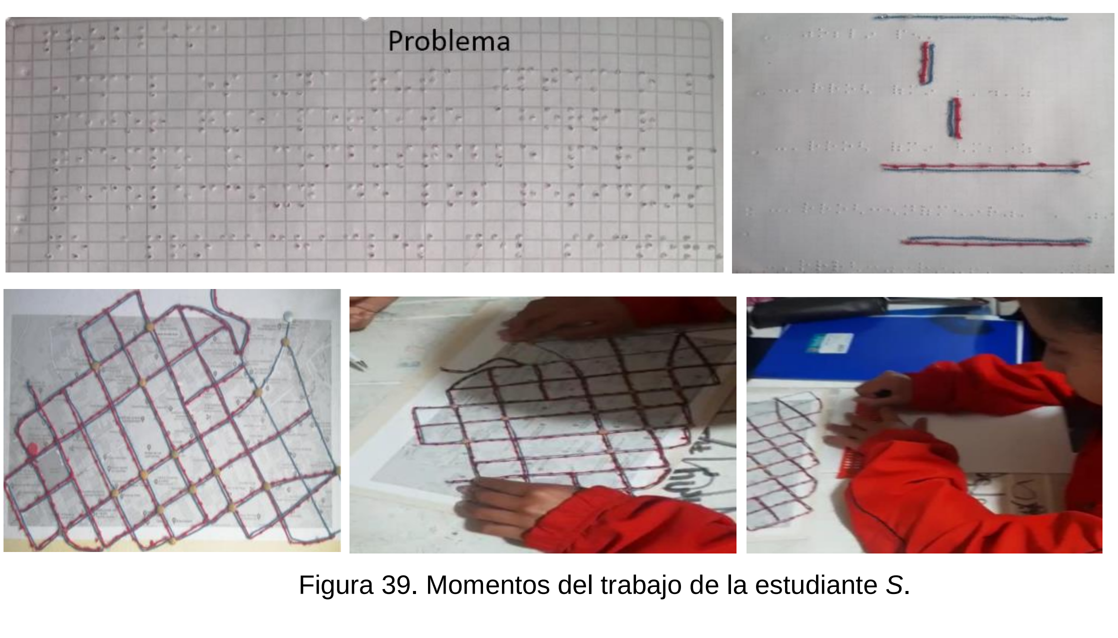


Figura 39. Momentos del trabajo de la estudiante *S*.

Aunque a la estudiante *S* le fue difícil determinar la ruta óptima por las múltiples variables que debía tener en cuenta, logró familiarizarse con el mapa e identificar cada recorrido con la realidad. También conoció otros elementos, relaciones y conceptos que le estaban ocultos hasta el momento, como que tres de sus pasos equivalen a un metro. Además, fue capaz de determinar la distancia en metros que camina desde el colegio donde estudió la primaria a donde estudia actualmente la secundaría, determinó el número de semáforos en el recorrido y el sentido de circulación de los carros, entre otros.

En la actividad en la que se debía proponer un modelo reutilizando llantas para aprovechar al máximo 12 m^2 de terreno plano del colegio, también se utilizó un material didáctico. A comparación de los demás estudiantes, el material era más real, llantas para maqueta. La dificultad que se presentó fue la falta de conocimientos previos para solucionar el problema. La estudiante *S* nunca había utilizado una regla para medir, no tenía claro en su mente cual era la distancia de un centímetro a otro, en fin. Lo anterior inspiró y motivó a la investigadora a diseñar una regla (ver Figura 40) para que pudiese establecer a escala los 12m^2 y así construir su diseño. En su diseño propone las llantas en zigzag para la recreación y de diferente tamaño entre cada una.

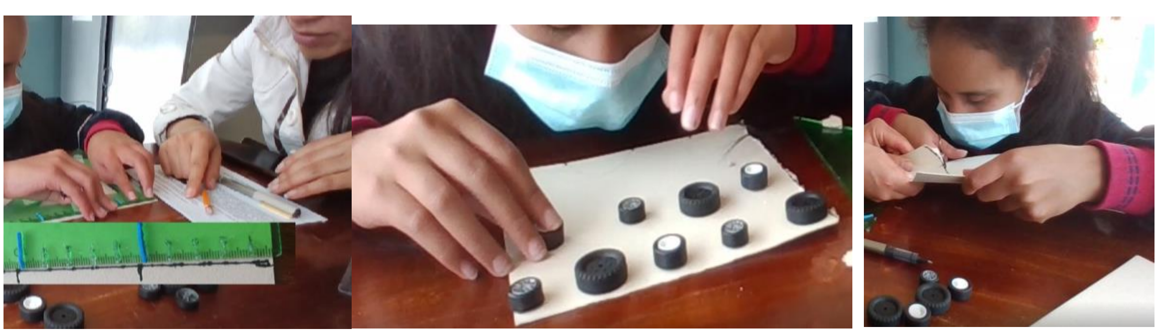


Figura 40. Momentos del trabajo con la estudiante *S*.

Con el propósito de trabajar las demás actividades enfocadas en la modelación matemática y observando que no existen conocimientos previos sólidos de fracciones y decimales se recurre a actividades previas para fortalecerlos. Lo anterior es indispensable para la construcción de los modelos matemáticos y el progreso en cada las fases de modelado. En consecuencia, se elaboró un material didáctico reciclado de fracciones en relieve utilizando la boca de las botellas reutilizadas que quedaron de la actividad 10 sin destruir la casa de *Pepas* (ver Figura 41).

Figura 41. Momentos del trabajo con la estudiante *S*

Las demás actividades y conclusiones referentes a la Modelación Matemática Inclusiva se abordarán en otra investigación para describir de forma profunda y detallada los análisis, los hallazgos, las estrategías inclusivas, resultados, sugerencias, entre otros aspectos. Luego del trabajo realizado con la estudiante *S* de grado séptimo se llega a las siguientes consideraciones:

- ✓ El modelo didáctico propuesto se puede utilizar para el desarrollo del pensamiento matemático mediante la modelación en todo tipo de poblaciones entre ellas las que presentan barreras para el aprendizaje.
- ✓ La aplicación de actividades para estudiantes invidentes permite valorar la importancia de los fundamentos pedagógicos, didácticos, psicológicos, filosóficos y la educación matemática en el modelo. Además de todos los componentes que

permiten la construcción robusta del pensamiento matemático expuestos en el modelo didáctico (ver capítulo 4).

- ✓ La metodología, las estrategias de aprendizaje y el material didáctico deben planificarse y diseñarse de acuerdo a las habilidades de los estudiantes de tal forma que el estudiante invidente también logre el objetivo de la clase.

Otras evidencias fotográficas de las actividades se muestran en el Anexo 1 del CD.

5.3.13. Resultados de la encuesta de satisfacción a estudiantes

La encuesta estuvo conformada por seis preguntas cerradas, dos abiertas y una sección de observaciones. En esta dieron a conocer sus opiniones con respecto al sistema de actividades que tributan a los aportes teóricos y prácticos (Figura 42).

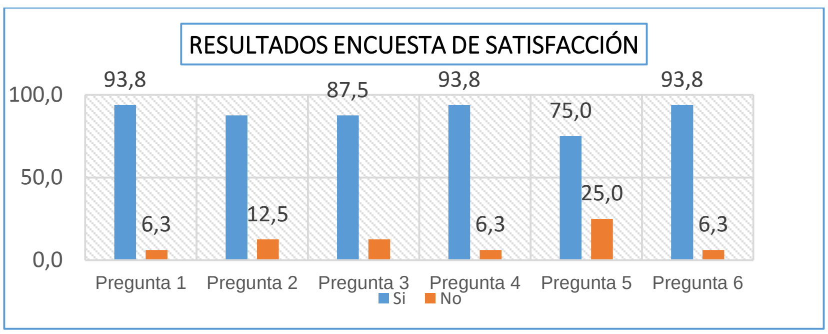
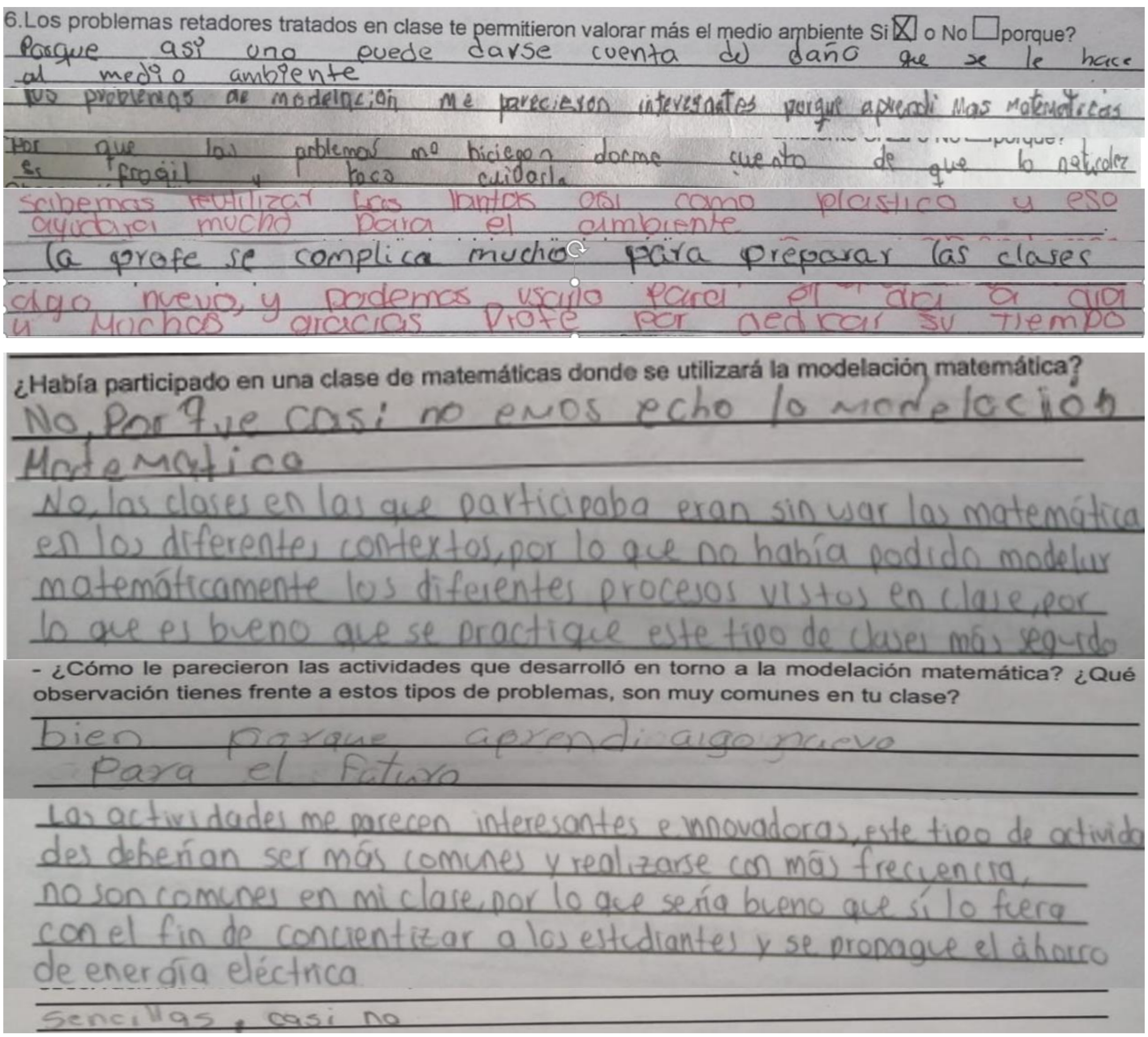


Figura 42. Resultados de la encuesta de satisfacción escolar.

En la primera pregunta, el 93,8% de los estudiantes, consideró que las actividades desarrollaron el pensamiento matemático a través de la modelación matemática, involucrando las situaciones de riesgo ambiental o cuidado del medio ambiente.

La segunda pregunta indagaba en que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si este tipo de actividades se repitieran con más frecuencia, a lo cual los estudiantes en un 87,5 % contestaron rotundamente que sí. El 87,5% consideró que las actividades propuestas por la docente constituyeron un reto y los problemas fueron interesantes. Con respecto a la pregunta cuatro, el 93,8% manifestó haber vivido un ambiente favorable hacia el estudio y motivación por la matemática.

En la quinta pregunta el 75% consideró que este tipo de problemas matemáticos mejoraría su rendimiento académico en la clase. También se indagó si los problemas retadores tratados en clase le permitieron valorar más el medio ambiente, con lo cual el 93,8 % manifestó que sí (ver Anexo 4). A continuación, se presentan las opiniones por parte de algunos estudiantes con respecto a la experiencia vivida (ver Figura 43).


6.Los problemas retadores tratados en clase te permitieron valorar más el medio ambiente Si ☒ o No ☐ porque?

Porque así uno puede darse cuenta del daño que se le hace al medio ambiente

los problemas de modelación me parecieron interesnates porque aprendi mas matemáticas

Por que los problemas me hicieron darme cuenta de que la naturaleza es fragil y poco cuidarla

Saibemas reutilizar las llantas asi como plastico y eso ayudaria mucho para el ambiente

la profe se complica mucho para preparar las clases

algo nuevo, y podemos usarlo para el dia a dia y Muchas gracias Profe por dedicar su tiempo

¿Había participado en una clase de matemáticas donde se utilizará la modelación matemática?

No, Porque casi no enos echo la modelación Matematica

No, las clases en las que participaba eran sin usar las matemática en los diferentes contextos, por lo que no había podido modelar matemáticamente los diferentes procesos vistos en clase, por lo que es bueno que se practique este tipo de clases más seguido

- ¿Cómo le parecieron las actividades que desarrolló en torno a la modelación matemática? ¿Qué observación tienes frente a estos tipos de problemas, son muy comunes en tu clase?

bien porque aprendi algo nuevo para el Futuro

Las actividades me parecen interesantes e innovadoras, este tipo de actividades deberían ser más comunes y realizarse con más frecuencia, no son comunes en mi clase, por lo que sería bueno que sí lo fuera con el fin de concientizar a los estudiantes y se propague el ahorro de energía eléctrica

sencillas, casi no

Figura 43. Opiniones de los estudiantes.

5.4. Avances en la caracterización para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental en grado séptimo

Durante la solución de problemas retadores se evidenció el progreso en el desarrollo del pensamiento matemático respaldado por los procesos cognitivos o las operaciones mentales necesarias para comprender la información y procurar el avance en cada una de las fases del ciclo de modelación. Estos procesos cognitivos superiores le permiten al estudiante analizar la información, interpretarla, resolver el problema (modelar) y validarla con la finalidad de tomar decisiones, en este caso, proambientales.

Las características del pensamiento matemático van mucho más allá de la comprensión de situaciones de riesgo ambiental y los conceptos abstractos que integran las ciencias. Se requiere tener la capacidad de formular hipótesis, utilizar técnicas de resolución, validar hasta las vías de solución de un problema, comprender y aplicar las representaciones y comprobar las relaciones lógicas que entrelazan las matemáticas y las diversas disciplinas, aspectos logrados por los estudiantes.

A continuación, se presentan los avances del pensamiento matemático propiciados por la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental. Para lo cual se analizaron cada una de las fases que intervienen en el ciclo de modelación a lo largo de las actividades aplicadas.

En la fase de *Entender el problema,* el estudiante orientó su atención a comprender significados de conceptos matemáticos, que los relaciona e interactúan entre sí con la disciplina y/o contexto ambiental. En esta fase perciben las medidas y variaciones que hacen que el fenómeno o situación se comporte de una manera específica.

En la fase *Descomposición/agrupación,* los modeladores analizaron y diferenciaron las variables necesarias o relevantes de las que no aportan significativamente a la solución, en este análisis establecen cómo estas cambian, cuáles permanecen constantes en un determinado tiempo, etc. Es en esta fase donde los procesos de simplificación intervienen para orientar y sintetizar los conocimientos que envuelven las matemáticas y la disciplina en el contexto de riesgo ambiental.

En la fase de *Modelado mental* los estudiantes establecieron ideas, hipótesis, conjeturas, suposiciones hasta predicciones con la finalidad de proponer un plan secuencial lógico que los encamina a la construcción del modelo matemático matematizando.

Dentro de la fase *Formación del contexto* los estudiantes pensaron que otros factores, características o circunstancias rodean la situación matemático ambiental, tales como: las condiciones laborales, la seguridad, el comercio, entre otras.

Para la fase *Formación del modelo y resolución del modelo* los estudiantes construyeron diagramas en los cuales representaron las variables utilizando conceptos, relaciones, gráficas matemáticas para expresar soluciones ambientales acordes al problema.

Los modeladores en la fase de *Transformación y evaluación* asociaron los modelos matemáticos ambientales construidos al contexto real y observaron si estos eran aplicables. En esta fase ellos fueron capaces de autoevaluar su trabajo, algunos tuvieron que buscar el error (numérico, espacial, entre otros) que impedía que el modelo se ajustará a la realidad.

En la fase *Reportando,* los estudiantes fueron capaces de compartir sus diseños usando conceptos, unidades y argumentos matemáticos. Además, iban describiendo los procesos matemáticos de acuerdo a los comportamientos en la situación de riesgo ambiental. Al inicio su pensamiento era incipiente e inseguro, puesto que las matemáticas las veían separadas de la realidad, pero al ver cómo estas se reflejaban en sus diseños les permitieron tener la seguridad de hablar de sus ideas y del proceso abordado en la construcción del modelo.

Conclusiones del capítulo 5

Los criterios dados por los expertos: Ole Skovsmose, Paola Valero, Gloria Stillman, Gabriele Kaiser y Mogens Niss, aportan elementos valiosos para la investigación, específicamente en lo relacionado a las tendencias, la construcción del modelo didáctico y de las actividades, y en el análisis de las actividades.

Los aportes en cuanto a la validación de las actividades por la Dra. Mary Falk de Losada, Dra. Yuriko Yamamoto-Baldin, Dra. Soledad Estrella, y Dra. Gloria García, contribuyeron a que los problemas propuestos de modelación matemática en las diferentes clases fueran retadores. De igual forma para la validación del modelo didáctico se tuvó en cuenta a expertos entre los que se resalta la Dra. Mabel Rodríguez quien realizó contribuciones profundas al modelo y marco teórico. Además, los resultados de la prueba estadística no paramétrica de Wilcoxon y lo constratado con el Enfoque Basado en Argumentos (Kane, 2013), permiten ratificar la funcionalidad del modelo didáctico presentado en la investigación.

En cuanto al análisis de resultados, inicialmente se evidenciaron falencias propias de una concepción tradicional de enseñanza. Los estudiantes no estaban familiarizados con problemas ambientales enmarcados en la modelación matemática. Sin embargo, es de destacar que algunos estudiantes transitan en el plano matemático y en el de la realidad, aplicando los conceptos y relaciones entre las matemáticas y las diversas disciplinas. Producto de ello fueron los modelos matemáticos propuestos que dan cuenta de las habilidades y competencias de modelación desarrolladas. El análisis de los videos evidenció el progreso en cuanto al rigor en la argumentación y validez de las soluciones a los problemas planteados.

El estudio exploratorio indicó aspectos que se deben considerar para diseñar las nuevas actividades y abordar estrategias pedagógicas y didácticas dirigidas a desarrollar el pensamiento matemático.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación en torno al modelo didáctico que enfatice en la modelación matemática para el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes de grado séptimo, permitió dar respuesta al objetivo propuesto. Los resultados obtenidos resaltan elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo general. Ellos son:

- ✓ Las investigaciones en torno a la modelación matemática se enfocan en cinco tendencias principales de análisis, las cuales son: resolución de problemas a través de actividades que enfaticen en competencias y habilidades de modelación; la resolución de problemas en la creación de preguntas generadoras para la construcción del conocimiento matemático; procesos de modelado, sus metodologías, logros y dificultades; creencias de los estudiantes frente a la modelación y las necesidades de esta en el currículo y la formación de estudiantes y profesores.

- ✓ Diversos autores como Pölya (1965), Vygotsky (1978), Schoenfeld (1985), Wenger (1998), Falk (2001), Lesh y Harel (2003), Pérez (2004), Mason, Burton y Stacey (2010), Kaiser (2007), Skovsmose y Valero(2012) y Niss (2020) son fundamentales, pues sus aportes concatenados constituyen elementos valiosos en la propuesta de los aportes teóricos y prácticos y en la consecución del objetivo general de la presente tesis.
- ✓ Por los beneficios que otorga la modelación amtemática es relevante dar mayor cabida a la modelación matemática dentro del currículo y dentro del plan de estudios. De igual manera, consolidar los espacios en torno a la modelación en las aulas colombianas, las escolares, como también las universitarias que lideran la formación de licenciados matemáticos.
- ✓ El diseñar e implementar actividades conformadas por problemas de modelado retadores permite al estudiante analizar modelos matemáticos ya construidos, crear y validar los propios en diversos contextos ambientales y generar ideas creativas, las cuales tuvieron que adaptar, refinar, comunicar y seleccionar para poder dar solución al problema.
- ✓ El modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática es aplicable a cualquier tipo de comunidad estudiantil y/o población vulnerable.

- ✓ El modelo didáctico propuesto, el cual es contextual, significativo, complejo y didáctico, y que encierra varios componentes en su fase de resolución, se ve reflejado en el desarrollo del pensamiento matemático, es decir, es funcional y responde al objetivo de la investigación.

En cuanto a la aplicación de las actividades propuestas y a su posterior análisis se puede concluir que:

- ✓ Las estrategias pedagógicas y didácticas implementadas en las clases de modelación matemática favorecen el aprender a pensar, a ir más allá de lo que no se ve, a dar fluidez y libertad a su pensamiento e imaginación y argumentar el proceso de modelación con la originalidad de sus ideas. Con lo anterior, se pretende dar a entender que el proceso de solución de problemas de modelado no rutinarios se considera como una forma eficaz para desarrollar el pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental de los estudiantes.
- ✓ Las estrategias de metacognición individual y grupal permiten controlar y direccionar los procesos de pensamiento en cada fase del ciclo de modelación. Estas estrategias dentro de una comunidad de práctica permiten el entendimiento de los roles, así como la comprensión, el intercambio, la aceptación e inclusive la refutación de las ideas y/o conjeturas.
- ✓ La metacognición es un elemento clave para el diseño, seguimiento, evaluación y comunicación del modelo matemático, ya que los modeladores deben proponer hipótesis, discutir argumentos, validar procesos y establecer conclusiones. En este camino de aprendizaje deben tener la capacidad de relacionar sus pensamientos con los de los demás resolutores y conectarse al mismo contexto de modelación

que entrelaza las matemáticas y las diferentes disciplinas, para que puedan ser reflejadas en la realidad.

- ✓ El desarrollar actividades bajo el enfoque de la Comunidad de Práctica de Wenger permite ver el sentido de cooperación entre los modeladores. Además, el papel del líder rotativo orientó en la construcción de modelos matemáticos ambientales, brindando claves y pautas para el diseño, evaluación, validez y reporte.
- ✓ El modelo matemático interdisciplinario utilizado para la resolución de problemas en la presente investigación, reta los acostumbrados hábitos que tienen los estudiantes para resolver problemas. Además, este tipo de modelo desafía las técnicas y estrategias que emplean los estudiantes en problemas rutinarios y convencionales.
- ✓ La Educación Matemática Crítica permite a los estudiantes reflexionar sobre su comportamiento con la naturaleza, pues a través de los modelos matemático-ambientales construidos pueden actuar, tomar decisiones correctas en su entorno y contribuir a la prevención de riesgos ambientales. A los modeladores se les facilitó la comprensión de los conceptos matemáticos, así como su aplicación cuando las ven reflejadas en situaciones reales ambientales.
- ✓ El análisis de cada una de las actividades permitió detectar dificultades y logros presentes en el proceso de modelación. Las dificultades se presentaban generalmente en las fases Modelado mental y Formación del contexto, que repercutían y se evidenciaban en la fase Formación y resolución del modelo matemático. Lo anterior se debió a las variables presentes en la desconocida disciplina que interactuaba con las matemáticas. Los logros se evidenciaban en

las fases Entender el problema y Descomposición/agrupación, pues la motivación de ser buenos modeladores y resolver el problema retó a algunos.

- ✓ La interdisciplinaridad permitió ver no solo el sentido de las matemáticas en un ámbito ambiental, sino que la disciplina que se integraba con las matemáticas les orientaba si la forma cómo estaban relacionando las variables, en la fase Formación del contexto era la correcta o no.
- ✓ La fase de Transformación y Evaluación del modelo les permitió ver el error desde un enfoque positivo y constructivo, ya que al descubrirlo corregían y validaban el modelo.
- ✓ Los problemas abordados bajo el ciclo de modelación, que utilizan como recurso didáctico las situaciones de riesgo ambiental, desarrollan el pensamiento matemático porque el resultado de la interacción de las complejas habilidades que ofrece (simplificar, matematizar, interpretar, validar y comunicar) fortalecen las redes conceptuales y las hace evidentes.
- ✓ La aplicación de las actividades a través de la modelación matemática les permitió a los estudiantes liderar procesos de planificación, es decir, son capaces de tomar decisiones y organizarlas, mediante tablas, figuras o diagramas, enseñándoles a los demás estas estrategias metacognitivas. También afrontan procesos de monitoreo del modelo, a través del análisis de las variables usadas en la solución del problema y cómo están siendo afectadas por la interacción con las demás.
- ✓ Las estrategias pedagógicas y didácticas, el sistema de actividades diseñadas a partir del modelo didáctico y las relaciones que se establecen entre sus componentes (ver sección 4.1), mejoran el desempeño de los estudiantes en matemáticas, y a su vez su rendimiento académico.

- ✓ Proponer problemas que conlleven a la construcción y análisis de modelos matemáticos favorece el surgimiento de ideas y estrategias de resolución en los estudiantes.
- ✓ La resolución de problemas basados en el modelado matemático ambiental permitió mejorar el desempeño de los estudiantes en la clase y les potencializó sus habilidades y competencias matemáticas.
- ✓ Los problemas que despiertan más la atención e interés por parte de las comunidades de práctica en la construcción y análisis de modelos, son aquellos que utilizan material concreto. En esta investigación, correspondieron a los propuestos en la actividad 2, 5 y 9.
- ✓ Propiciar ambientes participativos, que estimulen y motiven al estudiante a pensar, comparar y analizar, mediante la organización en comunidades de práctica, pues estas permiten avanzar en la construcción de modelos matemáticos de diferentes tipos (sociales, financieros, políticos, entre otros).
- ✓ La construcción de modelos matemáticos requiere dominar los conocimientos previos y los aspectos de la otra disciplina que interfiere con la matemática.
- ✓ Los problemas enmarcados en la modelación matemática permitieron a los estudiantes comprender, construir, relacionar y aplicar más fácilmente los conceptos matemáticos, ya que los evidenciaron en la disciplina que estaba inmersa.
- ✓ Los modelos matemáticos fortalecieron conceptos relacionados con proporcionalidad, ecuaciones, unidades de longitud, área y volumen, operaciones básicas de varios conjuntos numéricos, función lineal, teoría de grafos, entre otros.

- ✓ Brindar espacios en los cuales los estudiantes puedan argumentar los procesos mentales, que realizan en las distintas fases del ciclo de modelación y también puedan construir diversos modelos matemáticos, es decir, promoviendo a su vez la creatividad en las clases.
- ✓ Fortalecer en el aula las habilidades de pensamiento y las competencias que ofrece la modelación a través de actividades interesantes y creativas, sobre todo retadoras, permitiendo que el estudiante mantenga el interés de aprender y una mente abierta a nuevos conocimientos.
- ✓ La modelación matemática inclusiva puede enriquecer y aportar al estudio de preguntas que se generan en el modelado porque cuando los estudiantes preguntan, es porque saben que hay un paso o variable o disciplina que no visualizan y no la pueden vincular con las demás, cuando es resuelta, se fortalecen los procesos cognitivos y se direccionan las ideas para modelar problemas reales. Quizás esa pregunta que posee una persona con una barrera de aprendizaje la tiene una que no presenta esta condición y se podría hacer una mejor mediación.

RECOMENDACIONES

Una vez aplicado el modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación que presentan entornos de riesgo ambiental, se hace necesario considerar las siguientes recomendaciones en aras de tenerlas en cuenta para próximos estudios:

- ✓ Fortalecer las competencias en torno a la modelación, tales como propiciar espacios para que los estudiantes analicen modelos matemáticos existentes, diseñen modelos en diversos contextos (sociales, ambientales, económicos), validen modelos de otras comunidades de práctica del mismo nivel, entre otras.
- ✓ Diseñar e implementar problemas retadores en donde los estudiantes usen material didáctico para fortalecer las competencias de modelado y de esta manera contribuir a potencializar su pensamiento matemático en el marco de la modelación matemática.
- ✓ Propiciar espacios y emplear estrategias para que la fase Transformación, Evaluación y Reporte se evidencie el rigor en la argumentación y validez de las soluciones matemáticas.
- ✓ Continuar investigando sobre los aportes que genera la modelación matemática para el desarrollo del pensamiento matemático utilizando diversos recursos didácticos en población inclusiva.

Bibliografía

Abtahi, Y. G. (2016). Enseñar el cambio climático en las aulas de matemáticas: una responsabilidad ética. *Revista de filosofía de la educación matemática.*

Al-absi, M. (2014). The Effect of Learning with the Environmental Approach on the Third Graders' Ability of Mathematics Problem Solving. *Journal of Educational and Psychological Studies [JEPS*.

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study, 10*(21), 35-44.

Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator, 6*(1), 62-74.

Anhalt, C. O., y Cortez, R. (2015). Mathematical modeling: A structured process. *Mathematics Teacher, 108*(6), 446-452.

Any, C. (2015). Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación. http://xiv.*ciaemredumate*.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1457/561.

Arango, F. (2018). *Fortalecimiento del pensamiento variacional para la modelación matemática de funciones de proporcionalidad directa, a través de la medición de residuos sólidos en los estudiantes de grado octavo de la institución Educativa Sagrada Familia Potrerillo Valle.* Cali.

Arias, M. (2017). *Matemática para ayudar al medio ambiente.*

Arswene, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Ayla ArsevenUniversal Journal of Educational Research, 3*(12), 973-980. doi:http://www.hrpub.org DOI: 10.13189/ujer.2015.031204

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In M. Blomhøj and S. Carreira (Eds.), . *Proceedings* *from topic study group 21 at the 11th Iinternational congress on mathematical education*, pp. 133—144. Monterrey, Mexico: ICME-11. (pp. 1–17).

Blum, W. (2002). ICMI 14 study: Applications and modeling in mathematics education. A discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 149–171.

Blum, W. (2011). ¿Can Modeling Be Taught and Learnt? In G. Kaiser et al. (Eds). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* , 15-30.

Blum, W. (2013). Mathematical Modeling: ¿How Can Students Learn to Model? *Journal of Mathematics Education at Teachers College.*

Borromeo, R. y Mousoulides, N. (2017). *Mathematical modelling as a prototype for interdisciplinary mathematics education? Theoretical reflections.* Dublin, Ireland: CERME 10.

Bourguignon, A. (1997). De la pluridisciplinarité à la transdisciplinarité [From multidisciplinarity to transdisciplinarity]. *Congrès de Locarno, 30 Avril-2 Mai, Annexe au document de synthèse [Locarno Congress, April 30-May 2, Annex to the summary document]. UNESCO.*

Brousseau, G. (1986). Fodements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2), 33-115*.

Burgos, A. (2017). Estado de los proyectos ambientales escolares en Boyacá.Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/luaz/n44/n44a04.pdf. *Lunaazul*.

Cai, J. y Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student Learning? *NCTM, 13*(12), 1-6.

Campbell, P., Nishio, M., Smith, T., Clark, L., Conant, D., Rust, A., DePiper, J., Frank, T., Griffin, M., & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers‘ mathematical content and pedagogical knowledge, teachers‘ perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 419-459. doi:http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Capone, R. (2022). Interdisciplinarity in Mathematics Education: From Semiotic to Educational Processes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*((2), em2071). doi:https://doi.org/10.29333/ejmste/11508

Chevallard Y., B. M. (2020). Chevallard Y., Bosch M. (2020) Didactic Transposition in Mathematics Education. In: Lerman S. *Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham.* Obtenido de https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_48

Chile, M. (2017). *Guía de apoyo docente al cambio climático.* Chile.

CIAEM. (2015). Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) .

Common Core Standards for Mathematics. (2010). *National Governors Association Center for Best Practices.* Washington D.C.: Council of Chief State School Officers.

D´Ambrosio, U. (2003). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. *Revista Números, 43*(90), 439-442.

D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *ZDM-International Journal on Mathematics Education, 39*, 173–181.

Davis, J., y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática.* Barcelona.: Editorial Labor.

De León, M. (2021). *bbvaopenmind.* Obtenido de Matemáticas para la sostenibilidad ambiental: https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/matematicas-para-un-mundo-sostenible/

Deveci, I. y Karteri, I. (2021). Context-based learning supported by environmental measurement devices in science teacher education: A mixed method research. *Journal of Biological Education*. Obtenido de https://doi.org/10.1080/00219266.2020.1821083

Díaz, F. (2009). *Estrategias Instruccionales.* México: Editorial Trillas.

Dibley, J. y Gould P. (2001). *Implementing the Environmental Education Policy in your school: Mathematics. Brewongle Nueva Gales del Sur, Australia.*

Doerr, H. y Lesh, R. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. *Research*, 247-268. doi:10.1007/978-94-007-0910-2_26

Eames, C. (2008). An evaluation of characteristics of environmental education practice in New Zealand schools. *Environmental Education Research, 14*(1), 35-51.

Echávez, Y. (2021). *Modelación matemática del crecimiento del maíz para el mejoramiento de las competencias matemáticas de los estudiantes del grado 7° (séptimo) de la institución Educativa Valentín Manjarrez del corregimiento de La Loma del municipio de El Paso, Cesar.*

English, E. (2005). Problem posing and solving with mathematical modelling. *Teaching Children Mathematics, 3*, 156–163.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics, 63*(3), 303-323.

English, L. D. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 41, 161–181. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-008-0106-z

English, L. D., Fox, J. L., y Watters, J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modelling. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 156–163. Obtenido de https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0156

English, L., y Fox, J. (2005). Seventh-graders mathematical modelling on completion of a three-year program MERGA. *Building Connections: Research, Theory and Practice*, 321-328.

Ernest P., et al. (2016). *The philosophy of mathematics education.* Springer Nature.

Falk, M. (2001). *Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones).* (Vol. VIII). Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana.

Falk, M. (2021). Desarrollo del pensamiento matemático por medio de la solución de problemas. *Seminario III. Pensamiento matemático y educación matemática. Bogotá*. Bogotá.

Fazenda, J. (2014). *Modelo didáctico basado en la integración sistémica de los diferentes enfoques para la resolución de problemas de Investigación Operacional.* Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas Centro de Estudios de Educación.

Freire, P. (1980). Le educación como práctica de la libertad. *Siglo XXI*.

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela (5).*

Fukushima, T. (2021). The role of generating questions in mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, DOI: 10.1080/0020739X.2021.1977402*.

Galbraith, P. (2015). 'Noticing' in the practice of modelling as real-world problem solving. In Kaiser, G., & Henn, H., (Eds.), Werner Blum und seine Beitrdge zum Modellieren im Mathematikunterricht. *Werner Blum and his contributions to modeling in mathematics lessons]*, 151–166.

Galbraith, P. y Clatworthy, N. (1990). Beyond standard models: Meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics, 21*(2), 137–163.

Galbraith, P., Stillman, G., & Brown, J. (2017). The primary of 'noticing': A key to successful modelling. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education*, 83-94.

Gámiz L., Flores P. y Gutiérrez J. (1997). Matemáticas "Ambientales". *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*.

García, A. (2018). *Establecimiento Público Ambiental de Cartagena*. Obtenido de http://epacartagena.gov.co/12018/

Garcia, F. (2000). Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales., [ISSN 1138-9796]*(207). Obtenido de http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm

Garcia, J. y Valls, M. (2001). Introduciendo el medio ambiente en el aula de matemáticas. *Red de información educativa.*

Garzón, A., Cara, B. y Montes, M. (2019). *Environmental education and mathematics to raising awareness in the young population about the use of plastic.*

Giuliani, D. y Segal, S. (2008). *Modelizacion matematica en el aula/ Mathematical modeling in classroom: posibilidades y necesidades.* Libros del Zorza.

Gómez, J. D. (2019). *Las matemáticas con reciclaje.* (Trabajo de grado) Universidad Santo Tomás. Colombia.

Greefrath, G., Siller, H. S., Vorhölter, K., y Kaiser, G. (2022). Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM–Mathematics Education*, 1-15.

Gubkina, V. (2019). Экологические задачи в математике., (pág. 20). Tyumen.

Guerrero, O. (2011). *Evaluación y Retos Globalizadores. Cuadernos de Evaluación. La didáctica de la matemática como referente en la formación (inicial y permanente)* (Vols. 978-980-11-1247-1). Táchira-Venezuela.

Gürbüz, R., y Çalik, M. (2021). Intertwining Mathematical Modeling with Environmental Issues. *Problems of Education in the 21st Century, 79*(3), 412-424.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice.* New York, NY: Routledge.

Guzman, C. (2018). *Desde la educación estadística crítica hacia un ambiente aprendizaje por medio de la separación de residuos.* Bogotá.

Habibi, M. (2014). Environment Education in Mathematics Classroom: As an Effort to Develop the Critical Thinking Skills and for Environmental Sustainability

Concerning. *International conference on research, implementation and education of mathematics and Sciences (ICRIEMS)*.

Ham, M. (2015). Insights For Measuring Environmental Awareness. *Ekonomski vjesnik/econviews. UDK: 504.06:316.644*.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* Oxford, England: Oxford University Press.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Can, B. (2020). HTTM (History/Theory/Technology/Modeling) öğrenme ortamının fen bilgisi öğretmeni adaylarının matematiksel düşünmelerine ilişkin algılarına ve matematiksel modelleme becerilerine etkisi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, 11* ((2)), 239-272.

Jianguo, M. (2004). *Teaching Environmental Awareness in Mathematics.*

Jiménez, M. &. (2010). Defining and measuring environmental consciousness. *Revista Internacional De Sociología, 68(3), 731–755. https://doi.org/10.3989/ris.2008.11.03*.

Jimenez, E., Hernández, L., Arana, O. y Salazar, M. (2018). *Solucionemos problemas aditivos, reciclemos y ayudemos a otros a través de las matemáticas.* Colombia: Institución Educativa Moderna de Tulúa.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, W. Blum, & S. Khan (Eds.). *Mathematical modelling: Education, engineering, and economics*, 110–119.

Kaiser, G. (2022). *Entrevista sobre modelación mátemática en situaciones de riesgo ambiental.* Texto inédito.

Kaiser, G., y Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities. *In Modelling and applications in mathematics education.*, pp. 99-108.

Kane, M. (2013). The Argument-Based Approach to Validation. *School Psychology Review, 42*(4), 448-457.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications. Chichester: Ellis Horwood*, 19-30.

Kilpatrick, W. (1967). La teoría pedagógica en que se basa el programa escolar" en KILPATRICK, W. H.; RUGG, H.; WASHBUR NE, G. y BONNER, F. G. El nuevo programa escolar. Editorial Losada. Buenos Aires (Argentina). Versión original de 1925.

Kimaryo, L. (2014). *Teachers' Perceptions and Teaching Practices Integrating Environmental Education in Primary School Education in Tanzania.*

Krulik, S. y Rudnik (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. .* Versiòn española de Carlos Solis.

Lee, N. H., y Ng, K. E. (2015). *Mathematical modelling: From theory to practice* (Vol. 8). Singapour: World Scientific.

Lesh, R. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.*

Li, H. C., y Tsai, T. L. (2020). Philosophy of education for sustainable development in mathematics education: have we got one?. *Journal Mathematics Teaching-Research Journal, 12*(2), 136-140.

Liel, C. y Bayer A. (2016). Problem solving with environmental themes in Math classes. *Acta Scientiae*.

Lingefjärd, T. y Holmquist M. (2005). To assess students' attitudes, skills and competencies in mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 123–133. Obtenido de https://doi.org/10.1093/teamat/hri021

López, H. (2001). *Investigación cualitativa y participativa: un enfoque histórico-hermenéutico y crítico social en psicología y educación ambiental.* Editorial Universidad Pontificia Bolivariana, 2002.

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113–142.

Martínez, E. (2016). *Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo.* Maestría tesis, Universidad de Antioquia.

McDermott, R., Wenger, E. y Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice.* Boston, MA Harvard Business School Press.

MEN. (1995). *Lineamientos generales para una política de educación ambiental. Documento de apoyo. Serie documentos de trabajo.* Bogotá.

MEN. (2006). *Estandáres básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación y Formación profesional de España. (2018). Obtenido de https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/nuevo-curriculo/menu-curriculos-basicos/ed-primaria/situaciones-aprendizaje.html

Nadezhda, I. (2019). Математика на страже окружающей среды. *Математики, объединяйтесь*.

Niss, M. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling (1st ed.).* London: Routledge. Obtenido de https://doi.org/10.4324/9781315189314.

Niss, M. (2022). *Entrevista sobre modelación mátemática en situaciones de riesgo ambiental.* Texto inédito.

Niss, M., y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling (1st ed.).* London: Routledge. Obtenido de https://doi.org/10.4324/9781315189314

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.),. (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study, 10*(1), 3-32. http://doi.org/10.1007/978038729822.

Orozco, D. (2017). Diagnóstico y propuesta del manejo integral de residuos sólidos en la empresa V.O. Cines de la. Duitama.Recuperado https://stadium.unad.edu.co/preview/UNAD.php?url=/bitstream/10596/17955/3/1052399038.pdf. Obtenido de http://entreojos.c. *Entre ojos*.

Ortiz, et al. (2019). Modelización en el aula matemática. *Conferencia interamericana de Educación Matemática XV CIAEM*.

Ortiz, M. y Camelo, F. (2020). Un panorama de la modelación matemática en los encuentros colombianos de matemática educativa entre 2012-2015. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 15*(2), 251–267. https://doi.org/10.14483/234.

Padilla, et al. (2007). Esquema conceptual y procedimientos para analizar la validez de las consecuencias del uso de los test. *Psicothema, 19*(1), 173-178.

Palomino, M. C. (2016). La formación de valores ambientales en los profesionales de la carrera licenciatura en educación matemática física. *Boletín virtual, 5 - 1 2 isnn 2266-1536.*

Pérez, J. (2004). *Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria.*

Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence.* New York, NY: International Universities Press.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires. Argentina.

Pollak, H., y Garfunkel, S. (2013). A View of Mathematical Modeling in Mathematics Education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*.

Pólya, G. (1963). Sobre el aprendizaje, la enseñanza y la enseñanza del aprendizaje. *El Estadounidense Matemática Mensual, 70(6), 605-619. doi:10.2307/2311629*.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Radford, L. (2016). *Epistemology as a research category in mathematics teaching and learning. Laurentian University.* Canada.

Rittle-Johnson, B. S. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology., 93*(2), 346–362.

Rivera, et al. (2016). Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 48*, 79-99.

Saijam, P. y Seebut, S. (2017). Using problem approach to design mathematical modeling-based learning for promoting grade 8 students' mathematical modeling competency. *The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM)*.

Salazar, A., Suzan H., Luna H. y Barrios, C. (2018). *Una experiencia intersinstitucional para abordar el tema del cambio climático y su efecto en las plantas endémicas, desde la matemática educativa.* México: Universidad Autonoma de Querétano.

Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación.* Editorial McGraw Hill.

Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática., 4*(2), 16. Obtenido de Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-2.pdf

Santoyo, F. (2018). *La estadística como vinculo del desarrollo del pensamiento critico.* México.

Schoenfeld, A. (1987). *A brief and biased history of problem solving.*

Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 179-214.

Schoenfeld, A. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM.* 52. 10.1007/s11858-020-01162-w.

Sigarreta, J. y Marcia, J. (2003). Modelo Didáctico para la Formación Axiológica a través de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Revista virtual, Matemática, educación e internet.*

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV4n12003/modeloDidact/pag1.htm

Silva, J. (2021). Silva, J. (2021). A matemática presente na produção de eucalipto através do Programa Fomento Florestal para produtores rurais. *Brazilian Journal of Development. ISSN: 2525-8761*.

Silver, E. (2019). *ICME- 2020 INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION*. Obtenido de TSG 17: Problem Posing and Solving in Mathematics: https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1573697081456

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education, 26*(2), 114-145.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2004). Critical mathematics education for the future. *Regular Lectures in The 10th International Congress on Mathematical Education*.

Skovsmose, O. (2007). Educación matemática y justicia social: hacerles frente a las paradojas de la sociedad. En J. Giménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (Coords.) *Educación matemática y exclusión,* (pp.45-61).

Skovsmose, O. (2010). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 24*.

Skovsmose, O. (2022). Concerns of Critical Mathematics Education–and of Ethnomathematics. *Revista Colombiana de Educación*, (86), 361-378.

Skosvsmose, O. (2022). Entrevista sobre matemática crítica, modelación mátemática en situaciones de riesgo ambiental. Texto inédito.

Skovsmose, O. y Valero P. (2012). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Soto, J. (2013). Indoor air pollution in extremely poor Colombian households. *Rev. salud pública, p.*10

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Sriraman, B., Mousoulides, N. & Christou, C. (2008). A Modeling Perspective on the Teaching and Learning of Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 293-304.

Stacey, K., Burton, L., y Mason, J. (2010). *Thinking mathematically.* Pearson Education Limited 2010.

Steffensen, L. y Herheim, R. & Rangnes, T. (2021). The Mathematical Formatting of How Climate Change Is Perceived Teachers' Reflection and Practice. *ResearchGate*. doi:10.1163/9789004465800_009)

Stillman, G. (2015). Problem finding and problem posing for mathematical modelling. In N. H. Lee, & K. E. D. Ng (Eds.). *Mathematical modelling – from theory to practice*, 41–56.

Stillman, G. (2019). State of the art on modelling in mathematics education - lines of inquiry. In G. Stillman, & J. Brown (Eds.). *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education*, 1-20.

Stillman, G. (2022). Entrevista sobre modelación mátemática en situaciones de riesgo ambiental. Texto Inédito.

Stillman, G. y Brown, J. (2019). *ICME-13 Monographs: Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education.* Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4.

Stringer, E. T. (1999). *Action research: A handbook for practitioners (2a Ed.).* Thousand Oaks, CA, EE. UU. Sage.

Stohlmann et al. (2016). What Is Known about Secondary Grades Mathematical Modelling A Review. *Journal of Mathematics Research, 8*, 12-28. 10.5539/jmr.v8n5p12.

Swetz, F., y Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum.* Singapur: NCTM.

Takahashi, A. (2007). Planning a lesson for students to develop mathematical thinking through problem solving. *DePaul University*.

Toh, T. (2011). *Hacer que las matemáticas sean prácticas: un enfoque para la resolución de problemas.* World Scientific.

Treilibs, V., Burkhardt, H., & Low, B. (1980). *Formulation processes in mathematical modelling.* Shell Centre for Mathematical Education.

Troca, l. y Kuo C. (2015). Educação financiera e sustentabilidade. *Ensino de Ciências e Matemática*.

Urbano, A. Rincón D. (2017). La Matemática Contextualizada en el Aula desde una propuesta ambiental. *Centro de recursos para el aprendizaje del conocimiento y la investigación de la Universidad Santo Tomás.*

Valero, P. (2021). Educación matemática y cambio climático: ¿Una preocupación para América Central y el Caribe? *III CEMACYC*.

Valero, P. (2021). Escenario de aprendizaje: "crecimiento de bacterias en la producción de basura en Corabastos. *Conferencia: Estudios socio-políticos de la Educación Matemática*.

Vega, L. (2019). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la geometría plana a través de la modelación de patrones de la naturaleza, con estudiantes de grado séptimo en la Institución José Celestino Mutis del municipio de Fusagasugá.* Cundinamarca.

Velázquez, O. (2009). El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo. Capítulo 4, Pág. 39.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. y López, C. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International*

Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, 701-711.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind In Society: The development of higher psychological processes.* Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. En J. V. Wertsch (Comp.). *The concept of activity in Soviet psychology*, (pp. 144-188). Armonk, NY: Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind In Society: The development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.*

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge University Press.

Wenger, E. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1578513308.*

Wenger, E. (2006). *Communities of practice: A brief introduction.*

Yanagimoto, A. (2003). Environmental Problems and Mathematical Modelling. *Woodhead*.

Zelezny, L. &. (2000). “Promoting Environmentalism.”. *Journal of Social Issues*, 56:365-371.

ANEXOS

Anexo 1. Entrevista a especialistas en modelación matemática

Objetivo: Conocer sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la modelación matemática en la escuela secundaria en la actualidad.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo: Estimado doctor(a), su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca indagar sobre el desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de la modelación matemática a través de la resolución de problemas retadores. Muchas gracias por su colaboración.

I. Cuestionario

1. ¿Cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de grado séptimo usando la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental?

2. ¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático en un estudiante de séptimo grado utilizando modelos matemáticos en situaciones de riesgo ambiental?

3. ¿Qué elementos debe tener un problema matemático retador ambiental para que genere el desarrollo del pensamiento matemático?

4. ¿Cómo lograr desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de séptimo grado utilizando la modelación matemática en situaciones de riesgo medioambiental?

5. ¿Puede sugerir alguna estrategia o procedimiento para el proceso de resolución de problemas en el aula apoyado en modelos matemáticos en situaciones de riesgo ambiental?

Anexo 2. Encuesta a docentes

Objetivo: Determinar fortalezas o falencias en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática haciendo uso de la modelación matemática y la resolución de problemas en estudiantes de grado séptimo.

Villa (2007) establece que la modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real.

Se asume también lo expresado por Pérez (2004), acerca de que los problemas retadores invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento. Se ha visto la importancia que ellos presentan dentro del proceso enseñanza-aprendizaje porque cuando el estudiante comprende el problema abre nuevas posibilidades para tratarlo, innova y aprende a usar procesos matemáticos además de que genera un aprendizaje.

Estimado docente, su opinión es importante para mejorar el nivel de competencia de los estudiantes de grado séptimo en matemáticas. Los resultados son de gran ayuda para el desarrollo de nuestra investigación.

Agradezco su participación y sinceridad.

I. Datos Generales.

1. Licenciado en matemáticas: Sí __ No__

2. Postgrado: ____

3. Años de experiencia orientado cursos de matemáticas: ____

II. Cuestionario

Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿Considera usted que la modelación matemática enfocados en las problemáticas ambientales del sector despertaría el interés de los estudiantes por las matemáticas?					
2. ¿Considera usted que la modelación matemática enfocada en las problemáticas ambientales del sector despertaría el interés de estudiantes que manifiestan poca empatía con las matemáticas o que las consideran aburridas, inaplicables o tediosas?					
3. En su práctica docente vincula la modelación matemática para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes de grado séptimo					
4. ¿Utiliza la modelación matemática tomando como contexto situaciones de riesgo ambiental para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes de grado séptimo?					
5. ¿Considera usted dar importancia a las situaciones de riesgo ambiental como recurso para el desarrollo del pensamiento matemático y el aprendizaje de contenidos matemáticos?					
6. ¿Utiliza algún modelo didáctico que involucre la modelación matemática en situaciones de riesgo medioambiental para el desarrollo del pensamiento en esta área?					

III. Responde las siguientes preguntas

1. ¿Qué dificultades encuentra en el proceso de enseñanza-aprendizaje para desarrollar el pensamiento matemático a través de la modelación?

   ____.

2. ¿Cómo desarrollaría el pensamiento matemático a través de la modelación y las situaciones de riesgo ambiental?

   ____.

3. ¿Qué estrategias pedagógicas o didácticas utilizaría para lograr el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación en situaciones de riesgo ambiental?

   ____.

Anexo 3. Validación de la encuesta a docentes por el método Delphi

La validación de instrumentos es esencial para el éxito de cualquier proyecto de investigación, ya que permite obtener evidencia de la validez de las encuestas que apoyan las deducciones derivadas de los resultados y controlan la calidad de la información. La encuesta se aplicó a diez docentes que orientan Matemáticas en las instituciones educativas de Boyacá.

TABLA DE FRECUENCIA DE VALORES ABSOLUTOS

N° DE PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	ALGUNAS VECES	RARA VEZ	NUNCA	TOTAL
1	4	5	0	1	0	10
2	6	2	2	0	0	10
3	0	1	5	2	2	10
4	9	1	0	0	0	10
5	4	6	0	0	0	10
6	0	3	1	2	4	10

TABLA DE FRECUENCIA DE VALORES ABSOLUTOS ACUMULADOS

N° DE PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	ALGUNAS VECES	RARA VEZ	NUNCA
1	4	9	9	10	10
2	6	8	10	10	10
3	0	1	6	8	10
4	9	10	10	10	10
5	4	10	10	10	10
6	0	3	4	6	10

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA RELATIVAS ACUMULADAS

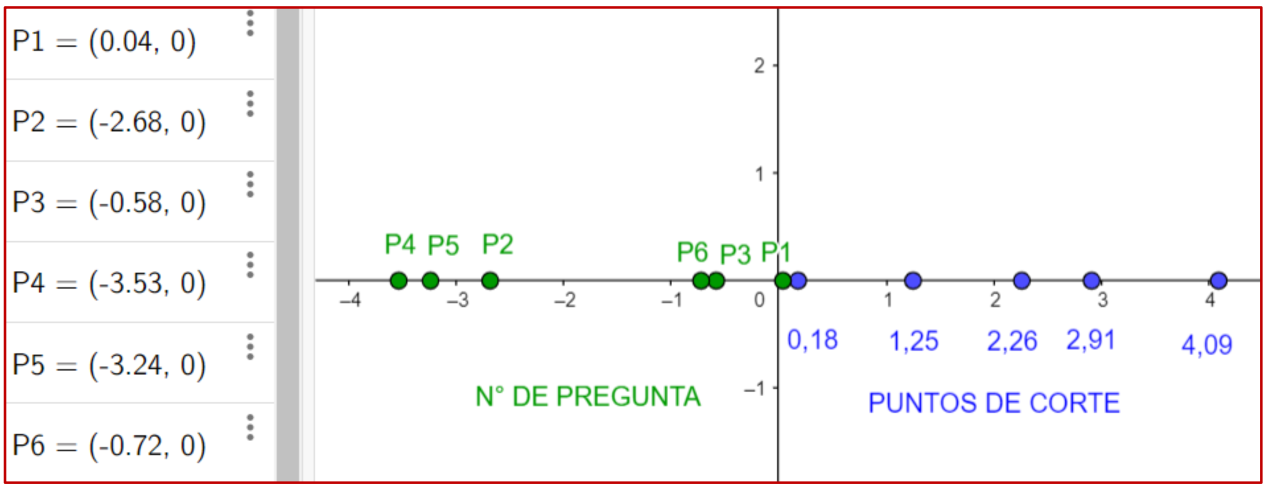
N° DE PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	ALGUNAS VECES	RARA VEZ	NUNCA
1	0,4	0,9	0,9	1	1
2	0,6	0,8	1	1	1
3	0	0,1	0,6	0,8	1
4	0,9	1	1	1	1
5	0,4	1	1	1	1
6	0	0,3	0,4	0,6	1

FUNCIÓN RECÍPROCA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CORTE O LÍMITES

N° DE PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	ALGUNAS VECES	RARA VEZ	NUNCA	SUMA	PROMEDIO	N-P
1	-0,25	1,29	1,29	4,09	4,09	10,51	2,10	**0,04**
2	0,26	0,85	4,09	4,09	4,09	13,38	2,68	**-2,68**
3	0	-2,32	0,26	0,85	4,09	2,88	0,58	**-0,58**
4	1,29	4,09	4,09	4,09	4,09	17,65	3,53	**-3,53**
5	-0,25	4,09	4,09	4,09	4,09	16,11	3,22	**-3,22**
6	0	-0,52	-0,25	0,26	4,09	3,58	0,72	**-0,72**

SUMA	1,05	7,48	13,57	17,47	24,54	**64,11**	12,822	
PUNTO DE CORTE	**0,18**	**1,25**	**2,26**	**2,91**	**4,09**	10,69	/6	**2,14**
PP			□			/5	**2,14**	

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS RESULTADOS REFERENTES A LA FUNCIÓN RECÍPROCA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CORTE O LÍMITES



ANÁLISIS DE DATOS

El resultado de la validación de la encuesta aplicada a docentes de Matemáticas de Duitama, permite establecer que las preguntas P1, P2, P3, P4, P5 y P6 están dentro del primer intervalo (x<0,18) con respecto a los cinco puntos de corte, por lo tanto, se puede inferir que dichas preguntas son adecuadas para el objetivo del proyecto.

Anexo 4. Rejilla de evaluación del modelo didáctico

En esta investigación resulta de mucha importancia su valoración de los aspectos puestos a su consideración, así como de otros criterios o sugerencias que considere pertinente ofrecernos en aras de perfeccionar nuestra propuesta. A continuación, le ofrecemos la relación de los aspectos y una tabla para su valoración, atendiendo a las categorías de Muy adecuado (MA), Bastante adecuado (BA), Adecuado (A), Poco adecuado (PA) e Inadecuado (I). Al final se ofrece una tabla en blanco para que brinde otras opiniones o valoraciones.

Relación de los aspectos a considerar.

A1: Referentes teóricos.

- ✓ Son adecuados y pertinentes.
- ✓ Permiten dinamizar el Modelo.

A2: Fase 2. Caracterización

A3: Fase 3. Momento de Resolución.

- ✓ Pertinencia de los componentes tratados.
- ✓ Relación entre ellos.
- ✓ Si la relación entre los componentes origina la nueva cualidad: Construcción robusta de pensamiento matemático en situaciones de riesgo ambiental

	MA	BA	A	PA	I
A1					
A2					
A3					
A4					

A4: Concreción práctica.

- ✓ Relación con el Modelo
- ✓ Suficiencia de la actividad
- ✓ Permiten la búsqueda del contenido por el alumno
- ✓ Efectividad de la misma

A continuación, se ofrece una tabla para que usted pueda emitir sus sugerencias o recomendaciones para la perfección del Modelo y de las actividades

Algunas sugerencias y recomendaciones.

Anexo 5. Encuesta de satisfacción a estudiantes.

Apreciado estudiante, una vez terminada las actividades referentes al desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática involucrando las situaciones de riesgo ambiental o cuidado del medio ambiente y a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas

1. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas motivan el desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática involucrando las situaciones de riesgo ambiental o cuidado del medio ambiente? Si ☐ No ☐

2. ¿Cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia? Si ☐ No ☐

3. ¿Los problemas de modelación matemática o ejercicios propuestos en las actividades constituyeron un reto para usted y los problemas fueron interesantes? Si ☐ No ☐

4. ¿Considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente de aprendizaje hacia matemática?

Si ☐ No ☐

5 . ¿Considera usted que este tipo de problemas matemáticos en la clase mejoraría su rendimiento académico en matemáticas? Si ☐ No ☐

6.Los problemas retadores tratados en clase te permitieron valorar más el medio ambiente Si ☐ o No ☐porque?____

Observaciones

____
____.