Programa de Doctorado en Educación Matemática

VALORACIÓN DEL ALCANCE DE LA TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE DUVAL PARA CARACTERIZAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MOSTRADO POR ESTUDIANTES QUE PARTICIPAN EN LOS EXÁMENES DE OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Lexander Guerrero Morales

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

VALORACIÓN DEL ALCANCE DE LA TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE DUVAL PARA CARACTERIZAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MOSTRADO POR ESTUDIANTES QUE PARTICIPAN EN LOS EXÁMENES DE OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Lexander Guerrero Morales

Código: 12991924924

Directora de Tesis: María Falk de Losada

Bogotá D.C.

2023

DEDICATORIA

A mi Padre Celestial que siempre está conmigo y a mi padre terrenal que ya no está conmigo pero siempre soñó con que me superara al máximo y le expreso mi cariño dondequiera que esté.

A toda mi familia, en especial a mi esposa e hijos, a mi madre que siempre me ha apoyado con todas sus fuerzas, a mi hermano y familia, así como a mis excelentes vecinos que siempre me han ayudado y a todos aquellos que me aprecian, en general.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco al Padre Celestial, creador de todo y de todos, la oportunidad de vida y de crecimiento que me ha dado.

Un profundo agradecimiento a la Dra. María Falk de Losada por sus clases interesantes, su excelente tutoría y por permitirme hacer parte de la familia UAN, así como a mi amigo, profesor y coordinador del Programa de Doctorado en Educación Matemática que cursé, Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez quien se preocupó y ocupó porque cursara el doctorado. También agradezco a todos los profesores del programa, cuyas clases siempre fueron excelentes y de las cuales aprendí mucho. A mis compañeros de estudio que siempre me apoyaron y compartimos muy buenos momentos.

A mi esposa María Teresa Mayo Díaz por apoyarme incondicionalmente, sufrir la separación siempre dolorosa y llevar mis responsabilidades también ante el hogar, para que yo pudiese llevar a cabo la meta del doctorado.

Así también agradezco a mi madre Eddita Morales Ochoa por soportar nuestra separación, por no estar a su lado tal vez necesitándome y el tiempo que no pude expresarle mi amor eterno hacia ella. A mi hermano Clioger Guerrero Morales que siempre ha estado al lado de nuestra madre, cubriendo también mi responsabilidad en tiempos muy difíciles para nuestro país.

A todas aquellas personas cuyas oraciones y buena vibra siempre estuvieron en sintonía para que llevara a feliz término esta importante meta en mi vida.

SÍNTESIS

La teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval constituye una aproximación semiótica a la Educación Matemática que propone explicar fenómenos complejos tales como el funcionamiento cognitivo del Pensamiento Matemático y la comprensión en matemáticas, partiendo únicamente de tener en cuenta a tales representaciones y sus transformaciones. Sin embargo, en la revisión de la producción escrita de estudiantes que participan en las olimpiadas colombianas de matemáticas surgen evidencias de que hay serias dificultades para explicar cómo razonaron desde la perspectiva única de tratamiento y conversión entre registros semióticos heterogéneos.

Palabras clave: pensamiento matemático, comprensión matemática,

Representaciones semióticas, problemas retadores.

ABSTRACT

Raymond Duval's theory of semiotic representations constitutes a semiotic approach to Mathematics Education that proposes explaining complex phenomena such as the cognitive functioning of Mathematical Thinking and comprehension in mathematics, starting only by taking into account such representations and their transformations. However, in the review of the written production of students who participate in the Colombian mathematics Olympics, evidence emerges that there are serious difficulties in explaining how they reasoned solely taking into account Duval's perspective of treatment and conversion between heterogeneous semiotic registers.

Keywords: mathematical thinking, mathematical understanding, semiotic representations, challenging problems

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN

Desarrollar el pensamiento matemático (PM) a través de la didáctica de la matemática no es tarea fácil ni evidente. La práctica educativa ha mostrado que la intervención del profesor en el proceso de enseñanza–aprendizaje puede tanto favorecer como obstaculizar en este sentido. A ello se agrega que preparar una intervención didáctica para desarrollar el PM, sin previamente caracterizarlo, es trabajar a tientas.

Al respecto, se concuerda con Schoenfeld (2000) citado por Harel (2006), que la comprensión de la naturaleza del PM es vital para mejorar la instrucción matemática en todos los niveles de grado. En este sentido la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) de Raymond Duval tiene pretensiones de ofrecer una cobertura teórica clara y precisa para explicar los procesos de pensamiento y comprensión en matemáticas.

Según Duval (2017) su propuesta tiene antecedentes en los modelos de análisis de signos propuestos por Peirce (1890-1910), modelo de Saussure (1916) y el modelo de Frege (1892-1894). A partir de estos modelos hizo su interpretación acerca del papel de las representaciones semióticas (RS) en la producción de nuevos conocimientos, sin supeditarlas estrictamente a su función comunicativa.

El aspecto central de la TRS es su interpretación de en qué consiste el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Se puede considerar, sin lugar a duda, que a través de las transformaciones de RS se puede llegar a nuevos conocimientos a través de los nexos que ellas determinan. Sin embargo, no es evidente que el pensamiento tenga que transitar por estos mismos nexos o que las representaciones mentales (RM) sean una metáfora de las semióticas o viceversa.

Por otra parte, Duval (2017) considera que las dificultades de los estudiantes a la hora de resolver problemas se pueden explicar desde la perspectiva de los registros semióticos y sus operaciones de tratamiento y conversión. No obstante, no se puede establecer con certeza si las formas de conocer son similares a las formas de pensar. Debido a esto es prudente reconocer que las RS pueden tener límites para caracterizar el PM.

En el caso de la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores, estas dificultades son mayores debido a que exigen una actividad intensa del PM en la búsqueda de nexos creativos, profundos (en ocasiones inesperados) y semióticamente económicos entre conceptos matemáticos.

La presente investigación se circunscribe al contexto de las olimpiadas colombianas de matemáticas donde se persigue el objetivo de que los problemas no rutinarios sean al mismo tiempo problemas retadores. De esta manera el **tema de investigación** trata de la valoración del alcance de la TRS para caracterizar el PM, evidenciado en las soluciones a problemas retadores de las olimpiadas colombianas de matemáticas.

Esta temática en la forma que está planteada no aparece en la literatura consultada. Haciendo una abstracción categorial se puede resumir que la misma trata la quíntupla: (Caracterización del PM, PM, Resolución de problemas, Problemas no Rutinarios de competiciones matemáticas, TRS). Los cuerpos de literatura que se consultaron tratan combinaciones de estas categorías en una menor dimensión que la quíntupla anterior.

Al respecto fueron consultados:

- Psychology of Mathematics Education (PME)
- International Congress on Mathematical Education (ICME), International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)
- International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA)
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)
- Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
- Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)
- Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME).

Específicamente, en el CIBEM se consultaron varios trabajos sobre análisis de las producciones escritas de los estudiantes desde el enfoque de las RS. También se encontraron artículos sobre resolución de problemas como método de enseñanza y como actividad desarrolladora del PM, además de cuestiones generales sobre semiótica y un artículo sobre las olimpiadas como incentivo a la investigación en Educación Matemática (EM).

Por otra parte, en el ICME 13 se localizaron trabajos sobre las diferentes categorías implicadas en el tema de investigación. Las temáticas sobre las cuales se encontraron trabajos fueron: semiótica, PM, resolución de problemas y competiciones matemáticas. Las otras publicaciones revisadas fueron revistas.

Además, en ZDM Mathematics Education se localizaron varios artículos que aportan a la investigación y que contienen duplas categoriales (originadas en la quíntupla propuesta anteriormente) importantes para la misma. Otras revistas consultadas fueron: Pensamiento Matemático, Journal for Research in Mathematics Education (JRME), Educación Matemática, Educational Studies in Mathematics, International Journal of Science and Mathematics Education, Relime, entre otras.

La investigación se sustenta teóricamente en obras de Duval, Harel, Dewey y Goldstein. Los dos primeros hacen especial énfasis en el enfoque semiótico. Harel propone una interpretación importante de las formas de entender y de pensar presentes en la EM. Por otra parte, Dewey prescribe acerca de hábitos de pensamiento reflexivo y las tareas que se deben abordar para ello. En cuanto a Goldstein se consulta como autoridad en psicología del pensamiento.

Dentro de las potencialidades intramatemáticas se pueden mencionar aquellas que heredan la temática por las categorías que la componen:

De la TRS de Duval:

- Debido a que no hay noesis sin semiosis hay grandes oportunidades de caracterizar el PM a partir de las RS.
- Las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto iniciativa y control en la resolución de problemas pueden ser explicadas a partir de una incomprensión de los profesores de cómo funciona cognitivamente el PM.

De la resolución de problemas no rutinarios:

- Su contribución es a una restructuración constante de los conceptos matemáticos y sus relaciones en el PM de los estudiantes, lo que hace posible el establecimiento de nexos cada vez más complejos y profundos.

De una caracterización del PM desde la perspectiva de la TRS:

- La posibilidad de planificar una incidencia consciente en el desarrollo del PM a través de la elaboración de problemas no rutinarios que se constituyen en problemas retadores.
- Desarrollar un lenguaje científico, con categorías adecuadas, para explicar los resultados de dicha incidencia de manera precisa y clara.

Como potencialidades extramatemáticas de la temática califican:

- El estímulo al pensamiento mediante situaciones significativas y retadoras que inviten a su recreación y desarrollo. En un sentido más específico, la importancia de las competiciones con problemas no rutinarios como elemento altamente motivante que contribuye a eliminar el encasillamiento del pensamiento en el que suelen derivar las intervenciones didácticas que no promueven las generalizaciones ni las aventuras del pensamiento.
- Debido a que las formas de obtención del conocimiento en otras ciencias no pueden explicarse en términos de transformaciones de RS, la TRS de Duval explora la conexión existente entre el lenguaje y los elementos del conocimiento a los cuales hace referencia, de manera explícita y sin omisiones.

- También debe facilitarse una transferencia lógica del contenido a través de un lenguaje que potencie su comprensión y retención.

La presente investigación se justifica desde el punto de vista didáctico por la observación de tendencias generalizadas que hacen un énfasis excesivo en las tareas de reconocimiento o comprensión más que en la resolución de problemas no rutinarios. Este énfasis es derivado de la intencionalidad de facilitar la identificación de variables cognitivas y su posterior tratamiento, sin tener en cuenta que la resolución de problemas es punto de partida para inquietar y motivar al PM.

Describir las limitaciones de la teoría de Duval para caracterizar el PM de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios de olimpiadas colombianas de matemáticas tiene indudable valor teórico. Dicha descripción puede ser el fundamento para comprender la necesidad de una didáctica de la matemática basada en problemas no rutinarios, para crear contextos donde emerja y se desarrolle el PM.

Constituye una justificación práctica de la investigación la necesidad de establecer al menos una caracterización "de trabajo" del PM, antes de preparar cualquier intervención educativa consciente y planificada que contribuya a su desarrollo. Es así que se establece un determinado control en el diseño de problemas como situaciones que estimulan dicho pensamiento a buscar nexos profundos y creativos entre conceptos matemáticos.

El hecho de que la caracterización ofrece una mejor inteligibilidad acerca del objeto en estudio (el PM) implica una mejor concreción que permitirá profundizar aún más en su conocimiento, de manera que esto puede facilitar la creación de procedimientos, avalados teóricamente, para el enriquecimiento y desarrollo de dicho objeto.

A partir de la revisión de la literatura, de las respuestas de los estudiantes en exámenes de olimpiadas colombianas de matemáticas para nivel primario y de la experiencia del investigador se pudieron identificar las siguientes dificultades:

- Existe insuficiente literatura en EM que verse sobre caracterización del pensamiento (como tema central) que contribuya a su enriquecimiento y evolución.
- En múltiples investigaciones se tratan indistintamente los términos pensamiento y razonamiento, así como no hay suficiente claridad de la relación entre comprensión (entendimiento) y pensamiento.
- En la TRS se presenta como condición necesaria para la facilitar la conversión entre RS, el tratamiento explícito por parte del profesor de los fenómenos de incongruencia, los cuales tienen mayor incidencia en las conversiones donde el lenguaje natural es uno de los registros semióticos y en los problemas no rutinarios y/o retadores de olimpiadas se utiliza frecuentemente. Cabe esperar serias dificultades para realizar conversiones en este contexto.
- De la experiencia con los problemas no rutinarios de las asignaturas del doctorado, del cual la presente tesis es culminación, sale que, a pesar de la experticia en el trabajo con las RS y las operaciones de tratamiento y conversión, es muy común perder la iniciativa aun cuando se determine lo que es matemáticamente relevante.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cuáles son las características del PM, evidenciadas en las soluciones a problemas no rutinarios de olimpiadas de matemáticas organizadas por la Universidad Antonio Nariño, que no pueden ser explicadas desde la teoría de Raymond Duval?

Se precisa como **objeto de estudio:** el proceso de PM en la resolución de problemas de olimpiadas y se infiere como **objetivo general:** avanzar en la caracterización del PM de los estudiantes en la resolución de problemas de olimpiadas organizadas por la Universidad Antonio Nariño, para de allí analizar las pretensiones de la TRS de Duval.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de caracterización del PM de los estudiantes en el contexto de sus respuestas en los exámenes de olimpiadas de matemáticas organizadas por la Universidad Antonio Nariño.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas de investigación**:

1. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos que sustentan una caracterización del PM?
2. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos de la TRS de Duval para caracterizar el PM?
3. ¿Cuáles son las evidencias de las características del PM en las soluciones de los estudiantes a problemas no rutinarios de olimpiadas colombianas de matemáticas organizadas por la Universidad Antonio Nariño?

4. ¿Cómo contrastar la TRS de Duval y su respectiva caracterización del PM con las evidencias de las características de este pensamiento aportadas por las soluciones de los estudiantes a problemas de olimpiadas colombianas de matemáticas?
5. ¿Cómo elaborar un sistema de actividades donde se muestre el alcance de la teoría de Duval para caracterizar el PM a partir del análisis de las soluciones de los estudiantes a problemas de olimpiadas colombianas de matemáticas?
6. ¿Cómo validar el sistema de actividades propuesto?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis, fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el PM en la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores, específicamente de competiciones matemáticas.

2. Determinar los fundamentos teóricos de la TRS de Duval que podrían sustentar una caracterización del PM en la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores, específicamente en olimpiadas de matemáticas.

3. Avanzar en la caracterización del PM de los estudiantes que participan en las olimpiadas colombianas de matemáticas revelado en sus soluciones y determinar cómo ello permite evaluar la teoría del PM basada en la TRS.

4. Elaborar un sistema de actividades donde se muestre el alcance de la teoría de Duval para caracterizar el PM a partir del análisis de las soluciones de los estudiantes a problemas de las olimpiadas colombianas de matemáticas.

5. Valorar la pertinencia de la caracterización del PM y la viabilidad del sistema de actividades propuesto.

El **aporte teórico** radica en contrastar la caracterización del PM desarrollada desde la TRS de Duval con la del PM revelado en las soluciones de los participantes en olimpiadas colombianas de matemáticas, y de allí hacer una valoración de la posición de Duval.

El **aporte práctico** de esta investigación radica en un sistema de actividades donde se muestre el alcance de la TRS de Duval para caracterizar el PM a partir del análisis de las soluciones de los estudiantes a problemas de olimpiadas colombianas de matemáticas.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y 5 anexos. En el capítulo 1 se aborda el estado del arte en cuanto a caracterización del pensamiento matemático desde la resolución de problemas, el enfoque semiótico de Duval y las competiciones matemáticas. En el capítulo 2 se tratan los sustentos teóricos básicos de la investigación y en el capítulo 3 la metodología aplicada en la misma.

Por otra parte, en el capítulo 4 se exponen los aportes teórico y práctico como resultados de la investigación, así como en el capítulo 5 se hace el análisis de resultados de cada una de las técnicas o instrumentos utilizados, tanto en la etapa exploratoria del problema de investigación como en cada una de las actividades realizadas.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se analizarán las investigaciones en Educación Matemática que sustentan teóricamente el tema de investigación. Para ello se consideraron las publicaciones en revistas, congresos, simposios, entre otras reuniones, que resultan relevantes por la participación de expertos en la temática. Específicamente, se analizan los elementos de la TRS de Duval que contribuyen a caracterizar el PM en la resolución problemas retadores de olimpiadas colombianas de matemáticas.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de caracterización del PM, con énfasis en la resolución de problemas

En la revisión de la literatura no se encontró íntegramente la temática de este epígrafe. Es por ello por lo que se estructuraron los epígrafes tomando como génesis de las etapas del modelo de Polya (1985). Este es un modelo de caracterización del PM (en el sentido de Reyes-Santander, 2014) y es enriquecido en sucesivos epígrafes por el aporte de otros autores.

1.1.1. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method[1]

Polya (1985) sugiere que el profesor debe ayudar al estudiante a pensar de una manera efectiva (discreta y natural). Para ello considera importante orientar mediante preguntas, por ejemplo, ¿qué es lo desconocido (la incógnita)?, esta pregunta se puede aplicar a la gran mayoría de los problemas y centra la atención del estudiante en lo requerido o lo buscado.

---

[1]Polya, G. (1985), *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Expanded Princeton Science Library Edition, with a new foreword by John H. Conway ed.), New Jersey, USA: Princeton and Oxford University Press.

Es así que Polya (1985) asume un estilo de orientar el PM a través de sugerencias que conduzcan a acciones mentales. Para ello ofrece un modelo de cuatro pasos ordenados en la forma que consideró más probable se asemeje al orden en que ocurren las operaciones mentales al resolver problemas:

1. *Entender el problema*.

Implica entender el enunciado, lo cual puede comprobarse si se es capaz de expresar el mismo con palabras propias. Pueden ayudar en este sentido preguntas tales como: ¿qué es lo desconocido?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?

2. *Elaborar un plan*.

La idea de un plan de solución ocurre gradualmente donde las buenas ideas surgen de experiencias pasadas y conocimientos adquiridos (problemas antes resueltos, teoremas ya probados, etc.). No obstante, el profesor puede guiar el pensamiento a través de preguntas como: ¿se relaciona con algún problema conocido?, ¿lo desconocido en este problema es similar a lo desconocido en un problema resuelto?, entre otras sugerencias.

3. *Ejecutar el plan*.

De la etapa anterior se obtiene un esquema general de la solución. Cada paso implica la verificación del razonamiento aplicado ya sea intuitiva o formalmente. Si el paso en cuestión no se distingue con claridad se deriva mediante reglas formales hasta lograr certeza. Aquí las preguntas orientadoras pueden ser: ¿hay dudas de que el paso es correcto?, ¿se pudiera demostrar tal veracidad?, entre otras.

4. *Mirar hacia atrás*.

Esta etapa contribuye a consolidar conocimientos y desarrollar la capacidad para resolver problemas. Se puede estimular el pensamiento preguntando: ¿es la única solución posible?, ¿se pueden comprobar el resultado y el argumento?, ¿la solución es simple y elegante?, ¿qué problemas pudieran surgir haciendo modificaciones?, ¿cómo puedo generalizar el resultado para que sirva para resolver nuevos problemas?, entre otras pautas orientadoras.

Los pasos propuestos por Polya (1985) contribuyen a un ordenamiento de la actividad del pensamiento en función de lograr una solución al problema, aunque resulta evidente que las etapas están estrechamente conectadas y puede haber retrocesos constantemente. El método de estimular el pensamiento con preguntas orientadoras facilita la toma de conciencia durante todo el proceso de solución y ayuda a traer al foco de atención los elementos que lleven a una buena idea de solución.

1.1.2. Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático[2]

Díaz & Díaz (2018) hacen una síntesis de otros modelos que se derivan del modelo de Polya (1985), aunque se diferencian en que subdividen etapas o las amplían, pero se conserva la idea del autor inicial. Los autores citaron en su artículo a Müller (1978), Jungk (1982), Schoenfeld (1985), Krulik y Rudnick (1988) y Santos (1993). En el caso de Schoenfeld (1985), no se va a desarrollar aquí su modelo pues se le dedica un epígrafe aparte.

[2]Díaz, J. A., & Díaz, R. (2018), Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Bolema, 32* (60), 57-74.

Müller (1978) y Jungk (1982), citados por Díaz & Díaz (2018) proponen un modelo con cuatro etapas también:

1. *Orientación hacia el problema*.

2. *Trabajo en el problema*.

3. *Solución del problema*.

4. *Evaluación de la solución y la vía*.

Sin embargo, estos autores profundizaron en el modelo y construyeron un sistema teórico que denominaron instrucción heurística. Los procedimientos heurísticos de dicho sistema se clasifican en principios, reglas y estrategias (generales y particulares). El objetivo principal es lograr un Programa Heurístico General para la solución de ejercicios y problemas.

En cuanto a Krulik & Rudnick (1988), presuponen la resolución de problemas como una habilidad y proponen un modelo para desarrollar el pensamiento durante este proceso.

1. *Lectura del problema*.

2. *Exploración*.

3. *Selección de una estrategia*.

4. *Resolver el problema*.

5. *Vista retrospectiva y extrapolación a otros problemas*.

El modelo propuesto por Santos (1993), citado por Díaz & Díaz (2018) se inspira en los pasos que debe seguir un investigador científico:

1. *Consciencia de la existencia del problema*.

2. *Supresión de los dados*.

3. *Interés por la situación problemática abordada*.

4. *Análisis cualitativo*.

5. *Formulación de hipótesis*.

6. *Estrategias de resolución*.

7. *Análisis de los resultados*.

8. *Maduración*.

Como se ha podido apreciar, la propuesta de Polya (1985) subyace en todos estos modelos. Resultan muy interesantes las propuestas de Müller (1978) y Jungk (1982) debido a que su clasificación de los procedimientos heurísticos contribuye a la sistematización y planificación de la intervención del profesor la cual puede realizarse a través de impulsos heurísticos que no limiten la independencia del estudiante al pensar el problema.

1.1.3. Mathematical thinking and problem solving[3]

Schoenfeld (1989) enfatiza en lo estéril que es la enseñanza de la matemática basada en procedimientos, sin entender las ideas principales detrás de estos. De esta manera se limita considerablemente el poder matemático de los estudiantes

[3] Schoenfeld, A. H. (1989), Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. In ASCD, L. B. Resnick, &L. E. Klopfer (Eds.), *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research* (pp. 83-103), Alexandria: ASCD Yearbook.

para enfrentar nuevos problemas. En este sentido, el Equipo de Trabajo del Marco Curricular de la Junta de Educación de Ciencias Matemáticas (MSEB) aboga por:

- Aprovechar las posibilidades de la tecnología computacional para dedicar menos tiempo a dominar algoritmos de lápiz y papel. De esta manera se logra un espacio para el desarrollo del "sentido numérico" en los estudiantes el cual incluye las habilidades de representación, operaciones numéricas y de interpretación.
- Para la enseñanza basada en resolución de problemas, asumir como objetivo principal el desarrollo del poder matemático a partir de las habilidades para comprender conceptos y métodos matemáticos. Además, discernir relaciones matemáticas, razonar lógicamente y aplicar conceptos matemáticos, métodos y relaciones para resolver una variedad de problemas no rutinarios. (MSEB (1988) citado por Schoenfeld (1989)).

Señala Schoenfeld (1989) que para que una tarea constituya un problema, primero debe existir un compromiso con su resolución. Además, la última palabra de si una situación planteada es un problema, la tiene el posible resolutor y depende de lo que éste conozca. Por otra parte, los libros de texto contienen más ejercicios que problemas y (contrario a lo que se piensa) los "problemas de palabras" son una pequeña parte del panorama.

En resumen, las ideas principales de Schoenfeld (1989) son que el PM se estimula con problemas retadores dejando un tanto los procedimientos de lápiz y papel a la tecnología computacional. Además, señala que resolver problemas es sólo una parte de pensar matemáticamente, pues también se deben desarrollar habilidades metacognitivas y desarrollar un punto de vista matemático.

Por otra parte, este autor también enfatiza que el proceso de resolución de problemas es una disciplina de la razón, donde las convenciones y la terminología matemática cobran sentido en la medida en que funcionen en dicho proceso. Asimismo, aunque la vía o vías de solución posibles son un objeto de discusión importante, también lo son los métodos para la argumentación empleados (inducción, deducción, formas lógicas, entre otros).

1.1.4. Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development[4]

Harel & Sowder (2005) establecen una diferencia entre comprensión y pensamiento. La primera sería el significado particular dado por el estudiante a un término, texto, a la solución de un problema, a una justificación, etcétera. En cuanto a las formas de pensar, afirman que son las teorías que subyacen o sustentan las formas de comprensión e involucran al menos tres categorías interrelacionadas: creencias, enfoques de resolución de problemas y esquemas de prueba.

Para estos autores es de suma importancia caracterizar el PM para determinar objetivos cognitivos esenciales. Y establecen que el PM obtiene categoría de avanzado cuando supera las formas en que pueden presentarse los obstáculos epistemológicos. En sí la propiedad de "avanzado" del pensamiento se evidencia en

[4]Harel, G., & Sowder, L. (2005), Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7* (1), 27-50.

cómo el estudiante sortea el obstáculo epistemológico que tiene ante sí y sigue delante de manera válida pero notablemente diferente.

Por otra parte, Harel & Sowder (2005) exponen cuáles son las prácticas de razonamiento por las que se puede mejorar el PM avanzado en un modelo que denominan DNR (dualidad, necesidad y razonamiento repetido). El principio dualidad designa el hecho de que las formas de pensar y entender se impactan mutuamente. La necesidad surge por abordar problemas atractivos y desafiantes que crean en el resolutor una necesidad intelectual de resolverlos. La repetición fija las formas de pensar y entender, les confiere una base sólida.

Las implicaciones de Harel & Sowder (2005) que se han identificado son las siguientes: existe una diferencia definitiva entre un problema rutinario y uno desafiante para crear la necesidad de pensar y de entender. El establecer una dualidad entre pensar y entender resalta el hecho de que son dos procesos que se regulan mutuamente. La condición de que haya un razonamiento repetido para identificar formas de pensar debe tenerse en cuenta en el análisis de resultados de esta tesis.

1.1.5. Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into non-routine problems[5]

Beghetto (2017) trata en este artículo tres cuestiones relevantes: cómo los problemas no rutinarios requieren un pensamiento creativo y original; cómo la lógica de las tareas rutinarias puede impedir dicho pensamiento; y por último, cómo convertir

[5]Beghetto, R. A. (2017), Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into nonroutine problems. *ZDM Mathematics Education,* 1-7.

tareas rutinarias en problemas no rutinarios. Sin embargo, la elaboración de este tipo especial de problema no es cosa fácil y requiere de un espacio dentro de la apretada agenda del profesor.

Según Beghetto (2017) son varios los autores que han validado la singularidad especial de los problemas retadores. Por ejemplo, Peirce (1903) considera que se necesita pensar y actuar de una manera diferente cuando se experimenta sorpresa ante un fenómeno o experiencia que defrauda una expectativa. Por otra parte, Anderson (1987) argumenta que tales situaciones generan una auténtica duda que requiere de razonamiento creativo.

En este sentido, Beghetto (2017) concluye que el ambiente de incertidumbre que genera un problema retador es un catalizador para el proceso creativo de resolución de problemas. No obstante, debe haber un equilibrio entre tareas rutinarias y no rutinarias, donde las segundas vienen a ser como espacios para actuar de forma novedosa y creativa.

En lo referente a qué es la falta de planificación de las lecciones, Beghetto (2017) se refiere al proceso de reemplazar en ejercicios de rutina las características predeterminadas que tienen por aspectos por determinar (inesperadas). Las alteraciones pueden ser leves o más sustanciales como proponer a los estudiantes que diseñen sus propios problemas y métodos para resolverlos. Esto sería cómo agregar cierto nivel de incertidumbre en un ambiente de certeza.

Se considera muy oportuno el énfasis que hace Beghetto (2017) en valorar la dimensión compleja de la práctica del profesor, donde no sobran espacios para nuevas y enriquecedoras concepciones como la de involucrar problemas retadores en las clases. Asimismo, es interesante la acotación de lo que se puede lograr en este sentido, introduciendo en la estructura de lo rutinario contextos de incertidumbre que originen asombro e intriga y estimulen el pensamiento a salir de su zona de confort.

1.1.6. Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking[6]

Resulta peculiarmente interesante la idea de Tall (1994) de lograr el entendimiento partiendo de principios cognitivos. Además de regir lo que viene después, el principio es producto y guía del pensamiento. En este caso, el autor expone tres principios cognitivos que condensan en sí resultados comprobados por la neurociencia y por la psicología. A saber:

Principio cognitivo I. Maximizar el uso de la estructura cognitiva es necesario para sobrevivir.

Esta maximización viene dada por la discriminación de conceptos y métodos en cuanto sean útiles, descartando etapas que ya no tienen valor.

Principio cognitivo II. El cerebro sólo puede concentrarse en un pequeño foco de atención, pero tiene gran capacidad para el almacenamiento.

Esto conlleva a que el desarrollo cognitivo necesita desarrollar un mecanismo para la compresión de ideas (para que las abarque el foco de atención) y otro mecanismo que relacione la información almacenada relevante y la lleve al foco de atención en una secuencia apropiada.

[6]Tall, D. (1994),Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking.*An invited ICMI lecture.* Zurich: International Congress of Mathematicians.

Principio cognitivo III. Pensar sobre el pensamiento.

El aprendizaje con comprensión requiere primero que el estudiante pase por las construcciones matemáticas y luego reflexione sobre el propio conocimiento.

Por otra parte, Tall (1994) considera que los modelos de Polya (1985) y sus consecuentes, caracterizan el pensamiento reflexivo. Sin embargo, valora la versión de dividir la resolución de problemas en tres fases como “más amigable” para los estudiantes:

1. *Entrada*: ¿Qué se requiere?, ¿qué sé conoce? y ¿qué se puede presentar?

2. *Ataque*: Con suficiente información disponible se hacen las conexiones que pueden llevar a:

    a) un callejón sin salida. Ya con esta experiencia, retornar a 1.

    b) una idea que mueve el problema. Seguir.

3. *Revisión* (métodos, estrategias y posible generalización).

La contribución de Tall (1994) es muy importante debido a que muestra cómo la intención innata del cerebro es de maximizar la estructura cognitiva para mejorar el desempeño del pensamiento. Igualmente expone la limitación de la atención a un pequeño foco lo que conlleva al criterio de maximización que remite a la compresión de dicha estructura. También señala el aspecto metacognitivo donde se toma conciencia de cómo se aprende o se piensa.

1.1.7.Thinking Mathematically[7]

En Mason, Burton & Stacey (2010) se puede encontrar una forma novedosa y comprensible de abordar la modelación del PM en la resolución de problemas. Son tratados ejemplos de la naturaleza de sus argumentos y se enfatiza en detalles que otros autores pasan por alto al desarrollar esta temática. Resulta peculiar su preocupación por potenciar los momentos ¡AHA! (surge una buena idea) y paliar los ¡STUCK! (¡ATASCADO!) evitando el abandono de la resolución.

El modelo que proponen es el siguiente:

1. Entrada. Esta fase comienza con la comprensión para la que puede ayudar las preguntas orientadoras:¿qué es lo conocido?, ¿qué es lo que se requiere? y ¿qué se puede introducir o implementar?

   La fase termina cuando la persona se decide a involucrarse en la resolución del problema.

2. Ataque. Es la fase que demanda mayor esfuerzo. Puede conducir a un final feliz o a una resolución inconclusa, con conjeturas y preguntas sin resolver.

Esta fase comienza cuando se ha interiorizado el problema y termina cuando éste se resuelve o se abandona. Por otra parte, lo típico de la etapa es la generación de conjeturas y la justificación convincente que a su vez recurren a la especialización y a la generalización.

---

[7]Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010),*Thinking Mathematically* (2da ed.), Harlow: Pearson Education Limited.

3. Revisión. Tanto en el éxito como en el fracaso, es fundamental revisar el trabajo realizado porque se refinan y amplían las habilidades del pensamiento. En la revisión se sugiere: verificar la resolución, reflexionar sobre momentos e ideas claves y tratar de generalizar a un contexto más amplio.

Aunque este modelo propuesto por Mason, Burton & Stacey (2010) no dista mucho de los anteriores, las acotaciones que hacen estos autores alrededor de la fundamentación del mismo son interesantes. En este sentido, proponen que para el proceso de revisión se recurra a un enemigo para que ejerza la crítica o, en su lugar, desarrollar un enemigo interior. Así las falencias en el argumento ocupan un primer plano y hay oportunidades de descubrir fisuras que rebatan la justificación.

Por otra parte, ante una situación de ¡STUCK! los autores sugieren interpelar a la autorreflexión, por ejemplo, con la pregunta: ¿se ha asumido algo innecesario? Esta pregunta remite a la búsqueda recurrente, en la actividad matemática, de las condiciones necesarias y suficientes tanto para ser convincente al justificar como para simplificar el problema investigado y facilitar su comprensión.

1.1.8. Learning to Solve Non-routine Mathematical Problems[8]

En este artículo, Arslan & Altun (2007) presentan los resultados de un estudio en estudiantes de séptimo y octavo grado de Turquía, para comprobar si podían aprender o no estrategias conocidas de resolución de problemas y cuál es el nivel de aprendizaje. Este estudio es motivado porque, a pesar de largos años de instrucción,

[8] Arslan, Ç., &Altun, M. (2007), Learning To Solve Non-routine Mathematical Problems. *Elementary Education Online*, *6* (1), 50-61.

los niños no consideran tener las aptitudes necesarias para abordar los problemas matemáticos, especialmente los no rutinarios, de manera exitosa.

Estos autores consideran que las razones de las dificultades en los niños de la escuela primaria y secundaria se pueden atribuir a dos factores, siendo la primera la falta de conocimientos y habilidades de dominio específico. El segundo factor son las deficiencias en los aspectos heurísticos, metacognitivos y afectivos de la competencia matemática.

Arslan & Altun (2007) afirman que la mayoría de los niños en situaciones problemáticas complejas desconocidas no aplican espontáneamente estrategias heurísticas. Los estudiantes, por lo general, sólo intentan decidir qué cálculos realizar con los números. Además, estos estudiantes muestran creencias y actitudes inadecuadas hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas que ejercen una fuerte influencia negativa en su disposición para enfrentarlos.

Como ejemplos particulares, están las creencias de que sólo hay una forma correcta de resolver un problema y que este tiene sólo una respuesta correcta. Otra creencia sería que los estudiantes “comunes” no pueden resolver problemas no rutinarios. Lo anterior se atribuye a una insuficiente cultura matemática en el aula y a que, en Turquía, este tipo de problema prácticamente no se aborda en los libros de texto.

A partir del estudio expuesto por Arslan & Altun (2007), que no cubre las exigencias de una muestra suficiente de la cantidad de participantes y de los problemas rutinarios presentados (cuestión señalada por los propios autores), se pudo apreciar que el ambiente de aprendizaje tuvo un efecto positivo significativo en la adquisición de estrategias de resolución de problemas. Además, tuvo un impacto positivo en el disfrute y las actitudes hacia el aprendizaje de problemas matemáticos no rutinarios.

En resumen, se considera este trabajo de Arslan & Altun (2007) como una reafirmación de algunas de las ideas teóricas de Schoenfeld (1985). A saber, que los estudiantes mostraban incapacidad debido a la falta de recursos (evidenciado en la falta de conocimientos y habilidades de dominio específico). Por otra parte, las deficiencias en los aspectos heurísticos, metacognitivos y afectivos quedan explicados por Schoenfeld (1985) como dificultades en la heurística y la planificación.

1.1.9. Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done?[9]

En Falk (2017) se expone el papel de las competiciones matemáticas como una oportunidad para la aparición de talentos que modifican incluso la manera en que se hacen las matemáticas. Subraya que esta cuestión no es nueva y muestra el ejemplo de cómo debido a la participación de Leonardo de Pisa en un concurso en Sicilia, éste propuso un novedoso método de solución a una ecuación cúbica.

En este sentido, es válido aclarar que una cuestión fundamental que ofrecen las competiciones matemáticas son los problemas originales y desafiantes. Este contexto es altamente motivante e invita a profundizar en ramas especializadas de las matemáticas. Así comienza una vertiente de la Educación Matemática que se

[9]Falk de Losada, M. (2017), Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done? In ICME-13, & A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents* (pp. 329-350), Switzerland: Springer International Publishing.

dedica a buscar problemas interesantes, genuinos y desafiantes que las mentes jóvenes puedan comprender y resolver.

De esta manera el contexto de las competiciones matemáticas no sólo posibilita el avance de las matemáticas, sino que facilita que los jóvenes se motiven y se apasionen con las mismas. Esto traería como consecuencia que le dediquen más tiempo al abordaje de los problemas y sus consecuencias, lo que puede conducir a nuevas ideas teóricas que aporten a la comprensión matemática y al PM como elementos distintivos del razonamiento matemático.

La influencia de las ideas de Leonardo de Pisa, desarrolladas en el contexto de una competición de resolución de problemas prevaleció durante al menos seis siglos y finalmente cambió la perspectiva matemática básica, de geométrica a algebraica.

Finalmente, Falk (2017) afirma que aún no se ha medido el aporte de excelentes pensadores que se formaron en la tradición de enfrentar problemas difíciles que no requieren de amplios conocimientos previos. Esta tradición ha sido el centro de la propuesta de las competiciones matemáticas y su desarrollo depende en alguna medida de que se organice el conocimiento matemático en función de estrategias de razonamiento y no en ejes temáticos, como históricamente se ha realizado.

A partir del artículo de Falk (2017) hay varias consecuencias muy importantes. La primera es que las competiciones matemáticas han contribuido (y lo hacen) al despegue de nuevas líneas de investigación, al surgimiento de talentos y a transformar el modo en que se hacen las matemáticas. En segundo lugar, esta realidad aún no se aprecia en su justa magnitud y urge destrabar procesos y formas de organización para que las competiciones matemáticas alcancen su potencial.

1.2. Investigaciones sobre la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval en el contexto de la resolución de problemas

Las investigaciones tomadas en cuenta en este epígrafe permiten llegar a la conclusión de que la TRS de Duval no ha sido aplicada con la intencionalidad de explicar el PM en la resolución de problemas. Más específico, se verá la ausencia de una experiencia donde las operaciones de tratamiento y conversión entre registros sean las causantes del surgimiento de la conjetura cardinal en la resolución.

1.2.1. Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving[10]

Gagatsis & Shiakalli (2004) estiman que el manejo de representaciones, junto a la capacidad de traducirlas, se correlaciona fuertemente con el éxito en la educación matemática. Su estudio se centra en investigar esta capacidad para el caso de la función cuadrática en estudiantes universitarios. En este ámbito observan la articulación de diferentes representaciones para determinar la relación existente entre el éxito ante una tarea rutinaria y ante un problema.

Los autores asumen de Duval (1987, 1993) que las dificultades de traducción están relacionadas con las dificultades en la resolución de problemas matemáticos. Es así que debe ocurrir una interpretación natural que se manifiesta en entender cuál es el significado de concepto que hay detrás de una de sus representaciones. Además de lo anterior, deben identificarse significados equivalentes de otras representaciones de dicho concepto.

[10]Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004),Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, *24* (5), 645-657.

Por otra parte, si ocurriesen dificultades con la interpretación natural entonces el estudiante puede tener dificultades para articular las propiedades, información y formulaciones del problema. La dificultad subyacente aquí sería la falta de congruencia semántica entre las representaciones que componen el problema, que conducen a que la equivalencia de significado entre dos representaciones no sea evidente.

La conclusión a que llegan Gagatsis & Shiakalli (2004) es que los estudiantes conciben como diferentes las representaciones verbal y gráfica del concepto función. Al no tener en cuenta que las mismas constituyen diferentes medios de representar el mismo concepto, se muestran incapaces de reconocerlo cuando éste se encuentra implícito dentro de una variedad de sistemas de representación cualitativamente diferentes.

Como resultado del análisis del artículo de Gagatsis & Shiakalli (2004), se pudo apreciar que una preparación *a priori* en múltiples representaciones de un mismo concepto puede facilitar su posterior identificación aunque puede no ser decisivo. También cabe resaltar que la representación verbal del concepto función es precisamente la definición de este concepto, que alude a un sinfín de significados posibles y esto puede influir en que los estudiantes hayan establecido diferencias.

1.2.2. Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?[11]

Gagatsis, Elia & Mousoulides (2006) abordan el fenómeno denominado *compartimentalización de registros semióticos* que se expresa cuando el estudiante es capaz de resolver una tarea en una determinada representación y no es capaz de realizarla en otro tipo de representación. El estudio que sustenta este artículo busca aportar elementos en cuanto a posibles maneras que permitan superar este fenómeno.

En la búsqueda de referentes para determinar dichos elementos, estos autores tuvieron en cuenta otros estudios basados en formas no tradicionales de enseñanza y en el empleo de asistentes matemáticos. El énfasis en solucionar la dificultad que genera la compartimentalización es porque la comprensión de un concepto matemático implica el tratamiento de varios tipos de representaciones, y éstas por sí solas representan una parte limitada de sus aspectos o cualidades.

De este modo, según Gagatsis, Elia & Mousoulides (2006) lo que resulta pertinente es tratar diferentes representaciones de un concepto para que su integración contribuya a una comprensión más abarcadora del mismo. En este sentido, manifiestan que la comprensión se expresa en tres aspectos: reconocimiento, uso flexible y conversión. Cabe señalar que, en todos los estudios analizados por los autores, se manifestaron dificultades notables en estos aspectos.

[11]Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006), Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Relime* (Número Especial), 197-224.

En particular, respecto al concepto de función Gagatsis, Elia & Mousoulides (2006) afirman que hay un sesgo en su enseñanza, debido a que se prepondera la representación analítica en detrimento de la icónica. En relación con esto identifican como una de las razones que el análisis perceptivo y la síntesis de información implícita en un diagrama a veces superan en complejidad a cualquier otro aspecto de un problema.

Finalmente, Gagatsis, Elia & Mousoulides (2006) comprobaron que los estudiantes investigados tienen compartimentalizados los registros de representaciones y los procesos cognitivos de resolución de problemas (en el tema de funciones). En este sentido, concluyen que el enfoque geométrico permite manipular funciones como una entidad y los estudiantes se muestran capaces de encontrar las conexiones entre diferentes representaciones involucradas en problemas.

A partir del artículo de Gagatsis, Elia & Mousoulides (2006) se toman las siguientes ideas fundamentales: la compartimentalización es un fenómeno que dificulta la conversión entre RS y es el resultado de una enseñanza sesgada. El reconocimiento de conceptos, el uso flexible y la conversión entre RS es favorecido por la utilización de múltiples RS y es a lo que debe enfocarse una enseñanza no sesgada. Esto viene a estar en consonancia con Gagatsis & Shiakalli (2004) y con la TRS.

1.2.3. How Students “Unpack” the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving[12]

La investigación de Edens & Potter (2008) se centra en cómo estudiantes de cuarto y quinto grado resolvieron un “problema presentado en palabras” mediante una conversión del registro del lenguaje natural al pictórico (que denominan “desempacar”). También se exploran las relaciones entre el tipo de representación gráfica, la visualización espacial, la habilidad de dibujar y la resolución de problemas. El contexto se creó a partir de una tarea desafiante, una de visualización espacial y otra de dibujo.

Dentro de los hechos más importantes que observaron estos autores está el que mientras más lo pictórico se aproximaba a lo esquemático, mayor éxito tenían los estudiantes en la solución del problema. En cuanto a lo pictórico, se introducen elementos extraños no necesarios para la solución del problema, mientras que la representación esquemática (más rigurosa que la pictórica) aporta elementos pertinentes en este sentido.

En lo referente a las diferencias entre una representación pictórica y una esquemática, Edens & Potter (2008) aducen que la segunda incluye información relevante del problema que apoya a su resolución porque representa relaciones espaciales y proporciones entre los objetos. Es así como este tipo de representación puede constituir una herramienta para resolver problemas. Por lo general, lo pictórico contiene elementos superfluos que distraen la atención.

---

[12]Edens, K., & Potter, E. (2008), How Students “Unpack” the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving. *School Science and Mathematics*, *108* (5), 184-196.

En conclusión, se ha podido apreciar un acercamiento por parte de Edens & Potter (2008) a una de las tesis que defiende Duval (2007) y es que cada tipo de registro semiótico implica un empoderamiento del estudiante para resolver problemas. En otras palabras, lo que diferencia un registro de otro son sus operaciones intrínsecas, las que hacen posible la operación de tratamiento para obtener nuevas representaciones cada vez más pertinentes para la resolución de un problema.

1.2.4. Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral[13]

González-Martin & Camacho (2004) muestran cómo la integración inadecuada para reforzar el uso del registro gráfico por parte de estudiantes universitarios conduce a que estos lo rechacen. Como aporte en esta dirección, muestran algunas actividades diseñadas para retomar el estatus de este registro como herramienta matemática y al tiempo promover su utilización.

La propuesta de González-Martin & Camacho (2004) es una secuencia didáctica caracterizada por la articulación del registro gráfico (no icónico según la TRS) con el algebraico mediante actividades que recurren a conceptos previos, la construcción sistemática de ejemplos (o contraejemplos) en los dos tipos registros y el uso de problemas no rutinarios. Unas veces el registro gráfico funge como base para interpretar resultados y otras para predecir.

---

[13]González-Martin, A. S., & Camacho, M. (2004), Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.2*, pp. 479–486. Bergen: ERIC.

Las actividades aplicadas por González-Martin & Camacho (2004) condujeron a mostrar las potencialidades del registro gráfico para determinar si una integral diverge y su dificultad para predecir la convergencia. En este punto los estudiantes tomaron conciencia de aprovechar el método gráfico cuando les facilita sus razonamientos y apelar a construcciones más formales cuando no sea pertinente la utilización del gráfico.

Del artículo de González-Martin & Camacho (2004) se pueden sacar algunas conclusiones, teniendo en cuenta los trabajos analizados anteriormente. La primera conclusión es que las actividades propuestas en clase determinan, en buena medida, la necesidad de apelar al registro gráfico. La otra conclusión es que se deben integrar (para evitar la compartimentalización) el registro gráfico y el algebraico, uno para favorecer la elaboración de conjeturas y otro para probarlas o refutarlas.

1.2.5. Narrative as Diagram for Problem-solving: Confluence between Peirce's and Vygotski's Semiotic[14]

El trabajo de West (2018) se considera interesante dado que concibe a la narrativa como un diagrama que facilita la resolución de problemas. Esta autora considera que las habilidades metacognitivas favorecen reconocer otros enfoques durante los análisis y el ejercicio del razonamiento abductivo. Dicho razonamiento sería el propulsor de intuiciones viables que sustenten propuestas para resolver una situación planteada.

[14]West, D. E. (2018), Narrative as Diagram for Problem-solving: Confluence between Peirce's and Vygotsky's Semiotic. In E. K. Katić, &G. Ross (Eds.), *Semiotics 2018: Resilience in an Age of Relation* (pp. 201-219), Bowling Green: Philosophy Documentation Center.

Respetando el orden de los aspectos teóricos planteados en West (2018), se comienza por considerar el principio endoporéutico de Peirce. La esencia de este principio es considerar tanto la base de conocimientos (aspecto interno) como las inclinaciones de los demás (influencia de lo externo). Aquí se sostiene la premisa fundamental de que el intercambio de signos es obligatorio para el desarrollo del pensamiento, en la mente (intrasubjetivo) y entre interlocutores (intersubjetivo).

Como consecuencia de ello, West (2018) valora que la narrativa se adhiere al principio endoporéutico de Peirce tanto en su forma (signo) como en su función (interpretante). La explicación de esto es que existe una intencionalidad comunicativa que impulsa al productor del signo a organizar eventos (comienzo, medio, final), y plantear eventos en estructuras lógicas episódicas para sí mismo y para los interlocutores.

Otro aspecto relevante de la narrativa, tratado por West (2018) es que, para que sea funcional, debe haber significados compartidos entre los interlocutores. La consideración de los significados de los demás es fundamental para promover la semiosis. Afirma la autora que Peirce valora a todo pensamiento como diálogo, ya sea intrasubjetivo (dentro de la mente) o intersubjetivo (entre mentes) y que los signos tienen naturaleza dialógica.

A modo de valoración del trabajo de West (2018) bajo la perspectiva de esta tesis, se considera a los problemas retadores como una forma de narrativa peculiar que prepondera el diálogo interno dada la ausencia de uno de los interlocutores. La forma fundamental de motivar este diálogo ha sido expuesta anteriormente y es inquietar el pensamiento mediante preguntas en las diferentes fases de la resolución del problema.

Por otra parte, la consideración de la intencionalidad en el acto narrativo del problema retador hace que sean posibles diferentes interpretaciones de este. Al mismo tiempo, una idea esencial para generar el reto es evitar una transferencia inmediata entre registros semióticos que dificulte la manifestación del PM. De este modo un problema retador de olimpiada, en ocasiones, puede verse como una narrativa que dificulta deliberadamente un ejercicio cómodo de conversiones.

Otra consecuencia importante del análisis de este artículo es que un problema no rutinario (como un signo-narrativa) puede hacer referencia a “objetos matemáticos” pero también a una intencionalidad de quien lo elabora. Dicha intencionalidad se manifiesta en las conexiones entre conceptos matemáticos valoradas en la etapa de diseño y la omisión deliberada de algunas en la etapa de materialización del problema.

1.2.6. Representation Registers in the Solution of Calculus Problems[15]

El estudio de Ruiz & Madero (2011) se realiza con estudiantes de ingeniería y el contexto es la resolución de problemas de optimización en la unidad de aprendizaje Cálculo. Al igual que en epígrafes anteriores de esta tesis, los autores constatan la resistencia a utilizar diferentes registros de representación y que se prepondera el registro algebraico. Sin embargo, este registro se utiliza sin una interpretación del enunciado del problema ni del proceso de resolución.

---

[15]Ruiz, E. F., & Madero, G. A. (2011),Representation Registers in the Solution of Calculus Problems. *Creative Education*, *2* (3), 270-275.

Por otra parte, Ruiz & Madero (2011) fundamentan su estudio en consideraciones de Duval (1998) citado por los autores, quien plantea que coordinar diferentes registros de representación semiótica es una tarea importante en las matemáticas. Además, estos autores manifiestan que muchas de las dificultades experimentadas por los estudiantes pueden describirse y explicarse como una falta de coordinación entre dichos registros.

Respecto a los resultados de la aplicación de instrumentos, la entrevista aplicada a profesores por parte de Ruiz & Madero (2011) arrojó que los estudiantes se muestran incapaces de identificar las funciones implícitas en los problemas de optimización. También los estudiantes, aun cuando saben utilizar los criterios de la primera y segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos, no identifican su aplicación en el problema y muestran un desempeño demasiado “mecánico”.

Como parte del estudio a los estudiantes se les orientó un problema de optimización rutinario. Como resultado se constata que un alto porcentaje utiliza el registro algebraico y ninguno utiliza el registro tabular ni el gráfico. Ruiz & Madero (2011) alegan que los estudiantes muestran serios problemas para trabajar con registros algebraicos, desde no recordar la fórmula necesaria hasta no resolver el problema correctamente.

Entre los aportes de este artículo a la tesis, está el considerar la posibilidad de que utilizar problemas rutinarios que facilitan la conversión al registro algebraico puede ser una de las principales causas de la resistencia a utilizar diferentes registros de representación. Por otra parte, también se trae a escrutinio ciertas ideas como que no siempre las tareas orientadas demandan una actividad del PM que requiera un uso de múltiples RS y que la activación del PM depende en buena medida de la tarea.

1.2.7. Symbolic and Verbal Representation Process of Students in Solving Mathematics Problems Based on Polya's Stages[16]

La investigación de Bustanul & Rahmawati (2017) es realizada con estudiantes de secundaria y su propósito es revelar cómo estos realizan el proceso de construcción de las representaciones simbólica y verbal en la resolución de problemas. Para ello centraron el análisis en el modelo de cuatro etapas de Polya para la resolución de problemas.

Por otra parte, Bustanul & Rahmawati (2017) asumen la existencia de dos sistemas: el de representación externa y el de representación interna. El primero se asocia a las representaciones producto de una formulación, por lo general simbólica. Aquí clasifican como tal lo verbal (escritura, habla, etcétera), lo pictórico (imágenes, diagramas, gráficos y combinaciones entre ellos) y lo simbólico (números, operaciones y signos de conexión, símbolos algebraicos y combinaciones).

En lo referente al sistema de representación interna, Bustanul & Rahmawati (2017) también concuerdan con el criterio de Goldin & Steingold (2001) quienes consideran que es privativo de la mente y que se utiliza para definir significados matemáticos. Entonces las RS clasifican como un sistema de representación externo cuyos registros semióticos pueden ser clasificados como verbales, pictóricos y simbólicos.

[16]Bustanul, R., & Rahmawati, D. (2017), Symbolic and Verbal Representation Process of Student in Solving Mathematics Problem Based on Polya's Stages. *International Education Studies*, *10* (10), 20-28.

La investigación de Bustanul & Rahmawati (2017) arrojó como resultado que los estudiantes indican la representación simbólica específica en la comprensión del problema. Esto les permitió captar los aspectos esenciales del problema y sus interacciones. Por su parte, la representación verbal se observó en las etapas de comprensión y ejecución del plan cuando algunos estudiantes replantean el problema con sus propias palabras y explican los pasos de la resolución.

Finalmente, se puede valorar que el estudio de Bustanul & Rahmawati (2017) describe cómo toman forma las ideas de los estudiantes en las etapas 1, 3 y 4 del modelo de Polya. También se resalta la importancia de la clasificación de las RS que proponen estos autores, pues complementa a la de la TRS, favorece su comprensión y el nivel de detalles. Además es crucial su afirmación de que los sistemas de representación interna son los que facilitan la definición de los significados matemáticos.

1.2.8. The Effect of Different Registers of Semiotic Representations in the Problem-Solving Challenge Involving Fractions. Study with Future Primary School Teachers[17]

Caetano (2020) se propone determinar la eficacia de una metodología para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas con fracciones en aspirantes a profesores de primaria. Para ello aplica un cuestionario fundamentado en el modelo de Duval denominado “principios experimentales de variación semiótica y variaciones

[17]Caetano, M. (2020),The Effect of Different Registers of Semiotic Representations in the Problem-Solving Challenge Involving Fractions. Study with Future Primary School Teachers. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, *5* (9), 1317-1322.

concomitantes". Básicamente, se orientan tres problemas de fracciones con tres alternativas en el registro pictórico y cuatro en el numérico.

La metodología mencionada de Caetano (2020) es la aplicación de diferentes registros de representación semiótica a la resolución de problemas de fracciones. Como resultado relevante de la aplicación de esta metodología está el descubrir la existencia de deficiencias en la comprensión conceptual de la fracción y sus reglas computacionales. Igualmente se detectaron problemas con la decodificación lingüística, con el consecuente desempeño desfavorable de los estudiantes.

Caetano (2020) toma como uno de sus antecedentes teóricos el modelo de Duval que parte de buscar la representación más elemental posible, R_1 de un objeto en un registro de salida A y su representación convertida R_1' en un registro de llegada B. Luego, realiza todas las posibles variaciones de $R_1, \ldots, R_n$ que retienen en las diferentes representaciones un valor de representación de algo en el registro de salida A, y observa las variaciones concomitantes de R_1' en el registro de llegada B.

Este artículo de Caetano (2020) permite refinar ideas acerca del método cardinal planteado en la TRS que puede utilizarse para enfrentar lo que se conoce como "la paradoja cognitiva de Duval". Las variaciones concomitantes fungen como el elemento fundamental para estar seguro de que, aunque las RS sean de diferente índole, estarían haciendo referencia al mismo "objeto matemático" en cada variación.

1.2.9. The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children[18]

El objetivo principal del estudio de Boonen et al. (2014) es determinar qué aportan el tipo de representación visual, la capacidad espacial y la comprensión de lectura a la resolución de problemas de palabras en estudiantes de sexto grado. Al respecto, los autores identificaron en la literatura que los estudiantes tienen dificultades en la capacidad de generar una representación visual adecuada de un problema verbal. En este sentido, los autores se proponen ser más específicos.

Abundando al respecto, para Boonen et al. (2014) el criterio de correlacionar la construcción de representaciones visuales y el éxito en la solución de problemas de palabras puede conducir a un error de inferencia. Habría que ser más específicos en los tipos de representaciones y cuáles de estas están conduciendo verdaderamente al éxito. Debido a eso abogan por utilizar un instrumento desagregado en ítems en lugar de utilizar una prueba.

En el estudio los autores distinguen entre representaciones pictóricas, representaciones esquemáticas visuales inexactas y representaciones esquemáticas visuales precisas. Las primeras implican la construcción de imágenes vívidas y detalladas (se consideran irrelevantes en su investigación), las segundas no abundan en detalles superfluos (pero son imprecisas) y las terceras sí guardan una clara referencia al objeto al cual apuntan.

[18] Boonen, A., Van Wesel, F., Jolles, J., & Van Der Schoot, M. (2014), The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research* (68), 15-26.

Es de este modo que la relación positiva entre representación visual y éxito en la resolución de un problema de palabras se manifiesta específicamente cuando la representación visual es exacta (según Boonen et al., 2014). Esto se corrobora en los resultados de la prueba estadística aplicada, la cual indica que existe una asociación significativa entre el tipo de representación visual y el éxito en la resolución de problemas.

Por otra parte, Boonen et al. (2014) afirman que existe un incremento de la posibilidad de éxito en la representación visual esquemática precisa. Además, no hubo diferencias importantes en cuanto a si la representación visual fuese mental o concreta. La importancia de la habilidad espacial resultó estrechamente relacionada con la representación visual precisa, mientras que la relevancia en el éxito de la comprensión lectora no difirió entre los diferentes tipos de representación

En conclusión, existen coincidencias entre la investigación de Boonen et al. (2014) y las consideraciones teóricas expresadas en Duval (2017). Sucintamente, las representaciones visuales precisas pueden utilizar sus operaciones intrínsecas propias como registro semiótico y llegar a un nuevo conocimiento que puede resultar en la solución del problema.

Al respecto, según Preciado (2017), un estudiante de olimpiadas (al cual se le aplicaron instrumentos de investigación) manifiesta que en problemas de geometría trata de hacer dibujos exactos con regla y compás para facilitar el ver y el imaginar. Además, construye más trazos para encontrar diferentes valores que le ayuden a resolver el problema. No obstante, afirma que no siempre se necesitan medidas exactas y toma como referencia para ejemplificar a la homotecia y a la realidad.

1.2.10. Thinking together with material representations: Joint epistemic actions in creative problem solving[19]

Entre las ideas esenciales que se mueven en el estudio de Stege et al. (2014) se puede mencionar que las representaciones materiales (modelos, diagramas y dibujos) son medios para compartir, refinar y discutir perspectivas en una colectividad. Las representaciones utilizadas se constituyen de bloques LEGO.

Stege et al. (2014) asumen que los modelos representacionales facilitan los procesos de pensamiento colectivo *"[…] al exteriorizar ideas y pensamientos al espacio público […] Esto les da un formato "manipulable" que permite diferentes tipos de pruebas, exploración y reorganización de elementos semánticos, que a su vez pueden dar lugar a nuevas percepciones e ideas."*[20]

Uno de los resultados significativos de la investigación de Stege et al. (2014) es que los bloques LEGO pasaron de ser una herramienta para ilustrar una idea, a la base del modelo real que constituye la solución a la tarea conjunta. Además, aunque se parte del modelo conceptual elegido por una persona, la estructura semiótica es negociada entre los participantes constituyéndose una copropiedad.

---

[19]Stege, J., Fusaroli, R., Østergaard, S., & Tylén, K. (2014), Thinking together with material representations: Joint epistemic actions in creative problem solving. *Cognitive Semiotics*, *7* (1), 103–123.

[20]Stege, J., Fusaroli, R., Østergaard, S., & Tylén, K. (2014), Thinking together with material representations: Joint epistemic actions in creative problem solving. *Cognitive Semiotics*, *7* (1), 103–123. p. 104.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de caracterización del PM en el contexto de las representaciones semióticas escritas de los estudiantes

En este epígrafe se tienen en cuenta las investigaciones que aportan elementos importantes para establecer criterios sobre si una respuesta escrita puede ser considerada una evidencia del PM. Aunque no se encontraron trabajos sobre este tema en el contexto de las olimpiadas de matemáticas, las consideraciones aquí desarrolladas son aplicables al contexto de la resolución de problemas retadores de las olimpiadas colombianas de matemáticas.

1.3.1. Análise interpretativa de produções escritas em uma tarefa de matemática que envolve gráfico de linha[21]

Alves & Corio (2013) basan su investigación en una muestra de profesores de matemáticas de secundaria básica. La tarea que se les planteó en específico requiere de interpretación de gráficos. El objetivo es hacer consideraciones a partir de sus respuestas escritas e inferir sobre las formas en que abordaron la tarea.

Estos autores consideran que el análisis de la producción escrita es una práctica de investigación. Esta práctica adquiere singular importancia cuando en lugar de interesarse por el resultado, obviando los procesos que le dieron origen, dirige la mirada a éstos con la intención de comprenderlos. Dicha comprensión es esencial para realizar una reorientación consciente y planificada de estos procesos. Así se facilita que estudiantes y profesores repiensen críticamente sus prácticas.

---

[21]Alves Ferreira, P. E., & Corio De Buriasco, R. (2013), Análise interpretativa de produções escritas em uma tarefa de matemática que envolve gráfico de linha. In SEMUR (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 2292-2299), Montevideo: SEMUR.

De modo que el análisis de la producción escrita, como forma de evaluación, tiene como objetivo identificar evidencia cualitativa sobre el conocimiento de los estudiantes y los resultados de la didáctica empleada. Los autores asumen el criterio de Buriasco (2004), quien afirma que en el análisis de una producción escrita se establece un símil a un diálogo con las respuestas dadas, donde se pregunta sobre sus configuraciones y las relaciones que las constituyen.

Respecto al contexto creado con problemas no rutinarios, Alves & Corio (2013) asumen que se parte de la hipótesis de que empoderan al estudiante para producir conocimientos a partir de situaciones familiares e imaginables, con las que construye significados y aprende matemáticas. Aunque no existe una sola regla para elegir contextos, al menos se debe intentar crear una correspondencia entre un buen contexto y un buen problema.

El método que evidencia el trabajo de Alves & Corio (2013) para analizar las producciones de los profesores es el hipotético-deductivo, que aquí tiene implícito el método inductivo de interpolación. Las variables indicadores son: interpretación del enunciado, estrategias elaboradas, procedimientos desarrollados, justificaciones / explicaciones / argumentos elaborados.

Un elemento importante para recalcar es que en la tarea se solicita que se justifique o argumente para obtener pistas en el análisis de la producción escrita de los participantes sobre la forma en que pensaban. Esto es muy importante debido a que este tipo de análisis tiene un fuerte componente inductivo por lo que, además de la intencionalidad de provocar el PM, debe incluirse alguna cláusula que conduzca a una evidencia explícita de su justificación.

1.3.2. Comparing model-building process: a model prospective teachers used in interpreting students' mathematical thinking[22]

Sapti et al. (2019) basan su estudio en un modelo de interpretación denominado por Wilson, Lee y Hollebrands (2011) como *Comparing model-building process*. Este modelo consiste en interpretar el pensamiento del estudiante basado en su trabajo. Particularmente, la investigación se realizó con un profesor en formación (PF) que utilizó el modelo del proceso de construcción de edificio en la interpretación del PM de los estudiantes.

También los autores afirman que, en el caso de comparar trabajos, primero el PF hace rúbricas de representación externa de su propio conocimiento para que la interpretación se centre en la comparación de su trabajo con el del estudiante. En cambio, al comparar conocimientos el PF utiliza rúbricas de representación interna para que la interpretación se fundamente en la comparación del trabajo de los estudiantes con su conocimiento o pensamiento.

En relación con lo anterior, existen dos posibilidades en las que se manifiesta el enfoque de atención del PF: la atención explícita e implícita. La primera es la que el PF presta al trabajo escrito del estudiante o lo que los estudiantes podrían pensar (basado en su trabajo). La segunda se infiere en función del trabajo del PF.

En relación con la tarea asignada a los PFs que participaron en el estudio, esta se basa en un Problema de Construcción de Edificios (BCP, siglas en inglés) y cuatro

[22]Sapti, M., Purwanto, Bambang Irawan, E., Rahman As'ari, A., Sa'dijah, C., Susiswo, et al. (2019), Comparing model-building process: a model prospective teachers used in interpreting students' mathematical thinking. *Journal on Mathematics Education*, *10* (2), 171-184.

ejemplos diferentes del trabajo escrito de los estudiantes sobre dicho BCP. Aquí los PFs comparan, implícita o explícitamente, la actividad de los estudiantes con su propia actividad. En cuanto a los conocimientos, los PFs comparan la acción de los estudiantes con sus conocimientos o teorías sobre un problema dado.

Por otra parte, se puede afirmar que Sapti et al. (2019) enfocan la atención en un modelo para interpretar el PM de los estudiantes a través de la evidencia escrita, que generalmente es el que se utiliza en las aulas. No obstante, existen características inherentes al acto de interpretar que salen a relucir en su análisis del modelo de interpretación *Comparing model-building process*. Una es que no hay acceso directo al PM del estudiante y otra es que importan las evidencias explícitas e implícitas.

1.3.3. Teachers' Diagnostic Competences and Levels Pertaining to Students' Mathematical Thinking: The Case of Three Math Teachers in Turkey[23]

La investigación de Aydan & Argün (2017) permite hacer avances en la caracterización de la capacidad de comprender y analizar el pensamiento de los estudiantes que se denomina, en Educación Matemática, *competencia diagnóstica*. Estos autores acordaron dividir esta competencia en cuatro niveles o sub-habilidades: considerar, escudriñar (hacer escrutinio), conocimiento/implementación e interpretación.

En relación con el nivel de considerar, la falta de curiosidad o interés por las ideas del estudiante hace que el profesor no tenga el cuidado necesario para percibir su

[23]Aydan Kaplan, H., & Argün, Z. (2017),Teachers' Diagnostic Competences and Levels Pertaining to Students' Mathematical Thinking: The Case of Three Math Teachers in Turkey. *Educational Sciences: Theory & Practice, 17* (6), 2143–2174.

PM. El escrutinio, en cambio, se refiere a observar desde la perspectiva del estudiante, lo que Dewey (1902) citado por Aydan & Argün (2017), denominó como *psicologizar*. Dicho de otra manera por estos autores, la comprensión de la racionalidad interna del pensamiento del estudiante.

Por otra parte, el nivel de conocimiento/implementación se caracteriza por el paso de la perspectiva egocéntrica del profesor a la del estudiante en cuanto a conceptos. En este sentido, Aydan & Argün (2017) proponen tener en cuenta cuatro etapas referidas al conocimiento del profesor acerca de la materia, de la comprensión de los estudiantes, del plan de estudios, de las estrategias de instrucción y de la evaluación.

En cuanto al nivel de interpretación, Aydan & Argün (2017) asumen los criterios de Prediger (2010) y Adler (2005). El primer criterio considera que la diferencia entre ideas y evidencias de estas, se puede caracterizar a través de los significados que los estudiantes asignan a los conceptos matemáticos. Mientras que el segundo criterio, plantea examinar la definición del concepto interiorizada por el estudiante como vía para determinar el significado que le atribuye.

Los resultados del estudio de Aydan & Argün (2017), bajo el supuesto de que el conocimiento de los profesores sobre los procesos de aprendizaje es un componente preliminar de su competencia diagnóstica, arrojaron que existe tendencia a corregir los errores de los estudiantes más que a escudriñar su pensamiento. De esta manera, se nota el desconocimiento de que el acto de ver desde los ojos del estudiante implica escudriñar los puntos donde tiene ideas cerradas.

También en los resultados de la investigación se aprecia que en los casos que se manifiesta el PM en las explicaciones verbales de los estudiantes, hay una conexión con una mayor frecuencia de comunicación verbal establecida dentro del aula. Finalmente, se pudo notar que el escrutinio de los profesores se ha convertido en el factor más importante que determina la capacidad de los profesores para comprender el pensamiento de los estudiantes.

Concretamente para la presente tesis, Aydan & Argün (2017) aportan nuevas sugerencias para interpretar el PM de los estudiantes desde varias etapas que dependen del supuesto de que el conocimiento del profesor es preliminar para la competencia diagnóstica. Sin embargo, resulta necesaria una adaptación al objeto de investigación asumido pues tiene características esencialmente diferentes a la enseñanza regular que se sigue en las aulas.

1.3.4. How young students communicate their mathematical problem solving in writing[24]

El estudio de Teledahl (2017) investiga la escritura de jóvenes estudiantes (menos de 13 años) en relación con la resolución de problemas matemáticos. Aquí se parte del supuesto de que la escritura matemática es una actividad particular que requiere un conjunto complejo de recursos. Se toma como objetivo de la investigación aumentar los conocimientos sobre escritura desde una perspectiva más que matemática, comunicacional.

Teledahl (2017) toma de la descripción de O'Halloran (2013) acerca de las matemáticas como un sistema multi-semiótico y complementa su modelo. De esta manera, para la autora la semiótica del estudiante puede expresarse en cinco modos

[24]Teledahl, A. (2017), How young students communicate their mathematical problem solving in writing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48* (4), 555-572.

diferentes: imagen, palabras, números, símbolos matemáticos y diseño. Seguidamente, se muestran los resultados del estudio de Teledahl (2017), teniendo en cuenta estos modos.

Las imágenes pueden ser dibujos icónicos y dibujos simbólicos. Los primeros semejan cualidades físicas o visuales de lo representado y los segundos no. Se utilizan dibujos para establecer las condiciones del problema, para dar cuenta de su proceso de resolución, para ilustrar el problema o parte de él y para representar la respuesta.

Otro proceder para dejar evidencia del proceso de resolución de problemas es la iteración, donde las colecciones de objetos se muestran repetidamente con pequeñas diferencias para indicar cambios. Por otra parte, otra forma de indicar cambios es borrando, medio borrando o tachando un objeto dibujado o parte de un cálculo.

En la investigación de Teledahl (2017) también se notan los múltiples usos que los estudiantes le dan a las palabras. Estas pueden ser utilizadas como título del texto, para explicar o denotar cosas, complementar y explicar dibujos, introducir unidades o explicaciones en los cálculos, indicar las condiciones del problema o para expresar la respuesta. Además, las palabras pueden ser utilizadas para construir una narrativa que no incluya cálculos o dibujos.

Por otra parte, diferentes usos de los numerales se evidencian en el estudio de Teledahl (2017). Es así como se utilizan como números en los cálculos, al establecer una condición o respuesta. También tienen un uso nominal para estructurar algún texto en una relación de orden de sus elementos. Por último, se encuentra que se utilizan en pocas ocasiones las palabras para denotar números.

En relación con los símbolos, éstos se utilizan de dos formas diferentes. Una de ellas es en los cálculos durante el proceso de resolución de problemas, encontrándose el signo más (+) y el signo igual (=). También, Teledahl (2017) pudo apreciar que estos signos se usan como sustitutos de sus equivalentes de palabras al enunciar una condición o una respuesta. Por otro lado, la cadena de igualdades en un cálculo continuo es frecuente.

Por su parte, el diseño es una forma que tienen los estudiantes de estructurar sus textos. Los recursos que se utilizan pueden ser flechas, espacio para separar, conectar y organizar los diferentes elementos de los textos para crear una coherencia interna. La intención del diseño es transmitir significado al dividir y dirigir la atención de un intérprete, así como mostrar una temporalidad que puede evocar el orden del proceso, actividades o ideas que se quieren representar.

Para la presente tesis, la investigación de Teledahl (2017) no sólo aporta en los modos que puede presentarse la semiótica de los estudiantes durante la resolución de problemas. En este sentido cabe agregar que son también ideas esenciales, extraídas por la autora de otras investigaciones, que en la forma de comunicación se pueden apreciar tanto los significados propios del estudiante como sus intenciones.

A lo anterior también se agrega que la comunicación matemática escrita de los estudiantes más jóvenes es multimodal e idiosincrásica, para resolver problemas matemáticos particulares. Por tal razón, la escritura no debe ser vista como un reflejo completo ni de comprensión, ni de las capacidades de generalizar o abstraer.

1.3.5. Reasoning about student written work through self-comparison: how pre-service secondary teachers use their own solutions to analyze student work[25]

La investigación de Baldinger (2019) se realiza con una muestra de profesores de secundaria en formación y tiene como objetivo analizar cómo razonan sobre el trabajo escrito de los estudiantes. En el estudio los participantes resuelven dos tareas matemáticas, pensando en voz alta mientras y sin restricciones de tiempo. Luego examinan una muestra del trabajo escrito de los estudiantes sobre la misma tarea.

Baldinger (2019) considera como dimensiones en la práctica de notar el pensamiento de los estudiantes en el trabajo escrito, a las estrategias de razonamiento, afirmaciones descriptivas e inferenciales y el uso de la evidencia. Al respecto, la autora señala que existe poca investigación que reúna estas dimensiones.

Debido a ello, Baldinger (2019) enfoca su estudio en el análisis de las estrategias de los profesores en formación (particularmente la denominada *autocomparación*). Luego las conecta con otras dimensiones de la atención e interpretación del PM, donde se incluyen las afirmaciones descriptivas o inferenciales, el uso de evidencia y las soluciones de los participantes.

Dentro de los resultados de su investigación la autora pudo notar que prevalecen dos tipos de razonamiento: el matemático y de autocomparación. El razonamiento

[25]Baldinger, E. E. (2019), Reasoning about student written work through self-comparison: how pre-service secondary teachers use their own solutions to analyze student work. *Mathematical Thinking and Learning*, *22* (1), 56-78.

matemático se manifiesta cuando el interpretar del pensamiento del estudiante se toma como una tarea matemática separada de la propia solución del participante. Mientras que el participante manifiesta el razonamiento de autocomparación al comparar explícitamente el trabajo del estudiante con su propia solución.

Aunque se utiliza en menor medida para avalar las afirmaciones, Baldinger (2019) encuentra que hay evidencia de razonamiento pedagógico en los participantes. Este tipo de razonamiento se caracteriza por utilizar el conocimiento de qué deberían conocer, por lo general, los estudiantes ante una situación semejante. También se tiene en cuenta un modo colectivo de enseñar un tema o la manera en que se puede secuenciar un plan de estudios para interpretar el pensamiento de los estudiantes.

Durante la investigación de Baldinger (2019), surgió la regularidad de que las afirmaciones descriptivas se asocian al uso del razonamiento matemático y las afirmaciones inferenciales a la autocomparación o el razonamiento pedagógico. También surgieron discrepancias al utilizar la autocomparación cuando la evidencia citada contradecía la afirmación y evidencia-evidencia cuando el participante no había resuelto el problema correctamente por sí mismo.

Entre las conclusiones del estudio de Baldinger (2019) es que, mediante la autocomparación, los participantes pasaron de meramente describir a inferir el PM de los estudiantes. Esto indica que se puede aprovechar de manera productiva para aprender a notar el PM de los estudiantes, pero debe tenerse cuidado de no caer en afirmaciones demasiado amplias respecto a las evidencias o tergiversar el pensamiento de los estudiantes.

En relación con la presente tesis, el trabajo de Baldinger (2019) aporta la fundamentación teórica del método principal a utilizar en la revisión de las respuestas escritas de los estudiantes que participan en las olimpiadas colombianas de matemáticas. En ocasiones, se pueden potenciar tanto la descripción como la inferencia en la producción escrita de los estudiantes, a través de la interpolación de las respuestas tentativas que prevé el profesor por parte del estudiante.

En este sentido no se trata solamente de que el profesor establezca una comparación estática, sino dinámica. Este dinamismo se puede manifestar antes de la revisión, interpolando posibles respuestas o durante la revisión, donde el profesor puede, al notar un curso de pensamiento diferente en las soluciones de los estudiantes, separarse de la comparación y resolver desde esta perspectiva el problema. Es una forma en que la evidencia puede ayudar a la autocomparación.

1.3.6. Exploring Prospective Teachers' Assessment Practices: Noticing and Interpreting Student Understanding in the Assessment of Written Work[26]

Talanquer, Bolger & Tomanek (2015) realizan un estudio exploratorio donde investigan cómo los futuros profesores de secundaria analizan las respuestas escritas de los estudiantes a las pruebas de evaluación formativa. En su trabajo se proponen identificar cuáles evidencias escritas de los estudiantes fueron notadas, las inferencias de la comprensión de los estudiantes a partir de las mismas, así como las conclusiones que se pueden derivar de ello.

[26] Talanquer, V., Bolger, M., & Tomanek, D. (2015),Exploring Prospective Teachers' Assessment Practices: Noticing and Interpreting Student Understanding in the Assessment of Written Work. *Journal of Research in Science Teaching, 52* (5), 1-25.

En relación con los factores esenciales que influyen en la selección de determinadas preguntas de evaluación, Talanquer, Bolger & Tomanek (2015) identifican como tal a la demanda cognitiva percibida, la eficacia de la tarea, las características del estudiante y la capacidad percibida para responder una pregunta. También los autores notaron que los futuros maestros de ciencias centran su atención en la demostración de habilidades más que en la validez epistemológica de las ideas de los estudiantes.

A partir de los resultados de su estudio, Talanquer, Bolger & Tomanek (2015) afirman que los enfoques utilizados por los profesores en formación son: observación descriptiva y percepción inferencial. A la primera pertenecen las descripciones o reformulaciones del trabajo escrito de los estudiantes. Por otra parte, al segundo enfoque pertenecen las hipótesis sobre lo que los estudiantes interpretan y también las afirmaciones sobre el alcance y la calidad de su comprensión.

En su investigación, Talanquer, Bolger & Tomanek (2015) identifican dos dimensiones fundamentales en la evaluación de la comprensión de los estudiantes por parte de los profesores en formación y definen los niveles de sofisticación: novel, emergente y avanzado. Para la presente tesis se considera oportuno tomar las características óptimas presentes en el nivel de sofisticación avanzado, como referencia de los aspectos que no deben soslayarse al evaluar el trabajo escrito de un estudiante.

Sucintamente, a partir del análisis de Talanquer, Bolger & Tomanek (2015) se considera una característica esencial centrar el núcleo de la evaluación en hacer inferencias del pensamiento o la comprensión del estudiante[27]. También se deben analizar las respuestas (correctas o incorrectas) buscando comprender el razonamiento. En este sentido, la consistencia o inconsistencia en las respuestas de los estudiantes puede favorecer la interpretación de su comprensión.

Abundando en lo anterior, también es recomendable concentrarse en los aspectos más productivos del trabajo del estudiante y reconocer los malentendidos relevantes que superan las áreas tratadas en la evaluación. Así también las interpretaciones deben ser científicamente precisas y revelar una adecuada comprensión de conceptos e ideas implicados.

1.3.7. Measure Reasoning Skill of Mathematics Students[28]

En su investigación, Mumu & Tanujaya (2019) tienen como objetivo medir las habilidades de razonamiento de los estudiantes de matemáticas a partir de tareas matemáticas rutinarias y no rutinarias. En las pruebas de campo se involucran estudiantes de nivel secundario superior y universitario. Las habilidades de razonamiento matemático en escrutinio, en dichos estudiantes, se dividen en razonamiento imitativo y razonamiento creativo.

Los autores de este estudio asumen de anteriores investigaciones que el razonamiento es una habilidad del PM que interrelaciona otros procesos tales como dar sentido, conjeturar, convencer, reflexionar y generalizar. Además, comparten el

[27] En este artículo analizado, los autores utilizan indistintamente los términos de *comprensión* y *pensamiento*, con lo cual establecen una equivalencia (implícita) entre las formas de pensar y de entender o, al menos, no se preocupan por distinguirlas.

[28]Mumu, J., & Tanujaya, B. (2019),Measure Reasoning Skill of Mathematics Students. *International Journal of Higher Education, 8* (6), 85-91.

criterio del NCTM (2000) de que razonar es fundamental para comprender las matemáticas.

En cuanto al razonamiento matemático mostrado por los estudiantes, Mumu & Tanujaya (2019) tienen en cuenta dos tipos: el razonamiento imitativo (que se conoce también como razonamiento memorizado y razonamiento algorítmico) y el razonamiento creativo basado en matemáticas. El primero suele ser adecuado en tareas rutinarias y el segundo en las no rutinarias.

En lo referente a la ejecución del instrumento de prueba aplicado en su investigación, Mumu & Tanujaya (2019) la dividen en cuatro pasos: preparación de ítems, validación experta, medición de las habilidades de razonamiento de los estudiantes (pruebas de campo) y análisis de datos. Los ítems son tareas rutinarias de los libros de texto y no rutinarias de olimpiadas de matemáticas.

Respecto al análisis de datos se interpretan las habilidades de razonamiento matemático utilizando las transcripciones del trabajo del estudiante y la entrevista. También se identifican las situaciones de resolución relevantes y la argumentación que las avalan.

En cuanto al trabajo de campo realizado por Mumu & Tanujaya (2019), este arrojó como resultado que existen casos en que se puede llegar a una respuesta correcta pero no acabada en detalles, con extrema dependencia de la memoria y donde se muestra un razonamiento de bajo nivel. Otro caso ocurre cuando la variedad de respuestas muestra la diversidad de las habilidades de razonamiento matemático del estudiante.

Por último, Mumu & Tanujaya (2019) observan un tercer caso donde los estudiantes no pueden responder correctamente la tarea no rutinaria. Según estos autores, los estudiantes indonesios no están acostumbrados a pensar en el aprendizaje de las matemáticas y concluyen que el razonamiento matemático del estudiante se puede medir a partir de tareas rutinarias y no rutinarias. Si el estudiante no puede resolver las segundas, es señal de que su razonamiento no sobrepasa el nivel de imitación.

La coexistencia en la presente tesis de que en el estado del arte el razonamiento es una habilidad del PM y en el marco teórico se asume la concepción de Harel de que el razonamiento matemático se puede notar a través de las formas de pensar más las formas de entender, parece dar lugar a una contradicción. Esta contradicción desaparece cuando se considera al pensamiento y al razonamiento matemático actuando dualmente, en una sinergia que sobrepasa a una relación de contención.

1.3.8. Developing Prospective Teachers' Ability to Diagnose Evidence of Student Thinking: Replicating a Classroom Intervention[29]

Phelps-Gregory & Spitzer (2018) hacen un estudio utilizando una intervención en el aula para enseñar a maestros primarios en formación (MPF) a identificar y evaluar la evidencia de la comprensión del estudiante. Esta capacidad para emitir juicios correctos sobre comprensión se denomina *competencia diagnóstica*. La evidencia tenida en cuenta para interpretar dicha comprensión abarca el habla, la escritura y las acciones no verbales del estudiante en el entorno de la clase.

---

[29]Phelps-Gregory, C. M., & Spitzer, S. M. (2018), Developing Prospective Teachers' Ability to Diagnose Evidence of Student Thinking: Replicating a Classroom Intervention. In T. Leuders, K. Philipp, & J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11, pp. 223-240), Switzerland: Springer International Publishing.

Dentro de los aspectos relevantes en estudios anteriores que tomaron Phelps-Gregory & Spitzer (2018) se encuentra que se mejora notablemente la competencia diagnóstica de los MPF cuando se capacitan explícitamente en las peculiaridades de esta habilidad. Como resultado de ello los MPF utilizan preguntas orientadas conscientemente a provocar y desarrollar el pensamiento de los estudiantes en el aula.

Se considera importante para la presente tesis los siguientes supuestos tenidos en cuenta por Phelps-Gregory & Spitzer (2018) en su investigación:

- Una respuesta con una descripción detallada de sus pasos procesales no es evidencia que se pueda usar para diagnosticar la comprensión conceptual de los estudiantes. Es decir, el conocimiento procedimental visto como el conocimiento de relaciones organizadas en una secuencia, no es considerado por los autores como una evidencia de comprensión conceptual.
- Que una respuesta sea correcta no significa una comprensión completa del objetivo de aprendizaje. No constituye una evidencia suficiente.
- Para poder diagnosticar la comprensión del estudiante, se debe lograr que el trabajo de este se corresponda con una meta de aprendizaje. Esto es que si se le orienta una tarea al estudiante para medir su comprensión en un determinado concepto y este lo responde por otra vía, en esta situación la evidencia no se corresponde con el objetivo inicial y, por supuesto, no lo respalda.

El autor de la presente tesis considera necesario tener en cuenta las anteriores acotaciones para respaldar criterios de si una respuesta escrita puede ser tomada como evidencia de PM. Para contrastar ideas al respecto, Bartell et al. (2013) afirman que la narrativa en lenguaje natural y los diagramas sí se pueden considerar respuestas con características conceptuales.

Conclusiones del capítulo 1

Mediante la revisión de la literatura se ha podido constatar el estado actual y las regularidades principales de las tres líneas temáticas que componen el Estado del Arte de esta tesis. Seguidamente se expondrán las regularidades fundamentales de cada una de ellas:

Línea temática 1: *Investigaciones sobre el proceso de caracterización del PM, con énfasis en la resolución de problemas*.

- El modelo de Polya (1985) se ha replicado en numerosas investigaciones y constituye una base orientadora del PM en la resolución de problemas, pero debe convertirse cada estrategia heurística en un nuevo objetivo de aprendizaje, tal como lo afirma Schoenfeld (1985).
- La enseñanza basada en problemas rutinarios no basta para estimular el PM, según Harel & Sowder (2005), deben escogerse los problemas que (estando al alcance de los estudiantes) constituyen un desafío, originen asombro e intriguen o estimulen el pensamiento a salir de su zona de confort.
- Debe dársele a las competiciones matemáticas cobertura suficiente para que desplieguen todo su potencial en la formación de talentos, en llevar a los estudiantes a su nivel óptimo en matemáticas, en el surgimiento de nuevas

líneas de investigación y en la transformación del modo en que se hacen las matemáticas.

Línea temática 2: *Investigaciones sobre la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval en el contexto de la resolución de problemas*.

- Aun cuando la TRS de Duval ha sido divulgada, en la revisión realizada de la literatura no se encontró una investigación que tratara su posible potencial para interpretar cómo piensan los estudiantes en la resolución de problemas. En esencia, no fueron más allá de un carácter descriptivo del razonamiento explícito en las respuestas.
- En realidad, ninguna de las investigaciones consultadas trata de explicar cómo los registros semióticos y sus operaciones intrínsecas tienen que ver directamente con el estado de ¡Atascado!, señalado por Mason, Burton & Stacey (2010), que tan a menudo se aprecia en la resolución de problemas no rutinarios.

Línea temática 3: *Investigaciones sobre el proceso de caracterización del PM en el contexto de las RS escritas de los estudiantes*.

- La exigencia generalizada de escribir respuestas donde los argumentos estén ordenados con rigor y lógicamente relacionados, a menudo anula la posibilidad de discernir si lo escrito por el estudiante constituye evidencia de pensamiento y no de conocimiento procedimental.

- La autocomparación, con garantía previa del dominio del contenido matemático, es una alternativa viable para interpretar el PM de los estudiantes.
- La evidencia escrita debe tratarse con cuidado pues además de existir la posibilidad de ser idiosincrásica, puede conducir a una sobrevaloración o subvaloración de parte de quien interpreta.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El objetivo de este apartado es aportar una base teórica que permitirá concluir al finalizar la presente tesis en un análisis de lo que puede aportar o no la TRS de Duval a la caracterización del pensamiento matemático que se despliegue en el contexto de la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores de olimpiadas de matemáticas.

2.1. Fundamentos teóricos para la caracterización del PM en la resolución de problemas

En este epígrafe se hace una selección de las teorías que el autor de la presente investigación considera son necesarias y suficientes para aportar el marco conceptual para la elaboración de los instrumentos de investigación, así como para la interpretación de los resultados de su aplicación.

2.1.1. Caracterización del razonamiento matemático a la luz de las consideraciones de Harel

En esta investigación se tiene en cuenta que varios términos involucrados en el enfoque DNR de Harel han sido sometidos a extensas discusiones con otros autores, en este caso con Patrick Thompson. El propio Harel advierte que en Thompson et al. (2014) hay una articulación más refinada de estos términos y es lo que seguidamente se muestra.

Tabla 1. Definiciones de *comprensión*, *significado* y *formas de pensar*

Constructo	**Definición**
[Forma de] Comprender (en el momento)	Estado cognitivo resultante de una asimilación.
Significado (en el momento)	El espacio de inferencias existente en el momento de la *comprensión*
[Forma de] entender (estable)	Estado cognitivo resultante de una asimilación a un esquema
Significado (estable)	El espacio de inferencias que resulta de haber asimilado a un esquema. El esquema es el *significado*, lo que Harel llama *forma de entender*
Forma de pensar	Anticipación habitual de significados específicos en el razonamiento.

Fuente: Cita textual de Harel (2021, p. 710)

Respecto al significado de esquema, se asume en esta tesis el criterio de Thompson et al. (2014) de que es *"[…] una organización de acciones, operaciones, imágenes o esquemas -que pueden tener muchos puntos de entrada que desencadenan la acción- y anticipaciones de resultados de la actividad de la organización."*[30] Aunque esta definición aparenta circularidad en realidad indica que un esquema puede contener otros esquemas.

Por otra parte, estos autores también afirman que un esquema es el significado de la comprensión que la persona construye en el momento y es lo que proporciona la "forma" de la forma de entender. Cuando el estudiante comprende que en un problema se aplica un determinado esquema entonces se dice que "ha asimilado el problema a dicho esquema".

---

[30]Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., &Hatfeld, N. (2014), Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Stefe, & L. L. Hatfeld (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing* (Vol. 4, pp. 1–24), Laramie, WY: University of Wyoming. p. 10.

En relación con el desarrollo de esquemas para todas las principales ideas matemáticas, Thompson et al. (2014) proponen la metáfora de la nube que es en definitiva una forma de pensar en la evolución de estas ideas a través de nubes de aprendizaje. Como bien lo aclaran estos autores, esta metáfora no aporta a una metodología hasta tanto no se haga precisa a través de modelos de aprendizaje de estudiantes individuales y exista alguna forma de perfilar el estado de la nube de un estudiante.

En definitiva, reinterpretando a Thompson et al. (2014) para el contexto de esta investigación, las *formas de entender* son sistemas de significados que el estudiante utiliza para comprender un problema o cualquier otra representación semiótica de las matemáticas. Por otra parte, un esquema es esencialmente una forma de entender en el sentido de Harel.

En cuanto a las *formas de pensar*, resumiendo y adaptando ideas en Thompson et al. (2014), estas son patrones para utilizar significados (esquemas) específicos al razonar sobre ideas particulares que posibilitan una anticipación de estos significados. La explicación de qué es un determinado concepto constituye una evidencia de que se tiene una forma de pensar acerca del mismo, así como también lo es la aplicación rutinaria de un esquema de un concepto matemático.

Teniendo en cuenta a Harel (2021) las formas de pensar afectan las formas de comprender que son objeto de enseñanza y la aplicación repetida de las formas de comprender, consideradas adecuadas en la enseñanza, desarrollan formas deseables de pensar. Ahora bien, la noción de repetición puede conducir a ideas erradas o deficientes.

Para abundar en la naturaleza de la repetición es aconsejable ir a la génesis de estas ideas en los trabajos de Piaget para quien un esquema de acción es todo lo que es común entre varias repeticiones o superposiciones de las mismas acciones, según Thompson et al. (2014). Aquí una acción es *"todo movimiento, todo pensamiento o toda emoción que responde a una necesidad"*[31].

De modo que la repetición de acciones de las cuales emerge el esquema de acciones abarca no sólo el razonamiento matemático sino la experiencia misma y las emociones del estudiante. La implicación de todo ello es que los esquemas en la resolución de problemas, generalizando lo que Thompson et al. (2014) afirman para el caso de la magnitud, se logran y desarrollan en una enseñanza con/sobre la resolución de problemas.

Para mayor claridad es preciso hacer explícitas cuáles son las formas de comprender y de pensar en el contexto de la presente investigación. Cualquier representación semiótica escrita del estudiante expresa su comprensión acerca de algo por tanto es una forma de entender. Esta forma de entender no necesariamente expresaría el grado de comprensión de una idea matemática como norma dictada o enseñada sino el significado personal que se utiliza para comprender un problema.

En la presente investigación, no es posible identificar las formas de pensar idiosincrásicas del estudiante porque esto se basa en el principio del razonamiento repetido con tareas elaboradas para ello, cuestión que está fuera del alcance de este

---

[31]Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfeld, N. (2014), Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Stefe, & L. L. Hatfeld (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing* (Vol. 4, pp. 1–24), Laramie, WY: University of Wyoming. p. 9.

estudio. Por ello se alude sólo a las “formas de pensar estandarizadas” (término utilizado por el autor de la tesis) que son los principios, reglas o estrategias heurísticas para la resolución de problemas, algunas de las cuales se exponen en el epígrafe 2.1.3.

Para el autor de esta tesis, en el control sobre la semiosis en el proceso de resolución de problemas, no sólo influyen las operaciones intrínsecas de un registro semiótico, sino también las formas de pensar. Cuando la semiosis cumple con su función de tratamiento, es evidencia que el control está sujeto a las operaciones intrínsecas de un determinado registro semiótico, mientras que, si sólo cumple una función de expresión, es evidencia de que el control lo tienen las formas de pensar.

Por otra parte, también el autor de esta tesis considera oportuno considerar lo que pudiera denominarse como “forma de pensar potencial” y sería el esquema mostrado en la respuesta escrita del estudiante que constituye un estrategia general para resolver problemas similares al resuelto. El fenómeno de *fijación* descrito por la Gestalt garantiza que se active este esquema ante situaciones similares y sea el que dirija la anticipación de significados.

2.1.2. Concepto, imagen del concepto y formación de conceptos en las matemáticas

El objetivo central de este epígrafe es mostrar los constructos teóricos básicos (necesarios en cierta medida) que sustentan la comprensión conceptual y el funcionamiento cognitivo del PM. La intención subyacente es fijar una referencia que permita detectar si alguna propuesta teórica está cayendo en una simplificación excesiva o indebida y quede evidencia teórica de esta contradicción.

Respecto a una definición de lo que es un concepto, Goldstein (2011) afirma que es una representación mental que se utiliza en la memoria, el razonamiento, el uso y comprensión del lenguaje, etc. y que es esencial para la comprensión. La función de los conceptos más estudiada es la categorización, que es el proceso mediante el cual las cosas se colocan en grupos llamados *categorías*. A esto se le debe agregar la concepción de Dewey (1997) que habla de la naturaleza generalizadora del concepto al ser un significado estandarizado.

Según Vinner (2018) los conceptos matemáticos forman dos categorías: *conceptos primarios* y *conceptos definidos*. Para ilustrar ello este autor utiliza el ejemplo de la geometría euclidiana en la cual *punto*, *recta* y *plano* pueden considerarse como conceptos primarios mientras que *ángulo* y *segmento* constituyen conceptos definidos.

No obstante, la Educación Matemática no tiene diseñado un esquema formal más o menos estricto basado en definiciones, ejemplos y contraejemplos hasta después del nivel de la escuela secundaria. Se coincide plenamente en esta tesis con los argumentos de Vinner (2018) quien no considera oportuno, por cuestión de motivación del estudiante y de respeto a su personalidad e intelecto, formalizar en contextos donde no exista una inclinación favorable hacia las matemáticas.

En Duval (2017) se puede apreciar que el autor hace una equivalencia entre "objeto matemático" y concepto matemático debido, quizás, a que los dos "emergen" como resultado de una generalización. Sin embargo, Duval (1993) advierte sobre la "paradoja cognitiva" que significa que "*[…] el aprendizaje de los objetos matemáticos* *sólo puede ser un aprendizaje conceptual y […] es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos."*[32].

También advierte Duval (2017) que dado que los "objetos matemáticos" sólo son accesibles mediante las RS, es posible confundir objeto con representación. En la presente tesis se considera que esta confusión puede darse efectivamente en los niveles escolares previos al preuniversitario en los cuales el estudiante no tiene la madurez necesaria (punto de vista psicológico) para entender y manejar un enfoque formal de las matemáticas.

En el epígrafe 2.1.2.1. se explica con más detalle que, cuando se manejan definiciones, la paradoja cognitiva de Duval pierde condiciones vitales que posibilitan su surgimiento. Esto es que cuando se da la definición de un concepto matemático, este no emerge de una multiplicidad de RS, sino que quedan decretadas las características propias que le dan identidad.

Otra cuestión que no debe soslayarse es muy bien valorada por Vinner (2018) y es que el estudiante (en tanto personalidad activa que no asume tal cual le llega la información sino que la procesa y adapta a su estructura mental ya existente) desarrolla paralelamente a la formación del concepto dirigida (ya sea por definiciones o ejemplos particulares) una *imagen conceptual* que no es un reflejo exacto de lo que se le pretende enseñar (o se pretende que se aprenda).

---

[32]D'Amore, B., Pinilla, M. F., Lori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), 18* (2), p. 180.

En lo referente a la noción de imagen conceptual, Vinner (2018) afirma que ocurre durante el desarrollo del lenguaje a través de ejemplos que, por una convención social, la persona acepta implícitamente y de modo que conforman una clase. Entonces en dicha clase quedan asociados elementos de diferente índole que pueden ser de tipo verbal, visual, vocal, emocional, etcétera. Al evocarse alguno de estos elementos se tiene acceso a los otros, en concordancia con las consideraciones de Dewey (1997).

2.1.2.1. La formación de conceptos y de significados robustos en matemáticas

Según Vygotski (1991) citado por Radford (2006), el *significado* es propio del signo y Radford (2006) afirma que el signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos. Por su parte, Dewey (1997) afirma que un significado es una idea y esta es todo lo que en un contexto de incertidumbre o duda, posibilita formar un juicio y llegar a una conclusión por la anticipación de una posible solución.

Para Dewey (1997), los conceptos son significados establecidos o estandarizados que se han estabilizado y permanecen idénticos en diferentes contextos, posibilitando la comunicación efectiva y la generalización para ampliar y transferir la comprensión de un contexto a otro. Sucintamente, los conceptos son significados generales.

Por otra parte, este autor afirma que los conceptos no se forman por la abstracción de características comunes de objetos dados de antemano, sino que comienzan con las experiencias y se precisan y generalizan con su uso. Es decir, no se forman con una multitud de objetos dados de antemano, sino que se van refinando en la experiencia, descartando ciertos rasgos y destacando otros con la expectativa de trasladar a cada nueva experiencia los resultados de su experiencia anterior.

De forma similar, Pérez (2016) considera que se puede construir un significado robusto de un concepto dado a partir de la evolución de los significados personales de que dispone el estudiante. Así también afirma que en este sentido aportan los argumentos sólidos aunque informales que tenga el estudiante el cual, en actividades que faciliten su activación, autonomía y operatividad; es capaz de construir sus propias redes conceptuales.

En otras ciencias se presenta la dificultad de que, a falta de una definición rigurosa de un concepto, es complejo determinar si un elemento dado pertenece o no a una categoría del concepto. Sin embargo, en las matemáticas el enfoque basado en la definición es suficiente porque, como afirma Vinner (2018), los conceptos matemáticos están estrictamente determinados por sus definiciones.

Ahora bien, se coincide con el criterio de Vinner (2018) de que la primera tendencia de los estudiantes, debido a que ha sido una práctica constante en el enfoque de la enseñanza de “objetos matemáticos” basada en ejemplos, es apelar a la imagen del concepto y no a la definición. Es por ello que se debe diseñar la experiencia de aprendizaje, que pudiera ser la resolución problemas no rutinarios y/o retadores, de forma tal que surjan conflictos en el estudiante al confiar demasiado en la intuición.

En cuanto a las definiciones, debido a que constituyen la base para establecer jerarquías de categorías que aportan a la comprensión, estas deben respetar un orden de precedencia caracterizado por tratar primero conceptos primarios y luego establecer una construcción paulatina de definiciones donde cada nueva definición se haga sobre la base de las definiciones de conceptos inmediatos anteriores (que son necesarios para una cabal comprensión).

Un ejemplo, con previo tratamiento de conceptos primarios euclidianos y las nociones de perpendicularidad entre rectas y segmentos, etc., que puede ilustrar lo anterior es definir la *altura relativa a un lado en un triángulo.* Valórense estas dos posibilidades:

- Es el segmento perpendicular con uno de sus extremos en el lado y el otro en el vértice opuesto a dicho lado.
- Luego de haberse definido la distancia de un punto a una recta y qué significa vértice opuesto a un lado, es la distancia entre el vértice opuesto al lado y la recta que contiene a ese lado.

Aquí puede inferirse que las consecuencias de la primera definición es que no cubre el caso particular de los triángulos obtusángulos que tienen dos alturas que caen fuera del triángulo y necesitan una prolongación de los lados del ángulo obtuso. No obstante, la segunda definición puede conducir a que los estudiantes puedan reflexionar ellos mismos cuales son las posibles ocurrencias de este “objeto matemático”. Es decir, en la segunda alternativa los estudiantes pueden ser capaces de construir sus propios significados y de criticar los que ya tenía si los hubiese.

El autor de esta tesis sugiere que se construya un problema con intencionalidad retadora donde el estudiante sea el primero en intentar la construcción de las posibles variaciones tipo en un determinado registro de las representaciones semióticas del “objeto matemático”. Así se sigue una línea de pensamiento deductiva en lugar de una inductiva pues la generalización ya está dada en la definición y sólo se deben buscar los ejemplos tipos que cumplan con la misma.

No obstante, el enfoque de formación de conceptos mediante su definición no está disponible para la educación matemática hasta alrededor de los 12 años, dentro de la enseñanza secundaria, donde comienza a formalizarse el conocimiento matemático que se imparte a los estudiantes. Es en el lapso entre la educación primaria y secundaria donde pueden ocurrir generalizaciones de poco poder en los estudiantes cuando no se les presenta todas las RS particulares típicas de una noción matemática.

Es necesario resaltar que las consideraciones de Dewey (1997) sobre la formación de significados permiten reconocer que la definición de “objeto matemático” como el emergente operatorio o lógico discursivo de una multitud de RS puede resultar en una simplificación excesiva de este proceso. La emergencia no ocurre en un acto sino en un proceso donde los significados no se forman en una sola experiencia sino que se refinan en la medida que se utilicen para anticipar significados en nuevas experiencias.

Finalmente, como consecuencia de todo lo anterior el autor de esta tesis considera que para la formación de significados robustos no basta con un enfoque basado en la definición formal de conceptos matemáticos y es preciso también involucrar otros elementos. Estos elementos son la participación del estudiante en experiencias de aprendizaje que faciliten tanto su desempeño autónomo como el uso de los significados que va refinando y que le permiten anticiparse a lo nuevo.

Sin embargo, formalizar el conocimiento de las matemáticas abre una dimensión para que el estudiante critique su propio conocimiento y consolide el lenguaje matemático que facilita una comunicación efectiva con el resto de la comunidad. De manera que la comprensión como aprehensión de significados según Dewey (1997), no se debe supeditar solamente a una experiencia semiótica donde el estudiante sólo interactúa con los posibles tratamientos y conversiones entre RS.

2.1.3 Las formas de pensar en el acto de resolver problemas

El autor de esta tesis considera que la función de anticipación de significados de la formas de pensar las involucra directamente en la realización de inferencias y son las que pueden explicar de alguna manera la lógica seguida en el argumento construido por el estudiante durante la resolución de un problema. Esto es, la transformación de una RS (ya sea por tratamiento o por conversión) en otra, debe ser explicada por una forma de pensar que avala dicho paso.

Para aclarar lo anterior, haciendo *networking* entre la teoría del DNR de Harel y la TRS de Duval, una representación semiótica de cualquier índole sólo puede alcanzar la categoría de forma de entender pero no de forma de pensar pues sólo es la representación parcial en un determinado registro semiótico del contenido conceptual de un "objeto matemático". Ahora bien, la causa de que se realice un determinado tratamiento (o conversión) y no otro, es atribuible a una forma de pensar.

Como consecuencia, en esta tesis se interpretan los modelos del PM tales como el de Polya y otros modelos consecuentes con el mismo, así como cualquier otro aporte que apoye el proceso de resolución de problemas ya tenga la forma de principios, estrategias, reglas o procedimientos heurísticos, son esencialmente formas de pensar emergentes de la práctica de resolver problemas y de la investigación en Educación Matemática. Sin ánimo de abarcar la totalidad de estas formas de pensar en la resolución de problemas, seguidamente se explican algunas sucintamente.

Teniendo en cuenta a Lovett (2002), citado por Goldstein (2011), un problema ocurre cuando hay un obstáculo entre un estado presente y una meta donde no es obvio cómo superarlo. De manera que un problema es psicológicamente difícil y la solución no se encuentra de forma inmediata. También puede considerarse bien definido el que conlleva a una única respuesta correcta, mientras que el mal definido puede tener más de una.

A partir de un análisis de Goldstein (2011) se pudo constatar la existencia de dos enfoques importantes de ver la resolución de problemas: el de la Gestalt y el de procesamiento de la información. El primer enfoque trata de cómo el estudiante representa un problema en su mente y cómo resolver un problema implica (en ocasiones) una reestructuración de la representación del problema.

Un obstáculo para la resolución de problemas por *insight* (visión o aparición repentina de la solución) que investigó la escuela de la Gestalt es la *fijación* (tendencia a centrarse en una característica específica del problema). La fijación, según Goldstein (2011), ocurre asociada a un conjunto mental que es una noción preconcebida sobre cómo abordar un problema, que está determinada por la experiencia de una persona o lo que ha funcionado en el pasado.

Sin embargo, según Cañón & García (2018), el insight abarca también aspectos de la creatividad. En este sentido el estudiante puede preguntarse "¿qué tal si […]?" se hace esta transformación en el problema o si se hace esto de esta otra forma, etcétera. Además, puede intentar concatenar lo que no se había concatenado antes, transformar o refinar cosas conocidas, así cuando nada conocido funcione puede distanciarse deliberadamente de ello y proponer algo nuevo para él.

La idea de que en la resolución de problemas influye la representación en la mente sirve como base para el enfoque de procesamiento de la información. Al respecto, Goldstein (2011) expone el enfoque de Newell y Simon, quienes describen la resolución de problemas, no como un cambio de la representación inicial a una nueva estructura sino como una búsqueda (a través de operadores y submetas) que ocurre entre el planteamiento del problema y su solución.

Otro enfoque expuesto por Goldstein (2011) es el analógico que se facilita mediante el proceso de codificación analógica. Este es un proceso que ofrece mejores frutos si es instruido de manera explícita y consiste en comparar dos problemas que ilustran un principio para descubrir la estructura común subyacente, de manera que la codificación analógica ayuda a los estudiantes a descubrir características estructurales similares y facilita la transferencia de estrategias de solución.

Moya & Georgieva (2014) plantean varios métodos para estudiar la solución de problemas:

- *Solución directa*. Cuando se aplica el conocimiento previo de otros problemas resueltos.
- *Heurística*. Aquí se utilizan tanto la experiencia propia como la de otros para producir una hipótesis sobre la estrategia para resolver un problema.

- *Analogía*. Es un método que incluye la representación del problema actual y la búsqueda de un problema fuente; luego se comparan estas representaciones y se adapta la solución del problema fuente al problema actual. En este método, según Ballester et al. (2000) se utilizan semejanzas de contenido y forma.
- *Hill Climbing*. Es un procedimiento paso a paso donde se eligen los medios que se acercan más a la meta.
- *Deducción algorítmica*. Cuando se aplica el conocimiento de una solución bien definida.
- *Búsqueda exhaustiva*. Es un procedimiento sistemático que tiene en cuenta todas las posibilidades o casos que genera un problema.
- *Divide y vencerás*. Se divide el problema en subproblemas (del mismo tipo) más fáciles de resolver. Este método es de naturaleza recursiva.
- *Análisis de medios-fines*. Se intenta reducir progresivamente la distancia entre el estado actual del problema y su estado final. Este es el enfoque antes mencionado de Newell y Simon, diferenciándose del método *Divide y vencerás* en que no es recursivo y los subproblemas no necesariamente son del mismo tipo.
- *Análisis y síntesis*. Se buscan soluciones particulares a partir de reducir el problema a una categoría conocida.

Como complemento a estos métodos figuran algunas estrategias básicas, técnicas elementales o principios presentes en la resolución de problemas, algunas de los cuales ya se explicaron en los métodos antes mencionados.

- *El principio de los extremos*. Según Haas (2000) citado por Reyes-Santander (2014), aquí se utiliza un caso extremo (considerar el mínimo o el máximo), también se buscan los casos especiales o alguna ubicación especial, etcétera.
- *El principio de invariancia*. Identificar variables, propiedades o relaciones que se repiten o forman un patrón (Reyes-Santander, 2014). Esta autora define además el *principio de simetría* pero algunos autores lo incluyen en el principio de invariancia porque la situación permanece igual a pesar de cambios tales como rotaciones, permutaciones y reflexiones.
- *El principio de los casilleros de Dirichlet*. Si n objetos se distribuyen en m casillas y $n > m$ entonces hay al menos una casilla que contiene al menos 2 objetos (Podestá y Tirao, 2017).
- *Trabajo hacia atrás*. Se supone que el problema está resuelto y se analiza qué sucede antes (Reyes-Santander, 2014).
- *Reestructuración*. Básicamente, una restructuración es un cambio en la representación inicial del problema. Según Reyes-Santander (2014) esto se hace por motivos de evitar trabajo laborioso o para mirar el problema desde otra perspectiva, entre otras dificultades.

- *Generalización*. Se hacen hipótesis referidas a un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones a partir del análisis de casos especiales o particulares (Ballester et al., 2000).
- *Inducción*. Se supone la existencia de una relación general a partir del análisis de una serie de resultados particulares (Ballester et al., 2000).
- *Modelación*. Se busca un modelo o interpretación en otro dominio para aplicar las relaciones del nuevo dominio a la resolución del problema transformado y luego se realiza la transformación inversa del modelo para llegar a la solución del problema inicial (Ballester et al., 2000).

Es preciso agregar que para notar las formas de pensar propias de los estudiantes y no las formas de pensar estandarizadas (fruto del consenso de la comunidad de la Educación Matemática) se requiere observar las formas de entender en reiteradas ocasiones. Aquí resulta muy importante valorar el criterio de Peirce (1895, Artículo 2) quien afirma que la *argumentación* es la expresión de un razonamiento y esta puede ser mental o expresada (explícita).

Por tanto, se considera en esta tesis que junto a las formas de pensar estandarizadas o consensuadas en la resolución de problemas, se debe valorar al argumento (en su totalidad o en un todo orgánico) del estudiante como una forma de pensar. Es muy útil esta acotación pues permite abrir un espacio para inspeccionar las formas de pensar idiosincrásicas, fruto de la experiencia personal y de la comprensión y el PM propios.

2.1.4. Caracterización del pensamiento matemático según Radford

Según Radford (2006) "*[…] lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada, sino sobre todo su modo de ser en tanto praxis reflexiva"*[33] *.* Se puede afirmar entonces que el papel de la semiosis es mediar en los procesos de pensamiento y que este papel se diferencia de la identidad del PM como praxis reflexiva.

En cuanto a la mediación semiótica, Radford (2006) afirma que se refiere al papel (en el sentido de Vygotsky) que juegan los artefactos culturales (particularmente los signos) en la realización de la práctica social. Estos artefactos mediatizan y materializan el pensamiento y son partes constitutivas de él. Sin embargo, todo esto es posible gracias a la capacidad semiótica del pensamiento que, según Goldin & Kaput (1996) citados por Moreno-Armella & Sriraman (2009), se manifiesta en dos aspectos fundamentales.

El primero de estos aspectos es la utilización de notaciones formales por parte del razonamiento matemático abstracto que interactúan significativamente con otros tipos de representación cognitiva. El segundo sería la manipulación de símbolos fuera de cualquier contexto significativo o contextos representacionales interpretativos.

En lo referente a la naturaleza del PM como praxis reflexiva, Radford (2006) afirma que es una reflexión o movimiento dialéctico entre una realidad histórico-cultural y la persona que la modifica según sus propias interpretaciones y sentidos. Implica una

---

[33] Radford, L. (2006), Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 1* (Extraordinario 1), p. 15.

compleja coordinación entre la percepción y las acciones semióticamente mediatizadas.

2.1.5. La mediación semiótica del pensamiento matemático según Duval

Según Piaget (1968), citado por Duval (2004), existen tres funciones que cumplen las representaciones semióticas: de expresión, de tratamiento y de objetivación. La primera función se refiere a la relación existente entre algo presente (forma, trazo, gráfico, etcétera) y la evocación de algo ausente o mental. Esta función de expresión desestima la posibilidad de realizar tratamientos en la representación semiótica, que constituyen nuevos conocimientos.

En cuanto a la función de tratamiento, Duval (2004) afirma que contiene a la función de expresión pero agrega la posibilidad de que se puedan efectuar acciones y tratamientos sobre el representante.

Según Duval (1995) citado por D'Amore et al. (2015), la objetivación es la toma de conciencia sobre un “objeto matemático” del cual no se era consciente antes de producir una representación. En este sentido, Duval (2011) citado por D'Amore et al. (2015), entiende como “objeto matemático” al invariante operatorio o lógico-discursivo que emerge de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles.

En cuanto a la necesidad de tratar una multiplicidad de representaciones de un “objeto matemático”, según Duval (2004), esta radica en el hecho de que toda representación es cognitivamente parcial respecto a lo que representa. A ello se agrega también que las RS en diferentes registros no representan los mismos elementos significativos o informacionales del mismo contenido conceptual representado.

Finalmente, se considera que la mediación semiótica está caracterizada por las funciones antes explicadas que cumplen las representaciones semióticas y que el PM está estrechamente ligado a ellas.

2.1.6. La praxis reflexiva del pensamiento matemático según Dewey

Para Dewey (1997) el pensar es innato, no se puede enseñar ni aprender a pensar si no existe la capacidad para hacerlo. No obstante, si se tiene en cuenta el pensamiento dirigido hacia un objetivo (resolver problemas, tomar decisiones, etcétera) puede educarse al estudiante en cómo hacerlo eficazmente y cómo adquirir el hábito general de reflexión.

En cuanto a qué es el pensamiento reflexivo, Dewey (1997) considera que es *"[…] el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que tiende."*[34] Es evidente la analogía con el desempeño del científico, lo cual es una limitante de lo descriptivo en su enfoque y refuerza su carácter prescriptivo.

Así también este autor afirma que el orden es un factor que distingue al pensamiento reflexivo respecto a la concepción del pensamiento como flujo continuo y consciente de ideas, pero autónomo, errático y sin propósito aparente. Es así como el pensamiento reflexivo introduce un orden secuencial en este flujo de ideas siguiendo relaciones de consecuencia que las conectan entre sí. Por tanto, resulta evidente la

[34] Dewey, J. (1997), *How We Think.* Courier Corporation. p. 18.

casi total equivalencia entre pensamiento reflexivo y razonamiento, desde el punto de vista de Dewey (1997).

Según Dewey (1997) el pensamiento reflexivo se puede caracterizar por medio de ciertas fases que, aunque se enumeran, no quiere decir que la actividad reflexiva del pensamiento siga ese orden secuencial estricto. Estas fases son un medio para el control intelectual de la actividad reflexiva del pensamiento y constituyen una prescripción de este autor para el tránsito de un pensamiento espontáneo basado en creencias a un pensamiento científico basado en evidencias y una crítica fuerte.

Fases del pensamiento reflexivo

1. **Aparición de sugerencias.**

Una sugerencia, según Dewey (1997), es básicamente una idea en un sentido primitivo. Durante su experiencia el estudiante tiene percepciones estrechamente relacionadas y para ilustrar ello el autor hace un metáfora con la contemplación de un pájaro por un niño. Aun cuando el niño se centre en contemplar el pájaro, no puede evitar que estas percepciones queden ligadas al sitio en que está el pájaro, si vuela, picotea, canta, etcétera.

De esta forma, Dewey (1997) afirma que la experiencia relacionada con el pájaro es completa con gran cantidad de cualidades relacionadas y por esta razón la próxima vez que el niño vea un pájaro, esto le evocará algo más que no esté presente. Esencialmente esto enriquece las conexiones entre percepciones pero desde una perspectiva no consciente e irracional. Así el carácter semiótico de una determinada representación puede tener su raíz también en la experiencia no consciente.

Debido a lo anterior, Dewey (1997) afirma que la mente en blanco es un mito. Siempre ante “algo” hay alguna idea y tener ideas no es tanto algo que el individuo tenga que hacer sino que es algo que le sucede, es decir, es una capacidad que tiene todo individuo. Sin embargo, puede surgir la dificultad de una multitud de sugerencias que compiten por la atención entre sí. De lo que se trata es de tomar una idea y llevarla hasta sus consecuencias finales.

Respecto a lo anterior, aunque la suposición anterior (por cautela) no debe generalizarse, en el contexto del proceso de enseñanza aprendizaje para competiciones matemáticas sí puede asegurarse. Esto es debido a que:

- Ocurre un proceso de conceptualización (el cual se asume como estandarización de significados entre individuos de una comunidad, en concordancia con Dewey, 1997) durante los entrenamientos.
- La preparación para competiciones matemáticas es un proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y el examen de la competición es un momento evaluativo del mismo. De manera que la norma didáctica de tener en cuenta las concepciones del estudiante para elaborar los problemas a los que se va a enfrentar, se cumple en este contexto al igual que en los otros procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Cabe señalar que en la aparición de las sugerencias el pensamiento reflexivo se mueve entre las RM y las RS buscando la comprensión del problema. Todavía aquí existe una determinada holgura para utilizar formas de representación idiosincrásicas (profundamente personales) en la búsqueda de una sugerencia.

La siguiente etapa entraña posibles desafíos en el orden de hacer explícito lo implícito.

2. **Intelectualización de la dificultad.**

En esta etapa Dewey (1997) no es muy específico, pero sí hay algunos puntos que ilustran el tipo de acciones que puede pertenecer a la misma. Por ejemplo, según Gabucio et al. (2005), entre estas acciones pueden estar: tratar de definir la situación o la sugerencia, volver a observar el objeto de análisis y ver otros aspectos desde otra perspectiva, etcétera.

No obstante, es inevitable llegar a la conclusión de que intelectualizar una dificultad implica de alguna forma hacerla explícita y consciente mediante los “artefactos” devenidos de la cultura, en específico, activar la capacidad semiótica del pensamiento y que la mediación semiótica cumpla su función de expresión. Ahora bien, la habilidad de expresar ideas en un sistema semiótico (o en varios combinados) se alcanza progresivamente como bien lo explica Karmiloff-Smith (1994) citado por Gabucio et al. (2005).

A través de las consideraciones de esta autora desde la perspectiva de su teoría de la redescripción representacional, se puede afirmar que hacer consciente lo inconsciente (o hacer racional lo irracional, según Reyes-Santander, 2014) es similar al proceso de convertir la información implícita en conocimiento explícito. Primero deben ocurrir procesos previos de redescripción representacional para que sea posible la construcción y exploración consciente de analogías, experimentos de pensamiento y reales.

En conclusión, una consecuencia directa de valorar la teoría de la redescripción representacional de Karmiloff-Smith y contrastarla con la TRS de Duval es que el énfasis de esta última en la instrucción previa en múltiples representaciones de un mismo “objeto matemático”, está avalado por la primera en tanto empodera al estudiante para expresar y poner a prueba sus ideas matemáticas.

3. **Elaboración de hipótesis.**

Dewey (1997) afirma que, aunque no pueda controlarse la aparición de sugerencias, sí puede controlarse lo que se hace con ellas en el proceso de intelectualización, el cual fija un contexto de análisis. Aunque una idea y una hipótesis son básicamente lo mismo, funcionalmente se diferencian. Una hipótesis es una suposición definida de la que se esperan consecuencias y tiene un determinado valor de verdad.

Sin embargo, esta cuestión es más compleja de lo que aparenta pues existe distinciones importantes entre conocimiento espontáneo y científico; las creencias y el conocimiento, la toma de decisiones del lego y del científico, etcétera. Afortunadamente el contexto de resolución de problemas matemáticos admite la afirmación de que una idea es básicamente una hipótesis, siempre y cuando el proceso de intelectualización de la dificultad haya tenido éxito.

4. **Razonamiento.**

Según Kurtz et al. (1999), citado por Goldstein (2011), el razonamiento está constituido por los procesos cognitivos mediante los cuales se comienza con información y se llega a conclusiones que van más allá de la misma. No obstante, se asume en esta tesis el criterio de Gabucio et al. (2005) quienes afirman que es la capacidad de relacionar ideas entre sí y extraer consecuencias de esa relación.

La psicología cognitiva investiga fundamentalmente dos tipos de razonamiento: el inductivo y el deductivo. Un razonamiento es inductivo, según Gabucio et al. (2005), debido a que a partir de la aparición de una idea se sugiere (induce, infiere) otra idea que no es evidente. Para explicar esto se asume en esta investigación dos de los tres tipos de inducciones generales propuestos por Johnson-Laird (1993), citado por Moya & Georgieva (2014): la *abducción* y la inducción *explicativa*.

En la abducción (*inducción específica*), según Moya & Georgieva (2014), se aplican "teorías generales" adquiridas producto de la experiencia o de conocimientos asimilados, a casos concretos que generan una dificultad o una interrogante. La inducción general explicativa se caracteriza por que inicialmente se establecen ciertas regularidades y se intenta dar una explicación coherente bajo la perspectiva de una teoría explicativa.

Por otra parte, en esta investigación se asume que el razonamiento es deductivo si permite derivar conclusiones a partir de premisas (Gabucio et al., 2005). Existen tres tareas del razonamiento deductivo ampliamente investigadas: inferencia transitiva, silogismos y razonamiento proposicional.

En cuanto a la inferencia transitiva, denominada también *silogismo lineal* o *serie de tres términos,* ella incluye una relación *R* de transitividad entre los términos que aparecen en las premisas (*a*, *b* y *c*) donde en la conclusión se omite el término *b* del medio y se mantienen los términos de los extremos *a* y *c* (Gabucio et al., 2005).

En lo referente al silogismo, según estos autores, en esencia es una serie de tres términos: *a*, *b* y *c*, en la que hay que conectar *a* con *c* a través de *b*. La psicología ha investigado la teoría de los silogismos a través de tres vertientes fundamentales sustentadas en: heurísticas, reglas formales de inferencia, y en modelo o conjunto de diagramas teóricos (diagramas de Venn).

Por otra parte, según Gabucio et al. (2005), en el razonamiento proposicional (desde la lógica) sólo interesa la forma de los razonamientos de manera que el contenido puede variar indefinidamente. Por tanto, es el razonamiento donde las inferencias deductivas se hacen a partir de las relaciones entre proposiciones tomadas como un todo, es decir, sin analizar su significado interno (el formalismo en matemáticas).

5. Comprobación de hipótesis

Según Gabucio et al. (2005), la comprobación de hipótesis tiene una dimensión normativa. La norma viene del proceder científico donde una hipótesis no puede considerarse verdadera sino se buscan casos que la respalden. Sin embargo, un sólo caso contrario a la hipótesis es suficiente para falsar la hipótesis.

Una vez más en la tesis se hace referencia a que el pensamiento contiene al razonamiento, siendo esta referencia esta vez por parte de Dewey (1997) y, como ya se ha explicado antes, en el marco teórico se asume el criterio de Harel (2021) de que el razonamiento se estructura en formas de pensar y formas de entender. Sin embargo, las consideraciones de Dewey (1997) se utilizan aquí para una caracterización del PM en tanto praxis reflexiva.

2.1.7. Precisiones de Schoenfeld sobre heurística y resolución de problemas

En Díaz & Díaz (2018) se hace referencia a un modelo de cuatro pasos que propone Schoenfeld (1985) que no presenta diferencias sustanciales en sus etapas con el de Polya (1985). Sin embargo, en el libro que se comenta en este epígrafe ya comienzan los indicios de una crítica que el autor hace a un exceso de expectativas en las estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

En este sentido, Schoenfeld (1985) sitúa estas estrategias como parte del conocimiento y comportamiento necesarios para el desempeño en la resolución de problemas matemáticos, lo que se muestra seguidamente:

Recursos. Conocimientos matemáticos previos que pueden aplicarse en la resolución y que pueden ser: intuiciones y conocimientos informales sobre el dominio, hechos, procedimientos algorítmicos y no algorítmicos "rutinarios", comprensión (conocimiento proposicional) sobre las reglas acordadas para trabajar en el dominio, entre otros.

Heurísticas. Estrategias y técnicas (con carácter general) para resolver de manera efectiva problemas desconocidos o no estándar que pueden ser: dibujar figuras, introducir notación adecuada, tener en cuenta problemas relacionados, reformular problemas, trabajo al revés, procedimientos de prueba y verificación, entre otros.

Control. Decisiones globales sobre la selección e implementación de recursos y estrategias.

Planificación. Seguimiento y evaluación, toma de decisiones, actos metacognitivos conscientes, entre otros.

Para Schoenfeld (1985) cada estrategia heurística alude a todo un complejo de subestrategias heurísticas que no son evidentes y deben tratarse de manera explícita como se hace con un nuevo conocimiento. Por otra parte, aunque son guías para el pensamiento, su implementación exitosa depende en gran medida de una base sólida de recursos específicos del dominio.

Haciendo *networking* de las consideraciones de Schoenfeld (1985) con las de Harel (2021) se llega a la conclusión de que las heurísticas pueden verse como formas de pensar que no son innatas o intuitivas sino que deben constituir objeto de aprendizaje en sí mismas.

2.1.8. Definiciones de la TRS de Duval que sustentan su teoría sobre el PM.

Este apartado tiene el objetivo de clarificar los términos y categorías de la TRS de Duval que tienen que ver con su visión acerca del PM y la actividad matemática en general. De esta manera se aporta a la comprensión de los alcances e implicaciones de su teoría para el caso de la resolución de auténticos problemas desafiantes. Este epígrafe recoge sucintamente los elementos de teoría categorial que ostenta esta aproximación semiótica a la educación matemática.

2.1.8.1. Representaciones mentales

Es el conjunto de imágenes y de concepciones que tiene el estudiante sobre un objeto, una situación y de aquello que les está asociado (Duval, 2004). Según Reyes-Santander (2014), una representación mental es un conjunto de ideas representadas en la mente donde se privilegian alternativamente el aspecto intelectual (consciente) y el aspecto intuitivo (inconsciente).

La creación de RM, según Reyes-Santander (2014) permite desarrollar la inventiva, poner en juego el talento y la creatividad en el proceso de refinamiento de una idea. Así también contribuye a potenciar el pensamiento analítico, lógico y espacial, la visualización, la intuición, la creación de imágenes y la resolución de problemas. Las RM no se atienen a reglas y ayudan en la fluidez del pensamiento.

2.1.8.2. Representaciones semióticas

Las RS son aquellas producciones derivadas de la mente constituidas por signos. Las RS pueden estar enunciadas en lenguaje natural, en fórmulas algebraicas, en forma gráfica, a través de figuras geométricas o pautas de música. Constituyen el medio para expresar o exteriorizar las RM, para hacerlas visibles y accesibles a los otros (Duval, 2004).

Según Duval (2017), las unidades de significado en el lenguaje natural son las oraciones (no las palabras), las ecuaciones (no números y letras) en el lenguaje matemático, las unidades figurales (no los puntos o líneas rectas) en la configuración de visualización geométrica. También afirma que lo que importa con las RS es su potencial intrínseco para ser transformadas en otras RS nuevas y equivalentes.

Respecto a la necesidad de las RS en el PM, Duval (2017) afirma que permiten enfrentar dos problemas de diferente índole: primero, posibilitan el único acceso posible (no perceptivo) a los objetos matemáticos y la transformación de las RS en otras nuevas, con la misma notación. El segundo problema se refiere a la naturaleza del trabajo matemático y a la forma en que funciona el PM.

2.1.8.3. Registros semióticos

Para Duval (2017) los registros semióticos son sistemas semióticos en tanto permiten el acceso y la exploración de objetos no perceptibles y abren un campo de operaciones específicas que permiten transformar las representaciones producidas en nuevas representaciones. Sin embargo, se caracterizan como sistemas semióticos que proporcionan los medios para crear nuevos conocimientos. En el Anexo 1 se pueden apreciar los registros semióticos considerados por Duval (2017).

Así también un registro semiótico para Duval (2017) es un sistema semiótico que no funciona ni como código ni como sistema formal, no se reduce a un inventario de elementos primitivos y reglas para combinarlos en nuevas unidades de significado (como un sistema formal). Las transformaciones de RS implican contenidos complejos de varias unidades de significado.

Según este autor, los registros semióticos pueden ser multifuncionales o monofuncionales (específicos para las matemáticas). Los registros semióticos multifuncionales cumplen fuera de las matemáticas las funciones de comunicación y objetivación (función de tratamiento, en ocasiones). En el Anexo 1 se muestra una clasificación de los tipos de registros semióticos.

El PM, según Duval (2017), requiere siempre de la movilización de al menos dos registros semióticos, aun cuando sólo uno sea explícito mientras que el otro es implícito y se necesita para comprender y ejecutar el registro explícito. Así la comprensión en matemáticas está en el nivel de coordinación de al menos dos registros.

2.1.8.4. Operaciones de *tratamiento* en un registro semiótico y *conversión* entre registros semióticos

Teniendo en cuenta a Duval (2017), un tratamiento es un proceso que genera una nueva representación en el mismo registro mediante una operación específica de sustitución. En cambio, la conversión es una transformación que hace pasar de un registro semiótico a otro.

Según este mismo autor, no es suficiente el concepto “sistema semiótico” para explicar las transformaciones semióticas *tratamiento* y *conversión* porque implican discriminar los niveles de organización y las unidades de significado. Para discriminar (y no confundir objeto con representación) hacen falta al menos dos sistemas semióticos y, de un mismo sistema semiótico no es posible realizar operaciones cognitivas trans-semióticas, evidenciadas en la conversión de registros.

Para Duval (2017) la conversión de representaciones es el proceso cognitivo fundamental requerido explícitamente para elegir el registro en el que las representaciones de hipótesis pueden explorarse o tratarse matemáticamente. Por otra parte, mediante los tratamientos cada registro permite realizar operaciones de procesamiento en las representaciones que no son posibles en otro registro.

Existen dos fenómenos cognitivos denominados por Duval (2017) como de *congruencia* y *no congruencia* entre los contenidos respectivos de la representación inicial y la de llegada que facilitan o inhiben la conversión. Debido a que no hay isomorfismo entre las representaciones de un objeto matemático en un registro y sus posibles representaciones en otros registros, la conversión es una operación cognitivamente no reversible.

Para ilustrar lo anterior, se puede hacer referencia al ejemplo mostrado en Duval (2004): convertir al registro algebraico la expresión en registro lenguaje natural: *el conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa*. Aquí se puede establecer una correspondencia uno-a-uno con $y > x$. Sin embargo, no sucede así con la expresión *el conjunto de puntos cuya ordenada y abscisa tengan el mismo signo* porque en álgebra no existe una unidad significante para el término "el mismo signo".

Como consecuencia se utiliza la paráfrasis "> 0" que lo mismo significa "positivo" que "con el mismo signo". Por tanto la conversión inversa no permite encontrar la expresión inicial lo cual significa que no existe una correspondencia uno-a-uno entre unidades significantes con lo cual se produce un *fenómeno de no congruencia*. Aquí la didáctica sugerida por Duval en la TRS es tratar de manera explícita estas posibles conversiones mediante tareas de comprensión.

2.1.8.5. Pensamiento matemático (*noesis*) y *semiosis*

Según Duval (2017), noesis es el acto de pensar. El proceso de pensamiento es la movilización de un sistema semiótico para producir representaciones referentes a los objetos matemáticos y transformar su contenido para desarrollar el conocimiento. En cambio, semiosis es la activación sinérgica de al menos dos registros en la producción y transformación de RS.

También argumenta este autor que el poder creativo del PM se deriva de la variedad de registros utilizados.

Con estas definiciones, Duval (2004) pretende sentar las bases para que en su aproximación semiótica a la educación matemática tanto la noesis como la semiosis sólo tengan que ver con la transformación de RS. Duval (2004) rechaza que semiosis sea la aprehensión o producción de una representación semiótica y que la noesis se vincule a los actos cognitivos tales como la aprehensión de conceptos, la discriminación de diferencias o la comprensión de una inferencia.

Al respecto, Duval (2004) afirma que la noesis no es independiente de la semiosis y ni siquiera la comanda. Esta toma de posición de este autor manifiesta un claro desbalance de una adecuada interacción entre el PM como proceso y como resultado. Esta inclinación es para la parte semiótica y entra en contradicción con respecto a Harel (2021) quien afirma que las formas de pensar rigen las formas de entender.

2.1.8.6. Comprensión matemática

La comprensión en matemáticas, según Duval (2017) es un proceso cognitivo dependiente de la semiosis que primero consiste en reconocer el objeto matemático representado y las posibles transformaciones de sus RS. Así para comprender los "conceptos matemáticos", a diferencia de la comprensión de conceptos en otras disciplinas, se necesita la coordinación sinérgica de al menos dos registros de representación.

Esta coordinación sinérgica, según Duval (2020) presupone la conciencia de la operación de correspondencia cognitiva uno a uno entre las unidades significativas relevantes de dos registros al menos. Duval (2017) afirma que los registros permiten identificar todas las variables sobre los procesos cognitivos que controlan la comprensión matemática y la conversión de las representaciones es el primer umbral de esta.

Sin embargo, Duval (2004) define lo que considera como *comprensión integrativa de una representación* y que se manifiesta cuando el estudiante puede efectuar una coordinación entre dos registros. Por otra parte, de la *comprensión conceptual* este autor afirma que está ligada al descubrimiento de invariantes entre representaciones semióticas heterogéneas. Se puede inferir que supedita la comprensión a la identificación o percepción de “objetos matemáticos”.

Por otra parte, Dewey (1997) afirma que la relación medio-consecuencia es el corazón de toda comprensión. Según este autor algo adquiere significado cuando se le usa como medio para producir una consecuencia (o impedirla) o cuando se establece como consecuencia para la cual hay que descubrir el medio. Las RS pueden ser medios para resolver problemas pero también la resolución de problemas tiene como consecuencia alguna representación semiótica.

A título de conclusiones de este epígrafe se puede afirmar que en las categorías básicas de la TRS de Duval expuestas anteriormente, existe la clara intención de minimizar la incidencia de lo conceptual en los procesos de noesis y semiosis. Se trata de un intento de simplificar los análisis de la incomprensión de los estudiantes en matemáticas que resulta en una simplificación en la caracterización del PM y de la comprensión matemática. Así también Duval orienta su discurso a perfilar una dependencia semiótica del PM en lugar de una mediación semiótica.

Es oportuno considerar que Steiner (1984) citado por Niss (2007), alerta sobre la reducción fuerte (indebida) de la complejidad favoreciendo aspectos especiales o paradigmas de investigación. Se debe investigar con mayor profundidad si para lograr (y mostrar evidencia de) la comprensión basta con tratar con representaciones semióticas múltiples sin seguir la didáctica conocida para la formación de conceptos. Se podría estar en presencia de una fuerte reducción de la complejidad de la comprensión matemática para favorecer la aproximación semiótica de la TRS.

2.1.8.7. Consideraciones de Duval acerca de la resolución de problemas desde su propuesta de aproximación semiótica a la Educación Matemática

Analizando a Duval (2017) se encontraron las siguientes consideraciones sobre la resolución de problemas y de una enseñanza basada en problemas.

- Resolver problemas siempre implica (explícita o implícitamente) la tarea cognitiva (más o menos compleja) de producir nuevas representaciones del mismo objeto en otro tipo de representación. A esto Duval (2017) le denomina *operación cognitiva crucial para resolver cualquier problema*.
- Se han distinguido dos fases en la resolución de problemas: una de investigación en la que el lenguaje no desempeña ningún papel y la de escritura que sería una cuestión de formulación (expresar en lenguaje matemático).
- Un *método de análisis de producciones matemáticas* lo constituye la descomposición a priori de la solución en las conversiones (implícitas o explícitas) necesarias para obtener una representación de los datos del problema en el registro cuyas transformaciones intrínsecas conducen a la solución.

- Desde el punto de vista matemático el interés es resolver problemas acordes con los “objetos matemáticos” y sus propiedades que se quieran trabajar. Sin embargo, desde el punto de vista cognitivo el interés es la organización de tareas de reconocimiento sobre la base de las variables cognitivas identificadas por el método de análisis de producciones matemáticas.
- La actividad cognitiva requerida para resolver problemas es global (implícita, cuyos componentes pueden variar considerablemente) que puede permanecer incompleta o descomponerse. En cambio en una tarea de reconocimiento la actividad cognitiva se centra en la operación cognitiva crucial que permite resolver cualquier problema.
- La *iniciativa* y la *capacidad de control* al resolver un problema dependen enteramente del reconocimiento de lo que es matemáticamente significativo en cualquier conjunto de datos del problema. En otras palabras, es la capacidad de diferenciar las variaciones de las representaciones del conjunto de datos en uno o más registros semióticos.

Respecto a la primera consideración, su redacción facilita un poco su análisis porque está en forma de implicación. La pregunta cardinal que surge aquí se basa en mirar el recíproco de esta proposición de Duval (2017): ¿producir nuevas representaciones del mismo objeto en otro tipo de representación implica resolver problemas?

En relación con la segunda consideración, hay que aclarar que el autor se refiere a la tendencia generalizada que existe de concebir la actividad reflexiva del PM durante la resolución de un problema, como algo enteramente ligado a las RM en un primer momento. Luego le sigue otro momento donde la semiosis solo cumple su función de expresión, con lo que quedaría fuera la importante función de tratamiento.

Por otra parte, la consideración 3 permite potenciar cualquier modelo de análisis de la producción escrita de los estudiantes en un nivel descriptivo e inferencial (a priori de la revisión) pues, básicamente, es realizar el método inductivo de interpolación (considerar todas las situaciones posibles y sus consecuencias). Para fijar ideas, la interpolación desde la TRS aquí se construye considerando todas las variables cognitivas posibles la solución del problema y todos los valores que pudiesen tomar.

Acerca de las consideraciones 4 y 5, resulta oportuno señalar que las tareas de reconocimiento tienen un lugar importante dentro de la didáctica de las matemáticas para tratar dificultades recurrentes que los estudiantes muestren a la hora de resolver problemas, como lo sugiere Dewey (1997). Sin embargo, una didáctica con predominio de las tareas de reconocimiento puede afectar la relación medio-consecuencia y, por ende, la aparición de significados y la comprensión.

Respecto a la consideración 6, según Dewey (1997) el control debería ejercerlo la propia estructura de la situación (es decir, el problema). En el caso de la iniciativa, Duval (2017) la sitúa en el terreno de comenzar la transformación de las representaciones semióticas y, sin embargo, lo común es comenzar por la etapa de comprender el problema o construir casos particulares ilustrativos lo cual no conduce necesariamente a manipulación de signos.

2.1.8.8. Consideraciones de Duval sobre la etapa de comprender un problema con enunciado en lenguaje natural

Según Duval (2004), un aprendizaje de la comprensión de textos debe superar la comprensión y dominio de dos procesos: uno donde el texto es segmentado en unidades textuales de información y otro donde se recontextualizan estas unidades segmentadas. Aquí se requiere de un cambio de registro de representación, es decir, se requiere una representación no discursiva que sirva de intermediaria entre el discurso a comprender y el discurso que lo explica.

Existen para este autor dos representaciones no discursivas: las centradas en el contenido cognitivo y las centradas en la organización redaccional. Las primeras representan relaciones entre conceptos, objetos, estados, acciones, etcétera y promueven registros tales como diagramas, redes, esquemas, entre otros. Por otra parte, el segundo tipo de representación no discursiva se basa en las relaciones entre unidades textuales conservando su orden lineal de ocurrencia en el texto.

En relación con las implicaciones de cada una de estas representaciones para comprender nuevos textos, Duval (2004) afirma que en las centradas en el contenido cognitivo estas varían en cada variación de este contenido. En cambio las representaciones centradas en la organización redaccional existe la posibilidad de que sean construidas con un procedimiento común a cualquier texto (independientemente de su contenido cognitivo).

El procedimiento común para la construcción de una representación no discursiva centrada en la organización redaccional del texto es, según Duval (2004), hacer la construcción de una red sobre una segmentación tabular del texto. Para la disposición tabular del texto se debe dedicar un reglón por frase, una columna por unidad y que las unidades del mismo tipo (que pertenecen a diferentes frases) estén en la misma columna. Aquí se respeta el orden dado de las unidades en el texto.

En cuanto a la segunda representación del procedimiento, esta es la construcción de una red de relaciones entre las diferentes unidades (utilizando conectivos y relaciones semánticas). Con esto se superan las restricciones para la comprensión que impone el orden lineal de ocurrencia de las unidades textuales y estas se pueden relacionar independientemente de su lugar en el texto. A este proceso el autor le denomina recontextualización redaccional de las unidades.

Es así como Duval (2004) considera el procedimiento antes mencionado como aquel que permite la producción de una representación para la comprensión de un texto, sin depender de la comprensión intuitiva y subjetiva que se pueda tener del mismo. La recontextualización redaccional, según este autor, se produce por la aprehensión sinóptica donde las unidades encuentran su lugar y es lo que permite realizar inferencias que suplen omisiones y hacen desaparecer las ambigüedades del texto.

No obstante, según Duval (2004) la recontextualización redaccional depende de la segmentación funcional la cual a su vez remite a dos de las funciones discursivas: referencial (designación de objetos) y apofántica (constitución de un enunciado completo). El reconocimiento de las operaciones propias de estas dos funciones debería llevar a identificar dos tipos de unidades del texto estrictamente desde lo redaccional: las unidades implícitas y explícitas en este.

En cuanto a la segmentación y recontextualización cognitivas, estas dependen del tipo de conocimiento que evoca el texto que puede ser relativo a situaciones, objetos, conceptos, preguntas, esquemas conceptuales de acción o situación, etcétera. Específicamente, la segmentación cognitiva se efectúa a partir de preguntas cuyo proceso de respuesta contribuye a delimitar cada unidad de información textual por lo que es selectiva y extrínseca a la organización redaccional del texto.

De todo lo anterior expresado en este epígrafe el autor de esta tesis concluye que existe la intencionalidad en Duval (2004) de reducir la subjetividad en la comprensión de textos acudiendo a la segmentación funcional y a la recontextualización redaccional, como que depende exclusivamente del texto. Sin embargo, al analizar sus ejemplos ilustrativos presentes en Duval (2004, p. 308-314) que no son basados en enunciados de problemas matemáticos, se pudo encontrar lo siguiente:

- El éxito de esta propuesta (que cuando es expuesta no cuenta todavía con experiencias de aprendizaje) depende de habilidades lingüísticas previamente consolidadas.
- El proceso de aprehensión sinóptica que posibilita la recontextualización redaccional necesita de inferencias para justificar la coherencia y la cohesión redaccionales, es decir, se necesita de un conocimiento que no está explícito en cualquier posible segmentación de unidades textuales, que produzca nuevos vínculos cuya percepción se dificulta por el orden lineal de ocurrencia de estas unidades en el texto analizado. Por tanto, esto remite a lo cognitivo.

2.1.9. Un método para el análisis de la producción escrita

Para conferirle una adecuada estructuración al análisis de resultados de las actividades aplicadas durante la investigación y a la revisión documental de respuestas, el autor de esta tesis considera oportuno triangular las principales ideas de Alves & Corio (2013), Aydan & Argün (2017), Teledahl (2017), Duval (2017), Sapti et al. (2019) y Baldinger (2019) para elaborar una "metodología de trabajo" para el análisis de respuestas escritas.

Se asume de Baldinger (2019) que en este tipo de análisis se pueden hacer afirmaciones descriptivas e inferenciales y que en las primeras predomina el razonamiento matemático y en las inferenciales participan tanto el razonamiento por autocomparación como el razonamiento pedagógico. Es preciso aclarar que, de primera intención, en las afirmaciones descriptivas se pretende describir en términos de transformaciones de RS.

Existen varias cuestiones fundamentales que formarán parte del escrutinio: cómo se manifiestan la mediación semiótica, la praxis reflexiva del PM en las respuestas escritas (también en formato mp4), los principios de la TRS declarados en el epígrafe 2.3.1. Sobre estas cuestiones se emitirán las afirmaciones que se sustentarán en evidencias explícitas (escrito del profesor o del estudiante) o implícitas cuando se utiliza una base hipotética.

Del modelo descrito por Sapti et al (2019), denominado *Comparing Model*, se asumen los tipos de comparación: trabajo escrito del profesor (TEP) $\longrightarrow$ trabajo escrito del estudiante (TEE) y conocimientos del profesor (CP) $\longrightarrow$ trabajo escrito del estudiante (TEE). Las afirmaciones $TEP \longrightarrow TEE$ y $CP \longrightarrow TEE$ son inferenciales y utilizan como sustento la autocomparación con evidencia escrita (TEP) y evidencia hipotética por medio del razonamiento pedagógico.

Luego, el método que se aplica en el análisis de resultados es el siguiente:

1. Tratar de expresar la respuesta del estudiante en términos de transformaciones semióticas entre registros semióticos heterogéneos.
2. Realizar afirmaciones descriptivas tomando como base lo anterior o evidencia explícita del TEE. En caso de haber transformaciones no evidentes o no inmediatas (esto se identifica con un bajo porcentaje de aciertos respecto a los 11 estudiantes), se analiza (de existir) un respuesta correcta y se compara con el TEP y el CP, para emitir afirmaciones inferenciales.

2.2. Caracterización del contexto y de los problemas de olimpiadas de matemáticas desde la experiencia colombiana

En este apartado se caracteriza brevemente el contexto de las olimpiadas de matemáticas respecto a la generación de motivos para crear, plantear y enfrentar problemas con intencionalidad de desafío. También se hace una clasificación de los problemas sobre la base de su estructura y de la demanda cognitiva. Finalmente, con ello se hace un análisis de problemas de algunas olimpiadas internacionales de matemáticas y de las olimpiadas colombianas de matemáticas.

2.2.1. Descripción del contexto de las olimpiadas de matemáticas

Para este epígrafe se tiene en cuenta el criterio de Conde & Sepulcre (2015) en lo referente a la incidencia en la esfera motivacional y afectiva de los estudiantes que tienen los eventos tipo competición de matemáticas.

El primer elemento para destacar en este contexto es la motivación extrínseca para resolver problemas no rutinarios de competiciones matemáticas que es asociada al desafío que constituye cualquier concurso para medir habilidades adquiridas con las de otros semejantes. A esto se puede unir el hecho de que el estudiante puede haber desarrollado una pasión por el abordaje de problemas interesantes.

Por otro lado, en ocasiones también aporta a esta motivación extrínseca el deseo de incorporar al currículo personal un hecho tan distintivo como participar en este tipo de eventos que pueden ser decisivos para recibir becas o especialidades que significan crecimiento personal. Además, la alegría que provoca hacer matemáticas de forma no rutinaria y divertida, el resolver problemas desafiantes y atractivos, etcétera, constituyen la motivación intrínseca en este contexto.

En esta tesis se propone identificar tres cualidades necesarias que debe desarrollar el PM en el contexto de olimpiadas de matemáticas para que se pueda pensar rápido y que esto no dañe la eficacia del pensamiento: *anticipación*, *continuidad* y *rapidez*. La anticipación puede describirse a través de Peirce (1902) como la formación de hábitos de acción deliberada.

Para detallar lo anterior se tienen en cuenta las palabras de Dewey (1997) quien afirma que todo pensamiento productivo se mueve entre lo consciente y lo inconsciente. Integrando esto con Peirce (1902) se llega a la conclusión de que la *anticipación* es una rutina de acción inconsciente (y automática) aprobada por el razonamiento como reacción ante un estímulo considerado en estado consciente. Así puede lograrse rapidez y eficacia al unísono en el pensar.

Otro aspecto que aporta en este sentido es la *continuidad*, que para Dewey (1997) es flexibilidad y variedad de materiales juntos en la unidad y carácter definitivo de la orientación del pensamiento hacia una conclusión. Se toma en la presente investigación la definición de este autor asumiendo como "materiales" a objetos físicos, las RM y las RS.

En cuanto a la *rapidez*, se admite que la anticipación y la continuidad pueden contribuir a la rapidez pero se necesita abordar a esta última aparte de las otras cualidades, pues a ella contribuyen otros factores. Es un hecho que las RS escritas tienen un determinado costo de tiempo, por ejemplo, determinar $(1+i)^n + (1-i)^n$ aplicando el binomio de Newton es más costoso en tiempo que hacerlo utilizando la forma trigonométrica del número complejo y la fórmula de De Moivre.

También el registro de las figuras geométricas y las operaciones intrínsecas que se propone en la TRS de Duval es más costoso en tiempo que moverse por transformaciones algebraicas. Además, se asume en esta tesis el énfasis de Mason, Burton & Stacey (2010) de que el estudiante debe tratar de permanecer el mayor tiempo posible analizando a través de RM porque puede explorar gran cantidad de alternativas en un tiempo muy breve.

2.2.2. Clasificación de los problemas de olimpiadas

Se coincide con Gabucio et al. (2005) en que un problema, de forma general, tiene la siguiente estructura:

a) Descripción de la situación de partida.

b) Especificación de lo que se quiere alcanzar.

c) Descripción de las acciones permitidas (o no permitidas) en el paso de a) hasta b).

Según estos autores un problema en cuanto al grado en que están especificados los componentes de su estructura puede ser clasificado como *mal definido* o *bien definido*. Si se tiene en cuenta que la incertidumbre es tanto un catalizador como una condición necesaria para la creatividad (Sriraman, 2021), es de esperar que introducir incertidumbre en los componentes puede resultar un buen método para elaborar problemas no rutinarios y/o retadores a partir de problemas rutinarios.

Otra clasificación expuesta por los autores antes mencionados está en función de la cantidad de conocimientos específicos de un dominio que requiere su resolución. Un problema *que no requiere conocimientos* posibilita llegar a la solución con estrategias generales de pensamiento sin necesidad de apelar a conocimientos y procedimientos específicos de un dominio. En cambio, en un problema *que requiere conocimientos* no basta con estrategias generales o nociones básicas, es necesaria una formación en la temática que aborda.

La clasificación anterior puede contribuir a que el elaborador de problemas introduzca, de forma consciente y planificada, niveles de complejidad combinados que le permitan lograr el desafío y la originalidad. Por la parte del estudiante se puede modular el grado de esfuerzo argumentativo, abrir la posibilidad para soluciones creativas e interesantes, entre otros objetivos que sean relevantes.

Según Zeitz (2007) un problema puede ser de “Encontrar” o de “Demostrar”. A partir de las consideraciones de Hanna & de Villiers (2008) acerca de la argumentación y la demostración, se asume que la demostración (cuando esta se exige) es parte del argumento y así un problema de encontrar permite argumentos de plausibilidad y un problema de demostrar exige argumentos de necesidad.

En cuanto a los problemas del tipo “Determinar si existe tal y tal”, se diferencian de los de “Encontrar” o de “Demostrar” en que introduce en el componente de la estructura de un problema “especificación de lo que se quiere alcanzar” la incertidumbre en dos sentidos: en el de encontrar y demostrar (para determinar y probar existencia) o de ocurrir que no se encuentra, demostrar también su no existencia. Un problema de “Determinar …” tiene incertidumbre en su segunda componente que integra los tipos de problemas de encontrar y de demostrar.

En los argumentos de plausibilidad hay holgura para que la producción escrita del estudiante sea idiosincrásica (personalizada), aunque debe cumplir la condición de que sea lógicamente válida y con sentido. En cambio, los argumentos de necesidad tienen la forma de cadenas de inferencia explícitas que siguen reglas de deducción acordadas, que pueden incluir notación formal, sintaxis y reglas de manipulación.

Para los problemas de “Encontrar”, las pautas del lenguaje que permiten identificarlos son: Cuál, Quién, Qué, Calcule, Halle, Determine, Encuentre, Construya, etcétera. Por otro lado, expresiones tales como: Probar, Demostrar, entre otras que puedan considerarse afines, implica que lo necesario en el argumento debe quedar explícito en la producción escrita.

Respecto a los argumentos del estudiante, el problema puede ser rutinario o no rutinario. Según Schoenfeld (1985) citado por Hernández-Morales, Castañeda, & González-Polo (2019) los problemas no rutinarios se caracterizan por salirse de las convenciones de la clase tradicional de matemáticas. En ellos se emplean contextos amplios, sin compromiso de hacer explícita toda la información.

Por lo general los problemas no rutinarios tienen ciertas dosis de incertidumbre que requieren acciones como interpretar, inferir y reflexionar. Así clasifican como problemas con incertidumbre y con solución gradual, donde en la evidencia escrita se pueden llegar a observar RS para comprender, generar hipótesis y determinar sus consecuencias, etcétera.

Además, si la resolución del problema requiere de la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática de manera que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos, el problema es *retador* (Falk, 2001). La autora enfatiza que la comprensión en matemáticas debe apoyarse con este tipo de problemas que poseen motivación intrínseca por tener originalidad, belleza y desafío.

2.3. Caracterización de la TRS como forma de producir comprensiones y formas de acción, bajo la perspectiva de Radford

El contenido de este epígrafe se estructura siguiendo los criterios de Schoenfeld (2001) para evaluar modelos y teorías en Educación Matemática, elementos de la teoría (funciones y estructura) de Prediger (2019) y algunas acotaciones de Niss (2007). El objetivo es contrastar bajo estos criterios la TRS de Duval con otros estudios acerca del PM y así poder llegar a conjeturas acerca de cuáles son las posibilidades y restricciones de la TRS como aproximación semiótica.

Teniendo en cuenta a Radford (2008), una teoría es una terna de la forma (P, M, Q) donde:

- *"Un sistema, P, de principios básicos, que incluye visiones implícitas y enunciados explícitos que delimitan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.*
- *Una metodología, M, que incluye técnicas de recopilación e interpretación de datos tal como lo respalda P.*
- *Un conjunto, Q, de preguntas de investigación paradigmáticas (plantillas o esquemas que generan preguntas específicas a medida que surgen nuevas interpretaciones o se profundizan, amplían o modifican los principios)."*[35]

[35] Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM, 40*(2), 317-327.p. 320.

2.3.1. Algunos principios de la TRS identificados en obras de Raymond Duval

Según Radford (2008) los principios son proposiciones universales que rigen una teoría y que están organizados conceptualmente.

En la revisión de la literatura sobre la TRS no se pudo encontrar la declaración explícita de un sistema de los principios básicos que sustentan a su aproximación semiótica a la caracterización del PM y la comprensión en matemáticas. Al respecto, el autor de esta tesis identificó algunos principios cardinales sin la pretensión de que funcionen como un sistema de axiomas de partida de la teoría, con todos los requisitos que ello conlleva.

Principio 1: No existe forma de investigar las causas de la incomprensión en matemáticas si no se tienen como independientes a las RS con respecto a las RM y las únicas que tienen que ser tenidas en cuenta.

Principio 2: Las RM son RS internalizadas (en el sentido de Vygotski).

Principio 3: No hay pensamiento matemático (noesis) sin transformación de representaciones semióticas (semiosis).

Principio 4: La descripción de la actividad matemática puede hacerse completamente separada de lo conceptual, en términos de transformaciones de representaciones semióticas.

Principio 5: Durante la actividad matemática, el funcionamiento cognitivo del PM y la comprensión residen en la coordinación sinérgica de registros semióticos heterogéneos.

2.3.2. Consideraciones acerca del conjunto M de la TRS

Básicamente, Duval (2017) propone el *método de análisis de producciones matemáticas* (explicado en el epígrafe 2.1.8.7) y el *método principios experimentales de variación semiótica y variaciones concomitantes* que lo explica en Duval (2003), citado por Caetano (2020) y donde propone utilizar la conversión como instrumento de análisis cognitivo de la resolución de problemas. Este método explicado en Duval (2003) es su propuesta ante las dificultades persistentes a pesar de modelos heurísticos del PM como el de Polya (1985).

2.3.3. Algunas preguntas relevantes de la TRS de Duval que pueden formar parte del conjunto Q

A partir de un análisis de los tres modelos de análisis de signos que han fundado la semiótica (el modelo de Saussure, el de Peirce y el de Frege), Duval (2017) se plantea la primera pregunta que encabeza al conjunto Q de preguntas paradigmáticas que plantea Radford (2008) es:

$Q_1)$ ¿Existe algún modelo más apropiado que los demás para analizar las producciones de los estudiantes, así como las actividades de aprendizaje, con el fin de adquirir conocimientos matemáticos?

Luego este autor entiende que se requiere reformular con mayor precisión las preguntas epistémicas en función de la respuesta a $Q_1)$.

$Q_2)$ (Modelo de Saussure): ¿Qué procesos de discriminación permiten reconocer las unidades de significado matemáticamente relevantes en una expresión o una representación semiótica?

Q_3) (Modelo triádico de Peirce): ¿Qué criterios deberían utilizarse para clasificar todo tipo de representaciones que se utilizan explícita o implícitamente en las matemáticas y la educación matemática?

Q_4) (Modelo de Frege): ¿Cuáles son los procesos de sustitución o transformación que son específicos de cada tipo de representación semiótica utilizada en matemáticas?

Para la adquisición de conocimientos matemáticos Duval (2017) plantea la singularidad que tienen las matemáticas con respecto a las otras ciencias, diferenciando dos situaciones epistemológicas que no se pueden reducir una a la otra en el acceso a los objetos de conocimiento.

Q_5) ¿Se pueden yuxtaponer el objeto del conocimiento y sus representaciones?

Q_6) Cuando se yuxtaponen diferentes representaciones, ¿se puede reconocer si son representaciones del mismo objeto o no?

En cuanto a la forma de pensar matemática que deben adquirir los estudiantes, Duval (2017) plantea dos preguntas desde el punto de vista cognitivo.

Q_7) ¿Cómo lograr que los estudiantes aprendan a discriminar las unidades de significado relevantes en la diversidad de representaciones semióticas que se movilizan en las matemáticas?

Q_8) ¿Cómo tomar conciencia del papel central de la operación de correspondencia uno a uno entre las unidades de significado discriminadas en dos representaciones diferentes?

Según Duval (2017) la organización de secuencias de actividades siempre tiene dos caras:

1. La propiedad matemática que debe ser descubierta y adquirida por los estudiantes.

2. La representación de registros y modos fenomenológicos de producción que se favorecerán durante la secuencia.

Q_9) ¿Todos los estudiantes o solo algunos tienen éxito en cada una de las actividades de la secuencia?

$Q_{9.1}$) ¿Qué pasa con los que no tienen éxito?

$Q_{9.2}$) ¿La puesta en común de las producciones de los estudiantes por parte del profesor con toda la clase es suficiente para que estos estudiantes puedan realizar la siguiente actividad?

Q_{10}) ¿Qué es realmente común entre dos actividades sucesivas que permite transferir a la segunda lo que acaba de tener éxito en la primera? Es decir, ¿es suficiente hacer localmente todas las tareas de cualquier secuencia didáctica para comprender y adquirir los conocimientos enseñados?

$Q_{10.1}$) ¿Los estudiantes son conscientes de lo que les permite cambiar de un modo de actividad a otro o las actividades siguen siendo para ellos tareas separadas? Es decir, ¿la actividad matemática requerida explícitamente crea un efecto de resonancia en la actividad cognitiva requerida implícitamente?

2.3.4. Poder descriptivo

Según Schoenfeld (2001) una teoría del pensamiento, de la resolución de problemas o de la enseñanza debe incluir aspectos relevantes de su objeto de estudio. Por otra parte, la capacidad descriptiva de una teoría puede notarse en la medida de si la misma expresa su discurso en formas que parecen fieles al fenómeno que describe. Por otra parte, Prediger (2019) afirma que los elementos de una teoría descriptiva sirven para describir cualitativa o cuantitativamente un determinado fenómeno.

Como piedra angular de la TRS que sustenta su poder descriptivo, está el concepto de representación semiótica, el cual Duval (2017) diferencia de otros tipos de representaciones por lo que considera su potencial intrínseco para ser transformada. Este potencial surge ante la posibilidad de discriminar en una RS, unidades de significado relevantes y una determinada organización de estas.

El proceso de transformación entre/dentro RS, visto por Duval (2017) como omnipresente en la actividad matemática, es el complemento a la noción de RS para describir cualquier "movimiento" en la comprensión y en el funcionamiento cognitivo del PM. Por otra parte, la noción de registro semiótico permite caracterizar una transformación semiótica en términos de una dupla de la forma (Registro de Partida, Registro de Llegada).

La diferenciación por parte de Duval (2017) entre transformaciones que son tratamientos y otras que son conversiones, junto a la identificación de unidades de significado, posibilitan la coordinación entre registros semióticos heterogéneos. De esta forma, se puede describir la resolución de un problema como las transformaciones semióticas sucesivas que permiten pasar del registro de partida al registro de llegada cuyas operaciones intrínsecas conducen a la solución.

También la propuesta de Duval (2017) explora el control sobre la intervención didáctica del profesor cuando este se concentra en identificar las causas de la incomprensión de los estudiantes y en elaborar una intervención efectiva para subsanarlas. Para ello propone la identificación de variables cognitivas o didácticas, las cuáles tomarían sus valores de cada una de las operaciones internas de cualquier registro o de las operaciones de conversión entre registros.

Aunque lo tratado en este epígrafe es una apretada síntesis del potencial descriptivo de la TRS, pues faltan por evocar no pocas categorías definidas y conectadas de forma cuidadosa por su precursor que también aportan en este sentido, sí permite adquirir ciertas ideas de la envergadura de ese potencial.

2.3.5. Poder explicativo

Para Schoenfeld (2001) lo valioso es la capacidad que tiene la teoría de proporcionar explicaciones de cómo y por qué funcionan las cosas. La explicación expresa en términos, con la mayor precisión posible, cuáles son los objetos de la teoría, sus relaciones y la posibilidad de que algunas cosas ocurran y otras no. Según Prediger (2019), los elementos de la teoría explicativa sirven para explicar, dar causas o identificar antecedentes de los fenómenos descritos.

El poder descriptivo de la TRS tratado en el epígrafe anterior, sienta las bases para entender su poder explicativo. No obstante, para evitar caer en innecesarias imprecisiones se va a hacer una breve caracterización tomando como base el conjunto Q de preguntas antes declaradas, con la confianza de que fueron elaboradas por su autor con la convicción de que la teoría ofreciese el soporte para explicar su respuesta.

Del análisis de las preguntas $Q_1, Q_2\, y\, Q_3$ en Duval (2017); que expresan la intencionalidad con que enfoca su estudio de tres modelos para el análisis de signos, se interpreta que el autor de la TRS considera que esta tiene potencialidades para explicar:

- Los criterios que permiten clasificar todo tipo de representación en las matemáticas, tanto explícita como implícita.
- Cuáles son los procesos de discriminación que permiten reconocer unidades de significado relevantes.
- Cuáles son los procesos de transformaciones específicos para cada representación en las matemáticas.

Conclusiones del capítulo 2

1. Las RS clasifican como formas de entender (en el sentido de Harel, 2021) porque son el resultado de una asimilación a un esquema, mientras que la función de anticipar significados específicos en el razonamiento pertenece a las formas de pensar.
2. Teniendo en cuenta a Vinner (2018) el estudiante no asume la información que le llega sino que la procesa y adapta a su estructura cognitiva. Así también la tendencia natural es la de quedarse con la imagen conceptual evocada, sin someterla al escrutinio de una definición formal. Este sentido del rigor debe

formarse paulatinamente y esto depende en buena medida de utilizar problemas que conduzcan a conflictos con la intuición.

3. A partir de Dewey (1997) se asume que el poder en la generalización de un concepto no reside solamente en sus partes constitutivas sino también en su aplicación en nuevos casos para la comprensión. En este sentido, un significado se vuelve robusto cuando se constituye en un rasgo de la experiencia que se vuelve útil para la comprensión de nuevas experiencias.
4. Dado a que no es posible garantizar condiciones para un razonamiento repetido porque esto no forma parte de la intencionalidad de esta investigación, se propone hablar de *formas de pensar estandarizadas* y de *formas de pensar potenciales*.
5. Acorde con Radford (2006), el PM se caracteriza tanto por su naturaleza semióticamente mediatizada como por su identidad en tanto praxis reflexiva. Aquí la mediación semiótica puede ser caracterizada por las funciones de expresión, tratamiento y objetivación que tiene la semiosis según Duval (2004) y la praxis reflexiva se puede caracterizar por los pasos de la actividad reflexiva del PM propuestos por Dewey (1997).
6. Según Schoenfeld (1985), Dewey (1997) y Ernest (1999), se necesita comprensión, actividad y experiencia para hacer matemáticas y no cabe esperar que se pueda utilizar luego lo que se ha asimilado sin ser utilizado en el reconocimiento y solución de un problema. La experiencia en la resolución de problemas conduce al conocimiento tácito de los tipos de problemas, estrategias de solución y modos aceptables de presentación del trabajo escrito.

7. El contexto de competiciones matemáticas, particularmente el de olimpiadas colombianas de matemáticas, ha permitido situar el foco de atención en los problemas bien logrados, que generan verdaderos desafíos al intelecto. El planteo y resolución de estos problemas puede ser una forma eficaz de lograr que se manifieste y desarrolle el PM para que el estudiante logre su máximo potencial matemático y se creen oportunidades para su caracterización.
8. A partir de la caracterización de la TRS, bajo la perspectiva de Radford, se pudo constatar que el marco conceptual de la teoría es consistente con nexos entre categorías cuidadosamente establecidos hasta el nivel más elemental. Sin embargo, dada la complejidad de los fenómenos que pretende describir o explicar (comprensión y PM) cabe esperar que puedan surgir puntos contradictorios derivados de su aplicación en diferentes contextos didácticos.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo se dedica a la explicación de la selección de métodos, técnicas e instrumentos aplicados en la investigación desde la vertiente empírica. Se pretende que la selección de estos conduzca a reforzar la validez y credibilidad de las conclusiones arribadas del contraste de la TRS de Duval con otras teorías del pensamiento y la comprensión matemática, así como de la aplicación de actividades.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

La presente investigación es cualitativa y el enfoque es fenomenológico porque abarca la experiencia compartida del investigador, los autores seleccionados para formar parte del estado del arte y el marco teórico de la tesis, así como por los estudiantes que participan como resultado del muestreo, respecto del PM como fenómeno. El resultado final sería avanzar en la caracterización del PM desde esta experiencia compartida en el contexto de olimpiadas colombianas de matemáticas.

3.2. Alcance de la investigación

Como el objetivo de la presente investigación es avanzar en la caracterización del PM de los estudiantes, el alcance de esta como estudio es **descriptivo**. Esto es porque se describen características del PM como fenómeno para mostrar una mayor precisión en este sentido que permita delimitar el lugar correspondiente de la TRS de Duval como teoría sobre el pensamiento y la comprensión matemática, desde el contexto de la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores de olimpiadas colombianas de matemáticas.

3.3. Población y muestra

El tipo de muestra es **no probabilística o dirigida** porque se busca explorar el PM en respuestas escritas suficientemente desarrolladas, algo de lo que adolecen los exámenes olímpicos de selección múltiple. Por esta razón se consideran exámenes de solución completa tipo ensayo, complementado por entrevistas o adelantar experiencias en las cuales los estudiantes resuelven problemas planteados hablando en voz alta lo que están pensando.

La población estudio se compone de 3683 estudiantes. De ellos clasifican en la primera prueba 412 y se presentan a la segunda prueba un total de 430 estudiantes de los que clasifican 63. Se tomó una muestra no probabilística de 11 estudiantes de grados sexto y séptimo, siendo de 10 el tamaño de muestra típico para estudios cualitativos, según Sampieri y Mendoza (2018).

3.4. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados

El método fundamental aplicado es la triangulación para lograr la mayor credibilidad y precisión del estudio cualitativo y así fortalecer su validez. Se pretende contrarrestar la posibilidad de conclusiones o interpretaciones erróneas acerca del PM de los estudiantes a partir de este método. Los vértices de esta triangulación son métodos, técnicas e instrumentos que han sido aplicados con éxito en anteriores investigaciones sobre pensamiento.

Por ejemplo, teniendo en cuenta a Baldinger (2019) y Güss (2018) se puede aplicar el **método del trabajo en voz alta** durante la resolución de un problema (implica grabar la experiencia). Así se obtiene información de primera mano y fidedigna acerca de lo que realmente está pensando el estudiante. Luego esto se triangula con la **técnica de revisión documental** de la respuesta escrita y, por último, con otra técnica que es el **análisis de material visual/auditivo** aplicada a la grabación.

Al respecto, este método de trabajo en voz alta se conoce también como *protocolo verbal* y, según Ericsson y Simon (1993) citados por Güss (2018), es la verbalización simultánea de pensamientos mientras se resuelve un problema. Estos autores diferencian entre *protocolo verbal concurrente (PVC)* y *protocolo verbal retrospectivo (PVR).* El primero es hablar en voz alta en el acto de resolución y el segundo es hablar acerca del problema resuelto.

Otra propuesta factible es aplicar un instrumento que combine una **entrevista semiestructurada** y un **PVC** a estudiantes en entrenamiento que se presentaron a una olimpiada internacional, con preguntas abierta del tipo “explícame qué idea estás teniendo aquí”, entre otras. De esta forma, identificado algún punto interesante, se pregunta al estudiante qué está pensando en ese momento (lo cual queda recogido en el video) y se evita una reconstrucción que puede no ser fiable.

3.5. Fases de la investigación

Existen para esta investigación fases que la describen: una referida a un metaanálisis desde teorías del pensamiento y comprensión para llegar a conclusiones preliminares que luego serían contrastadas empíricamente (lo que sería la segunda fase) mediante la recolección de datos al aplicar diversos instrumentos considerados pertinentes para lograr el objetivo propuesto.

La primera fase corresponde al **enfoque fenomenológico hermenéutico** como resultado de la interacción de definir características del pensamiento y comprensión matemática desde diferentes aristas teóricas. Así también del estudio y reflexión sobre estos fenómenos como proceso y resultado, de la precisión de categorías y temas esenciales para la investigación con fines de caracterizar el PM a través de diferentes significados aportados por los participantes.

En cuanto a la segunda fase, esta corresponde al **enfoque fenomenológico empírico** puesto que se trata fundamentalmente de describir la experiencia y la producción de los participantes y cómo reflexionan sobre ellas. La fase se encuentra estructurada en un conjunto de actividades diseñadas con el propósito de evaluar los planteamientos de Duval sobre lo que es PM para explicar lo que está haciendo el estudiante durante la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores.

Conclusiones del capítulo 3

En este capítulo se ha presentado la metodología que rige la investigación observando que el PM, al ser un fenómeno complejo, también resulta compleja su caracterización pues puede ser confundido con el razonamiento matemático. Sin embargo, es preciso decantar las diferencias porque el razonamiento alude a lo evidente, mostrable, explícito y consciente; mientras que el pensamiento en esta tesis se identifica con lo tácito, inconsciente, implícito e irracional (en el sentido de Reyes-Santander, 2014).

Por esta razón, el estudio tiene un carácter descriptivo pues toma como fenómeno a estudiar el PM que, junto a la triangulación de teorías y la puesta en práctica de actividades diseñadas con problemas no rutinarios y/o retadores, pretende captar regularidades que serían como posibles estados del fenómeno que se constituyen en características. Para este proceso basta con una muestra dirigida y los resultados que se obtengan aportan a una visión más completa del PM.

CAPÍTULO 4. APORTES

En este capítulo se abordan los aportes teórico y práctico de la presente investigación. El aporte teórico está conformado por algunas consideraciones sobre las características del PM anticipadas por la triangulación de teorías en el contexto de la resolución de problemas de olimpiadas colombianas de matemáticas y evidenciadas en la constatación práctica mediante la aplicación de un sistema de activades. Este último cuenta con tres actividades para promover y caracterizar el PM.

4.1. Aporte teórico

Debido a la diversidad de la naturaleza de las características del PM que surgen en el contexto de resolución de problemas no rutinarios y/o retadores de olimpiadas colombianas de matemáticas, se decide estructurar el texto en viñeta. Durante el inicio, desarrollo y finalización de la presente investigación se pudieron notar las características del PM en el contexto antes mencionado que se describen a continuación.

Es menester aclarar que estas características son relativas a la triangulación de los presupuestos teóricos con la constatación práctica.

- El PM se caracteriza por períodos de intensa abstracción, donde la reflexión anula el proceso de semiosis evidente y el pensamiento se mueve entre RM.
- En la mediación semiótica, caracterizada desde el punto de vista de las funciones semióticas expresión y tratamiento, en problemas con elevada incertidumbre y que no permiten rápidas conversiones; presenta la regularidad

del predominio de la función de expresión por sobre la de tratamiento. Esto es síntoma de que la reflexión tiene una marcada dependencia con las RM.

- En los problemas de cambio de RS del tipo (RLN,RGe), en otras palabras, cuando se va del enunciado del problema a una representación geométrica, el PM toma como unidades de significado a las oraciones pero en otras situaciones esto no suele ocurrir. A tono con la psicología cognitiva, para la percepción cualquier símbolo tanto simple como complejo puede hacer surgir una idea o remitir a un significado.
- La fuente de las ideas matemáticas no debe ser sólo atribuida a la enseñanza explícita y dirigida, sino también a otras conexiones que surgen en la experiencia y que se sustentan en la capacidad que tiene el PM de asociar percepciones que se yuxtaponen en esta.
- La iniciativa del PM en la resolución de problemas es entender el problema. Puede suceder que para lograr este objetivo sea factible un cambio de representación y adquiere vitalidad el énfasis de la TRS. Sin embargo, suele suceder que las transformaciones de RS no son la iniciativa sino el resultado de una actividad reflexiva del PM.
- El control sobre la semiosis, en el contexto de la investigación, puede ocurrir de dos formas: la primera en que las transformaciones semióticas ocurren guiadas por las operaciones de tratamiento y conversión; mientras que en la segunda no hay tratamientos en el sentido de Duval (2004) sino conversiones desde las RM a las RS y las operaciones intrínsecas de un registro semiótico no permiten explicar la hilación de la semiosis.

- La identificación de conceptos/objetos matemáticos que están involucrados en un problema no es de naturaleza imprescindible para el PM el cual puede optar por la semiosis a partir de unidades de significado y mediante transformaciones semióticas conectar lo dado con lo buscado sin saber de cuál es en realidad el concepto vital subyacente en el problema.
- Durante la actividad reflexiva, el PM se desenvuelve más cómodo en el sentido de cuidar que se cumplan las condiciones del problema en cada transformación semiótica, cuando es posible un cambio de representación que permita simplificar el enunciado. Las constantes revisiones del enunciado en lenguaje natural constituyen una fuente costosa de desvío de la atención y concentración, así como abren la posibilidad de que se pasen por alto ciertas condiciones del problema.
- Se ha podido notar que el PM tiene una función de mediación en la semiosis pues no cabe atribuir que el proceso de pasar de un representación semiótica a otra (ya sea en el mismo registro o entre registros heterogéneos) lo "sugieran" las operaciones intrínsecas de un registro determinado. Debido a esto se corrobora que las formas de pensar gobiernan las formas de entender, aun cuando estas contribuyan a refinar o evaluar paulatinamente a las formas de pensar.
- Si para que el razonamiento adquiere importancia vital debe contar con representaciones semióticas que caracterizan a los conceptos matemáticos para poder ser comunicable y entendible por otros, para el PM es provechoso no apartarse de la intuición y la imaginación pues al enfrentarse a problemas que requieren nexos creativos entre conceptos, al no contar con las conversiones

necesarias, estas deben ser creadas sobre la base de analogías, metáforas, etcétera.

- Durante la investigación, no se observó predominio de cuestionar sobre lo razonado ni la intencionalidad de propiciar generalizaciones sobre la base de llevar el problema y su solución a contextos más amplios. Se apreció una confianza indebida en las primeras comprensiones que unida al poco interés de realizar la etapa "mirar hacia atrás", pueden ser la causa de la falta de rigor, más que no tener suficientes tratamientos y conversiones aprendidos.
- El pensamiento se promueve con tareas que originan duda, asombro y contradicción con lo aprendido. Las tareas rutinarias de tratamientos y conversiones entre registros semióticos deben realizarse cuando la causa de un dificultad sea recurrente (tal como lo plantea Dewey, 1997) porque pueden conducir a la fijación de encontrar posibles conversiones y no a una cabal comprensión del problema y al ejercicio deliberado del PM.

4.2. Propuesta de un sistema de actividades

Aquí se diseñan tres actividades de acuerdo con la estructura comúnmente aceptada en los programas de maestría y doctorado de la Universidad Antonio Nariño. Estas actividades forman un sistema porque se complementan una a la otra y en la siguiente se pretende paliar las limitaciones que hace surgir la anterior.

<u>Actividad 1</u>

Título: Protocolo verbal concurrente en la resolución de problemas no rutinarios y/o retadores.

Objetivo: Hacer un registro de audio y video donde el estudiante realiza un pensamiento en voz alta nivel 2 (decir continuamente todo lo que pasa por la mente) para analizar la relación entre pensamiento y producción escrita durante el proceso de resolución de problemas no rutinarios y/o retadores, además de analizar el posible origen de sus ideas.

Sugerencias metodológicas:

1. Los puestos de los estudiantes deben estar preparados con los celulares con la cámara en la opción de videos activada pero sin iniciar la grabación, bien enfocada en los papeles donde el estudiante debe trabajar que deben estar fijados con una pegatina para que el estudiante no vaya a sacar fuera de foco su hoja de trabajo sin darse cuenta. Además, es recomendable tapar con una hoja en blanco el test para evitar que el estudiante vaya pensando en el problema y no esté grabando su pensamiento en voz alta mientras se organiza el resto de los estudiantes ante su mesa de trabajo. Solamente se debe retirar la hoja en blanco cuando el estudiante comience a reproducir el video.

2. Los videos demandan gigas de memoria (aproximadamente 1 giga en 8 minutos de grabación), por tanto, debe configurarse que la aplicación del móvil guarde en un formato favorable el video y alertar a los estudiantes que deben ser rápidos en su razonamiento. Es recomendable que el moderador de la actividad, luego de pasados los primeros 8 minutos de la actividad, advierta a los estudiantes con móviles de poca capacidad de memoria.

3. Explicar a los estudiantes que en esta actividad es tan importante que no dejen de expresar en voz alta lo que están pensando como el proceso de resolución del

problema. También se les debe advertir que una reflexión profunda genera períodos de silencio por lo que es necesario que el moderador de la actividad haga advertencias sistemáticas en este sentido, aunque ello signifique una interrupción.

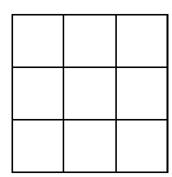
Materiales: Test impresos y tecnología (móviles) para grabar video.

Desarrollo:

1. Confeccionar el Test.

Resuelva uno de estos dos problemas según estime lo pueda solucionar en 8 minutos.

Problema 1. En la figura el cuadrado contiene 9 cuadrados unitarios iguales. Trace una línea quebrada compuesta por 12 segmentos iguales que conecte dos lados opuestos del cuadrado de forma tal que lo divida en dos figuras donde el área de una sea $\frac{3}{8}$ del área del cuadrado.



Problema 2. Se colocan, uno al lado del otro, los primeros 50 números impares y se forma el número n. ¿Cuál es el mayor número divisible por 11 que se puede lograr tachando 70 dígitos de n? Considere que puede reordenar los dígitos que resulten no tachados.

$$n = 1357911 \ldots 99$$

2. Solicitar a la dirección de preparación para olimpiadas la oportunidad para aplicar el instrumento, definir el grupo de estudiantes, local y tiempo de duración de la actividad.
3. Confeccionar e imprimir el consentimiento informado de los padres para aplicar instrumentos de investigación a sus hijos y entregárselos a los estudiantes seleccionados para que lo lleven ya firmados a la actividad.
4. Informar a los estudiantes de la naturaleza de la actividad, su objetivo y concientizarlos a favor de realizarla con seriedad y responsabilidad.
5. Aplicar la actividad.
6. Realizar el análisis de los resultados.

Actividad 2

Título: Encuesta a estudiantes que participaron en protocolo verbal concurrente.

Objetivo: Complementar el análisis del protocolo verbal concurrente nivel 2 con una encuesta donde se pretende superar las dificultades surgidas durante dicho protocolo y que aporte información relevante para determinar cómo piensan estos estudiantes en la resolución de problemas.

Sugerencias metodológicas:

1. Realizar un intercambio con los estudiantes acerca de las dificultades que surgieron durante la aplicación del protocolo verbal concurrente y concientizarlos para que responda seria y responsablemente la encuesta que tiene como objetivo complementar el estudio del protocolo.

2. Advertirles que deben contestar las preguntas de la encuesta en el orden indicado, de lo contrario se pierde el objetivo de esta actividad.

Materiales: Cuestionarios impresos de la encuesta.

Desarrollo:

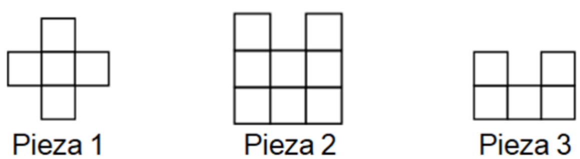
1. Confeccionar el cuestionario

CUESTIONARIO

1. Lea detenidamente el siguiente problema:

Las piezas 1, 2 y 3 están compuestas por cuadrados unitarios. Si pueden ser utilizadas no necesariamente las tres piezas, ¿cuáles son las dimensiones del cuadrado más pequeño que puede ser construido usando estas piezas?

Nota: Muestre su cuadrado donde no se solapen las piezas ni haya huecos entre ellas.



2. A partir de su análisis se le pide que conteste con la mayor seriedad y precisión las siguientes preguntas:

2.1 ¿Qué idea(s) te ha sugerido la lectura del problema?

2.2 ¿Cuál sería(n) la(s) estrategia(s) a seguir para su resolución?

3. Intente resolver el problema y coloque al lado de cada escrito suyo qué le ha provocado hacerlo.

(Fin del cuestionario)

2. Realizar las sugerencias metodológicas.

3. Aplicar el cuestionario de la encuesta, teniendo en cuenta que los estudiantes comprenden realmente lo que se está requiriendo en cada pregunta.
4. Analizar los resultados.

Actividad 3

Título: Papel que juegan las operaciones de tratamiento y conversión entre registros semióticos en la iniciativa y control durante la solución de problemas no rutinarios y/o retadores.

Objetivos:

1. Verificar cómo se desempeña el estudiante al intentar hacer la operación cognitiva de conversión en problemas no rutinarios y/o retadores, considerando como unidades de significado a las oraciones del enunciado del problema y cómo contribuye este proceder a la iniciativa para una idea de solución.
2. Verificar hasta qué punto puede describirse el control de la semiosis del argumento escrito del estudiante a partir de las operaciones de tratamiento y conversión entre registros semióticos.

Sugerencias metodológicas:

1. Diseñar esta actividad para estudiantes de secundaria de primer nivel que participaron en la OIM 2022, a los cuáles se les aplica un entrevista abierta y se graba la sesión en forma de protocolo verbal concurrente.
2. Antes de aplicar la actividad debe informarse al estudiante la importancia de apegarse al cuestionario en aras de lograr resultados fiables y valiosos para la investigación.

3. Obtener el correo de los participantes para tramitar por esa vía el consentimiento informado en caso de que deba quedar comprometida su identidad.

Materiales: Cuestionario para la entrevista y dispositivo móvil para la grabación.

Desarrollo:

1. Obtener autorización para la aplicación de la actividad de parte de la dirección de olimpiadas.
2. Imprimir los cuestionarios.
3. Tramitar el local donde se va a aplicar la actividad.
4. Aplicar la actividad teniendo en cuenta las sugerencias metodológicas anteriores.
5. Tramitar los consentimientos informados por la vía considerada anteriormente.
6. Pasar al análisis de resultados de aquellos estudiantes cuyos padres hayan autorizado la aplicación de la actividad.
7. Interpretar, de primera intención, la solución escrita del estudiante en términos de transformación de representaciones semióticas, mediante las operaciones de tratamiento y conversión entre registros. Tomar nota de cuando esto no es viable.
8. Caracterizar, de primera intención, el control de la semiosis de argumento escrito del estudiante en términos de representaciones semióticas.

CUESTIONARIO

Estimado(a) estudiante:

Esta entrevista forma parte de una investigación donde se pretende indagar cómo usted piensa a la hora de resolver problemas. Es muy importante su contribución consciente al responder con seriedad y honestidad cada pregunta. Piense en que puede contribuir valiosamente al estudio del pensamiento matemático en el contexto de olimpiadas y, de antemano, se le está infinitamente agradecido por ello.

A continuación se muestran 2 problemas de la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2022 con sede en Bogotá, Colombia, los cuales debe analizar y escoger uno de ellos según considere que puede hacer una traducción a las matemáticas de cada una de sus oraciones. Esto es, tomar la primera oración y traducir al lenguaje de las matemáticas lo que ahí dice. Luego, hacer esto con la segunda y así sucesivamente. En todo el proceso no debe dejar de pensar en voz alta para que su voz quede grabada mientras trabaja en el problema. Si le surgen dificultades trate de argumentar en voz alta qué es lo que le causa dificultad.

Problema 1. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor BC, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor BC. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

Problema 2. Sea $n > 2$ un entero positivo. Se tiene una fila horizontal de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un $bloque$ es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. $Arepito$ el cangrejo está inicialmente parado en la primera casilla, en el extremo izquierdo de la fila. En cada turno, él cuenta la cantidad m de casillas pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está y hace una de las siguientes acciones:

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas a la derecha de él, $Arepito$ se mueve m casillas hacia la derecha;
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas a la izquierda de él, $Arepito$ se mueve m casillas hacia la izquierda;
- En cualquier otro caso, se queda en la misma casilla y no se mueve más.

Para cada n, determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial de la fila con k casillas azules para la que $Arepito$ puede llegar a la última casilla, en el extremo derecho de la fila.

Como la entrevista tiene un carácter abierto en el sentido de que pueden surgir preguntas según se vaya desempeñando el estudiante, sólo cabe mencionar los tipos de preguntas que pudieran surgir:

- Preguntas para descubrir cuál es la fuente de sus principales ideas para conocer la fuente de su iniciativa.
- Preguntas para que el estudiante explique qué es lo que guía el proceso de semiosis durante el proceso de resolución.
- Preguntas para romper los períodos de silencio durante el protocolo verbal concurrente.

Conclusiones del capítulo 4

A título de conclusiones de este apartado se puede afirmar que se logró el objetivo de avanzar en la caracterización del PM de los estudiantes, evidenciado en las respuestas escritas en exámenes de olimpiadas colombianas de matemáticas. A partir de este aporte teórico se pueden deducir los alcances y limitaciones de la TRS como aproximación semiótica a la educación matemática en general y a la caracterización de PM y la comprensión matemática, en particular.

Los alcances identificados fueron los siguientes:

- El énfasis en identificar y nombrar variables cognitivas desde los niveles más elementales hasta los más complejos es comprensible y loable pues empodera al profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto es porque se puede identificar la causa de las dificultades recurrentes y planificar una intervención correctiva consciente.
- En contextos rutinarios de aprendizaje tales como el tratamiento de problemas con tema en el álgebra primaria, empodera a aquellos estudiantes que continuamente presentan dificultades tanto en la iniciativa para enfrentar un problema como en el control de la semiosis hasta llegar a la solución del problema.
- La observación de Duval (2017) sobre que las RS deben ser consecuentes con los “objetos matemáticos” que pretenden referenciar, es muy pertinente en el contexto de las conversiones al registro no icónico. La falta de rigor en este sentido dificulta la elaboración de conjeturas y la percepción con la

consecuente imposibilidad de aplicar las operaciones intrínsecas del registro no icónico.

- Cuando existe una dificultad de comprensión conceptual, esta puede, en ocasiones, ser sustituida por la comprensión integrativa y se puede llegar desde lo dado hasta lo buscado en la resolución de un problema. Al igual que se puede apreciar en la historia de las matemáticas, las dificultades conceptuales no siempre frenan el desarrollo del PM.

Las limitaciones identificadas fueron las siguientes:

- No considerar que, aunque las RM de una persona no pueden ser examinadas por otra, no es prudente supeditar solamente los análisis de la incomprensión en las matemáticas a las representaciones semióticas evidentes pues el PM se mueve constantemente entre lo implícito y lo explícito, entre lo consciente y lo inconsciente.
- El método denominado *método de análisis de producciones matemáticas* que presupone encontrar todas las posibles conversiones entre los registros que involucra la resolución de una tarea, presenta serias dificultades para implementarse cuando el registro semiótico de partida es el lenguaje natural. Dadas las posibilidades de transformaciones del lenguaje natural hay, en principio, infinitas maneras de expresar una misma idea.
- Concebir como unidades de significado a las oraciones en el registro lenguaje natural constituye una prescripción excesiva pues las palabras y símbolos aún más simples que estas, están asociados a ideas interiorizadas en la mente del estudiante, como resultado de su experiencia y de la capacidad asociativa del

pensamiento. De manera que, prescribir las unidades de significado que puede identificar la percepción tendrá, sin lugar a duda, muy corto alcance.

- El considerar que los fenómenos de incongruencias entre representaciones semióticas heterogéneas, se enfrenta tratando explícitamente en las clases todas las posibles conversiones, puede heredar las dificultades inherentes a las limitaciones de tiempo de cualquier currículo de matemáticas en la enseñanza formal, así como no ser una propuesta que incentive el interés en los estudiantes.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se desarrollan epígrafes dedicados a la validación de las actividades y al análisis de resultados de la revisión documental, así como de la aplicación práctica del sistema de actividades.

5.1. Validación del sistema de actividades

Las actividades se sometieron a un proceso de refinamiento desde diferentes puntos de vista. Los problemas fueron revisados y criticados por personas que participan en la elaboración de este tipo de problemas y cuyas consideraciones se tuvieron en cuenta para hacer las transformaciones necesarias. Cada actividad fue diseñada como complemento de la anterior en el sentido de lograr sacar la mayor cantidad de información posible de cómo piensan los estudiantes en la solución de problemas.

Luego se enviaron a tres especialistas para que las revisaran en cuanto a estructura, coherencia entre sus partes constituyentes y si verdaderamente responden a la finalidad con que fueron elaboradas. Las valoraciones recopiladas fueron las siguientes:

- Están correctamente estructuradas, lo que tributa tanto a un análisis crítico de su pertinencia como a facilitar su implementación práctica.
- Los objetivos de cada una de las actividades son coherentes con las sugerencias metodológicas y los cuestionarios.
- Se expresa preocupación por garantizar la privacidad de los estudiantes que acepten participar en la aplicación de las actividades.

- Las actividades poseen el carácter de sistema que permite estimular al pensamiento matemático a que se ponga de manifiesto, para indagar en las características que despliega. Es necesario resaltar la introducción de la técnica de pensar en voz alta, la cual es considerada en esta investigación como decisiva para la fiabilidad del análisis de los resultados.
- Los problemas están bien logrados y son adecuados, así como su carácter de no rutinarios se justifica en el contexto de aplicación.
- También se puede buscar una mayor diversidad entre los problemas de geometría que sólo están basados en lo discreto y explorar temas de geometría más complejos como los que involucran desigualdades, entre otras posibilidades.

5.2. Análisis de los resultados

El análisis de resultados abarca el estudio de las respuestas escritas de estudiantes de olimpiadas colombianas de matemáticas y la aplicación de las tres actividades previstas en el sistema de actividades que constituyen el aporte práctico de la presente investigación.

5.2.1. Revisión de respuestas escritas en exámenes de olimpiadas colombianas de matemáticas

La primera revisión de respuestas escritas durante la investigación se realiza en 11 exámenes de la XXXIV Olimpiada Colombiana de Matemáticas para escuela primaria. El examen cuenta con 10 problemas de los cuales el 50% clasifica como problemas monorrepresentacionales. El análisis que se expone a continuación es la respuesta del estudiante E_7 al problema 6 (anexo 3) que es birrepresentacional y se aplica el modelo de comparación para interpretar el PM del estudiante.

Para facilitar el análisis se hacen las siguientes codificaciones, algunas inspiradas en D'Amore (2006):

- E_i estudiante $i - ésimo$.
- RLN Registro Lengua Natural y RN Registro Numérico (Ver anexo 2 para otros códigos de registros (CR)).
- $O_i =_{df}$ "objeto matemático" $i - ésimo$ con $i = 1,2,3,\cdots$ (significado, concepto matemático socialmente compartido en el aula, según D'Amore, 2006).
- $R_i^{CR}(O) =_{df}$ representación semiótica $i - ésima$ de un concepto O en el registro semiótico CR.
- $R_i^{CR}(O) \longrightarrow R_j^{CR}(O) =_{df}$ transformación (tratamiento) de la representación $R_i^{CR}(O)$ en la $R_j^{CR}(O)$ dentro del registro CR con $j = 1,2,3,\cdots$ y $j \neq i$. Para facilitar su rápida identificación se denotará así $R_i^{CR}(O) \longrightarrow^T R_j^{CR}(O)$.
- $R_i^{CR_1}(O) \longrightarrow R_j^{CR_2}(O) =_{df}$ transformación (conversión) de la representación $R_i^{CR_1}(O)$ perteneciente al registro CR_1, en la $R_h^{CR_2}(O)$ del registro CR_2 con $i \neq j$. Para facilitar su rápida identificación se denotará así $R_i^{CR_1}(O) \longrightarrow^C R_j^{CR_2}(O)$.

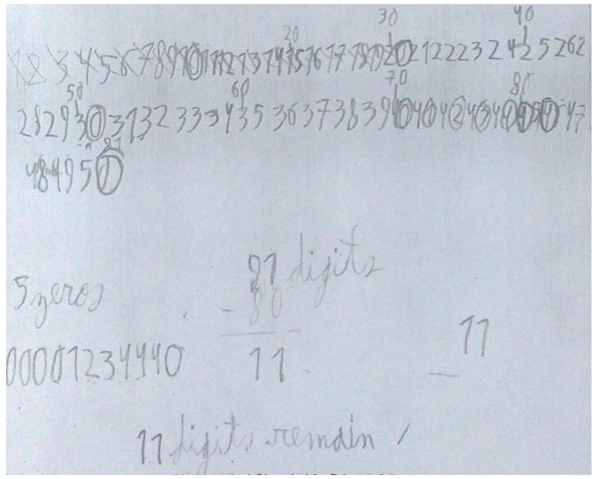


Figura 1 Respuesta del estudiante E_7 al problema 6.

El número n se formó escribiendo los números del 1 al 50, en orden, uno a continuación del otro:

$$n = 12345678910111213141 5 \ldots 47484950.$$

Borrar 80 dígitos del número n que se formó, de manera que el número que quede sea el menor posible. ¿Cuál es el menor número que se puede obtener y cómo se logra?

$O_1 =_{df}$ El número n se formó escribiendo los números del 1 al 50, en orden, uno a continuación del otro.

$R_1^{RLN}(O_1) \longrightarrow^{C} R_2^{RN}(O_1) = n$. La iniciativa y el control hasta aquí se pueden caracterizar por una operación de conversión ($TEE \longrightarrow TEE$) con tasa de aciertos del 100%.

$O_2 =_{df}$ Borrar 80 dígitos del número n que se formó, de manera que el número que quede sea el menor posible.

$R_2^{RN}(O_1) \longrightarrow^T R_{82}^{RN}(O_1) = O_2$ donde hay 80 tratamientos consistentes en tachar un dígito de n. Aquí cada acción de tachar un número implica necesariamente que el número resultante es menor que el anterior, pero no garantiza el control de que al final se logre el menor número posible. La tasa de aciertos del 27% para estos tratamientos lleva a pensar en una incomprensión, no sobre lo que hay que hacer sino en cómo hacerlo.

En la respuesta del estudiante E_7 se evidencia que la representación de n le sirvió para ejercer un control sobre la semiosis, la cual cumple las funciones de expresión y tratamiento como puede notarse en la figura 1. A partir de la $R_2^{RN}(O_1)$ pudo contar los ceros que contiene n, además de darse cuenta de que son 11 los dígitos disponibles para el número buscado.

Ahora bien, teniendo en cuenta el anexo 3 se infiere ($TEE \longrightarrow TEE$) que el control sobre los 80 tratamientos que conducen a O_2 lo ejerce un forma de pensar que puede resultar *Análisis de medios-fines* pero también puede describirse por *Hill Climbing*, con resultados muy similares. Aquí el control sobre la semiosis no depende de las operaciones intrínsecas del RN depende de una forma de pensar.

Como se puede apreciar en la respuesta del estudiante, tampoco se movilizó otra representación de n en otro registro semiótico (al menos implícito) que permitiera ejercer el control sobre la semiosis. En definitiva este primer análisis lleva evidencia en contra de los principios de la TRS 1, 4 y 5.

Céntrese ahora el segundo análisis en la respuesta del E_8 al problema 1. Este problema fuera del nivel primario es, sin dudas, rutinario. Aquí el reto está en que los estudiantes deben resolverlo por otra vía que no sea el álgebra.

Problema 1. En la evaluación de una prueba, Jimmy obtuvo cinco puntos más que su hermana Tania. La suma de la calificación de Jimmy y la calificación de Tania es 17. ¿Cuál fue la calificación de Jimmy?

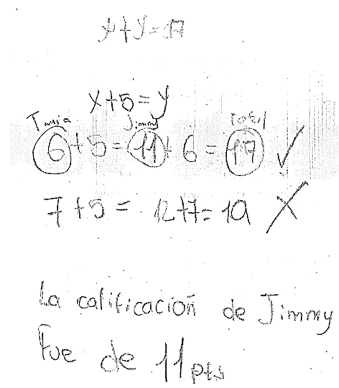


Figura 2 Problema 1 y respuesta del estudiante E_8.

Una descripción en términos de la TRS (no disponible para los estudiantes en el nivel primario) de una posible respuesta puede ser la siguiente:

1. Sea la calificación de Jimmy (J) y la de Tania (T). Aquí se aplicó la función discursiva de designación de la lengua natural.
2. $O_1 =_{df}$ primera oración del problema.

   $R_1^{RLN}(O_1) \longrightarrow^{C} R_2^{RA}(O_1): J = T + 5.$
3. $O_2 =_{df}$ segunda oración del problema, $O_3 =_{df}$ tercera oración del problema.

   $R_1^{RLN}(O_2) \longrightarrow^{C} R_2^{RA}(O_2): J + T = 17.$
4. $R_2^{RA}(O_2) \longrightarrow^{T} R_3^{RA}(O_2): T = 17 - J$ despejando T en $R_2^{RA}(O_2)$.
5. $R_2^{RA}(O_1) \longrightarrow R_3^{RA}(O_1): J = 17 - J + 5$ sustituyendo $R_3^{RA}(O_2)$ en $R_2^{RA}(O_1)$.
6. $R_3^{RA}(O_1) \longrightarrow R_4^{RA}(O_1): J = 22 - J$ reduciendo términos semejantes.
7. $R_4^{RA}(O_1) \longrightarrow R_5^{RA}(O_1): J + J = 22$ sumando J en ambos lados.
8. $R_5^{RA}(O_1) \longrightarrow R_6^{RA}(O_1): 2J = 22$ reduciendo términos semejantes.

9. $R_6^{RA}(O_1) \longrightarrow R_7^{RA}(O_1)$: $J = 11$ dividiendo por 2 en ambos lados.

10. $R_7^{RA}(O_1) \longrightarrow^{C} R_8^{RLN}(O_1) = O_3$: La calificación de Jimmy fue de 11 puntos.

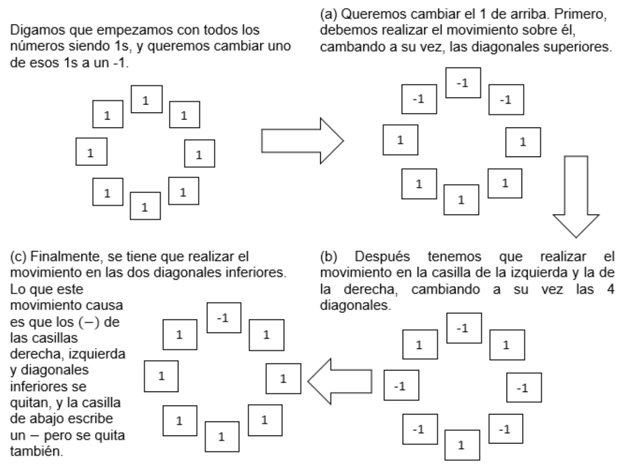
Con lo anterior se ilustra cómo se puede caracterizar en términos de transformaciones de RS el proceso de solución del problema, donde se parte de un cambio de representación al registro algebraico y el control sobre los tratamientos es ejercido por las operaciones intrínsecas del registro algebraico. Sin embargo, en el análisis anterior el control fue ejercido todo el tiempo por una forma de pensar, cada número tachado respondía a esta.

Ahora bien, haciendo una comparación $TEP \longrightarrow TEE$ el estudiante E_8 muestra habilidades para efectuar las conversiones tipo (RLN, RA) de O_1 y O_2, aunque hizo implícitamente la operación discursiva de designación. Sin embargo, el control sobre las transformaciones semióticas que llevan a la solución no lo ejercen las operaciones intrínsecas del RA pues están fuera de su dominio. El *Método Ensayo-Error* explica el control ulterior sobre la semiosis.

Véase ahora un ejemplo de respuesta de un estudiante al problema 3 de la segunda prueba de entrenamiento de primer nivel (enero 2020).

Problema 3. Se posicionan ocho números sobre un círculo de tal forma que cada número es o el número 1 o el número -1. En un movimiento se cambian uno de los números y sus dos vecinos sobre el círculo de signo (es decir, el 1 se vuelve -1 y el -1 se vuelve 1). Demostrar que de cualquier configuración inicial de estos ocho números se puede obtener cualquier otra configuración de $1s$ y $-1s$ deseada haciendo repetidamente este tipo de movimientos. Por ejemplo, de una configuración de $1,1,1,1,1,1,1,1$ sobre el círculo se puede obtener $-1,-1,1,1,1,1,1,1$.

Para poder comprobar que se puede hacer cualquier combinación de 1s y -1s deseada, es tan fácil como comprobar que es posible cambiar el signo de un solo número, sin alterar los signos de los otros 7.
Para cambiar un solo signo, sin alterar los otros se debe hacer esto:



Este proceso hace real la afirmación de que se puede hacer cualquier combinación de 1s y -1s. Sin importar la posición del 1 o -1 cuyo símbolo se quiere cambiar, siempre será posible hacerlo. Para llegar a -1,-1,1,1,1,1,1,1, es tan simple como realizar los movimientos con el primer 1 y luego en el segundo. El símbolo de ningún otro 1 será alterado

Figura 3 Respuesta reescrita del estudiante en forma de narrativa.

La iniciativa no puede ser explicada en términos de transformaciones semióticas entre registros heterogéneos. Más bien todo el proceso de semiosis puede ser modelado por las etapas del pensamiento reflexivo de Dewey (1997) donde el razonamiento inicial responde a ejecución conjunta de las etapas de aparición de ideas, intelectualización de la dificultad y elaboración de la hipótesis. Los pasos del (a) hasta el (c) componen el razonamiento y comprobación de hipótesis.

Por su parte, el diseño es una forma que tienen los estudiantes de estructurar sus textos. Los recursos que se utilizan pueden ser flechas, espacio para separar, conectar y organizar los diferentes elementos de los textos para crear una coherencia interna. La intención del diseño es transmitir significado al dividir y dirigir la atención de un intérprete, así como mostrar una temporalidad que puede evocar el orden del proceso, actividades o ideas que se quieren representar.

Otra posible interpretación de la respuesta de este estudiante es tomar su semiosis en la forma de diseño, en el sentido de Teledahl (2017). El estudiante estructuró el texto de su argumento (con diagramas, flechas y explicaciones) con la intención de transmitir significados y dirigir la atención de un intérprete, con un orden que evoca temporalidad. También esta semiosis puede ser caracterizada desde el punto de vista de la intencionalidad comunicativa presentada en West (2018).

Debido a que en lo anterior no hay modificaciones de signos regidas por reglas de un registro semiótico, las transformaciones mostradas en el argumento del estudiante no puede ser expresadas como conversiones o tratamientos entre registros semióticos. Por tal motivo aquí hay una manifestación de la actividad reflexiva del PM que no puede ser explicada en términos de la TRS.

5.2.2. Análisis de los resultados de la aplicación de la Actividad 1

Para la Actividad 2 se previeron en un inicio 11 estudiantes de sexto y séptimo de secundaria que estaban realizando entrenamiento. Al aplicar la actividad 1 no se pudo contar con 6 grabaciones por problemas con la tecnología. Por tanto, se cuenta solamente con el trabajo de los estudiantes codificados como O_2, O_5, O_{11}, A_3 y O_{10}. De estos se van a analizar las respuestas de los estudiantes O_{10} y O_{11}.

El estudiante O_{11} muestra dominio del significado de las fracciones en cuanto a tantas partes de un todo dividido en partes iguales. No mostró comprensión de lo que es una línea quebrada de 12 segmentos iguales (dijo en voz alta: ¿qué es quebrada?) y solo tuvo en cuenta en su razonamiento lo de los 12 segmentos iguales y que conectara dos lados opuestos. Luego se dedicó a hacer una división del cuadrado original donde la región sombreada significara 3/8 del área total del cuadrado.

No se evidenció una estrategia en particular que le facilitara la iniciativa sino que todo el tiempo estuvo en ensayo error, lo que muy probablemente no le permitió controlar que se cumpliera la condición de la línea quebrada de 12 segmentos iguales. Se pudo notar que el estudiante no supo manejar la incertidumbre a través en construcciones manejables y controlables que le permitieran darles seguimiento a las condiciones del problema ante nuevas transformaciones.

Es importante aclarar con la configuración de 6×12 elegida por el estudiante es posible lograr la línea quebrada demandada (anexo 4). También puede notarse que la abstracción del estudiante provocó periodos de silencio tal como lo advierte Armengol (2007) debido a que los procesos orientados a resolver un problema tienen prioridad sobre los procesos de pensamiento en voz alta.

El estudiante hizo el resumen (evocación) al finalizar la resolución del problema como se le indicó para paliar de alguna forma los periodos de silencio que normalmente tiene la actividad reflexiva profunda. Esto fue lo que dijo:

“Primero dividí la figura en 9, después saqué el m.c.m. de 8 y 9 que sería 72, después empecé a trazar figuras y después tracé ésta que serían 27 cuadrados de estos** sobre 72 que son los totales”*.[36]

[36] Palabras del estudiante O_{11}.

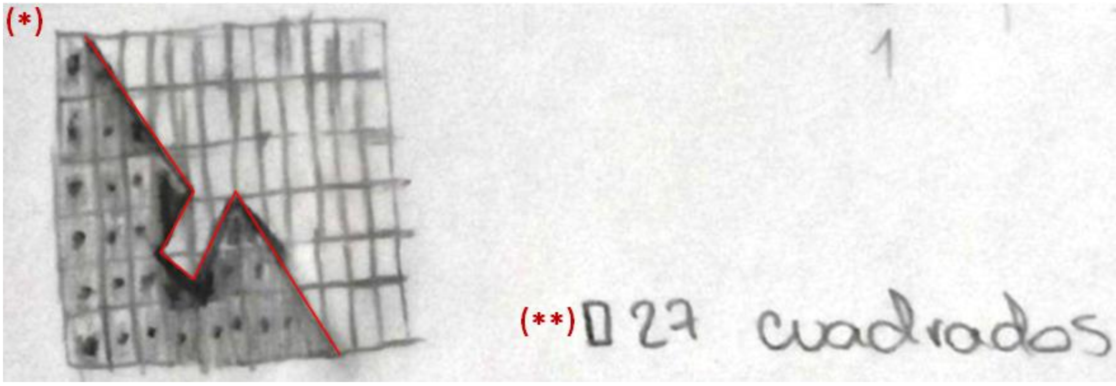


Figura 4 Respuesta del estudiante O_{11} al problema 1.

Esta estrategia trazada por el estudiante se fundamenta en los conceptos m.c.m., fracción y fracciones equivalentes. Esto conlleva a un nuevo denominador de una fracción equivalente donde es posible encontrar su numerador aplicando transformaciones equivalentes con se muestra en la figura 5.

$$\frac{27}{72}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

Figura 5 Estudiante O_{11} muestra los tratamientos que justifican su respuesta.

La dificultad conceptual que manifiesta al confundir rectángulo con cuadrado, junto a la dificultad conceptual de qué es una línea quebrada de 12 segmentos iguales, condujo a las dificultades del razonamiento para controlar el cumplimiento de las condiciones del problema.

El otro detalle relevante del razonamiento del estudiante es que escogió las dimensiones $6 \times 12 = 72$ las cuales pueden ser representadas en registro icónico y que pueden ser interpretadas perfectamente al analizar la figura de análisis.

El estudiante O_{10} lee el primer problema y se pregunta: *“¿qué es una línea quebrada? No sé qué es una línea quebrada, vamos para el otro.”*[37] Entonces lee el segundo problema.

“Todos estos cincuenta números impares son de una o dos cifras, del 1 al 99. ¿Cuál es el mayor número divisible por 11?, o sea, un múltiplo de 11 que se pueda lograr tachando 70 dígitos. Bueno, la pregunta es: ¿cuántos dígitos tiene n?.”[38] A continuación escribe y dice en voz alta exactamente lo que escribe:

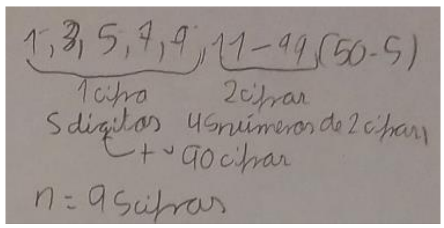


Figura 6 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

Luego se pregunta: *“¿qué es un número divisible por 11?”*[39], escribe y relata en voz alta exactamente lo que escribe:

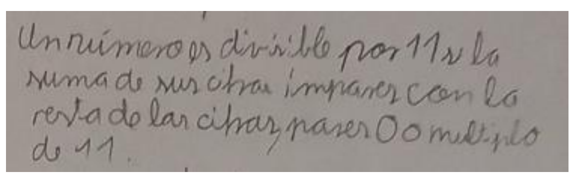


Figura 7 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

“Pero sabemos que el n tiene 95 cifras, entonces debemos calcular cuáles de éstas son múltiplos de 1 y cuáles de éstas con 3, con 5, con 7 y con 9. Entonces, ¿cuántos

---

[37] Palabras del estudiante O_{10}.

[38] Ibídem.

[39] Ibídem.

1s hay?[40] Humm, no creo que esto por ese lado de contar cuántos números de cada uno." Así el estudiante O_{10} quiere decir que se desentiende de tomar el camino de contar estos dígitos en el número n y trata de simplificar la situación como puede apreciarse en lo que sigue: *"Si tenemos 95 dígitos de* n *después de tachar* $95 - 70 = 25$ *dígitos…"*.[41]

"[…] Entonces 25 dígitos para n, tenemos que hacer que este sea más grande. Bueno, puede ser un número conformado por 9s y 8s que serían los números más grandes. O sea, que los primeros sean puros 9s y los segundos 8s y así podemos hacer el número máximo posible. OK, ¿cuántos 9s hay? OK, hay cinco 8s […]".[42]

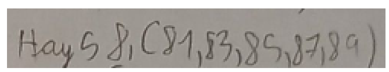


Figura 8 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

"…Hay 15 9s …"[43]

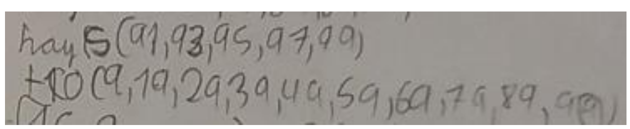
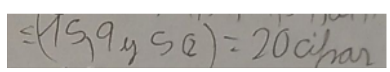


Figura 9 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

"…Hay quince 9s y cinco 8s que es igual a 20 cifras …"[44]



---

[40] Palabras del estudiante O_{10}.

[41] Ibídem.

[42] Ibídem.

[43] Ibídem.

[44] Ibídem.

Figura 10 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

"… Ahora contemos los 7s, obviamente hay más de cinco porque …"[45]

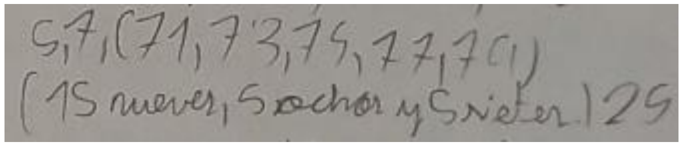


Figura 11 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

"…Si son 25 números tengo que organizar que la suma de 13 impares sea igual a 12 pares (la suma)…"[46]

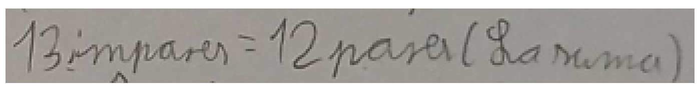


Figura 12 Fragmento de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

Luego el estudiante se enfrasca en el ensayo error, sin percatarse de la estrategia simplificadora de balancear las sumas de dígitos de los lugares pares y de los lugares impares, primero logrando la magnitud de la diferencia y luego desagregar esta diferencia restando la mayor cantidad que se pueda comenzando desde el dígito más a la derecha luego saltarse un lugar a la hacia la izquierda y restar lo mayor posible y así hasta que se elimine la diferencia.

[45] Palabras del estudiante O_{10}.

[46] Ibídem.

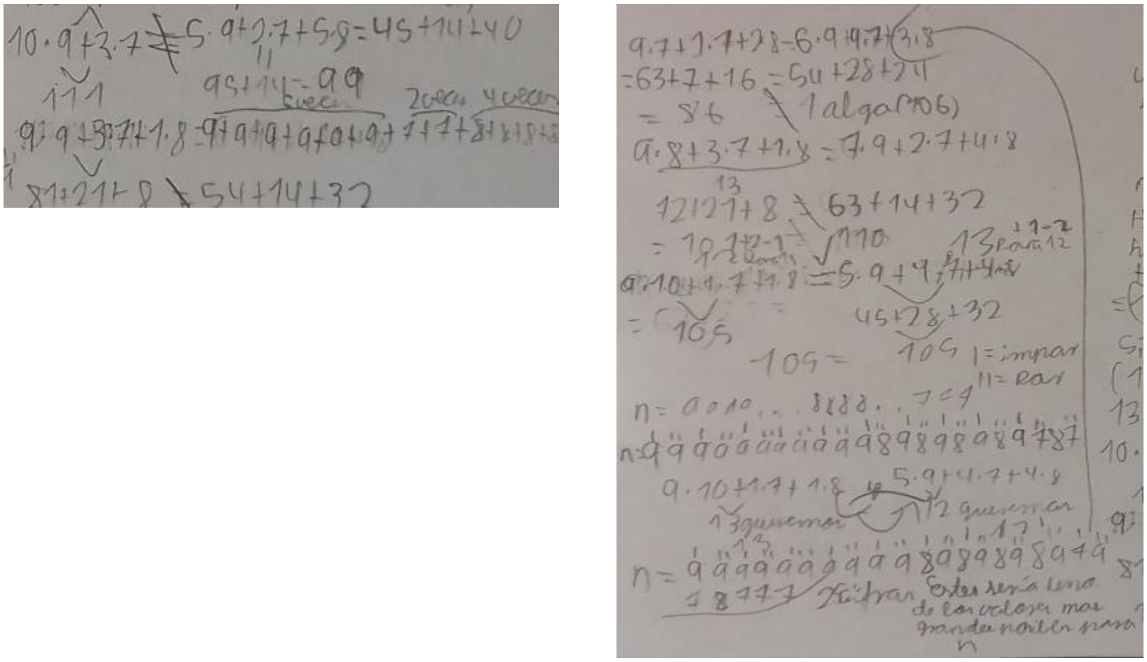
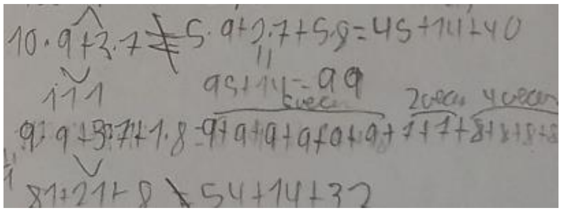


Figura 13 Fragmentos de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

El registro del habla del estudiante que es simultáneo con la escritura que se ha mostrado anteriormente no aporta nada para clarificar el por qué no mantuvo la alta calidad de su pensamiento como fue mostrando hasta esta altura. Hasta este momento resulta inexplicable por qué se perdió en el simple hecho de verificar las sumas de los dígitos de los lugares pares e impares como se muestra:



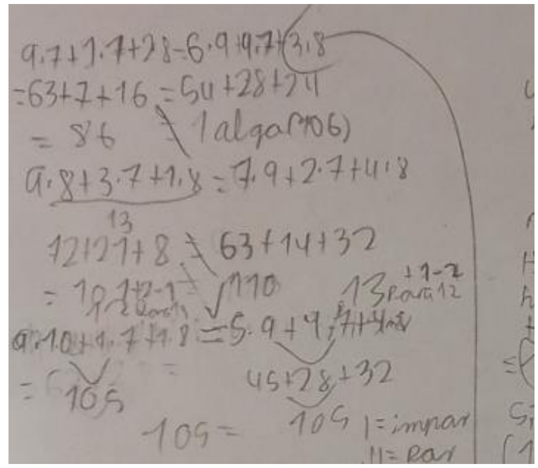


Figura 14 Fragmentos de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

Sin embargo, en lo siguiente se puede ya vislumbrar cuál es el origen de las dificultades de sus análisis:

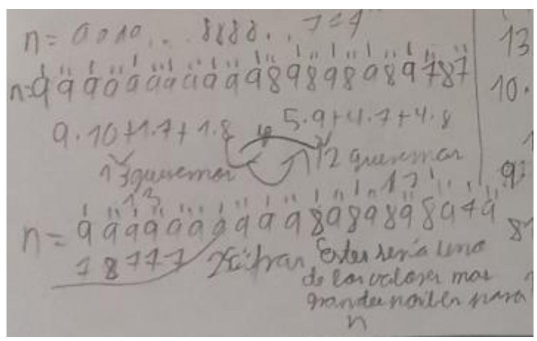


Figura 15 Fragmentos de la respuesta del estudiante O_{10} al problema 2.

El estudiante creyó todo el tiempo que debía mantener los mismos dígitos (quince 9s, cinco 8s y cinco 7s) para controlar que el número siguiera siendo el mayor posible. Trató de equilibrar las sumas moviendo convenientemente los dígitos para que ello fuese posible. Perdió el control de la situación porque no tuvo en cuenta el costo que tendría modificar números cada vez más alejados del extremo derecho del número para seguir posibilitando que este sea el mayor posible.

A modo de resumen de estos dos últimos análisis se puede afirmar que se notó una actividad reflexiva mediatizada por una semiosis en la que predominó la función de expresión por sobre la de tratamiento. Los estudiantes no establecieron una conexión sinérgica entre dos registros semióticos en ninguna de las dos respuestas y la hilación del argumento no puede expresarse en términos de transformaciones de RS a través de las operaciones intrínsecas de un registro semiótico.

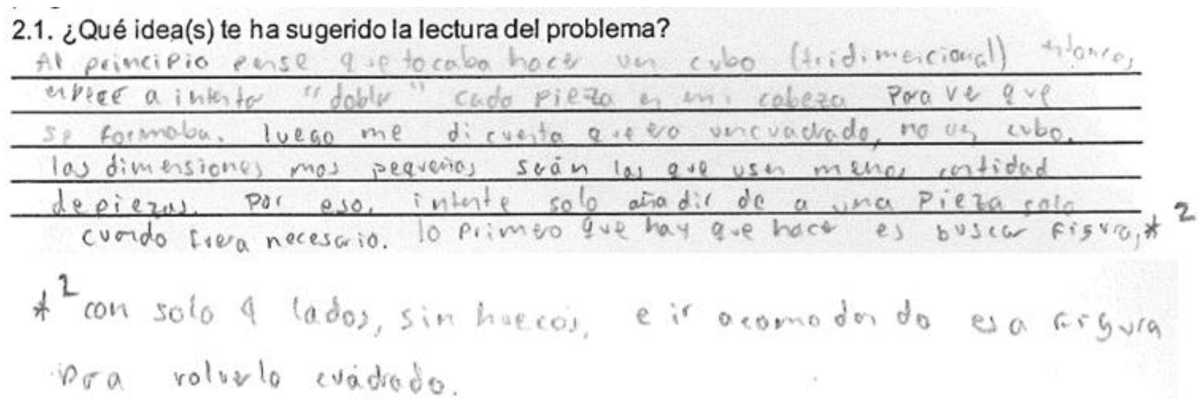
5.2.3. Análisis de los resultados de la aplicación de la Actividad 2

El problema de la Actividad 2 está diseñado con la intencionalidad de dar cobertura a identificar el concepto de *mínimo común múltiplo* (m.c.m.) entre dos números y así el estudiante adquiera el control sobre la semiosis. No obstante, el concepto permaneció de incógnito para todos aunque esto no influyó en la efectividad que fue del 100%. De suerte que se pueden probar casos y las respuestas de los estudiantes se pueden interpretar en términos de tratamientos en el RFI.

En esta actividad participaron 10 estudiantes y mostraron una iniciativa no basada en la conversión entre unidades de significado de registros semióticos heterogéneos, sino que desarrollaron una actividad reflexiva cuya fuente de ideas fueron esencialmente conjeturas de los estudiantes y que aceptaron o rechazaron en la medida que pudieron apreciar sus consecuencias. La estrategia más común utilizada para control de la semiosis fue el método de ensayo-error.

Los códigos para identificar los estudiantes participantes fueron: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 y 11. Resultan particularmente relevantes las respuestas de los estudiantes 1, 2 y 10.

En la Figura 16 (en el inciso 2.1) se puede notar algo muy interesante y es lo que se puede calificar como un tratamiento mental de la situación sin semiosis evidente. Retomando las ideas de Duval (2004), en la semiosis debe haber transformaciones evidentes de signos por tanto aquí está ocurriendo un momento en que hay noesis sin semiosis.



2.1. ¿Qué idea(s) te ha sugerido la lectura del problema?

Al principio pense que tocaba hacer un cubo (tridimencional) entonces, empece a intentar "doblar" cada pieza en mi cabeza para ver que se formaba. luego me di cuenta que era un cuadrado, no un cubo. las dimensiones mas pequeñas serán las que usen menor cantidad de piezas. Por eso, intente solo añadir de a una Pieza solo cuando fuera necesario. lo primero que hay que hacer es buscar figuras *2

*2 con solo 4 lados, sin huecos, e ir acomodando esa figura para volverlo cuadrado.

Figura 16 Respuesta del estudiante 1.

En cuanto al estudiante 2, en el inciso 2.2 (Figura 17) se puede notar cómo una conjetura toma el control de la semiosis y cómo no hay evidencia escrita de por qué desecha el rectángulo de 3x5, está claro que ese “tratamiento” ocurrió a nivel de las RM. De igual forma sucedió con la figura correcta que está al lado.

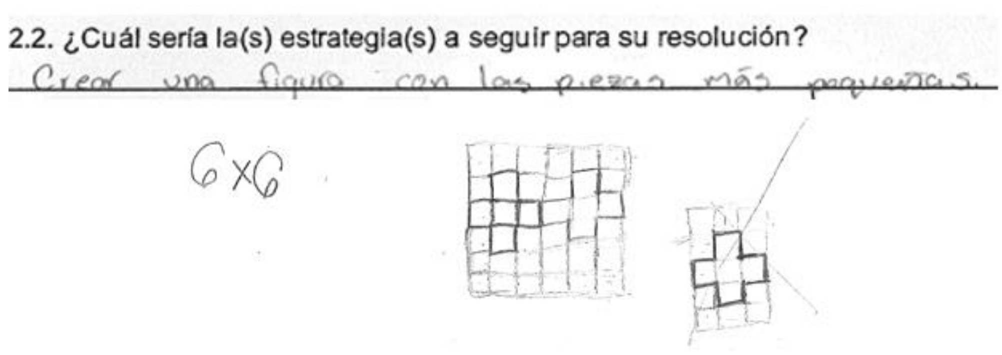


Figura 17 Parte de la respuesta del estudiante 2.

El caso de la respuesta del estudiante 10 a la pregunta 3 (Figura 18), resulta interesante pues puede notarse que intenta evadir el método de ensayo-error y para eso elimina casos posibles con un razonamiento poderoso. En este sentido, sabe que una de las dimensiones del rectángulo (formado por la combinación de piezas que se quiera) tiene longitud múltiplo de 3 y que no podía comenzar con 3 pues la otra dimensión es mayor que 3 en cualquier caso.

De esta manera, el estudiante garantizó el control de la construcción del cuadrado más pequeño. Si lograba un arreglo entre las piezas dadas que formara un cuadrado de 6x6, no había duda de que era el requerido por el problema. La cuestión esencial aquí radica en que este razonamiento no cabe explicarlo como resultado de conversiones entre registros semióticos. En todo caso es el resultado del ejercicio de una forma de pensar conocida como Principio de los Extremos (Reyes-Santander, 2014).

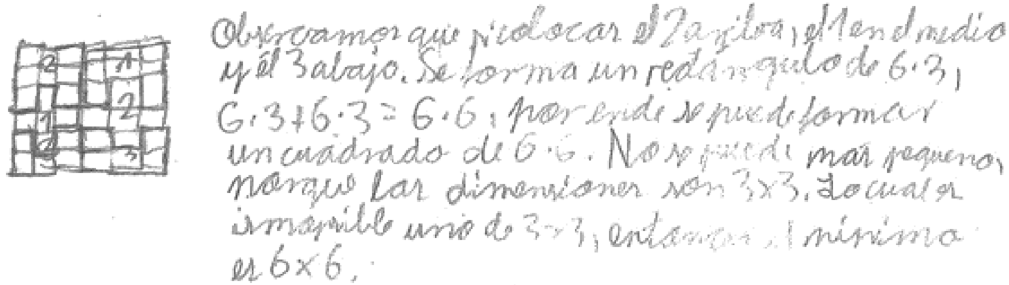


Figura 18 Parte de la respuesta del estudiante 10.

5.2.4. Análisis de los resultados de la aplicación de la Actividad 3

La idea fundamental de esta actividad es notar qué tanto aporta un cambio representacional del problema en la consideración e implementación de una estrategia de solución. Seguidamente se muestra el desempeño de dos estudiantes en el problema 1 de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2022.

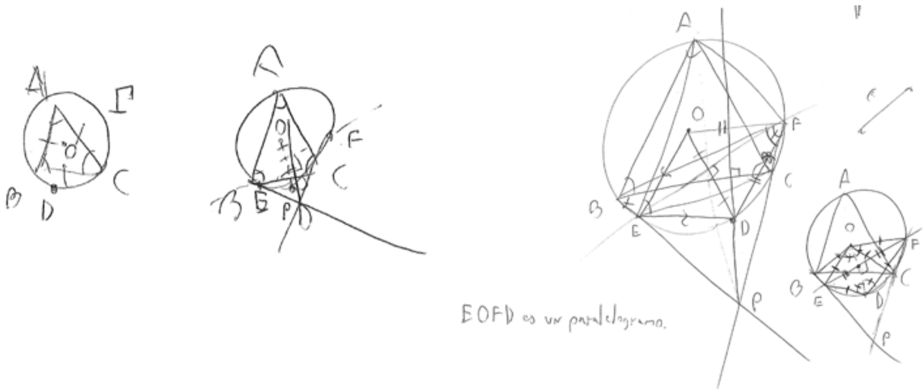


Figura 19 Representaciones en el RFI realizadas por el estudiante E_3.

El estudiante fue realizando las conversiones $R_1^{RLN}(O_i) \longrightarrow^{C} R_2^{RFI}(O_i)$ donde $i = 1{,}2{,}3{,}4$ tomando como unidades textuales a las oraciones. Como se dedicó a hacer esbozos se le hizo la pregunta: ¿le dificulta en algo hacer un diagrama en lugar de una representación rigurosa?, a lo que respondió: *"No, pues cuando estoy trabajando el problema por primera vez me gusta mucho hacerlo bien detallado con regla y compás porque hay cosas que uno ve cuando dibuja bien los problemas. Por ejemplo, si hay puntos que son colineales si no los dibujo bien pues no me van a quedar colineales y entonces no me voy a dar cuenta. Como ya he visto este problema antes tengo más o menos una idea de que pasa."*[47]

Luego pasa a hacer dos líneas auxiliares $\overline{AF}$, $\overline{EC}$ y $\overline{AE}$, por lo que se le pregunta: ¿qué le motivó a hacer esas líneas auxiliares? El estudiante respondió: *"Como todas están sobre el círculo yo voy a empezar a sacar ángulos en todos los puntos y como estos ángulos son de 60° ya yo los pongo exactos en mi hoja. Qué más puedo hacer.*

[47] Palabras del estudiante E_3.

Humm […] Voy a empezar a trabajar el problema para atrás, entonces voy a asumir que lo que quiero demostrar es verdad para ir trabajándolo y llegar a algo que yo pueda demostrar."[48]

"Bueno, voy a hacer otro dibujo. A mí me gusta hacer siempre varios dibujos de un problema de geometría porque hay cosas que puedo no estar viendo en uno de los dibujos y darme cuenta en otro"[49]*.* Hubo periodos de silencio donde el estudiante no mostró un estrategia definida para orientarse, solo marca amplitudes y señala segmentos congruentes en una suerte de acumulación de información en los distintos esbozos que construye.

Este mismo problema el estudiante E_1 lo intentó realizar y construyó la representación con instrumentos. Sin embargo, se quedó sin iniciativa ante lo cual se le pregunta: ¿cuáles son las causas de las dificultades que estás afrontando en este momento? Y responde: *"en este momento estoy buscando qué ángulos son los que sirven para poder tener las perpendiculares."*[50]

"Por ejemplo, sé que estos miden 90° y si demuestro que algunos de estos triángulos más chiquitos […] son semejantes a algunos de estos triángulos más grandes entonces eso significa que este ángulo también mediría 90°, solo que no estoy encontrando qué ángulos podría utilizar en estos momentos".[51]

---

[48] Palabras del estudiante E_3.

[49] Ibídem.

[50] Palabras del estudiante E_1.

[51] Ibídem.

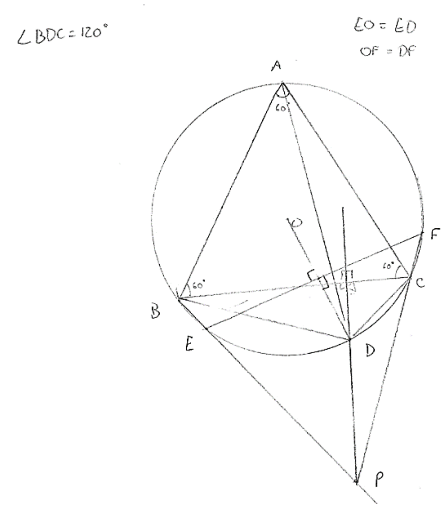


Figura 20 Representaciones en el RGe realizadas por el estudiante E_1.

Valorando la propuesta de Duval (2017) en que constituye tratamiento del RGe la deconstrucción de figuras D2 en D1 para posibilitar todo posible reconocimiento de figuras D2, el autor de esta tesis es del criterio de que no aporta a una economía de la semiosis o a una racionalidad del PM basado en la exploración mínima de casos. En este análisis tal parece que el manejo de la incertidumbre, ante la multitud de posibilidades trasciende lo semiótico y necesariamente acude a las RM.

Respecto al problema 2, este fue abordado exitosamente por dos estudiantes los cuales hicieron un estudio de casos riguroso, mostrando control sobre cada razonamiento y llegando a una generalización correcta.

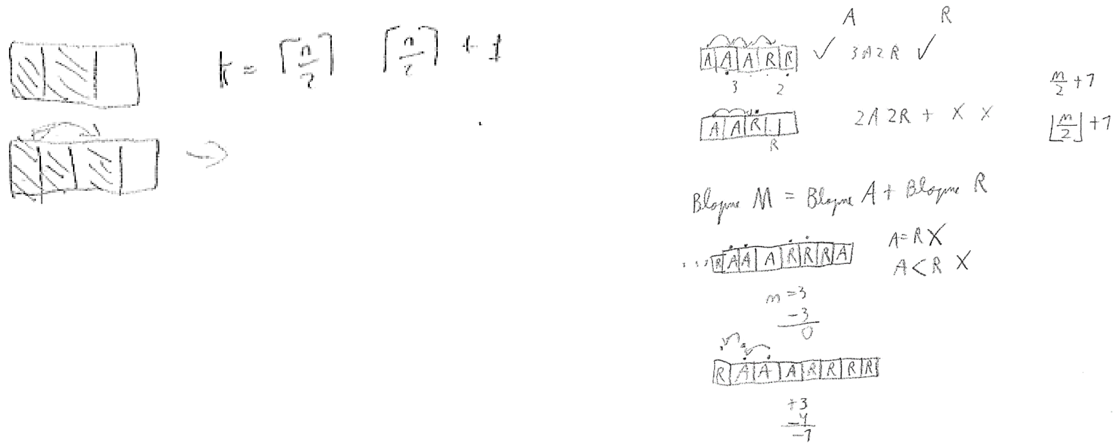


Figura 21 Representaciones en el RFI realizadas por los estudiantes E_1 y E_2.

5.3 Valoración del alcance de la TRS de Duval como teoría para describir el funcionamiento cognitivo del PM en la resolución de problemas de olimpiadas

Los trabajos de Raymond Duval sobre la TRS son prolíficos y en todos ellos subyace la intencionalidad del autor de ofrecer una aproximación semiótica a la educación matemática, que permita darle mayor objetividad a los análisis de comprensión y del funcionamiento cognitivo del PM. No obstante, la complejidad de estos fenómenos hace que cualquiera de las teorías en educación matemática tengan solo un reducido horizonte de aplicación.

Es así que, en la presente tesis se pretende exponer a continuación los alcances y limitaciones de la TRS que se han podido identificar como parte de la investigación que la fundamenta.

ALCANCES DE LA TRS DE DUVAL EN EL CONTEXTO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

- Existen determinados problemas (como los del álgebra temprana) donde esta teoría manifiesta máxima coherencia y la producción escrita puede describirse, hasta cierto punto, en términos de transformaciones de representaciones semióticas.
- Se considera aquí como muy oportuna la idea de describir y planificar el aprendizaje sobre la base de variables cognitivas desagregadas hasta los niveles más elementales y sustentadas en operaciones tales como las denominadas como tratamiento y conversión.
- También constituye importante la idea de que cuando se trabaja con representaciones específicas de un concepto matemático, se debe variar el contenido cognitivo de las mismas y diversificarlas para evitar generalizaciones de poco peso o utilidad para el PM.
- Los sistemas semióticos de representación no son sólo “formas para vaciar el contenido mental” sino que son el medio que permite exteriorizar, derivar y conectar ideas matemáticas en la medida de las posibilidades que ofrecen sus posibles tratamientos.
- Estos sistemas también son un complemento para enfrentar las dificultades de retención de la información en la memoria y la de potenciar la comprensión de dicha información (por el desarrollo simbólico) cuando esta supere el reducido foco de atención con que opera el cerebro.

LIMITACIONES

En la revisión documental y en la aplicación de la actividades se pudo notar que:

- La limitación esencial de la TRS a criterio del autor de esta tesis es el intento de supeditar la complejidad del PM como proceso a su manifestación como resultado (transformaciones de representaciones semióticas). La supuesta omnipresencia de estas operaciones en la actividad matemática no indica necesariamente que sólo se debe tratar con las mismas.
- Por otra parte, la TRS sólo puede aludir a lo que es comunicable o explícito pero el PM tiene un componente tácito, implícito, no comunicable que es relativo a las intuiciones y a la imaginación, que comúnmente sus efectos son apreciados en la resolución de problemas no rutinarios.
- La iniciativa y el control durante la resolución de problemas van más allá que lo sugerido por Duval (2017) como la operación cognitiva crucial que es extraer lo que es matemáticamente relevante y que según este autor es lo que permite resolver cualquier problema. En la aplicación de la actividad 3 se pudo observar que un cambio de representación no significa que un problema esté prácticamente resuelto.
- La idea de que el “objeto matemático” emerge como resultado del manejo de sus diferentes representaciones semióticas debe revisarse pues si toda representación es cognitivamente parcial respecto a lo que representa y no representa los mismos elementos significativos de un mismo contenido conceptual con respecto a otra RS, cabe preguntarse: ¿será que unívocamente varias RS evocan un mismo “objeto matemático”?

- Por otra parte, cuando el estudiante se enfrenta a un problema de competiciones no existe esa heterogeneidad de representaciones semióticas o esa multiplicidad de representaciones que permitan reconocer de inmediato un “objeto” matemático. La consecuencia de ello es que ese “objeto” se debe intuir o hipotetizar sobre la base de poca información.
- La representaciones mentales, tales como los conceptos, no pueden dejarse a un lado cuando se investiga causas de incomprensión pues toda comprensión es básicamente conceptual. Aunque las RM de otro no puedan ser “leídas”, las matemáticas escolares son una práctica social planificada y existe un universo de temas y conceptos que se constituyen como significados compartidos, que luego sirven para inferir el PM.

Conclusiones del capítulo 5

Durante la aplicación en la práctica del sistema de actividades y el análisis de resultados, surgieron algunas contradicciones con algunos de los principios de la TRS declarados en el epígrafe 2.3.1.

En ocasiones, la iniciativa no puede ser explicada en términos de transformaciones semióticas entre registros heterogéneos y el PM ocupa este rol mediante la actividad reflexiva. El control sobre la semiosis lo tomaron formas discursivas tales como el diseño, para transmitir los significados de una manera coherente y existieron transformaciones en el argumento del estudiante que no pudieron ser expresadas como conversiones o tratamientos entre registros semióticos.

Por otra parte, también se notó que el control sobre la semiosis no siempre depende de las operaciones intrínsecas del RN, depende de una forma de pensar. No se pudo tampoco observar la movilización de al menos dos registros semióticos en ninguna de las respuestas analizadas siendo todo esto evidencias en contra de los principios de la TRS 1, 4 y 5.

En relación estrecha con lo anterior, también en ciertos momentos de la aplicación del sistema de actividades ocurre que el principio 4 no se manifiesta porque en los periodos de la actividad reflexiva, en que el PM se mueve entre las categorías aprendidas del estudiante no puede afirmarse que no está desempeñando una actividad matemática. Si se acepta lo contrario, se estaría aceptando que existe una dependencia fuerte de la actividad matemática en relación con procesos no matemáticos.

En cuanto al principio 5, se pudo constatar cómo en ocasiones no existió coordinación sinérgica de registros semióticos heterogéneos. De manera general, cuando la semiosis sólo cumple una función de expresión es muy poco probable notar tal coordinación sinérgica.

CONCLUSIONES

A título de conclusiones generales de la investigación, se tienen las siguientes:

- Toda intervención didáctica en las matemáticas debe concebir al estudiante como ente activo que tiene un pensamiento soportado en una jerarquía de categorías formadas paulatinamente durante sucesivas experiencias. Tampoco es oportuno dictar prescripciones que van en contra del impulso natural de enfrentar desafíos, cuestiones que generen asombro, intriga o sorpresa como lo hacen los problemas no rutinarios y/o retadores bien logrados.
- La resolución de problemas no rutinarios como experiencia de aprendizaje estimula al pensamiento a manifestarse y, por ende, ofrece oportunidades para su estudio y caracterización. Así también provocan a la imaginación y la creatividad, haciendo que las redes conceptuales de los estudiantes se enriquezcan continuamente.
- Deben considerarse los espacios de competiciones matemáticas como espacios creadores de oportunidades no sólo para desarrollar talentos, sino también para que los estudiantes (que estén motivados por ello) alcancen su nivel óptimo en matemáticas.
- La aproximación semiótica a la educación matemática propuesta por la TRS, simplifica excesivamente el funcionamiento cognitivo del PM y la comprensión en matemáticas porque no distingue entre el pensamiento como proceso y como resultado.

- Lo conceptual y lo semiótico van de la mano en la actividad del PM. Como bien afirma Radford (2006), el PM se caracteriza tanto por la mediación semiótica como por su identidad como praxis reflexiva. La teorías en educación matemática que nieguen el necesario equilibrio entre estos dos procesos, se arriesgan a constituir simplificaciones excesivas de la complejidad del PM.
- Se pudo constatar que la TRS encuentra buenas oportunidades de que se cumplan sus principios, sus métodos y que se respondan sus preguntas en sus propios términos, cuando los problemas conllevan a conversiones del lenguaje natural al algebraico. También resulta pertinente cuando se trata de un cambio de representación del lenguaje natural al registro no icónico de la geometría.
- La multifuncionalidad del lenguaje natural y los fenómenos de incongruencia que ello genera no están cubiertos por la TRS, pues las posibles variaciones del lenguaje natural que hablan de lo mismo son potencialmente infinitas y no es posible tratar explícitamente todas esas conversiones.
- Como afirma Novaes (2013) cualquier explicación cognitiva de las prácticas matemáticas y del razonamiento matemático debe permanecer abierta a un enfoque multifacético, pues además de la mediación semiótica existen otras rutas hacia la intuición matemática, como lo demuestran los logros de los grandes matemáticos invidentes que no hacen manipulaciones de signos y sin embargo tiene una forma peculiar de hacer matemáticas.

RECOMENDACIONES

Para elaborar las recomendaciones se tiene en cuenta los alcances de la investigación y aquellas cuestiones importantes que, o quedaron con un desarrollo inconcluso o bien no se trataron pero resultan de vital importancia para complementar los resultados de esta investigación.

Se recomienda:

- Una investigación que diseñe las actividades adecuadas para esclarecer el principio 2 en el que se considera que las RM son RS internalizadas. Esto es porque es la piedra angular que sustenta la pretensión de que se puede caracterizar el PM teniendo en cuenta únicamente las transformaciones semióticas entre registros semióticos heterogéneos.
- Junto a la solución de problemas no rutinarios y/o retadores es importante introducir momentos en que se compartan estrategias heurísticas para resolver problemas con determinadas características y que se estimule la categorización de los problemas en función de las estrategias de solución aplicadas.
- Identificar otros contextos de la educación matemática donde existan posibilidades de aplicar la TRS de manera efectiva y en los que es contraproducente.
- Investigar las implicaciones que tiene simplificar el lenguaje natural a la categoría de registro semiótico de las matemáticas porque tiene una función que no la tienen los demás registros previsto por Duval y que es la función de definir conceptos.

- Investigar las implicaciones que tiene valorar a los “objetos matemáticos” como emergentes de múltiples representaciones, sin tener en cuenta la parte en que emergen de una práctica social y de la negociación de significados en una comunidad matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Alves Ferreira, P. E., & Corio De Buriasco, R. (2013). Análise interpretativa de produções escritas em uma tarefa de matemática que envolve gráfico de linha. In SEMUR (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 2292-2299). Montevideo: SEMUR.

Arslan, Ç., & Altun, M. (2007). Learning To Solve Non-routine Mathematical Problems. *Elementary Education Online, 6*(1), 50-61.

Arteaga-Martínez, B., Macías, J., & Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia, 34*(1), 263-280.

Aydan Kaplan, H., & Argün, Z. (2017). Teachers' Diagnostic Competences and Levels Pertaining to Students' Mathematical Thinking: The Case of Three Math Teachers in Turkey. *Educational Sciences: Theory & Practice, 17*(6), 2143–2174.

Baldinger, E. E. (2019). Reasoning about student written work through self-comparison: how pre-service secondary teachers use their own solutions to analyze student work. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(1), 56-78.

Ballester, S., Santana de Armas, H., Hernández, S., Cruz, I., García, M., Álvarez, A., . . . Torres, P. (2000). *Metodología de la enseñanza de la matemática* (Vol. I). La Habana: Pueblo y Educación.

Bartell, T., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57–79.

Beghetto, R. A. (2017). Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into nonroutine problems. *ZDM Mathematics Education*, 1-7.

Boonen, A., Van Wesel, F., Jolles, J., & Van Der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*(68), 15-26.

Bustanul, R., & Rahmawati, D. (2017). Symbolic and Verbal Representation Process of Student in Solving Mathematics Problem Based Polya’s Stages. *International Education Studies, 10*(10), 20-28.

Caetano, M. (2020). The Effect of Different Registers of Semiotic Representations in the Problem Solving Challenge Involving Fractions. Study with Future Primary School Teachers. *International Journal of Innovative Science and Research Technology, 5*(9), 1317-1322.

Cañón, C. A., & García, M. M. (2018). Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en clases. *Ciencias Holguín, 24*(2), 10-24.

Conde, J. M., & Sepulcre, J. M. (2015). *Problemas Elementales de Olimpiadas Matemáticas*. Recuperado el 24 de 10 de 2021, de https://www.researchgate.net/publication/257403299_Problemas_Elementales_de_Olimpiadas_Matematicas

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 177-196.

D'Amore, B., Pinilla, M. F., Lori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), 18*(2), 177-212.

Dewey, J. (1997). *How We Think.* Courier Corporation.

Díaz, J. A., & Díaz, R. (2018). Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Bolema, 32*(60), 57-74.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* (T. M. Campos, Ed.) Switzerland: Springer International Publishing.

Duval, R. (2020). Registers of Semiotic Representation. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-5). Switzerland: Springer International Publishing.

Edens, K., & Potter, E. (2008). How Students "Unpack" the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving. *School Science and Mathematics, 108*(5), 184-196.

Ernest, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 67-99.

Falk de Losada, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática venezolana, 8*(1), 15-26.

Falk de Losada, M. (2017). Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done? In ICME-13, & A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents* (pp. 329-350). Switzerland: Springer International Publishing.

Gabucio Cerezo, F., Domingo Curto, J. M., Lichtenstein Tiviroli, F., Limón Luque, M., Minervino, R. A., Romo Santos, M., & Tubau Sala, E. (2005). *Psicología del Pensamiento.* Barcelona: UOC.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Relime*(Número Especial), 197-224.

Goldstein, E. B. (2011). *Cognitive Psychology: connecting mind, research and everyday experience.* Belmont: Cengage Learning.

González-Martin, A. S., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, pp. 479–486. Bergen: ERIC.

Güss, C. D. (2018). *What is going through your mind? Thinking aloud as a method in cross-cultural psychology.* Retrieved 5 2022, from Frontiers in Psychology: https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fpsyg.2018.01292

Hanna, G., & De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*(40), 329-336.

Harel, G. (2006). Mathematics Education Research, Its Nature, and Its Purpose: A Discussion of Lester's Paper. *ZDM Mathematics Education, 38*(1), 58-62.

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM–Mathematics Education, 53*(3), 709-721.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Hernández-Morales, J. A., Castañeda, A., & González-Polo, R. I. (2019). La solución de un problema matemático no convencional por estudiantes universitarios. *Revista Científica, 35*(2), 201-215. Doi: https://doi.org/10.14483/23448350.14863.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2da ed.). Harlow: Pearson Education Limited.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2009). Symbols and mediation in mathematics education. En *Theories of mathematics education: seeking new frontiers* (págs. 213-232). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin-Heidelberg.

Moya Santoyo, J., & Georgieva Kostova, E. (2014). *Psicología del Pensamiento.* Madrid: SÍNTESIS S.A.

Mumu, J., & Tanujaya, B. (2019). Measure Reasoning Skill of Mathematics Students. *International Journal of Higher Education, 8*(6), 85-91.

Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to Utopia. In *Second handbook of research* *on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Information Age Publishing.

Novaes, C. D. (2013). Mathematical reasoning and external symbolic systems. *Logique et analyse, 56*(221), 45-65.

Peirce, C. S. (1893-1903). *El ícono, el índice y el símbolo.* (S. Barrena, Trad.).

Peirce, C. S. (1895). *Del razonamiento en general.* (I. Aragüés, Trad.)

Peirce, C. S. (1902). *Las reglas de la razón.* (M. A. Fernández, Trad.)

Pérez, D. C. (2016). *Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años).* [Tesis doctoral inédita]. Universidad Antonio Nariño.

Phelps-Gregory, C. M., & Spitzer, S. M. (2018). Developing Prospective Teachers' Ability to Diagnose Evidence of Student Thinking: Replicating a Classroom Intervention. In T. Leuders, K. Philipp, & J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11, pp. 223-240). Switzerland: Springer International Publishing.

Podestá, R., & Tirao, P. (2017). *Álgebra: Una Introducción a la Aritmética y la Combinatoria.* Recuperado de https://www.famaf.unc.edu.ar/oscari/LibroAlgebra2017.pdf.

Polya, G. (1985). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Expanded Princeton Science Library Edition, with a new foreword by John H. Conway ed.). New Jersey, USA: Princeton and Oxford University Press.

Preciado, E. (2017). *Las construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos.* [Tesis de maestría inédita]. Universidad Antonio Nariño.

Prediger, S. (2019). Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de investigación en educación matemática, 15*, 5-27.

Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 1*(Extraordinario 1), 7-21.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM, 40*(2), 317-327.

Reyes-Santander, P. (2014). Caracterización del Pensamiento Matemático: Escenarios con estudiantes universitarios y de liceo utilizando temas de la Teoría de Grupos.

Ruiz, E. F., & Madero, G. A. (2011). Representation Registers in the Solution of Calculus Problems. *Creative Education, 2*(3), 270-275.

Sampieri, R., & Mendoza, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* McGraw Hill México.

Sapti, M., Purwanto, Bambang Irawan, E., Rahman As'ari, A., Sa'dijah, C., Susiswo, & Wijaya, A. (2019). Comparing model-building process: a model prospective teachers used in interpreting students' mathematical thinking. *Journal on Mathematics Education, 10*(2), 171-184.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Usa: Universidad de California.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. In ASCD, L. B. Resnick, & L. E. Klopfer (Eds.), *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research* (pp. 83-103). Alexandria: ASCD Yearbook.

Schoenfeld, A. H. (2001). Purposes and methods of research in mathematics education. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 221-236). Dordrecht: Springer.

Sriraman, B. (2021). Uncertainty as a catalyst and condition for creativity: the case of mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 19-33.

Stege, J., Fusaroli, R., Østergaard, S., & Tylén, K. (2014). Thinking together with material representations: Joint epistemic actions in creative problem solving. *Cognitive Semiotics, 7*(1), 103–123.

Talanquer, V., Bolger, M., & Tomanek, D. (2015). Exploring Prospective Teachers' Assessment Practices: Noticing and Interpreting Student Understanding in the Assessment of Written Work. *Journal of Research in Science Teaching, 52*(5), 1-25.

Tall, D. (1994, August). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *An invited ICMI lecture.* Zurich: International Congress of Mathematicians.

Teledahl, A. (2017). How young students communicate their mathematical problem solving in writing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(4), 555-572.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfeld, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Stefe, & L. L. Hatfeld (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing* (Vol. 4, pp. 1–24). Laramie, WY: University of Wyoming.

Vinner, S. (2018). The Role of Examples in the Learning of Mathematics and in Everyday Thought Processes. En *Mathematics, Education, and Other Endangered Species: From Intuition to Inhibition* (págs. 69-86).

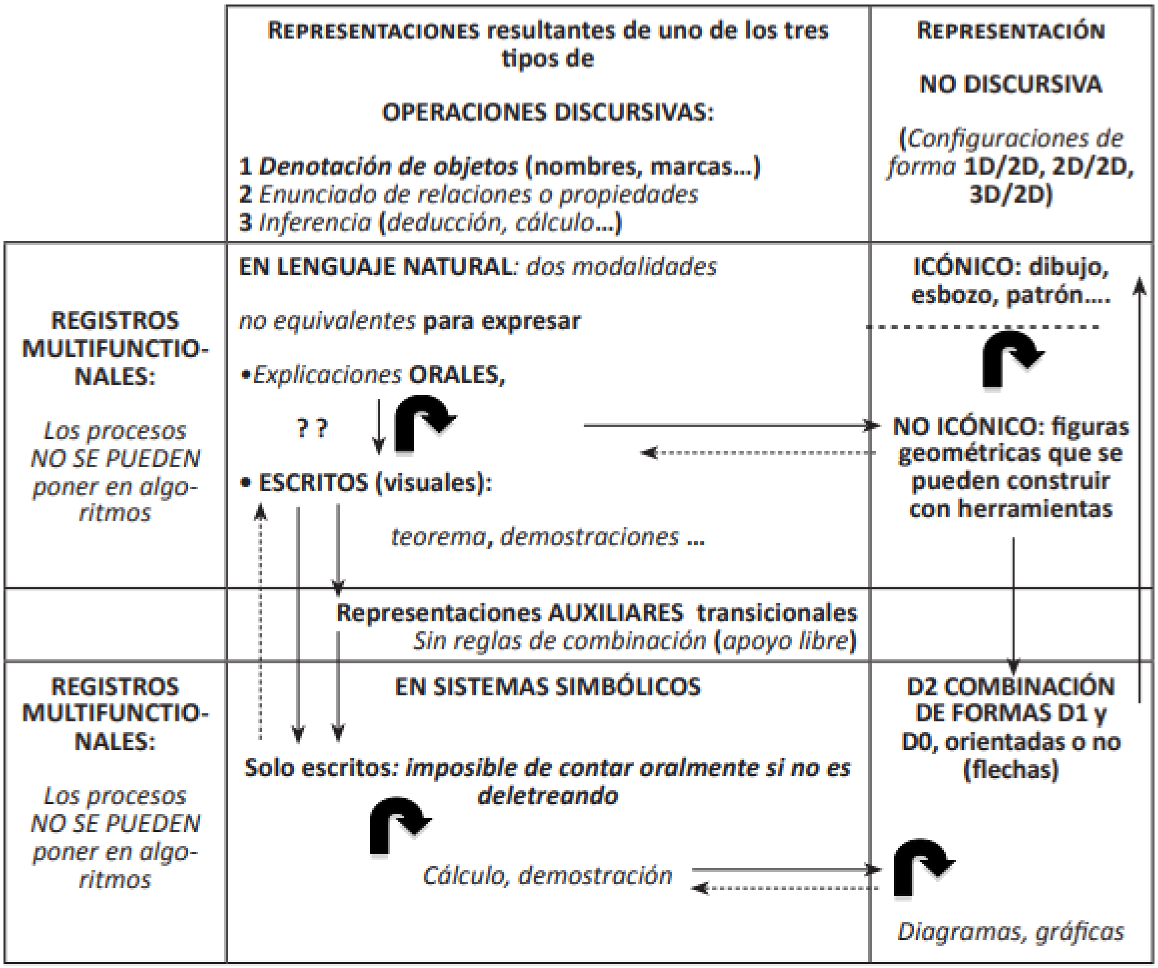
West, D. E. (2018). Narrative as Diagram for Problem-solving: Confluence between Peirce's and Vygotsky's Semiotic. In E. K. Katić, & G. Ross (Eds.), *Semiotics 2018: Resilience in an Age of Relation* (pp. 201-219). Bowling Green: Philosophy Documentation Center.

Wilson, P. H., Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 39-64.

Zeitz, P. (2007). *El arte y el oficio de resolver problemas* (2da ed.). (C. García, Trans.) John Wiley & Sons.(Obra original publicada en 2006).

ANEXOS

Anexo 1. Clasificación de las representaciones semióticas



Fuente: Duval (2017).

Anexo 2. Clasificación y denotación de los registros semióticos

Tipo de registro	**Descripción**
Lengua natural (RLN)	Para enunciar propiedades, definiciones, teoremas, etc.
Figural-icónico (RFI)	Croquis, trazos, dibujos sencillos, material manipulativo, etc., para visualizar conceptos matemáticos sin una referencia visual fiel a sus características.
Numérico (RN)	Sistema de numeración decimal.
Tabular (RT)	Facilita representaciones con arreglos dispuestos por filas y columnas para establecer relaciones y comparaciones.
Algebraico (RA)	Potente registro para expresar generalizaciones y propiedades, así como realizar modelizaciones.
Geométrico (RGe)	Permite divisiones mereológicas $2D \longrightarrow 2D$ o deconstrucciones $nD \longrightarrow (n-1)D$ a partir de unidades figurales $2D$ (cubos, pirámides, etc.), $3D$ (esferas, prismas, etc.), $2D$ (polígonos, círculos, etc.), $1D$ (líneas rectas o curvas) y $0D$ (puntos).
Gráfico (RGr)	Abarca el plano cartesiano y las posibles representaciones cuya identidad depende de un sistema de coordenadas rectangulares.

Fuente: Elaboración a partir de Duval (2017) y Arteaga-Martínez, Macías & Pizarro (2020).

Anexo 3. Solución por el profesor del problema 6 de la XXXIV Olimpiada Colombiana de Matemáticas para escuela primaria, colocándose en la perspectiva del estudiante

Problema 6. Tiempo sugerido: 6 minutos

El número n se formó escribiendo los números del 1 al 50, en orden, uno a continuación del otro:

$$n = 123456789101112131415\ldots 47484950.$$

Borrar 80 dígitos del número n que se formó, de manera que el número que quede sea el menor posible. ¿Cuál es el menor número que se puede obtener y cómo se logra?

1. Entender el problema.

   El problema no tiene complejidades en cuanto al contenido cognitivo implícito, por lo que no cabe aplicar el método de segmentación en unidades redaccionales.

2. Elaborar un plan de solución.

   2.1 Producir una RS de n que permita realizar los tratamientos necesarios para llegar a lo buscado.

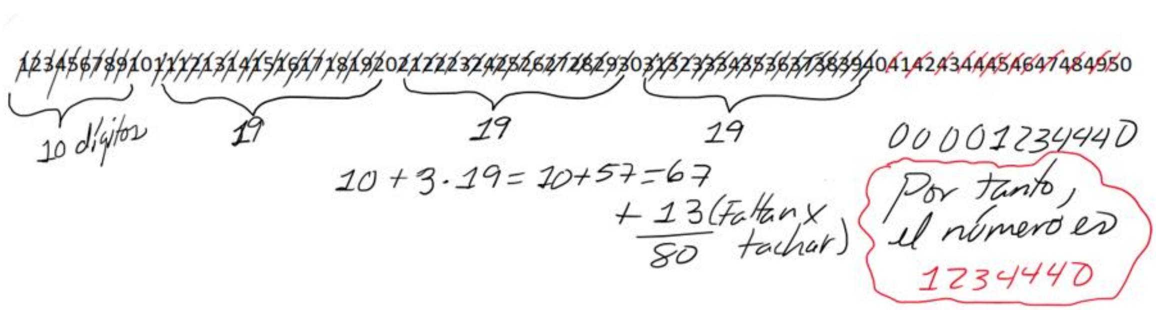
   2.2 Realizar los tratamientos (tachar 80 dígitos). Se utiliza la forma de pensar *Análisis de medios-fines* para reducir progresivamente la distancia entre lo dado y lo buscado, utilizando criterios de comparación entre números naturales y convenciones convenientes en la notación (los ceros a la izquierda se desprecian).

2.2.1 Determinar cuántos ceros tiene n (5, por simple inspección). Tachar los 67 dígitos (no nulos) entre el primer dígito de n y el cuarto cero, obteniéndose 4 dígitos nulos del número buscado.

2.2.2 Los restantes 7 dígitos del número buscado se seleccionan del número 41424344454647484950. Tachar $80 - 67 = 13$ dígitos controlando que empezando por el menor posible de la izquierda, cada nuevo dígito no tachado sea el menor posible.

2.3 Construir el número buscado con las cifras no tachadas.

3. Ejecución del plan.



4. Mirar hacia atrás.

La solución es correcta porque de 11 posibles dígitos en la configuración del número buscado, comenzando con el máximo número de ceros posible se garantiza que la cantidad de cifras del número sea la menor. Luego, se utiliza el conocimiento del sistema posicional y se determina que los dígitos de izquierda a derecha deben ser lo menor posible.

¿Qué tal si el número n termina en 500 y se tachan 800 dígitos?

¿Qué pasa si el problema inicial hubiese tenido estas últimas condiciones? Es decir, que ninguno de los análisis hechos anteriormente se hubiese realizado.

Anexo 4. Solución del profesor de los problema 1 y 2 del cuestionario de la Actividad 1

Problema 1

1. Entender el problema. En el concepto "línea quebrada compuesta por 12 segmentos iguales que conecte dos lados opuestos del cuadrado" el término "quebrada" significa que dos de los segmentos iguales contiguos no están alineados.

   El factor que genera incertidumbre es cómo construir la línea quebrada de forma tal que (a golpe de vista) puedan compararse las áreas de las dos figuras resultantes debido a que las partes que la conforman son iguales. Dado que no se utilizan mediciones, hay que hacer uso de lados de cuadrados iguales o de sus diagonales para conformar los 12 segmentos iguales.

2. Elaborar un plan de solución. Se utiliza la forma de pensar *Divide y vencerás* pues se divide el problema en subproblemas del mismo tipo y cada subproblema contiene su vez otro subproblema. La recursividad se muestra en que en el proceso de resolución se comienza por el subproblema más interno hasta llegar al más externo, que es el problema original.

   2.1. Subproblema 1. Construir una figura de donde se puedan deducir tanto fracciones de denominador 8 como de denominador 9.

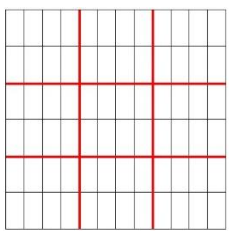
   2.2. Subproblema 2. En la figura construida verificar si es posible trazar la una línea quebrada de 12 segmentos iguales. En caso negativo de (2.2.), volver sobre el paso (2.1.).

2.3. En caso positivo de (2.2.) determinar cuántas figuras iguales se deben tomar que signifiquen $\frac{3}{8}$ del cuadrado original, lo cual puede hacerse mediante un despeje de la proporción apropiada.

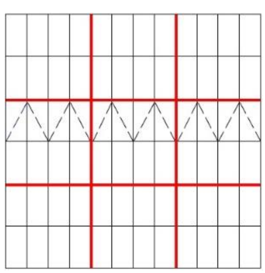
3. Ejecutar el plan de solución.

2.1. Se halla el $m.c.m\,(8,9) = 72$. De la figura con esta configuración no se pueden deducir cuadrados sino rectángulos, por tanto la línea quebrada sólo podría estar compuesta de las diagonales de esos rectángulos.

2.2. La configuración conveniente es 6×12 para lograr 12 diagonales iguales.

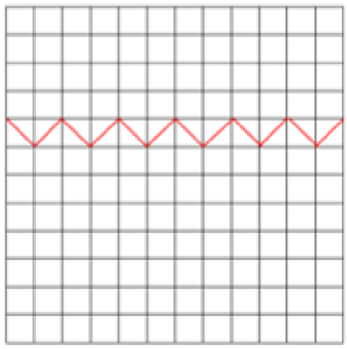


2.3. $\frac{x}{144} = \frac{3}{8} \longrightarrow x = 54$ triángulos iguales. Las dos primeras filas aportan 48 triángulos iguales y la línea quebrada determina dos 6 triángulos iguales a la parte de arriba y 6 a la parte de abajo. Por tanto, la región que queda por encima de la línea quebrada de 12 segmentos iguales, representa $\frac{3}{8}$ del área del cuadrado.



4. Mirar hacia atrás.

   La figura también puede ser la siguiente, dividiendo el cuadrado original en 144 cuadrados iguales. Sin embargo, la solución óptima es la dada anteriormente pues implica una economía de semiosis.

Problema 2

1. Entender el problema. Es necesario conocer el criterio de divisibilidad por 11 (la suma de los números que ocupan la posición par menos la suma de los números que ocupan la posición impar es igual a 0 o a un número múltiplo de 11). Reordenar los dígitos que resulten no tachados equivale a que se pueden reordenar convenientemente para resolver el problema.
2. Elaborar un plan de solución. No es conveniente elaborar un plan de solución similar al del anexo 3 pues aquí trabajar sobre la representación de n no significa una economía en la semiosis. Si los números que resulten no tachados de n se pueden reordenar, esto conduce al siguiente replanteo favorable del problema:

   Si se designa con m la cantidad de cifras del número buscado, ¿cómo lograr que sea el mayor número posible divisible por 11, a partir de los dígitos de n?

   2.1. Determinar cantidad de dígitos de m.

2.2. Determinar cuántos 9s hay disponibles hay en n, si $cantidad\, 9s < m$ entonces calcular cantidad de 8s, si $cantidad\, 8s + cantidad\, 8s < m$ y así sucesivamente.

2.3. Calcular las sumas máximas de cifras en lugares pares (S_P) e impares (S_I) que se pueden lograr con las restricciones en cuanto a cantidad de dígitos para determinar cuál de las dos posibilidades: $S_P - S_I = 0$ o $S_P - S_I = 11k$ es la que emerge para esta situación en particular.

2.4. Con el descubrimiento anterior, construir una expresión algebraica que permita obtener el control sobre el estudio de casos final.

3. Ejecutar plan de solución.

2.1. La cantidad de números puestos en cadena que forma a n se puede calcular como la cantidad de números impares que hay desde 1 hasta 100, que es 50. De ellos hay 5 de una cifra y 45 de dos cifras, por tanto, $m = 95$.

2.2. El número n cuenta con 15 dígitos 9 (15-9s), 5-8s y 15-7s.

2.3. $S_P = 101, S_I = 109, S_P - S_I = -8$, por tanto, se valora el caso $S_P - S_I = 0$.

2.4.

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	a	b	c	d	e

$$S_P = 7 \times 9 + 3 \times 8 + b + d = b + d + 87$$

$$S_I = 8 \times 9 + 2 \times 8 + a + c + e = a + c + e + 88$$

$S_P - S_I = 0 \longrightarrow b + d + 87 - (a + c + e + 88) = 0 \longrightarrow b + d - (a + c + e) = 1.$

El estudio de casos contempla la intencionalidad que desde a hasta e se vayan sustituyendo los mayores dígitos posibles. Luego, si $a = b = 7$ entonces $d - (c + e) = 1$. Aquí para $c = 6$ resulta que $e = 0$ y $d = 7$.

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	6	7	0

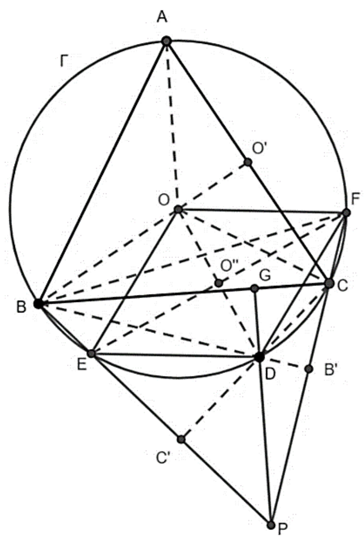
3. Mirar hacia atrás.

   Para evitar el álgebra se puede replantear el problema como encontrar el mayor número de 5 cifras que se puede formar con números del 0 al 7 de forma tal que la diferencia entre la suma de sus cifras en lugares pares y la suma de sus cifras en lugares impares resulte 1. Con esto se encuentran los últimos 5 dígitos del número buscado.

Anexo 5 Solución del profesor de los problemas de la Actividad 3

Problema 1

1. Entender el problema. Se hace un cambio de representación mediante una transformación $R_1^{RLN}(O_i) \longrightarrow^C R_2^{RGe}(O_i)$ donde $i = 1,2,3,4$ representa las unidades textuales a convertir.



Sean O' pie de la altura relativa al lado $\overline{AC}$ en el $\triangle AOC$, $G \in \overline{PD} \cap \overline{BC}$, $B' \in \overline{BD} \cap \overline{PC}$, $C' \in \overline{BP} \cap \overline{CD}$ y $O'' \in \overline{OD} \cap \overline{EF}$.

2. Elaborar un plan de solución.

   2.1 Demostrar que D es el ortocentro de $\triangle BCP$ a través del descubrimiento sucesivo de amplitudes de ángulos, utilizando criterios de congruencia, líneas auxiliares, ángulos en la circunferencia, etcétera.

3. Ejecución del plan de solución.

   (1) $\triangle AOO' \cong \triangle O'OC \cong \triangle OEO'' \cong \triangle FOO''$ por el criterio l.a.l. de congruencia.

   (2) $\therefore \triangle AOC \cong \triangle OEF \cong \triangle OBC$.

(3) $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{EF}$ por (2).

(4) $\sphericalangle EBF = \sphericalangle BFC = \sphericalangle PBF = \sphericalangle PFB = \sphericalangle BAC = 60°$.

(5) $\therefore \triangle\ BFP$ equilátero.

(6) Como $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = 120°$ entonces $\sphericalangle DOF = 60°$ y $\sphericalangle FBB' = 30°$.

(7) $\sphericalangle BB'C = 90°$ P por (4) y (6).

(8) $\triangle\ BEF \cong \triangle\ BCF$ por el criterio a.l.a. de congruencia.

(9) $\sphericalangle EBC = 60° - \sphericalangle FBC$ y

$$\sphericalangle BCC' = arco\ BE + arco\ DE = \frac{1}{2}\sphericalangle DOE + \sphericalangle BFE = 30° + \sphericalangle FBC$$

(10) $\therefore \sphericalangle EBC + \sphericalangle BCC' = 90°$ y $\sphericalangle BC'C = 90°$.

(11) $\therefore D$ es el ortocentro del $\triangle\ BPC$ y $\overline{PD} \perp BC$. ■

Problema 2

Especialización

A	A	R	✓				
A	A	R	R	×			
A	A	A	R	✓			
A	A	A	R	R	✓		
A	A	A	R	R	R	×	
A	A	A	A	R	R	✓	
A	A	A	A	R	R	R	✓

Generalización

$$k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$