Programa de Doctorado en Educación Matemática

HACIA LA GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE DE CALIDAD PARA CADA ESTUDIANTE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS RURALES

Tesis presentada para optar al grado científico de Doctora en Educación Matemática

Mg. Sandra Patricia Rojas Sevilla

Bogotá D.C., Colombia

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

HACIA LA GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE DE CALIDAD PARA CADA ESTUDIANTE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS RURALES

Tesis presentada para optar al grado científico de Doctora en Educación Matemática

Mg. Sandra Patricia Rojas Sevilla

Dirigida por

Gerardo Chacón (Ph.D)

Bogotá D.C., Colombia

2023

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, julio de 2023.

AGRADECIMIENTO

A Dios y a la Virgen María por su infinito amor.

A mis padres: Joel y Aracely por su amor y ejemplo de superación. A mis hermanas, hermanos y sobrinas, por animarme y brindarme felicidad. A mi tía Deisy, por su amor de madre.

A mi director el Doctor Gerardo Chacón por sus valiosos aportes para la consolidación de la tesis, especialmente por brindarme una oportunidad de aprendizaje de calidad y por ser para mí, ese profesor ideal.

Al profesor Osvaldo por cada vez que me escuchó y me animó, por siempre estar dispuesto a apoyarme. A cada uno de mis profesores del doctorado, Miguel Ángel, Rafael, Miguel Cruz y a mi evaluador externo Dr. Ángel Gutiérrez.

A la Dra. Mary Falk De Losada, mi admiración y cariño por la oportunidad de aprender y crecer.

A mis niños con quienes compartí tres años y fueron suficiente para quedarse en mi corazón, por ser, los estudiantes más nobles, aguerridos, resilientes e inteligentes: *Jose Daniel, Ever, Yohenis, Melani, Rosita, Juan Jose, Nicoll, Adriana, Luis Fernando, Santiago, Cristian y Luis Guillermo,* gracias por enseñarme y regalarme sueños nuevos.

A mi amada Universidad de Sucre y mi Programa de Licenciatura en Matemáticas por todo lo que me han dado a nivel profesional y personal.

A todos mis profesores de la Universidad de Sucre, especialmente a Iván Núñez.

Finalmente, a todas las personas que me apoyaron en este proceso desde mis inicios académicos hasta llegar al logro de esta meta.

DEDICATORIA

A mis amados hijos: Juan Manuel y Gabriela María

Hijo, tus ideales de cómo debe ser un excelente profesor, quedaron plasmados en esta tesis, y en mi corazón, la felicidad de tener el mejor hijo que una madre puede soñar.

Hija, en lo que duró este proceso, pasaste de ser un bebe a una niña, que me animaba ante largas jornadas de trabajo, con tu ternura me brindaste amor y comprensión.

A mi amado esposo Gabith, las demostraciones de tu amor fueron mi soporte para el logro de esta meta.

A Lalito, el amor más puro, eres fuente de motivación.

A mis abuelos, Juan y Águeda María, mis ángeles en el cielo, el amor seguramente es infinito, el mío hacia ustedes está intacto.

SÍNTESIS

El propósito de la presente investigación fue generar una metodología para el diseño de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad en la clase de matemáticas en niños de escuelas rurales, mediante el encuadre teórico de la Educación Matemática Crítica (EMC), el marco de Enseñanza para un Robusto Entendimiento (TRU, por sus siglas en inglés) y el Dominio Afectivo. Atendiendo a dos desafíos, a nivel teórico: al primer problema general al que se enfrenta el campo de la Educación Matemática, definir, medir y saber cómo crear oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante, y a nivel práctico a las carencias y debilidades en las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas para los niños rurales. La investigación se enmarca en el paradigma de investigación cualitativa, se procedió bajo la Investigación ciencia del Diseño, centrado en el desarrollo de teorías sobre los procesos de aprendizaje a través, de experimentos de enseñanza en los años 2021-2023. Se analizó la producción de doce (12) estudiantes de los grados Séptimo a Undécimo; en edades de 12 a 19 años residentes en la vereda la Floresta (Sucre - Colombia). Los instrumentos para la recolección de la información la conforman entrevistas semiestruturadas, grabaciones de audio y videos y las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA). Además, la triangulación múltiple y el contraste entre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje vs la Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) para el análisis, permitió obtener como resultados principales, una definición operativa sobre Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) para cada estudiante de un contexto rural y una metodología para la generación de estas oportunidades. Finalmente se concluyó, que los estudiantes al acceder a oportunidades de aprendizaje de calidad, las cuales están permeadas por el movimiento por los seis ambientes de aprendizajes cada uno de los estudiantes logra avanzar en las habilidades cognitivas y afectivas.

ABSTRACT

The purpose of this research was to generate a methodology for the design of Quality Learning Opportunities in the mathematics class for children from rural schools, through the theoretical framework of Critical Mathematics Education (CME), the framework of Teaching for a Solid Understanding (TRU) and the Affective Domain. Taking into account two challenges, at a theoretical level: the first general problem faced by the field of Mathematics Education, defining, measuring and knowing how to create quality learning opportunities for each student, and at a practical level, the gaps and weaknesses in the opportunities of learning mathematics for rural children. The research is part of the qualitative research paradigm, proceeded under Design Research, focused on the development of theories about learning processes through teaching experiments in the years 2021-2023. The production of twelve (12) students from grades Seventh to Eleventh was analyzed; between the ages of 12 and 19 living in the village of La Floresta (Sucre - Colombia). The instruments for collecting information are made up of semi-structured interviews, audio and video recordings, and Hypothetical Learning Trajectories (THA). In addition, the multiple triangulation and the contrast between the Hypothetical Learning Trajectory vs. the Real Learning Trajectory (TRA) for the analysis, allowed to obtain as main results, an operational definition on Quality Learning Opportunity (OAC) for each student of a rural context and a methodology for generating these opportunities. Finally, it was concluded that the students, by accessing quality learning opportunities, which are permeated by the movement through the six learning environments, each one of the students manages to advance in cognitive and affective skills.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Los avances investigativos en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas han sido prolíficos y de alta calidad (Kaiser, 2019). Se observa, una plétora de estudios dedicados a mejorar el aprendizaje de las matemáticas escolares, con el propósito de aportar investigaciones que favorecen el avance del campo y a la vez están más cerca del aula y apuntan a impactar directamente la práctica por ejemplo (Kilpatrick, 2018; Schoenfeld (1994; 2014; 2016; 2020); Skovsmose, 1999; Valero & Skovsmose, 2012; Cai et al., 2020; Cai et al., 2019b; Cai et al., 2019; Cai, et al., 2019a; Dröse & Prediger, 2020; Prediger et al., 2015; Prediger, 2019; Schoenfeld et al., 2018; Ernest, 2010; Li et al., 2020).

Sin embargo, aún existen muchos retos frente al compromiso de mejorar la instrucción para estudiantes de grupos pertenecientes a ciertos contextos sociodemográficos, lo cual se traduce en brindarles oportunidades de aprendizaje. Dado que, uno de los hallazgos más importantes de la educación es que: *para aprender, los estudiantes deben tener oportunidades de aprende*r"[1]. En línea con esta idea, Cai et al. (2020) señalan que el primer problema general al que se enfrenta el campo de la Educación Matemática es *definir, medir y saber cómo crear oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante**;** dado que,* dicho constructo, a pesar de jugar un papel central en muchos programas de investigación y a pesar de la afirmación ampliamente citada de que la oportunidad de aprendizaje sigue siendo el mejor predictor del aprendizaje de los estudiantes, el constructo en sí está subdefinido. Existen estudios que han hecho aportes al constructo OTL, pero si bien es cierto, que sus aportes proporcionan dimensiones esenciales para maximizar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, es posible que las características no capturen todos los matices de la instrucción (Wijaya et al.,2015**;** Walkowiak et

[1] Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. L., Hiebert, J., & Bakker, A. (2020). Maximizing the quality of learning opportunities for every student. Journal for Research in Mathematics Education, 51(1), 12–25. p.21

al., 2017; Yang et al.,2022; Neugebauer & Prediger, 2023) y, además, no han explicitado el propósito de aportar una definición en los términos propuestos por Cai et al. (2020).

Así las cosas, se infiere que, sin definiciones operativas específicas de oportunidades de aprendizaje, no sería productivo realizar una investigación sobre la presencia de oportunidades de aprendizaje en las aulas, sobre los efectos de oportunidades de aprendizaje particulares en el aprendizaje de los estudiantes o sobre intervenciones que tienen como objetivo mejorar la calidad de las oportunidades de aprendizaje en las aulas (Cai et al., 2020). Además, maximizar la calidad de las oportunidades de aprendizaje para cada estudiante pone un énfasis adicional en (a) garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a oportunidades de calidad y (b) la necesidad de tener en cuenta las diversas capacidades de los estudiantes (Neugebauer & Prediger, 2022).

La literatura relacionada con la equidad en las oportunidades de aprender de estudiantes de poblaciones históricamente desatendidas (como las de zona rural) sugiere un patrón notable: los docentes ven a los estudiantes de esta población con menos capacidad productiva, es decir no ven a sus estudiantes como capaz resolver tareas con una alta demanda cognitiva, tales puntos de vista son importantes para la calidad de las oportunidades de aprendizaje que los maestros luego proveen para sus estudiantes (Wilhelm et al., 2017). Por tanto, ver a los estudiantes como capaces de participar en actividades matemáticas rigurosas es un aspecto de la enseñanza que ha recibido una mínima atención, pero, es crucial para lograr una visión de instrucción matemática de alta calidad (Jackson et al., 2017).

Asimismo, diversos resultados de investigación para este grupo de estudiantes han sido ampliamente comunicada como bajo rendimiento de los estudiantes en lugar de falta de oportunidades brindadas por los sistemas (De Araujo & Smith, 2022). En este orden de ideas, se espera que al asumir el desafío de aportar una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante contribuya en la disminución del acceso desigual a las oportunidades de aprendizaje, las cuales han sido de mejor calidad para un grupo de niños, algunos reciben oportunidades de aprendizaje de calidad mucho más alta que otros (Cai et al., 2020; García et al., 2013).

Esta brecha se encarna en la predominante visión deficitaria de la Educación Matemática Rural (EMR) en la literatura (Murphy, 2021). Eventualmente, los reportes internacionales muestran que los estudiantes rurales, tienen un rendimiento inferior al de sus homólogos urbanos, siendo esta la característica común en todos los sistemas educativos del mundo (Maass et al., 2019a; Jorgensen, 2018; Adler, 2021). Esta desigualdad se ha mantenido prácticamente a lo largo del tiempo (Wilson, 2021). Por su parte Valero & Skovsmose (2012) discuten acerca de que "*todos los estudiantes del mundo deberían tener la posibilidad de aprender matemáticas, con el propósito de transformar las condiciones de vida de quienes están involucrados*"[2].

Es claro que, dependiendo de las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los niños en estos entornos rurales, estas brechas pueden perpetuarse (Yang & Strietholt, 2018). En consecuencia, es pertinente la reflexión de cómo todos los niños pueden aprender y progresar en su nivel individual y al mismo tiempo aprender unos con otros (Höveler, 2019). Conviene subrayar, que el problema del acceso equitativo a las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad de los estudiantes rurales no puede ser estudiado sólo desde una conceptualización estrecha, es decir, teniendo en cuenta sólo el aspecto demográfico y la situación socioeconómica de los mismos. Sino, más bien, teniendo en cuenta las necesidades, habilidades tanto cognitivas, afectivas como emocionales de este grupo de estudiante ya que estos aspectos influyen de manera directa en los procesos de aprendizaje (Prediger & Buró, 2021).

En estudios recientes documentan que las emociones y la motivación son importantes para el aprendizaje y el rendimiento en matemáticas (Schukajlow et al., 2023), como lo es, las prácticas de enseñanza

---

[2] Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). *Educación matemática crítica Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* Issue April. p.48.

motivacional en las aulas de matemática (Gaspard et al 2023). Además, de las variables afectivas que se han estudiado desde la década de 1980, cuando (por ejemplo, Mason, Burton & Stacey, 1982); Schoenfeld, 1985, McLeod, 1988; Goldin (1988, 2000) y Cobb, Yackel & Wood, 1989; citados en Hannula, 2015) todos dieron un papel importante al afecto su análisis de la resolución de problemas matemáticos.

En este orden de ideas, existe evidencia que cuando a los niños de escuelas rurales se les ha ofrecido las oportunidades para aprender, se desempeñan incluso notablemente mejor que sus homólogos de escuelas en centros poblacionales (Murphy, 2019; 2021). Similarmente, Avery (2013) señala que "*Ver a los niños rurales como inherentemente desfavorecidos los disminuye, la educación basada en el contexto les ofrece una alternativa brillante*"[3]. Existe evidencia de la literatura internacional, que el estudiante del entorno escolar rural presenta niveles más altos de interés y curiosidad por la ciencia (Morris et al., 2021).

Asimismo, Murphy (2021) proporciona ejemplos, poco comunes de cómo una escuela rural puede superar las limitaciones asociadas a las desventajas socioeconómicas, y capitalizar su contexto rural, para tener éxito en la educación matemática. Por tanto, existe la necesidad de que los estudiantes participen en prácticas como experimentar, revisar, colaborar, justificar, probar e inventar durante las experiencias de aprendizaje (Gresalfi, 2015). A través de los procesos de resolución de problemas donde el reconocimiento de conexiones entre las matemáticas y el contexto coadyuva a la participación activa de los estudiantes (Geiger, 2019**;** Burkhardt & Pead, 2020; Maass et al., 2019a).

Por su parte, la OCDE (2021) sostiene que todos los estudiantes deben aprender y tener la oportunidad de aprender a pensar matemáticamente. Para ello, el razonamiento matemático y los procesos de resolución de problemas en contexto son indispensables, de allí que son los principales elementos de la evaluación de matemáticas de PISA 2021 (Maass et al., 2019b). En contraste, en América Latina, más

[3] Avery, L. M. (2013). Rural Science Education: Valuing Local Knowledge. Theory into Practice, 52(1), 28–35. https://doi.org/10.1080/07351690.2013.743769

del 50% de los estudiantes de 15 años de edad no alcanzan el nivel básico en el desempeño en Matemáticas OCDE (2016).

De manera similar, los resultados de las pruebas PISA en Colombia evidencian las brechas en el acceso a oportunidades de aprendizaje de los estudiantes rurales con relación a los urbanos, los establecimientos educativos privados registraron un mejor desempeño en matemáticas que los establecimientos educativos oficiales urbanos y rurales (ICFES, 2019). La tendencia a nivel mundial muestra que en los últimos años el resultado en matemáticas de los niños en zonas rurales se ha mantenido por debajo que el de sus homólogos en zonas urbanas.

En efecto, el Plan especial de educación rural del Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN (2018), indica que en esta población los resultados de las Pruebas Saber 11 son más bajos, especialmente en el área de matemáticas, lo que limita el acceso a la educación superior. A nivel regional el Plan de Desarrollo Departamental Sucre 2020-2023 (PDD, 2020) evidencia que los estudiantes de las escuelas rurales presentan bajo rendimiento académico en matemáticas, además de aumento de la deserción, bajos resultados en las pruebas estandarizadas, disminución de posibilidades de ingreso a la educación superior y altas tasas de repitencia (PDD, 2020).

Particularmente, los niños residentes en la Vereda la Floresta (Departamento de Sucre - Colombia), que estudian en la Institución Educativa Palmira y la Institución Educativa Heriberto García Garrido, históricamente han presentado bajos resultados de aprendizaje en matemáticas a causa de las escasas y deficientes oportunidades de aprendizaje han tenido desde la clase de matemáticas. En efecto, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan de manera tradicional, desde el paradigma del ejercicio (Skovmose, 2000) donde solo se favorece el desarrollo procedimental que no le desarrolla al niño una comprensión conceptual y lo aleja de potenciar su pensamiento matemático, el contexto es desconectado de la vida del estudiante lo que le genera un autoconcepto académico bajo; en consecuencia, los niños presentan bajos puntajes en las pruebas estandarizadas. Por ende, se disminuyen las posibilidades de ingreso a la educación superior.

Este problema se agudizó por el cierre de los establecimientos educativos a causa de la pandemia por el COVID 19, la crisis provocó una reducción en las oportunidades de aprendizaje y progreso para la mayoría de los estudiantes (OCDE, 2021); y más para niños de zonas rurales, como por ejemplo los niños de la vereda la Floresta, quienes no contaron con computadoras ni con acceso a internet. Por tanto, las necesidades de aprendizaje se agudizaron, dadas las condiciones de desigualdad e inequidad en el acceso a OA durante la pandemia. Ellos no podían recibir ni siquiera clases remotas; sólo recibían guías de aprendizaje; las cuales, según el criterio de padres de familia y los mismos niños, no les permitían comprender los temas, toda vez que no están preparados para el aprendizaje autónomo. Las interrupciones en el aprendizaje, experimentadas en el año escolar 2020 – 2021 evidenciaron el potencial de exacerbar las desigualdades estructurales y ampliar las diferencias en lo que experimentan los grupos de estudiantes (NCSM & NCTM, 2020)

A partir de un estudio preliminar, se observó que los niños presentan dificultades en el dominio del contenido matemático, en la resolución de problemas básicos, y en el desarrollo de procedimientos sencillos. Esto se da en contraste con las exigencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006; 2016). Como también se ha observado que los niños son creativos, tienen una buena intuición, y tienen respuesta positiva ante andamios tanto cognitivos como afectivos mostrando motivación por aprender a resolver problemas. De hecho, presentaban avances y logran, no solo resolver, sino que han logrado plantear problemas que tienen ausencia de contenido matemático pero que les demanda un razonamiento matemático.

De allí que, al describir a los estudiantes rurales, lo más justo sería, hacerlo en virtud de sus potencialidades y habilidades, y señalando la falta de oportunidades de calidad para aprender matemáticas, aunque generalmente, se les caracteriza por los malos resultados de aprendizaje. Toda esta situación contrasta con las metas de la UNESCO (2017), específicamente, lo promulgado en el Objetivo de Desarrollo Sostenible No. 4 (ODS), se debe garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.

Por otra parte, Murphy (2021) manifiesta que *"si bien el bajo rendimiento de las escuelas rurales en matemáticas es relativamente bien investigado, ha habido sólo una investigación limitada sobre los factores que mejoran la educación matemática en contextos rurales"*[4]. En efecto, las investigaciones acerca del aprendizaje de las matemáticas por lo general se centran en la relación de causa efecto, entre el desempeño en matemáticas y la perpetuidad de las brechas sociales, y a su vez adolece de validez (Yang & Strietholt, 2018). De otra parte, el estudio sobre Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante es referenciado tangencialmente en el Congreso Internacional de Educación Matemática de 2021 (ICME 14) en los diferentes Grupos de Estudio (TSG).

Así, por ejemplo, el TSG 4 del ICME 14, 2021 trata la "Educación Matemática para estudiantes con necesidades especiales"; incluyendo a los estudiantes de bajo rendimiento. Asimismo, el TSG 38 (ICME 14, 2021) propone "El Diseño y análisis de tareas" y establece que a través de estas los estudiantes pueden tener la oportunidad de aprender conceptos matemáticos. De igual manera, el TSG 51 (ICME 14, 2021) aporta elementos sobre la "Educación Matemática para Minorías Étnicas en todo el mundo". En esta misma dirección, el TSG 53 (ICME 14, 2021) se refiere a la "Equidad en la Educación Matemática" y señala que existe una necesidad urgente de comprender las fortalezas y los desafíos involucrados en la realización de una "educación matemática para todos''.

[4] Murphy, S. (2021). Mathematics success against the odds: the case of a low socioeconomic status, rural Australian school with sustained high mathematics performance. *Mathematics Education Research Journal*. p.3.

Por tanto, a partir de la necesidad práctica de ofrecer oportunidades de aprendizaje de calidad desde la clase de matemáticas para cada niño, y así impactar positivamente la instrucción abordando el vacío teórico existente, en línea con la propuesta de Cai et al. (2020) acerca de la necesidad de definir y medir el constructo de oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante, surge el siguiente **problema de investigación**: ¿De qué manera interactúan los aspectos de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) en la generación de una metodología de enseñanza y aprendizaje que brinde un acceso equitativo para que cada estudiante de un contexto rural colombiano en condiciones de riesgo académico logre su nivel personal óptimo en la clase de matemáticas?

Como subpregunta de investigación teórica ¿Cuáles son los criterios (aspectos, dimensiones e interacciones) que definen operativamente una Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante con bajas habilidades en Matemáticas Escolares, perteneciente en un contexto rural colombiano?

En consecuencia, se precisa como **objeto de investigación** los procesos de generación y caracterización teórica de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Y se configura como **objetivo general:** generar una metodología de diseño de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad que brinde un acceso equitativo para posibilitar que cada estudiante de un contexto rural colombiano en condiciones de riesgo académico alcance su nivel personal óptimo en la clase de matemáticas, a partir de la interacción entre los aspectos de la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en el contexto de los porcentajes

Para tal fin se establecen los siguientes **objetivos específicos**:

OE1. Integrar presupuestos teóricos, metodológicos y empíricos que convergen hacia la generación de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante de secundaria residentes en una zona Rural Colombiana.

OE2. Construir una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante, que posibilitará desentrañar cómo maximizar su calidad a partir de las posibles interacciones entre la enseñanza, los estudiantes, el entorno y las tareas matemáticas en estudiantes pertenecientes a una zona Rural Colombiana en condiciones de riesgo académico.

OE3. Diseñar Oportunidades de Aprendizaje de Calidad basadas en la definición operativa anterior que responda a las diversas habilidades de los estudiantes y las características afectivas mediante experimentos de enseñanza y trayectorias hipotéticas de aprendizaje para estudiantes pertenecientes a una zona Rural Colombiana en condiciones de riesgo académico.

OE4. Elaborar criterios de valoración que permitan saber cuándo un estudiante en condiciones de riesgo académico está experimentando o aprovechando una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad.

Cabe mencionar, que el **campo de acción** de esta investigación es el proceso de generación de una metodología para el diseño de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad (OAC) de las matemáticas escolares en contextos rurales. Para dar respuesta al problema de investigación se presentan las siguientes preguntas científicas:

P1. ¿Cómo integrar los presupuestos teóricos y metodológicos para el diseño de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) para cada estudiante de secundaria de un contexto rural colombiano?

P2. ¿Qué tipo de interacciones entre los aspectos de las prácticas docentes, la tarea, los estudiantes y el entorno definen operativamente una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante perteneciente a una zona Rural Colombiana (estudiantes en riesgo académico)?

P3. ¿Qué cuenta como una oportunidad de aprendizaje de calidad para que cada estudiante desarrolle la comprensión conceptual, procedimental y resolución de problemas de porcentajes, y qué enfoques de investigación son los más adecuados?

P4. ¿Cuáles son los criterios que permiten valorar lo que cuenta como una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en riesgo académico?

El **aporte teórico** esperado de la tesis es una metodología que permita generar OAC para cada estudiante en el contexto de la solución de problemas no rutinarios sobre porcentajes que les permita mejorar las habilidades cognitivas, afectivas, emocionales y favorezca su motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas escolares, en estudiantes de secundaria pertenecientes a una zona rural colombiana. Además, una definición operativa de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad.

El **aporte práctico** esperado corresponde al sistema de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) acerca de fracciones y porcentajes, las orientaciones para el diseño y movimiento por los seis ambientes de aprendizaje propuesto por Skovsmose a la luz de la definición propuesta sobre OAC para cada estudiante. Para llevar a cabo la presente investigación usó un diseño de experimentos (Cobb, et al.,2003) por su objetivo dual mejorar la instrucción y generar teorías humildes lo cual define el propósito del presente estudio.

La tesis tiene la siguiente estructura: Introducción, Capítulo 1: Estado Del Arte, Capítulo 2: Marco Teórico, Capítulo 3: Diseño Metodológico, Capítulo 4: Aporte Práctico, Capítulo 5. Aporte Teórico como solución del Problema Científico Capítulo 6. Discusión y Conclusiones y finalmente, recomendaciones y anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presenta el estado actual y tendencias en el campo de la Educación Matemática con relación al constructo de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad y la sensibilidad teórica ante el impacto que tiene este constructo con enfoque en mejorar la comprensión conceptual, procedimental y de resolución de problemas para cada estudiante de un contexto rural determinado.

La búsqueda se realizó con el propósito de responder la pregunta:

¿Cuáles son los presupuestos teóricos, empíricos y metodológicos actuales que caracterizan una definición operacional de OAC; Desde diferentes perspectivas del campo de la Educación Matemática la búsqueda y análisis sistemático realizado permitió distinguir cuatro categorías:

- Investigaciones relacionadas con Oportunidades de Aprendizaje enfocadas en la calidad.
- Investigaciones relacionadas con Ambientes de Aprendizajes de calidad que atienden problemas urgentes de equidad, diversidad, inclusión y aprendizaje dentro y fuera de las aulas.
- Investigaciones relacionadas con Educación Matemática en contextos rurales (estudiantes en riesgo académico)
- Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones y los porcentajes.

1.1 Las investigaciones relacionadas con las oportunidades de aprendizaje

1.1.1 Maximizing the Quality of Learning Opportunities for Every Student[5]

Cai, Morris, Hohensee, Hwang, Robison, Cirillo, Kramer, and Hiebert (2020) en este editorial discuten acerca del primero de los cinco problemas generales de la Educación Matemática: *definir y medir las*

[5] Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. L., Hiebert, J., & Bakker, A. (2020). Maximizing the quality of learning opportunities for every student. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(1), 12–25. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.2019.0005

oportunidades de aprendizaje con la suficiente precisión para estudiar cómo maximizar la calidad de las oportunidades experimentadas por cada estudiante (Cai et al., 2020). Los autores invitan a centrarse en tres necesidades importante: primero una definición operativa del Constructo de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante, segundo *"comprender cómo maximizar la calidad de las oportunidades de aprendizaje para cada estudiante"*[6] y desentrañar *"qué tipo de interacciones entre las tareas, la enseñanza y los estudiantes crean oportunidades de aprendizaje para un objetivo de aprendizaje específico"*[7]*.*

Por consiguiente, resaltan la necesidad de profundizar la investigación con una conceptualización más fundamentada de las oportunidades de aprendizaje, volviendo la mirada en varios grupos estudiantes en condiciones desfavorecidas. En consecuencia, los investigadores interesados deben abordar las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de medidas y diseños de investigación revelarán la naturaleza de las oportunidades de aprendizaje? (2) ¿Cómo pueden los investigadores estudiar la calidad de las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes en el aula? y (3) ¿Qué enfoques de investigación son los más adecuados para estudiar la instrucción diferenciada como una forma de maximizar la calidad de las oportunidades de aprendizaje para cada estudiante?

Los autores consideran que estas preguntas aún no se han abordado adecuadamente, además, abordar estas preguntas de investigación, proporcionará información que podría beneficiar el trabajo realizado desde muchas perspectivas, incluidos los que se centran en los problemas urgentes de equidad, diversidad, inclusión y aprendizaje fuera de las aulas (Cai et al., 2020). Por tanto, tomar las oportunidades de aprendizaje en serio como una lente teórica y metodológica puede permitir que el campo haga un

[6] Cai, J., et al. (2020). Maximizing the quality of learning opportunities for every student. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(1), p.13. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.2019.0005
[7] Ibídem, p. 16

progreso real en problemas persistentes y desafiantes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De este modo, es probable que las interacciones entre los factores del triángulo educativo definan los elementos principales de una oportunidad de aprendizaje en el aula; se hace especial énfasis en que *no está claro cómo los aspectos de cada uno de estos factores son importantes para crear oportunidades de aprendizaje o para maximizar su calidad.* Por su parte, consideran que resulta imposible aislar los efectos de cualquiera de estos factores porque la naturaleza de su interacción determinará si una actividad o experiencia en el aula se convierte en una oportunidad de aprendizaje para estudiantes particulares en relación con un objetivo específico.

1.1.2 Maximizing the Quality of Learning Opportunities for Every Maximizing the Quality of Quality of Teaching Practices for All Students: Multilevel Analysis of Language-Responsive Teaching for Robust Understanding[8]

Neugebauer & Prediger (2023) contribuyen a la agenda de investigación propuesta por Cai et al. (2020) en el editorial del Journal for Research in Mathematics Education (JRME), al abordar la pregunta de investigación ¿Qué tipos de interacciones entre la calidad de las prácticas docentes y las habilidades de los estudiantes (en el dominio del idioma) crean oportunidades de aprendizaje (para una comprensión sólida de los porcentajes) cuando los recursos del plan de estudios se mantienen constantes (con un enfoque en mejorar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes con diversos idiomas)? en virtud de ello investigan la interacción entre las prácticas docentes y el aprendizaje de los estudiantes en aulas con los mismos recursos curriculares, y así analizan el impacto de las prácticas docentes de calidad en las aulas.

[8] Neugebauer, P., & Prediger, S. (2022). Q uality of Teaching Practices for All Students: Multilevel Analysis of Language-Responsive Teaching for Robust Understanding. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-24.

A partir, del análisis de un estudio de video, de 18 clases que usaron los mismos recursos curriculares destinados a desarrollar la comprensión conceptual de porcentajes de 367 estudiantes de séptimo grado para identificar la interacción de las dimensiones de calidad, la promulgación de recursos curriculares dados y el rendimiento matemático de los estudiantes (cuando se controlan los conocimientos matemáticos previos y dominio del idioma). El resultado basado en un análisis de regresión multinivel reveló que tres dimensiones de calidad que pueden ser fácilmente respaldadas por los recursos del plan de estudios (Riqueza matemática, demanda cognitiva y Conexión de registros) estaban en un nivel alto y su varianza no tenía interacción adicional con el rendimiento de los estudiantes.

1.1.3 A Reconceptualized Framework for 'Opportunity to Learn' in School Mathematics[9]

Walkowiak et al. (2017) presentan un marco reconceptualizado para la oportunidad de aprender (OTL) en matemáticas escolares que se basa en conceptualizaciones previas de OTL por sus siglas en inglés, e incluye características relacionadas tanto con la cantidad como con la calidad. Los investigadores educativos a menudo usan dos lentes, el logro y la oportunidad de aprender para examinar el aprendizaje de los estudiantes (Floden, 2007; citado en Walkowiak et al., 2017). La lente de rendimiento se enfoca en el desempeño de los estudiantes en las evaluaciones; la lente de oportunidades de aprender explora la relación entre las experiencias en el aula y el aprendizaje de los estudiantes.

El trabajo reciente que explora las oportunidades de aprender matemáticas se ha centrado en la calidad de la enseñanza mediante el examen de cómo las características pedagógicas y / o curriculares de la instrucción permiten o limitan la Oportunidad de Aprender de los estudiantes. De manera similar a los investigadores anteriores, Walkowiak et al. (2017) se enfocan en las oportunidades de los estudiantes

[9] Walkowiak, T. A., Pinter, H. H., & Berry, R. Q. (2017). 'Opportunity to Learn' in School Mathematics. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *8*(1).

para desarrollar o construir sobre la comprensión conceptual, pero también presentan un marco de características clave de instrucción para maximizar las oportunidades de aprender.

El constructo de oportunidades de aprender, presentado en este documento se basa en dos estudios de investigación de métodos mixtos (Walkowiak, 2010; Pinter, 2013), para ambos estudios, se analizaron tres o cuatro lecciones de matemáticas grabadas en video por profesor. Los autores aportan un constructo sobre oportunidades de aprender matemáticas reconceptualizado que incluye cuatro dimensiones: *el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza, el tiempo, las tareas y la conversación matemática*. Esta última dimensión permite a los estudiantes explicar su pensamiento matemático y posibilita una mejor comprensión. Así las cosas, "*El marco proporciona una lente a través de la cual los maestros, los formadores de maestros y los académicos pueden usar en la discusión, planificación, implementación y análisis de las lecciones de matemáticas*"[10].

A su vez, los autores reconocen que el marco tiene deficiencias. Aunque el marco proporciona características esenciales para maximizar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, es posible que las características *no capturen todos los matices de la instrucción*. En segundo lugar, el marco *no incluye conexiones entre las lecciones de matemáticas y la vida de los estudiantes*.

1.1.4 A Opportunities and challenges of mathematics learning in Taiwan: a critical review[11]

Yang, Hsu, & Cheng (2022) tienen como propósito dar respuesta a la pregunta ¿Cómo brinda la educación en Taiwán a los estudiantes oportunidades para aprender matemáticas y cuáles son los desafíos que se encuentran en los entornos educativos? De allí que, presentan los resultados de un estudio en el que investigan cómo la educación formal y la educación en la sombra en Taiwán brindan a los estudiantes

---

[10] Walkowiak, T. A., Pinter, H. H., & Berry, R. Q. (2017). 'Opportunity to Learn' in School Mathematics. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *8*(1). p.14.

[11] Yang, K. L., Hsu, H. Y., & Cheng, Y. H. (2022). Opportunities and challenges of mathematics learning in Taiwan: a critical review. *ZDM–Mathematics Education*, 1-12.

oportunidades para aprender matemática con base en el marco conceptual de Oportunidad para Aprender (OTL). Así las cosas, los resultados revelaron características significativas del currículo de matemáticas, el diseño de los libros de texto y la calidad de los profesores de matemáticas en Taiwán que constituyen un espacio vivido donde los profesores con sus conocimientos y creencias, currículo, libros de texto y entornos escolares pueden generar resultados de aprendizaje cognitivos y afectivos en estudiantes. Análisis adicionales de los dos proyectos mencionados anteriormente mostraron cómo Taiwán amplió las oportunidades de aprendizaje para motivar a los estudiantes a aprender y comprender las matemáticas escolares.

1.1.5 Mathematics Education in Ethiopia in the Era of COVID-19: Boosting Equitable Access for All Learners via Opportunity to Learning[12]

Tesfamicael & Ayalew (2021) investigan acerca de los cambios en los planes de estudio y los desafíos a los que se enfrenta La República Democrática Federal de Etiopía a partir del año académico 2021/22 luego de la Pandemia del COVID 19. En este artículo se toma el constructo “oportunidad de aprender” (OTL) como parámetro para abordar una de las metas de la educación: el acceso equitativo a la educación matemática, adoptando dos marcos: NCTM y NCSM (2020) y Walkowiak, Pinter y Berry (2017). Finalmente, presentan diez puntos de discusión para impulsar el acceso equitativo para todos los estudiantes. Por otro lado, las prácticas efectivas propuestas por NCSM y NCTM están relacionadas con la consideración estructural, las prácticas de enseñanza y la promoción. Los siguientes tres elementos de prácticas efectivas para el acceso equitativo se utilizan como una de las dimensiones del análisis de las entradas de la matriz que se propone en este artículo: las entradas de la matriz generada a partir de estos marcos nos ayudarían como un marco sobre cómo se puede lograr el acceso equitativo para todos los

[12] Tesfamicael, S. A., & Ayalew, Y. (2021). Mathematics education in Ethiopia in the era of COVID-19: Boosting equitable access for all learners via opportunity to learning. Contemporary Mathematics and Science Education, 2(1), 1-9.

estudiantes. De una matriz de 4 x 3 obtenemos 12 entradas, y estas sirven como una herramienta para comunicar a los tomadores de decisiones en todos los niveles.

1.1.6 Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks[13]

Wijaya et al. (2015) investigan sobre la Oportunidad para Aprender que ofrecen los libros de texto indonesios para resolver tareas de matemáticas basadas en el contexto y la relación de esta oportunidad de aprendizaje con las dificultades de los estudiantes para resolver estas tareas. A partir de los hallazgos de un análisis de errores que revela que los estudiantes de noveno y décimo grado de Indonesia tenían dificultades para resolver tareas basadas en el contexto. Los autores, desarrollaron un marco de análisis para investigar las características de las tareas en los libros de texto desde cuatro perspectivas: el tipo de contexto utilizado en las tareas, el propósito de las tareas basadas en el contexto, el tipo de información proporcionada en las tareas y el tipo de demandas cognitivas de las tareas. Otro de los resultados descrito por los autores, fue que un vínculo entre los hallazgos del análisis de errores y el análisis de los libros de texto sugiere que la falta de oportunidades para aprender en los libros de texto de matemáticas de Indonesia puede causar dificultades a los estudiantes indonesios para resolver tareas basadas en el contexto.

1.2. Investigaciones relacionadas con Ambientes de Aprendizajes de calidad que atienden problemas de equidad, diversidad, inclusión y aprendizaje dentro y fuera de las aulas

[13] Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 41–65. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1

1.2.1. Fifty ways to work with students' diverse abilities? A video study on inclusive teaching practices in secondary mathematics classrooms[14]

Prediger & Buró (2021) evidencian que las prácticas de enseñanza inclusivas se pueden caracterizar como formas recurrentes en las que los maestros trabajan con las diversas habilidades de sus estudiantes. Los autores centraron su atención en responder ¿cómo se implementan exactamente en las aulas? Proponen entonces, un marco conceptual para desglosar las prácticas inclusivas de acuerdo con la capacidad del estudiante a la que se refieren, en cinco trabajos típicos para los docentes: (a) identificar las demandas de la capacidad, (b) diferenciar las metas de aprendizaje, (c) compensar la baja habilidades, (d) mejorar las habilidades y (e) abordar las habilidades en el aprendizaje conjunto.

El marco de trabajo propuesto para las prácticas de enseñanza inclusiva se sustenta en un estudio de vídeo de 25 lecciones de matemáticas sobre porcentajes con el mismo material curricular. En total, en lugar de 50, se identificaron 133 prácticas de enseñanza inclusivas diferentes en 3862 secuencias y se estructuraron en 20 celdas. Abordan cuatro habilidades (de mayor a menor frecuencia): (1) atención selectiva / memoria de trabajo, (2) pre conocimiento matemático, (3) dominio del lenguaje y (4) regulación metacognitiva. Estas cuatro habilidades son las de mayor impacto en el aprendizaje de las matemáticas, (Pressley, Borkowski y Schneider, 1989; citado en Prediger & Buró, 2021). Cabe agregar que Hasselhorn & Gold (2013) citado por Prediger & Buró (2021) agregaron a este marco características afectivas, motivación, autoconcepto, volición y emociones relacionadas con el aprendizaje.

Entre los resultados de la investigación, se resalta que la gran variación de prácticas promulgadas identificadas dentro y entre lecciones requiere un desarrollo profesional que provoque, aproveche y amplíe el repertorio de prácticas. Si bien las frecuencias informadas son específicas de la unidad de

[14] Prediger, S., & Buró, R. (2021). Fifty ways to work with students' diverse abilities? A video study on inclusive teaching practices in secondary mathematics classrooms. *International Journal of Inclusive Education*, *0*(0), 1–20. https://doi.org/10.1080/13603116.2021.1925361

enseñanza elegida, el marco de capacidad laboral puede transferirse a otras aulas y usarse en programas de desarrollo profesional.

1.2.2. Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU[15]

Prediger & Neugebauer (2021) presentan el marco analítico L-TRU, que fue desarrollado para evaluar cuantitativamente las prácticas de enseñanza sensibles al lenguaje. El marco L-TRU se basa en el marco de enseñanza para una comprensión sólida (TRU) de Schoenfeld al adaptar sus cinco dimensiones a las aulas que responden al idioma: riqueza matemática, demanda cognitiva, acceso equitativo, agencia y uso de las contribuciones de los estudiantes. Se amplía con otras dos dimensiones, a saber, Demanda discursiva y Registros de conexión. El esquema de calificación L-TRU adaptado y extendido se aplicó a 41 lecciones grabadas en video de 26 maestros que usaron el mismo material curricular sensible al idioma en porcentajes. Los conocimientos cualitativos obtenidos de las transcripciones seleccionadas revelan que las dimensiones capturan distinciones importantes de manera válida. El análisis de la confiabilidad entre evaluadores y las correlaciones confirma que las distintas dimensiones se capturan con confiabilidad.

El resumen cuantitativo de las calificaciones de 497 episodios muestra que, a pesar del material curricular compartido, se implementaron una gran variedad de prácticas educativas: se encontró una calidad consistentemente alta en las dimensiones Demanda cognitiva y Acceso equitativo y una calidad media en Registros de conexión. Las dimensiones Agencia, Demanda Discursiva y Uso de Contribuciones muestran la mayor variación entre docentes, con la demanda discursiva separando la mayoría. Estos hallazgos corroboran empíricamente una importante herramienta de investigación para capturar

[15]Prediger, S., & Neugebauer, P. (2021). Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU. ZDM–Mathematics Education, 53(2), 289-304.

cuantitativamente las prácticas docentes con respecto a su calidad general de enseñanza de matemáticas y calidad de respuesta al lenguaje.

1.2.3. Mathematical practices, in theory, and practice[16]

Schoenfeld (2020) considera las características de las aulas de matemáticas que apoyan el desarrollo de los estudiantes: Contenido, Demanda Cognitiva, Acceso Equitativo al contenido, Disponibilidad, Dominio e Identidad y la Evaluación Formativa para convertirlos en poderosos pensadores matemáticos. Pone en relieve la resolución de problemas como un componente importante de "pensar matemáticamente". El artículo concluye con una descripción de las prácticas que actualmente se subestiman en la instrucción y que se beneficiarían de una mayor atención. Además, la complejidad de los problemas relacionados con el acceso equitativo y el apoyo a la Disponibilidad, Dominio e Identidad de los estudiantes es un problema que atender. Esto implica cuestiones de raza y poder: el autor sugiere crear entornos en el aula que contrarresten las suposiciones a menudo tácitas y que realmente brinden a todos los estudiantes oportunidades para contribuir de manera significativa a las conversaciones matemáticas de la clase, para ser escuchados de manera justa y respetuosa al generar ideas, reflexionar sobre el trabajo del grupo y contribuir a los esfuerzos colectivos.

El autor proporciona una lista de prácticas pedagógicas / matemáticas como resultado de casi 50 años de investigación y desarrollo en este campo; que considera están subestimadas. La atención a estos temas en el plan de estudios y la pedagogía proporcionará a los estudiantes oportunidades más profundas para participar de manera significativa con las matemáticas y convertirse en pensadores matemáticos más activos y más profundos.

---

[16] Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. ZDM, 52(6), 1163-1175.

1.2.4. Learning Environments in Inclusive Mathematics Classrooms: Design Principles, Learning Processes and Conditions of Success[17]

Skovsmose (2022) sostiene que el paradigma del ejercicio no crea mucho espacio para el diálogo, mientras que los paisajes de investigación sí lo hacen. Un ejercicio define una tarea para que la completen los estudiantes, y esto estructura la conversación entre estudiantes y profesores, así como entre estudiantes. Un ejercicio no es una invitación para emprender una investigación; más bien, opera como una orden. Para resolver un ejercicio, es necesario avanzar a lo largo de una ruta unidireccional predefinida y estrecha, y la conversación que tiene lugar a lo largo de dicha ruta está predefinida. Los estudiantes pueden preguntar si un determinado procedimiento es el adecuado y si una determinada respuesta es correcta. El profesor puede confirmar, corregir o aclarar. En contraste, cuando se trabaja con paisajes de investigación, la conversación será abierta y dialógica, ya que los procesos de consulta son abiertos, los aprendizajes emergen a través de procesos dialógicos. A partir de esta reflexión, El autor caracteriza los actos dialógicos, así como actos no dialógicos.

1.2.5. Measuring interaction quality in mathematics instruction: How differences in operationalizations matter methodologically[18]

Quabeck Erath & Prediger (2023) considerando que ha habido un amplio acuerdo en que la calidad de la interacción es importante para crear oportunidades de aprendizaje matemáticamente ricas y, por ende, que la calidad de la interacción puede mejorar o limitar las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes. A través de un estudio empírico buscaron desentrañar las opciones metodológicas típicas para evaluar la calidad de la interacción en seis dimensiones de calidad, cada una de ellas en

[17] Penteado, M. G., & Skovsmose, O. (2022). *Landscapes of Investigation: Contributions to Critical Mathematics Education* (p. 360). Open Book Publishers.

[18] Quabeck, K., Erath, K., & Prediger, S. (2023). Measuring interaction quality in mathematics instruction: How differences in operationalizations matter methodologically. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101054.

operacionalizaciones basadas en tareas, movimientos y prácticas. La parte empírica del estudio comparó diferentes conceptualizaciones con sus correspondientes operacionalizaciones y las utilizó para codificar datos de video de estudiantes de secundaria (n = 210). El análisis reveló que diferentes conceptualizaciones y operacionalizaciones llevaron a hallazgos sustancialmente diferentes, por lo que su distinción resultó ser de gran relevancia metodológica. Estos resultados resaltan la importancia de hacer explícitas las elecciones metodológicas y exigen un discurso académico más fuerte sobre cómo conceptualizar y operacionalizar la calidad de la interacción en los estudios de video. Además, brindan Marco analítico para las funciones de calidad para la interacción operacionalizado en tareas, movimientos y formas basadas en la práctica.

1.2.6. Learning Environments in Inclusive Mathematics Classrooms: Design Principles, Learning Processes and Conditions of Success[19]

Höveler (2019) para su investigación establece como objetivos generales: en primer lugar, diferenciar el concepto de entornos de aprendizaje para la educación matemática inclusiva y, en segundo lugar, obtener conocimientos sobre las vías de aprendizaje típicas y los obstáculos de los alumnos, en el contexto de los entornos de aprendizaje inclusivos desarrollados. Estos objetivos pueden sustentarse a nivel de diseño y a nivel de procesos de aprendizaje mediante las siguientes preguntas:

Pregunta de investigación sobre el nivel de diseño ¿Qué principios de diseño y condiciones de éxito (posiblemente específicos de un tema) deben tenerse en cuenta en entornos de aprendizaje inclusivos para permitir que los niños que difieren mucho en sus niveles de aprendizaje y sus habilidades lingüísticas realicen procesos de aprendizaje individuales sobre la base del aprendizaje mutuo?

[19] Höveler, K. (2019). Inclusive Mathematics Education. Inclusive Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0

Pregunta de investigación sobre el nivel de aprendizaje ¿Cómo se desarrollan los procesos de aprendizaje individual de los niños en entornos de aprendizaje inclusivo en términos de estrategias, conciencia de estrategias, procesos de generalización y razonamiento, así como lenguaje?

Para el análisis de los datos en torno responder a la pregunta de investigación a nivel de diseño y de aprendizaje, analizaron videos, transcripciones y documentos en un procedimiento de tres pasos mediante el análisis cualitativo de videos y transcripciones mediante las técnicas centrales de la Teoría Fundamentada. Como condiciones esenciales para el éxito al final de la fase individual, se identificaron la "comprensión del formato de la tarea" y un "ajuste complementario de estrategias y resultados". En la fase de trabajo conjunto se examinan en particular, las condiciones relativas a la relación de los participantes, el material, el lenguaje y el impulso del profesor.

1.2.7. The power of place: spatializing critical mathematics education[20]

Rubel & Nicol (2020) exploran la integración de las teorías del lugar, la justicia espacial y la EMC, consideran varios marcos del lugar, incluidas las perspectivas indígenas, urbanas y críticas. Para situar una discusión sobre cómo el lugar actúa como una fuerza moldeadora en relaciones sociales como la raza, el género y la sexualidad, y, a la inversa, cómo las relaciones sociales moldean el lugar. Además, incluyen las matemáticas como una categoría de relaciones sociales en ese marco rector.

Dejan de lado, lo que ellos consideran una falsa división urbano-rural y, en cambio, ilustran el potencial de la enseñanza de las matemáticas para la justicia espacial utilizando ejemplos ricos organizados en torno a cuatro categorías temáticas: geografías de oportunidad, cartografía, movilidad humana y relaciones y obligaciones territoriales. No obstante, consideran que, si bien un enfoque en lo local puede

---

[20] Rubel, L. H., & Nicol, C. (2020). The power of place: spatializing critical mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(3), 173–194.

ser generativo, advierten que un énfasis en lo local podría perder oportunidades para investigar cómo se han creado los lugares, cómo están cambiando y cambiando continuamente.

1.2.8. Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria[21]

En trabajo de Alvis-Puentes et al (2019) analizaron las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje desde escenarios de investigación reales, para el desarrollo de competencias matemáticas desde la educación matemática crítica. Este estudio se fundamentó en la EMC, colocando en primer plano como el desarrollo de una ciudadanía crítica. El diseño metodológico supuso varios momentos de trabajo: en primer lugar, los autores negocian y establecen el ambiente de aprendizaje producto del consenso con los estudiantes en el contexto del aula, como un elemento que permite la conexión entre las matemáticas y la realidad. Los autores concluyen que los ambientes de aprendizaje permiten articular de manera didáctica el desarrollo de competencias matemáticas en el aula de clase, empleando situaciones reales del contexto de los estudiantes, fortaleciendo una ciudadanía crítica en relación a la realidad del ambiente de aprendizaje.

1.2.9. Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive demand[22]

Ni, Zhou, Cai, Li & Sun (2018) este estudio investigó la relación entre tres características cognitivas de las tareas de instrucción matemática (alta demanda cognitiva, representaciones múltiples y métodos de solución múltiple) y los resultados de aprendizaje de los estudiantes entre 1.779 estudiantes de 30 aulas

---

[21] Alvis-Puentes, J. F., Aldana-Bermúdez, E., & Caicedo-Zambrano, S. J. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *10*(1), 135–147.

[22] Ni, Y., Zhou, D. H. R., Cai, J., Li, X., Li, Q., & Sun, I. X. (2018). Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive demand. *The Journal of Educational Research*, *111*(6), 704-719.

chinas de quinto grado que utilizan un nuevo plan de estudios de matemáticas. Analizaron las medidas de los resultados del aprendizaje de las matemáticas en dos puntos de datos durante 16 meses. Estos incluyeron resultados cognitivos (cálculo, resolución de problemas de rutina y resolución de problemas complejos) así como afectivos (interés expresado en aprender matemáticas, participación en el aula, puntos de vista de las matemáticas y puntos de vista del aprendizaje de las matemáticas). Los resultados destacan la importancia de la demanda cognitiva de las tareas de instrucción, que conectan los aspectos procesales y conceptuales de las matemáticas, para facilitar las relaciones positivas de los estudiantes con las matemáticas y las aulas de matemáticas.

1.2.10. Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research[23]

Cai & Leikin (2020) argumentan la idea de que los campos cognitivo y afectivo están interrelacionados y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje. Los autores señalan la centralidad de las dimensiones tanto cognitiva como socioemocional en las competencias necesarias para el siglo XXI. Al mismo tiempo, destacaron las habilidades socioemocionales generalmente consideradas como componentes del desarrollo afectivo y social. Desde una perspectiva dialéctica, citan a Rothstein (2004) quienes sugieren que las habilidades cognitivas y no cognitivas tienen el potencial de reforzarse mutuamente para maximizar el aprendizaje de los estudiantes.

En este orden de ideas citan a Cai et al. (2017) quien argumentó que el impacto de la investigación en el aprendizaje de los estudiantes debe medirse a través de los resultados cognitivos y no cognitivos. Como resultado resaltaron que las actividades tales como investigaciones matemáticas, planteamiento de problemas, resolución de problemas, comprobación e investigación dirigidas a dominar las habilidades

[23] Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. Educational Studies in Mathematics, 105, 287-301

de planteamiento de problemas no se analizan a menudo en la literatura de educación matemática. Finalmente, los autores recomiendan que la comunidad investigadora considere activamente los aspectos afectivos en los procesos cognitivos como la formulación de problemas. Este artículo aportó una especie de hoja de ruta a seguir a nivel teórico sobre el dominio afectivo.

1.2.11. The relationship between emotional intelligence and mathematical competency among secondary school students[24]

Nor, Ismail & Yusof (2016) documentaron que la ansiedad crea fuertes emociones negativas y puede dificultar el rendimiento cognitivo, de aprendizaje y académico de una persona. El miedo a las matemáticas apareció temprano en el proceso educativo y, si no se maneja adecuadamente, afectará negativamente a los estudiantes hasta la edad adulta. En el aprendizaje de las matemáticas, la inteligencia emocional (IE) impacta en cómo una persona maneja las emociones, las matemáticas y las estrategias generales de autorregulación que la persona adopta. Los autores realizaron un estudio para acceder a la IE de los estudiantes de secundaria y su competencia matemática (CM). La IE se probó utilizando un cuestionario de IE para adolescentes (IKEM-R/MEQI) que consta de 7 dominios, mientras que el MC se probó utilizando preguntas seleccionadas de PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) 2012 artículos publicados. El análisis muestra que la IE predice significativamente el MC de los estudiantes, pero con un valor correlacional bajo. La mayoría de los encuestados tienen un nivel moderado de IE en los 7 dominios, siendo la autoconciencia y la autorregulación los dos dominios con puntajes más bajos. Por otro lado, la mayoría de los MC de los estudiantes son pobres.

[24] Nor, N. A. K. M., Ismail, Z., & Yusof, Y. M. (2016). The relationship between emotional intelligence and mathematical competency among secondary school students. *Journal on Mathematics Education*, 7(2), 91-100.

1.2.12. Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go[25]

Schukajlow, Rakoczy & Pekrun (2023) presentan una descripción general de la investigación sobre las emociones y la motivación de los estudiantes en matemáticas. Centrándose en una descripción general de las características de instrucción que se ha demostrado que fomentan las emociones y la motivación, siendo estas características las que se tendrán en cuenta en la presente investigación. Seguidamente, proporcionan una descripción general de las contribuciones al número especial sobre "Emociones y motivación en la educación matemática y la psicología educativa". Y finalmente, sugieren direcciones para futuras investigaciones en el campo con respecto al avance de la teoría, la mejora de la medición y la consideración de la diversidad y la inclusión. Asimismo, presentan métodos de instrucción para mejorar emociones y motivaciones de los estudiantes: agruparon las intervenciones según los siguientes cuatro grupos de variables de resultado: (a) emociones; (b) expectativas (incluida la autoeficacia), (c) valores y costo y (d) necesidades básicas. Entre los resultados destacan que, las teorías de las emociones y la motivación se han desarrollado y probado principalmente en muestras de países occidentales, educados, industrializados, ricos y desarrollados.

1.2.13. The reciprocal relationship among Chinese senior secondary students' intrinsic and extrinsic motivation and cognitive engagement in learning mathematics: a three-wave longitudinal study[26]

Zhang, Yang, Sun & Kaiser (2023) en su investigación se trazaron como objetivo principal investigar longitudinalmente las características de la motivación de los estudiantes de secundaria superior para

[25] Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. ZDM–Mathematics Education, 1-19.
[26] Zhang, Y., Yang, X., Sun, X., & Kaiser, G. (2023). The reciprocal relationship among Chinese senior secondary students' intrinsic and extrinsic motivation and cognitive engagement in learning mathematics: a three-wave longitudinal study. ZDM–Mathematics Education, 1-14.

aprender matemáticas, su participación cognitiva en el aprendizaje de las matemáticas y la relación recíproca entre estos dos constructos dentro de la cultura educativa matemática china orientada a la reforma. En el presente estudio longitudinal, se aplicaron modelos de ruta cruzada para investigar las posibles relaciones recíprocas entre la motivación de los estudiantes de secundaria superior y su compromiso cognitivo, utilizando datos de 623 estudiantes chinos de secundaria superior a lo largo de 2 años. El efecto recíproco entre la motivación intrínseca para aprender matemáticas y el compromiso cognitivo en el aprendizaje de las matemáticas fue mucho más fuerte que la relación entre la motivación extrínseca y el compromiso cognitivo. Los resultados sugieren que los factores sociales y culturales, como la sólida cultura del examen y las altas expectativas externas, pueden ser factores influyentes que afectan las relaciones recíprocas entre la motivación y el compromiso cognitivo de los estudiantes.

1.3. Investigaciones sobre Educación Matemática en contextos rurales

1.3.1. School location and socioeconomic status and patterns of participation and achievement in senior secondary mathematics[27]

Murphy (2019) en su investigación propuso como objetivo determinar si se observan patrones similares de inequidad en la participación y el rendimiento de los estudiantes de secundaria superior en matemáticas en las escuelas secundarias gubernamentales en Victoria, Australia. Además, buscó explorar cualquier efecto interactivo del Nivel Socioeconómico Escolar (NSE) y la ubicación en la participación y el rendimiento en matemáticas. En muchos países, existe presión para que las escuelas aumenten la participación y las habilidades de los estudiantes en matemáticas, en particular para los estudiantes provenientes de zonas desfavorecidas.

[27] Murphy, S. (2019). School location and socioeconomic status and patterns of participation and achievement in senior secondary mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(3), 219–235. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0251-9

En Australia, se observa que las escuelas no metropolitanas tienen menos probabilidades de ofrecer asignaturas de matemáticas avanzadas que las escuelas metropolitanas, y donde lo hacen, es menos probable que sus estudiantes elijan estas opciones. Los autores presentan un análisis de patrones de participación y rendimiento en asignaturas de matemáticas, el proyecto estuvo diseñado para completarse en 2 años. Este estudio confirma que el Nivel Socioeconómico Escolar (NSE) está fuertemente ligado a la participación y el rendimiento en estas materias, y que las escuelas no metropolitanas tienden a tener un desempeño más pobre que las escuelas metropolitanas en estas áreas.

1.3.2. Mathematics success against the odds: the case of low socioeconomic status, rural Australian school with sustained high mathematics performance[28]

Murphy (2021) en su investigación tuvo como objetivo presentar un estudio de caso de una escuela pública rural de nivel socioeconómico bajo que tiene un alto nivel de participación y rendimiento en matemáticas, a pesar de su entorno. Surgieron siete temas relacionados con las arquitecturas de la práctica: ubicación rural y tamaño pequeño, relaciones sólidas, cultura de aprendizaje sólida, red escolar local, horarios y programación no convencionales, recursos y dotación de personal.

Los resultados sugieren que, el éxito está relacionado con las altas expectativas establecidas, la instrucción debe ser diferenciada, se debe enfatizar el valor de las matemáticas, etc. Además, el estudio evidenció que las condiciones rurales en lugar de obstaculizar el programa de matemáticas de la escuela, su tamaño pequeño y su contexto rural son claves para superar los problemas comúnmente asociados con la educación matemática rural para lograr el éxito en matemáticas.

[28] Murphy, S. (2021). Mathematics success against the odds: the case of a low socioeconomic status, rural Australian school with sustained high mathematics performance. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00361-8

1.3.3. Whole-some artifacts: (STEM) Teaching and Learning Emerging from and Contributing to Community[29]

Wiseman et al (2020) presentan las experiencias de tres proyectos canadienses comprometidos con la creación de oportunidades de aprendizaje en las que las formas indígenas y occidentales de conocer, ser y hacer pueden darse juntas. Los autores sugieren que los currículos pueden dejar de ser disciplinarios, sino convertirse en escenarios para convivir con los jóvenes en la enseñanza y el aprendizaje. Pero quizás este cambio pueda surgir de un cambio similar en las formas de convivir, pero, al no estar seguros, se ven enfrentados a las tensiones. lo que implica, que, para tener mayor certeza, se debe seguir trabajando con la comunidad y aprender más.

1.3.4. Una epistemología de usos en torno a lo proporcional: un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar[30]

Balda (2018) investigó sobre usos de la proporcionalidad, la autora evidencia que, en las tareas de la huerta escolar, los estudiantes incurren en el desarrollo de manifestaciones matemáticas recurrentes, las cuales traen consigo un estatus epistemológico en la construcción social de lo proporcional. La epistemología de usos que se propone sobre lo proporcional se fundamenta bajo la existencia de tres usos de la proporcionalidad que viven en el contexto de la huerta escolar: las comparaciones, los usos de patrones y construcción de unidades de medida y las generalizaciones. La metodología de la investigación se fundamentó en el paradigma cualitativo. La recolección de información se realizó a través de técnicas del método etnográfico. Incorporó investigaciones que sustentan que existe un pensamiento proporcional que subyace de la cultura campesina; además, que los campesinos hacen uso de la

[29] Wiseman, D., Lunney, L., Beatty, R., Jao, L., & Carter, E. (2020). Whole-some artifacts: (STEM) Teaching and Learning Emerging from and Contributing to Community. In *Paper Knowledge. Toward a Media History of Documents* (Vol. 20, Issue 2)
[30] Balda, P. (2018). Una epistemología de usos en torno a lo proporcional: un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar (Issue February). Universidad Santo Tomas

proporcionalidad al momento de la siembra. Estas prácticas, junto con la variación son consideradas como nociones fundamentales para la construcción de la proporcionalidad.

1.3.5. Factores e interacciones del proceso de enseñanza-aprendizaje en contextos rurales de la Araucanía, Chile[31]

Fuentes, Bustingorry & Navarro (2016) el proceso educativo de niños rurales en la Araucanía, Chile, se desarrolla en contextos socialmente vulnerables, asociando este hecho a que dichos niños obtienen menores rendimientos en pruebas estandarizadas que niños urbanos. Para identificar nuevos aspectos que permitieran mejorar la enseñanza, se utilizó el método de Teoría Fundamentada, permitiendo identificar tres factores que fueron denominados como *Condicionantes*. Estos se relacionaron con la estructura curricular, la enseñanza y las estrategias de aprendizaje de los niños. Este último presentó una importante vinculación con las características afectivas del profesor y con el ambiente natural y sociocultural mediante un aprendizaje significativo y constructivista, aspectos que, de ser utilizados pedagógicamente, pueden mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y, paralelamente, los rendimientos educativos, permitiendo la mantención del medio ambiente y las tradiciones campesinas e indígenas, bases fundamentales para un nuevo marco curricular de enseñanza para el sistema educativo rural.

1.3.6. Connecting Mathematics, Community, Culture and Place: Promise, Possibilities, and Problems [32]

Nicol (2018) exploró una pedagogía crítica del lugar para la educación matemática de Greenwood (2013) junto con los marcos de la EMC para presentar un enfoque para conectar las matemáticas, la comunidad,

---

[31] Fuentes, R. D., Bustingorry, S. O., & Navarro, S. M. (2016). Factores e interacciones del proceso de enseñanza-aprendizaje en contextos rurales de la Araucanía, Chile. Estudios pedagógicos, 42(3), 111-128

[32] Nicol, C. (2018). Connecting Mathematics, Community, Culture and Place: Promise, Possibilities, and Problems. In G. Kaiser (Ed.), *In Invited Lectures of the XIII International Congress of Mathematical Education* (pp. 423–440). https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_32

la cultura y el lugar. Además, exploró la naturaleza de una pedagogía crítica del lugar en el contexto de la educación matemática haciendo la pregunta: ¿Cómo sería conectar las matemáticas, la comunidad, la cultura y el lugar? Para responder a esta pregunta, el autor se basó en una investigación con la comunidad indígena de Haida Gwaii en el noroeste del Pacífico de Canadá para proporcionar un ejemplo rural de una pedagogía crítica del lugar.

Incluyeron miembros de la comunidad, ancianos, artistas, administradores y educadores, explorando la educación matemática receptiva. Los autores han co-creado una serie de lecciones que unen las matemáticas, la comunidad, la cultura y el lugar. Logrando que los estudiantes de secundaria examinarán y graficaron el cambio en el volumen cosechado a lo largo de los años; y así involucraron a los estudiantes en el razonamiento cuantitativo, a partir de hacer cálculos. Finalmente, la autora concluye con reflexiones sobre los desafíos y posibilidades de una pedagogía crítica del lugar para la educación matemática en un mundo con problemas cada vez más complejos.

1.4. Teorías locales: porcentajes

1.4.1. The PGBE Model for Building Students' Mathematical Knowledge about Percentages[33]

Mula & Hodnik (2020) presentan el modelo PGBE para la enseñanza y el aprendizaje de porcentajes cuando su desarrollo cognitivo permite la comprensión conceptual de los porcentajes como enunciados proposicionales y ofrece la posibilidad de emparejarlos de manera más efectiva con fracciones y números decimales. La abreviatura PGBE presenta la interrelación del método del cartel y tres modelos instruccionales a través de los cuales se pueden construir diferentes tipos de conocimientos matemáticos de los estudiantes sobre porcentajes.

[33] Mula, M., & Hodnik, T. (2020). The PGBE Model for Building Students' Mathematical Knowledge about Percentages. *European Journal of Educational Research*, *9*(1), 257-276.

Por lo tanto, P representa el método del cartel a través del cual se puede hacer el reconocimiento del conocimiento previo de los estudiantes sobre porcentajes, G representa diferentes cuadrículas que pueden usarse para construir un tipo concreto de conocimiento sobre ellos; B representa el modelo de barra para desarrollar la comprensión proporcional de los estudiantes de los porcentajes, y E representa el modelo de barra extendida para fomentar la comprensión conceptual de principios de los estudiantes de los porcentajes. Los resultados muestran que la implementación del modelo PGBE tuvo un impacto en el aprendizaje de los estudiantes, estimulando un aprendizaje profundo y un conocimiento duradero sobre porcentajes para esta cohorte de estudiantes. El modelo PGBE contribuye a la teoría de la adquisición de conocimientos matemáticos, ya que presenta un nuevo marco para apoyar el progreso del desarrollo de los estudiantes en el aprendizaje de la comprensión, el pensamiento matemático y el razonamiento de porcentajes y otras estructuras multiplicativas, como fracciones y números decimales.

1.4.2. Intertwining lexical and conceptual learning trajectories-A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages[34]

Pöhler & Prediger (2015) el estudio de investigación de diseño explora cómo estos dos objetivos de aprendizaje pueden fomentarse mediante un enfoque de macro-andamiaje para estudiantes de séptimo grado. La doble trayectoria hipotética de aprendizaje parte de las experiencias previas de los estudiantes y los orienta, a través de varios niveles, hacia los modelos y significados matemáticos (trayectoria de aprendizaje conceptual) así como hacia el vocabulario necesario para pensar y comunicar sobre ellos (trayectoria de aprendizaje léxico), vinculados por la barra de porcentaje. Para el andamiaje léxico se enfocan los procesos de oferta, construcción y reflexión de medios léxicos en diferentes niveles. Las investigaciones empíricas cualitativas de los experimentos de diseño muestran en profundidad cómo

[34] Pöhler, B., & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories-A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1697-1722

evolucionó la comprensión conceptual de los estudiantes junto con los medios léxicos. Para ello, la reconstrucción interpretativa de las cadenas semióticas es instrumental.

1.4.3. The interplay of micro- and macro-scaffolding: an empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages[35]

Prediger & Pöhler (2015) el micro-andamiaje es un importante fenómeno local en una escala micro de interacciones profesor-alumno. Sin embargo, la idea de apoyar a los estudiantes para que avancen en sus zonas de desarrollo próximo requiere una sólida conceptualización de las trayectorias de aprendizaje previstas. Este artículo se centra en las trayectorias hacia los porcentajes e investiga cómo el micro-andamiaje depende de alinear las rutas de aprendizaje de los estudiantes con estas trayectorias de aprendizaje previstas (diseñadas en macro-andamiaje). Se realizó un estudio cualitativo en una serie de experimentos de diseño. En el proceso de análisis de 590 minutos de datos de video enriquecidos con respecto a la interacción entre el andamiaje micro y macro, se desarrolla y aplica al análisis un nuevo procedimiento analítico, el análisis de trazas. Un resultado central de este estudio es la relevancia de una característica clave del micro-andamiaje eficaz, a saber, la referencia a una trayectoria de aprendizaje hipotética como macro orientación.

Conclusiones capítulo 1

Eventualmente, los trabajos de Neugebauer & Prediger (2022); Yang et al. (2022); Walkowiak et al. (2017) y Wijaya et al. (2015) proponen criterios para una instrucción de calidad. Por su parte, Tesfamicael & Ayalew (2021) amplían el marco propuesto por Walkowiak et al. (2017). Estas investigaciones sirven de referente para las Prácticas de enseñanza efectiva; De modo que, estos trabajos se aproximan con

[35] Prediger, S., & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro-and macro-scaffolding: an empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. *ZDM*, *47*, 1179-1194.

aportes dirigidos hacia la calidad de la instrucción, pero no abordan la cuestión de aportar una definición, tampoco incluyen: el aprendizaje fuera del aula, el Dominio Afectivo y emocional, los movimientos por distintos AA (real y escenarios de investigación). Así las cosas, estos elementos se convierten en aspectos distintivos de la presente investigación.

En aras de tener una visión holística del estado del arte, se analizaron investigaciones relacionadas con Ambientes de Aprendizajes de calidad que atienden problemas de equidad, diversidad, inclusión y aprendizaje dentro y fuera de las aulas. En cuanto a Prácticas de enseñanza inclusivas, Prediger & Buró (2021) aportan las Prácticas de Mejora y Compensación; Prediger & Neugebauer (2021) Schoenfeld (2020) aportaron L-TRU; y TRU contienen dimensiones de calidad para los AA y la instrucción. Uno de los aspectos de la definición que se porta es la interacción de calidad tomada de Skovsmose (2022); Quabeck Erath & Prediger 2023). Las características cognitivas de las tareas de instrucción matemática se basaron en las ideas de Ni et al., (2018). De otra parte, los trabajos de Cai & Leikin (2020); Nor et al. (2016); Schukajlow et al. (2023); Zhang et al. (2023); aportaron los elementos asociados al dominio afectivo, la Motivación y la Inteligencia Emocional. Además, trabajos a nivel nacional como Alvis et al. (2019) fueron ilustrativos con relación a los AA reales.

Se analizaron investigaciones sobre Educación Matemática en contexto rural. Generalmente, estas investigaciones documentan que las escuelas no metropolitanas tienden a tener un desempeño más pobre que las escuelas metropolitanas Murphy (2019); sin embargo, cuando son ofrecidas, las OA tiene un alto nivel de rendimiento en matemáticas Murphy (2021). De Balda (2018) las ideas de uso de la proporcionalidad en los cultivos agrícolas; Wiseman et al (2020), Rubel & Nicol (2020) reconocen la importancia del trabajo con la comunidad para la creación de OA; Fuentes et al. (2016) vincula las características afectivas del profesor, con el ambiente natural, para conectar las matemáticas a la comunidad para construir el Aprendizaje. De otra parte, Mula & Hodnik (2020); Pöhler & Prediger (2015) y Prediger & Pöhler (2015) constituyen las investigaciones sobre porcentajes.

En síntesis, como el objeto de estudio de la presente investigación, consistió en atender la problemática que resulta de imbricar el primero de los cinco problemas generales que enfrenta en el campo de la Educación Matemática: la necesidad de definir y medir las oportunidades de aprendizaje con la suficiente precisión para estudiar cómo maximizar la calidad de las oportunidades experimentadas por cada estudiante (Cai et al., 2020) con un problema la práctica: la desigualdad e inequidad en el acceso a Oportunidades de Aprendizaje de Calidad en la clase de matemáticas para cada estudiante, el caso de escuelas rurales colombianas. Se puede concluir que las categorías del estado del arte resultaron adecuadas para la Construcción de la definición de OAC.

Finalmente, como evidencia de la exhaustiva y sistemática revisión de la literatura se presentan los siguientes mapas resultado de la búsqueda en SCOPUS y analizados con el uso del Software VOSviewer, que se corresponden con las categorías del estado del arte. Además, esta herramienta arroja información que permitió ver la tendencia del tema de investigación ver Figura 1.

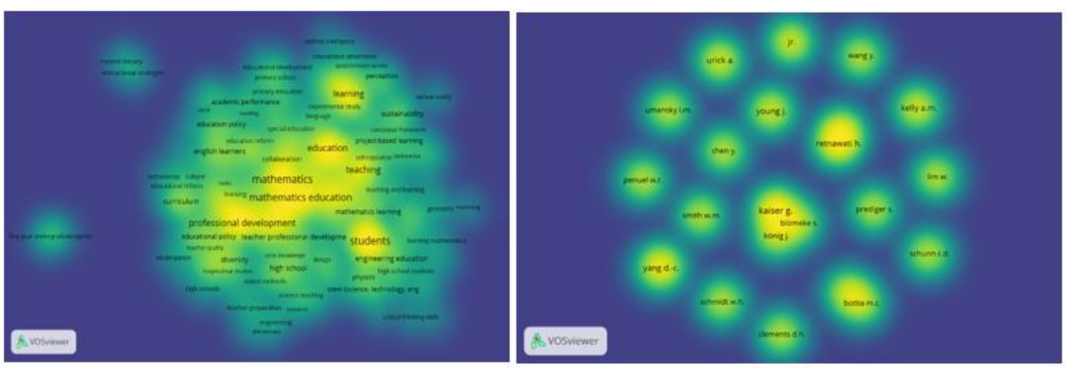


Figura 1. Palabras claves y autores en torno a Oportunidades de Aprendizaje en Matemáticas. Fuente. Elaboración propia.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta el encuadre teórico relacionado con el propósito de la presente investigación, este se ha elaborado a partir de revisiones sistemáticas de la literatura en las siguientes perspectivas temáticas: Los fundamentos filosóficos, epistemológicos y pedagógicos de la educación matemática, específicamente los que consideran al estudiante en el centro del proceso educativo; La Educación Matemática Crítica (EMC); El Marco de Enseñanza para un Entendimiento Robusto (TRU) por sus siglas en inglés; Un Marco sobre el Afecto, Las Prácticas de Enseñanza Inclusiva (PEI), investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de porcentaje y las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad desde la clase de Matemáticas (OAC). En la Figura 2 se presenta un esquema de las teorías centrales de este capítulo que configuran el Marco Teórico en los que se basa la presente investigación. Finalmente, se presentan una lista de conceptos que se han empleado a lo largo de la investigación: como, por ejemplo, que se asume desde esta investigación por comprensión conceptual, fluidez procesal, resolución de problemas, autoconcepto, inteligencia emocional, clima emocional positivo de aula, principales habilidades cognitivas (pre conocimiento matemático, atención, competencia del lenguaje y metacognición), Prácticas de Enseñanza Efectiva, tareas no rutinarias., etc.

El Capítulo se aborda desde cuatro ideas centrales:

1. El estudiante como centro del proceso epistémico del proceso de generación de Oportunidades de Aprendizaje de calidad (OAC) que surgen cuando los estudiantes participan en las actividades matemáticas y se involucran con las tareas de instrucción. Lo cual implica, tener en cuenta sus experiencias, antecedentes, necesidades de aprendizaje, habilidades cognitivas, afectivas y emocionales. Además, de los intereses y proyecto de vida.

2. El movimiento por los distintos AA de la Educación Matemática Crítica dirigida a generar ambientes de aprendizaje equitativos y robustos, en los que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aprender matemáticas.
3. La interacción de las matemáticas con el contexto rural es escenario potente para brindar oportunidades de aprendizaje que favorecen el planteamiento y resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento proporcional. Este contexto se dinamiza con las experiencias que puedan tener los niños en un contexto global.
4. Generar el diálogo respetuoso e incluyente en el aula, en el que el pensamiento y contribuciones del estudiante sean el centro del debate. Valorando las intervenciones de cada estudiante, así no sean correctas, en dado caso aprovechar para comprender cómo están entendiendo y comprendiendo en el momento, y de esta manera refinar esa comprensión. Lo anterior, en aras de posibilitar la evaluación formativa, estimular la participación y aportar seguridad a cada estudiante.

Figura 2. Niveles de generalidad del Marco teórico. Fuente: elaboración propia.

2.1 Referentes sobre la Educación Matemática Crítica

La Educación Matemática Crítica (EMC), se asume como sustento teórico, dado que propende por un currículo que atienda las desigualdades sociales y apuesta por la formación de sujetos con una ciudadanía crítica y con justicia social. La EMC invita al uso de pedagogías que pueden conducir a una educación matemática más equitativa y justa para todos los estudiantes, (Skovsmose 1999, 2011, 2014, 2016, Ravn & Skovsmose, 2019; Skovsmose & Valero 2012; Valero & Skovsmose, 2012). Desde este marco se espera analizar investigaciones que documenten experiencias exitosas, a partir del movimiento por los distintos ambientes de aprendizaje propuestos por Skovsmose. Además, asume la concepción de estudiante propuesta por la Educación Matemática Crítica

Estudiantes: para una Educación Matemática Crítica es importante considerar los intereses, expectativas, esperanzas y aspiraciones de los estudiantes. Un primer plano se define a través de muchísimos parámetros que tienen que ver con: condiciones económicas, procesos socioeconómicos de inclusión y exclusión, valores y tradiciones culturales, discursos públicos, racismo. Sin embargo, un primer plano también se define a través de las experiencias de la persona de posibilidades y obstáculos. Es una preocupación de la EMC reconocer la variedad de los conocimientos adquiridos por los estudiantes y desarrollar una educación matemática que pueda brindar nuevas posibilidades para los estudiantes Skovsmose (2016). De modo que en la construcción de la definición se contemplan todas estas dimensiones vistas desde el estudiante rural.

2.1.1 Ambientes de aprendizaje desde la Educación Matemática Crítica

Para lograr que los estudiantes sean aprendices activos y establecer una educación matemática significativa, se hace necesario considerar la contextualización de las actividades matemáticas no solo de dónde vienen los estudiantes, sino también mirar hacia dónde quieren ir. Si los estudiantes deben ser entendidos como estudiantes de la vida real, entonces es importante considerarlos en su "plena complejidad de la vida". Esta complejidad da sentido a las acciones y también a las acciones de aprendizaje (Skovsmose, 2005). Cuando se trata de lograr que las matemáticas tengan sentido para los estudiantes, no existen principios simples que aplicar. En este sentido, se sugiere buscar fuera de la tradición matemática escolar, el trabajo de proyectos brinda esas posibilidades. En correspondencia, se han especificado seis posibles tipos de Ambientes de Aprendizaje en términos de las referencias: a las matemáticas puras, a una semirrealidad o a una situación de la vida real y de las formas de organización de la actividad en la clase: el paradigma del ejercicio y los escenarios investigación ver Tabla 1 (Skovsmose, 2000; 2011).

Tabla 1. Ambientes de Aprendizaje propuestos por EMC.

Formas de organización de la actividad de los estudiantes		**Paradigma del ejercicio**	**Escenarios de investigación**
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Fuente: Skovsmose (2000, p.10).

2.1.1.1 Movimiento entre diferentes ambientes de aprendizaje

Siguiendo las ideas de Skovsmose (2000) la Educación Matemática tradicional se enmarca en el paradigma del ejercicio. Así, los escenarios de investigación que invitan a los estudiantes a involucrarse en un proceso de exploración y explicación contrastan con el paradigma del ejercicio. La diferencia entre el paradigma del ejercicio y los escenarios de investigación se cruza con los tres tipos de referencia (las matemáticas, a una semirrealidad o situaciones de la vida real), estos proveen significado a los conceptos matemáticos y a las actividades dentro del salón de clase (Skovsmose, 2000).

De estas combinaciones surgen seis posibles ambientes de aprendizaje que aquí se ilustran con ejemplos (Ver Tabla 1). El aula de clase de matemáticas tradicional, se caracteriza por concentrar la autoridad de la clase en el docente. En este sentido, moverse del paradigma del ejercicio hacia los escenarios de investigación posibilitará resaltar el papel de los estudiantes como sujetos activos de su propio proceso de aprendizaje, a relegar a las autoridades del salón de clase de matemáticas tradicional (Skovsmose, 2011). Ahora, moverse de la referencia a las matemáticas per se hacía la referencia a la vida real puede contribuir a ofrecer recursos para la reflexión sobre las matemáticas y sus aplicaciones.

Por consiguiente, Skovsmose (2000) espera que "*encontrar una ruta en medio de estos diversos ambientes de aprendizaje sugiera nuevos recursos de enseñanza para hacer de los estudiantes seres que actúan y reflexionan y, así, destacar la dimensión crítica de la educación matemática, (…). La distinción entre la tradición de los ejercicios y los escenarios de investigación no está clara, de hecho, existe un enorme terreno de posibilidades que se extiende entre estas dos alternativas*"[36].

Según Skovsmose (2011) el Ambiente de Aprendizaje 6 invita al trabajo por proyectos ejemplificado en Skovsmose, (1999), este ofrece posibilidades para realizar investigaciones y representa un ambiente de aprendizaje en esencia diferente al del paradigma del ejercicio. Parecido al Aprendizaje Basado en Proyectos, este exige trabajo interdisciplinario, permite a los estudiantes, aplicar conocimientos previos y adquirir habilidades que no se encuentran en la educación tradicional (Jacques, 2017).

Sin embargo, el autor enfatiza en que debe evitarse creer que el trabajo en este ambiente convierte una solución a los problemas educativos pasando rápidamente a un medio de aprendizaje de tipo 6. Más bien recalca que se debe apoyar una Educación Matemática que se mueva por los distintos ambientes presentados en la matriz (Skovsmose, 2000). De acuerdo con lo anterior, el montaje de un escenario

[36] Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación 1. *Ema*, *6*, 3 -- 26. p.10.

puede crear una riqueza semántica que ofrezca puertas de entrada para que ingrese al aula un lenguaje de reflexión que la terminología matemática sola no ofrece, estableciendo un contexto para que las discusiones tengan relevancia y sentido (Skovsmose, 1999). A su vez, tener en cuenta que la proposición de problemas también es un paso a seguir dentro de los escenarios de investigación, a pesar de que las actividades de formulación de problemas sean distintas de las del trabajo por proyectos. Además, los diferentes tipos de referencias, en general, incluyen el contexto para ubicar un objetivo para la realización de una acción: a la producción de significado en la educación matemática (Valero y Skovsmose, 2012).

2.2 Teaching for Robust Understanding (TRU) framework

Schoenfeld (2016) aporta criterios de calidad para un Ambiente de Aprendizaje, estas dependen del grado en el ambiente de aprendizaje que les proporcione oportunidades a los estudiantes con respecto a las siguientes cinco dimensiones: (1) La riqueza de los conceptos y las prácticas disciplinares (contenido) disponibles para aprender, (2) Entendimiento y *esfuerzo productivo*, (3) Acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas, (4) Medios para construir identidades disciplinares positivas a través de la presentación, la discusión y el refinamiento de ideas y (5) Sensibilidad del ambiente hacia su forma de pensar. El marco TRU (Enseñanza para un Sólido Entendimiento) responde a la pregunta de investigación *¿Cuáles son los atributos de los ambientes de aprendizaje equitativos y sólidos, en los que todos los estudiantes tengan apoyo para convertirse en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos?* El autor señala que la respuesta, depende de lo que sabemos cómo profesores e investigadores, y la describe de manera sintética en la Tabla 2.

Tabla 2. Dimensiones de un aula poderosa *(Schoenfeld, 2016)*[37].

Contenido	Demanda Cognitiva	Acceso Equitativo al Contenido	Disponibilidad, Dominio e Identidad	Evaluación Formativa
Grado en el cual la actividad en el aula proporciona oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones son centradas y coherentes, proporcionan la oportunidad de aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento disciplinar productivo.	Grado en el cual los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas disciplinares y su uso. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas cuya dificultad va de moderada a alta. El nivel de desafío debería llevar a lo que se conoce como un esfuerzo productivo.	Grado en el cual las estructuras de la actividad invitan y apoyan la participación activa de todos los estudiantes del grupo en el contenido central que se está abordando. Sin importar qué tan rico sea el contenido que se analice, un grupo en el que un pequeño número de estudiantes obtiene la mayor parte de la atención no es equitativo. Todos los estudiantes necesitan ser involucrados de manera significativa.	Grado en el que el estudiante tiene oportunidad de "hacer y decir": contribuir en conversaciones sobre ideas disciplinares, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador.	Grado en el que las actividades en el aula propician el pensamiento del estudiante y en el que las interacciones subsecuentes responden a dicho pensamiento, incorporando un inicio productivo y tomando en cuenta los errores emergentes. Una instrucción poderosa "va a donde el estudiante está" y le da la oportunidad de profundizar su entendimiento.

Fuente: Shoenfeld (2016).

La afirmación fundamental que subyace el Marco TRU es que el desempeño de un grupo con respecto a las cinco dimensiones de TRU está positivamente relacionado con la preparación de los estudiantes como pensadores y solucionadores de problemas flexibles, con conocimiento y con recursos. Los resultados, entonces, pueden correlacionarse con el desempeño de los estudiantes en medidas sólidas sobre el razonamiento y la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes.

[37] Schoenfeld, A. H. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. p.3-4.

Dentro del marco TRU existe una variedad de tareas para *principiantes, aprendices* y *expertos* en matemática para los grados sexto a décimo. Las tareas para principiantes explícitamente prueban elementos particulares del conocimiento del contenido. Las tareas para expertos están mucho menos estructuradas, y requieren habilidades estratégicas de resolución de problemas además del conocimiento del contenido: en tales tareas los estudiantes se enfrentan a demandas de entendimiento significativas y tienen un gran margen en la elección de métodos. Las tareas para los aprendices están entre estas dos. Este marco también proporciona una serie de rúbricas y guías de observación desde los ojos de los estudiantes y de los maestros o evaluadores, en el presente estudio se utilizaron varios de estos instrumentos.

2.3 Dominio afectivo y emocional

La necesidad de incorporar el dominio afectivo, surgió de la interpretación de la interacción entre estudiantes en un Ambiente de Aprendizaje 6 en el desarrollo del experimento de diseño (del ciclo 1 al ciclo2). Por tanto, resultó necesario citar un marco dentro de la educación matemática acerca de este domino. A lo largo del tiempo se han desarrollado varios marcos teóricos de los afectos en la educación matemática (p. ej., McLeod, 1992; Hannula et al., 2004; Hannula, 2012). Evidentemente, los campos cognitivo y afectivo están interrelacionados y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje (Cai & Leikin, 2020).

McLeod (1992) divide el dominio afectivo en tres aspectos con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: emociones, actitudes y creencias. Las tres dimensiones difieren en términos de intensidad, estabilidad e implicación cognitiva, representando las creencias el extremo más estable y cognitivo y las emociones el extremo más intensivo y viceversa.

Las emociones son estados afectivos, como el alivio, la alegría o la ansiedad que resultan de la propia evaluación del progreso hacia una meta, o la falta de progreso. **La actitud** se refiere a una predisposición o tendencia aprendida por parte de un individuo para responder positiva o negativamente a un objeto o actividad, por ejemplo, anticipar o evitar una determinada actividad. **Las creencias** se refieren a una perspectiva o visión aprendida (explícita o implícita) de lo que trata un objeto. Por ejemplo, la creencia común es el estereotipo de las matemáticas como un dominio de fórmulas y procedimientos computacionales. El presente estudio adoptó el esquema de McLeod (1992).

2.3.1 Vías afectivas: afecto local y global

Según Hannula et al. (2004) a medida que se repiten, las vías afectivas, conducen a la construcción de efecto global dentro del individuo: estructuras afectivas a largo plazo que, en el primer caso, podrían facilitar el entusiasmo futuro, el compromiso, las expectativas de éxito y una matemática positiva.

Afecto local se refiere a los estados cambiantes de sentimientos emocionales que experimentan las personas cuando se involucran en actividades matemáticas (resolución de problemas).

Vías afectivas: son las secuencias recurrentes de tales estados, uno que conduce al siguiente según el contexto, a manera de ejemplo, un estudiante que aborda un problema de matemáticas puede experimentar inicialmente curiosidad, apatía o desconcierto si el problema es desconocido o difícil. Quizá después de uno o varios cambios de estrategia, el estudiante experimente algún ánimo a medida que el avanza, seguido de satisfacción con haber resuelto un problema difícil o entendido un nuevo concepto matemático. Contrariamente, los repetidos intentos fallidos pueden provocar frustración. Esta puede conducir a ansiedad, ira, miedo, y/o desesperación, evocando estrategias de evitación y mecanismos de defensa, un camino muy diferente.

2.3.2 Inteligencia Emocional (IE)

En el presente trabajo se aplicó el instrumento TMMS-24 que está basado en el grupo de investigación de Salovey y Mayer citado en Fernández & Extremera (2005). La TMMS-24 contiene tres dimensiones claves de la IE con ocho ítems cada una de ellas: Atención emocional, Claridad emocional y Reparación emocional. Estas son consistentes con la percepción, comprensión y regulación emocional, dimensiones que se evaluaron a los niños en el presente estudio.

2.4. Oportunidades de Aprendizaje

Originalmente, este concepto fue acuñado por Carroll (1963) cuando se refiere al tiempo suficiente para que los estudiantes aprendan (Liu, 2009). También se introdujo el constructo Oportunidades de Aprender para garantizar la validez de los estudios comparativos internacionales sobre el rendimiento de los estudiantes. Recientemente, Cai et al. (2020) invitan a la comunidad de educadores matemáticos a estudiar, en un nivel detallado, cómo las prácticas de enseñanza particulares pueden contribuir a la calidad de las oportunidades de aprendizaje. Específicamente, se enfoca en cómo se puede diferenciar la instrucción para maximizar la calidad de la oportunidad para cada estudiante. Aunque diferenciar la instrucción no es un concepto nuevo y maximizar el aprendizaje de cada alumno corre el peligro de convertirse en un eslogan usado en exceso, se presenta como una lente de oportunidades de aprendizaje.

2.5 Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

El constructo THA es un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Consta de tres componentes: una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simón, 1995). Sobre la base de este trabajo, Clements y Sarama (2004) definen las trayectorias de aprendizaje como "*descripciones del pensamiento y el aprendizaje de los niños en un dominio matemático específico y una ruta conjeturada relacionada a través de un conjunto de tareas de instrucción diseñadas para engendrar esos procesos mentales a través de una progresión de desarrollo de niveles de pensamiento, creada con la intención de apoyar el logro de los niños de metas específicas en ese dominio matemático*"[38].

[38]Lobato, J., & Walter, C. D. (2017). A Taxonomy of Approaches to Learning Trajectories and Progressions. The Compendium for Research in Mathematics Education p.83.

La reciente taxonomía de Lobato & Walter (2017) sobre las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje permite ver diferencias y similitudes en la interpretación de estas. Lo cual apoyó tomar la decisión de configurar las Trayectorias basados en una combinación del constructo de Simón (1995) y Clements & Sarama (2004). Esta trayectoria debe desarrollar tanto el contenido matemático como los procesos matemáticos generales como la resolución de problemas, razonamiento, comunicación, conexiones y representación; procesos matemáticos específico tales como organizar información, patrones y composición, y hábitos mentales como la curiosidad, la imaginación, la inventiva, la persistencia, la voluntad de experimentación y sensibilidad a los patrones (Clements, 2004, citado por Clements & Sarama, 2014).

De la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje subyacen los siguientes supuestos: La generación se basa en los conocimientos previos de los estudiantes, es un vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos, las tareas de instrucción se seleccionan, no sólo sobre la base de las características genéricas de la tarea, como una alta demanda cognitiva o el interés de los estudiantes, sino también debido a la cualidad inferida de poder engendrar el siguiente nivel de sofisticación del pensamiento de los estudiantes. En contraste con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, se encuentra el constructo de TRA (Bakker & Van Eerde, 2015) que corresponde a la trayectoria de aprendizaje que los estudiantes han seguido en el contexto de la implementación de un diseño instruccional. A la luz de este constructo, se organizó la implementación de tareas y emergió la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad. Dado que, son modelos significativos para el desarrollo conceptual, la validez de los marcos para la progresión y la previsibilidad del aprendizaje del estudiante.

2.6 Teorías de instrucción local: los porcentajes

Se inicia con algunas consideraciones conceptuales acerca de la enseñanza y aprendizaje del porcentaje, que está relacionado con el desarrollo del razonamiento proporcional entendido como la “habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades" (Lamon, 2007; citado en Obando, 2015). Y se definen algunos términos claves bastante amplios relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los porcentajes que los investigadores utilizan de diferentes maneras:

Modelos de instrucción son "representaciones de situaciones problema, que necesariamente reflejan aspectos esenciales de conceptos y estructuras matemáticas que son relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diferentes manifestaciones"[39]. **Los modelos instructivos** para enseñar y aprender porcentajes son: cuadrícula de 10 x 10 cuadrados, barras de Cuisenaire, escalas de comparación, tablas de razones, modelo de barra, modelo de barra extendida y recta numérica doble.

Modelo de aprendizaje es una ruta proyectada que abarca objetivos de aprendizaje, estrategias y modelos de instrucción que brindan oportunidades de aprendizaje significativas para que los estudiantes desarrollen su comprensión de diferentes conceptos matemáticos en un contexto de aprendizaje variado (Mula & Hodnik, 2021). Finalmente, los Métodos para la resolución de problemas de porcentajes se reconocen como un conjunto de procedimientos que son característicos para el cálculo de porcentajes. Los métodos para calcular porcentajes son: el método de los tres casos, el método de la fórmula, el método de la ecuación, el método unitario, el método proporcional, las tablas de razones, etc. (Parker & Leinhardt, 1995; van Galen et al., 2008; en Mula & Hodnik, 2021).

2.6.1 Estudiantes en riesgo académico.

Un estudiante en riesgo según Prediger et al (2022) *es "aquel que está en peligro de no completar su educación con un nivel adecuado de habilidades. Los factores de riesgo incluyen bajo rendimiento, repetición de grado, mala asistencia, baja condición socioeconómica y asistencia a escuelas con un gran*

---

[39] Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, *54*, 9-35., p.13.

número de estudiantes pobres"[40]. En la actualidad esas ideas siguen teniendo vigencia, la investigación en educación matemática ha identificado necesidades típicas de aprendizaje matemático para estudiantes en riesgo. Mientras que las primeras investigaciones enfatizaron principalmente la relevancia de las habilidades básicas subyacentes a los temas actuales, surgió un consenso creciente de que las habilidades deben estar relacionadas con la comprensión de los conceptos básicos y la resolución de problemas (Kilpatrick et al.,2001; en Prediger et al., 2022).

2.6.2. Indicadores de los logros de los estudiantes en matemáticas

Siguiendo el estudio de Ni et al., (2018) se presentan indicadores de los resultados de aprendizaje de los estudiantes (indicadores cognitivos y afectivos).

Indicadores cognitivos: la comprensión conceptual, la fluidez procesal en el cálculo y las habilidades de resolución de problemas constituyen la competencia matemática fundamental que debe fomentarse en las matemáticas escolares (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas: NTCM, 2000).

La comprensión conceptual se refiere a la comprensión de los significados de los símbolos, fórmulas, reglas y procedimientos matemáticos (p. ej., Byrnes y Wasik,1991; citado en Ni et al., 2018).

La fluidez procesal se relaciona con la competencia de un individuo para realizar manipulaciones y cálculos precisos de aritmética y álgebra (p. ej., Zhang et al.,2004; citado en Ni et al., 2018).

Las habilidades para resolver problemas: son aquellas que aplican los conceptos y procedimientos matemáticos aprendidos para resolver problemas diarios mediante el uso de métodos matemáticos (p. ej., Cai,2000; Mayer,2003; Schoenfeld, 1992; citado en Ni et al., 2018). La relación entre estos tres aspectos de la competencia matemática suele ser bidireccional e iterativa (Ni et al., 2018). Sin embargo, a menudo se observa una desconexión entre ellos en la enseñanza en el aula y el rendimiento matemático

[40] Prediger, S., Erath, K., Weinert, H., & Quabeck, K. (2022). Only for Multilingual Students at Risk? Cluster-Randomized Trial on Language-Responsive Mathematics Instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 53(4), 255-276. p.14.

de los estudiantes. En consecuencia, las habilidades para resolver problemas aplicados a la vida real, reciben mayor énfasis en la definición de OAC.

2.6.3 Interacción

La interacción en el aula se ha definido como las formas en que los profesores y los estudiantes interactúan en las negociaciones de significados de ideas matemáticas (Bauersfeld, 1988 citado en Quabeck, Erath & Prediger, 2023). Existen diversos sinónimos de la palabra interacción, como comunicación interpersonal, ambiente de clase, ecología de aula, etc. pero todos se refieren a la misma realidad: los procesos de comunicación que tienen lugar en un aula entre los alumnos y entre alumnos y profesor, y no sólo la comunicación verbal sino también la verbal, emocional, física, etc.

Principales dominios de calidad de la interacción: según Quabeck et al. (2023) la calidad de la interacción puede mejorar o limitar las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes. Con base en esta comprensión de los complejos mecanismos de las interacciones, a través de distintos estudios se han identificado tres dominios de calidad principales que mejoran las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes: Estas nuevas conceptualizaciones se sistematizan como entradas en la tabla 3.

Tabla 3. Diferentes conceptualizaciones de la calidad de la interacción mediante una combinación de focos y dominios de calidad.

Dominios de calidad	**Activación destinada por los profesores**	**Activación promulgada por los docentes en la interacción**	**Participación individual de Estudiantes**
Espacio para charla de estudiantes.	Espacio ofrecido para la conversación de los estudiantes (p. ej., por las preguntas de los maestros).	Participación de la clase en la charla de los estudiantes.	Participación individual de los estudiantes en la charla.

Riqueza matemática	Altas demandas y apoyos conceptuales y otros cognitivos (p. ej., mediante tareas, representaciones y movimientos de los profesores).	Participación de la clase en actividades matemáticas ricas (p. ej., conceptuales en lugar de procedimentales).	Participación individual en ricas actividades matemáticas.
Riqueza discursiva	Altas demandas y apoyos discursivos (p. ej., mediante tareas, representaciones y movimientos de los profesores).	Participación de la clase en actividades discursivas ricas (p. ej., explicar) o hacer referencia entre sí.	Participación individual en actividades discursivas ricas (p. ej., explicar).

Fuente: Quabeck, Erath & Prediger (2023)

2.6.4 Prácticas de enseñanza inclusiva

Se definen las *prácticas de enseñanza inclusiva* como aquellas acciones recurrentes que satisfacen demandas situacionales específicas para trabajar con las diversas habilidades de los estudiantes en las aulas de las materias (Kurth, Lyon y Shogren, 2015; citado en Prediger & Buro, 2021). En lo que respecta a la presente investigación se tuvieron en cuenta, las **Prácticas de mejora**: apuntan al progreso del aprendizaje de los estudiantes en una orientación a largo plazo ("orientación al dominio", según Dweck,1996). Estas tienen como objetivo desarrollar las habilidades y crear oportunidades de aprendizaje específicas para hacerlo. **Prácticas de compensación:** favorecen la adaptabilidad, pero con un enfoque en la finalización de la tarea en lugar del progreso del aprendizaje y las categorías relevantes para completar la tarea (Prediger & Buro, 2021).

2.6.5 Habilidades cognitivas

Según la selección sugerida por Prediger & Buro (2021) las habilidades cognitivas más importantes que han demostrado tener un impacto en el aprendizaje exitoso en la escuela son: preconocimiento matemático, atención selectiva y memoria de trabajo, regulación metacognitiva y el dominio del idioma. Para el presente estudio interesa preconocimiento matemático, Regulación metacognitiva y el Dominio del idioma (Dominio del Lenguaje académico). Se excluye la memoria de trabajo por debilidades para su desarrollo.

El preconocimiento matemático es muy relevante para un aprendizaje posterior exitoso: comprende no solo las habilidades básicas, sino también la comprensión de los conceptos básicos, y ambos pueden fomentarse en las intervenciones (Prediger & Buró,). Para el caso de los porcentajes, los conociemientos previos corresponden a el concepto de parte-todo, o los significados de multiplicación y división y también habilidades básicas como contar por pasos, para lo cual la automatización compensa la memoria de trabajo memoria a largo plazo (Prediger et al. 2019). Así las cosas, ser receptivo al preconocimiento significa incluir oportunidades de aprendizaje para la comprensión conceptual básica y las habilidades básicas identificadas, por ejemplo, mediante adaptaciones curriculares para algunos estudiantes.

Lenguaje académico se describe como un registro lingüístico entre el lenguaje cotidiano de los estudiantes y el lenguaje matemático formal técnico y se caracteriza funcionalmente como el registro utilizado por profesores y estudiantes con el fin de adquirir nuevos conocimientos y habilidades impartiendo nueva información, describiendo ideas abstractas y desarrollando la comprensión conceptual de los estudiantes" (Chamot & O'Malley, 1994, p. 40 en Prediger,2022 CERME). Se considera que un importante medio de aprendizaje, por lo tanto, es necesario en el grupo de estudiantes buscar mecanismos para ampliar su lenguaje, que, aunque son estudiantes monolingües por su origen sociodemográfico y características socioculturales, tienen un léxico muy limitado.

2.6.6 Tareas no rutinarias

Una tarea no rutinaria, es aquella que tiene una alta demanda cognitiva, esta requiere que el alumno conecte los procedimientos matemáticos con los conceptos subyacentes para comprender y lograr la solución del problema (Doyle,1983; Stein et al.,2000; citado en Ni et al., 2018). Las tareas que usan múltiples representaciones ofrecen múltiples herramientas para que los estudiantes las usen para construir una comprensión más profunda de los conceptos y procedimientos matemáticos. Se piensa que aquellas tareas con múltiples métodos de solución permiten enfoques alternativos y, por lo tanto, es más probable que atiendan las diferencias y opciones individuales. Por lo tanto, existe una mayor oportunidad de ayudar a los estudiantes a experimentar la autonomía. A su vez, la autonomía experimentada por el estudiante a través de la participación razonada es una fuente significativa de motivación intrínseca para el individuo (Ryan & Deci,2002; citado en Ni et al., 2018).

2.6.7 Problemas no rutinarios

A continuación, se presentan condensadas las características de un problema no rutinario adaptado de Cai et al. (2023). (ver Tabla 4).

Tabla 4. Característica de un problema no rutinario.

	Características
1	El problema incorpora matemáticas importantes y útiles
2	Los estudiantes pueden abordar el problema de múltiples maneras utilizando diferentes heurísticas
3	El problema permite tomar y defender diferentes decisiones o posiciones frente a su solución
4	El problema fomenta la participación, discusión y argumentación de los estudiantes
5	La resolución requiere un alto nivel de razonamiento
6	El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes
7	El problema se conecta con otras ideas matemáticas importantes
8	El problema promueve el desarrollo de habilidades matemáticas
9	El problema brinda la oportunidad de practicar habilidades importantes
10	El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus alumnos están aprendiendo y dónde están experimentando dificultades

Fuente: autor adaptado de Cai et al. (2023).

2.6.8 Conceptos relacionados con la dimensión socioemocional de aula

La gestión del aula debe verse como un término general para caracterizar la enseñanza como un conjunto de acciones de control y respuesta por parte de los maestros. Las facetas de la gestión del aula se pueden considerar como la implementación de opciones con respecto a los objetivos educativos, el contenido y las habilidades que se adquirirán, los grados de estructura en la enseñanza y la aplicación de métodos de planificación y evaluación (Scheerens, 2023).

Apoyo emocional en la enseñanza: Por un lado, estos se ven como resultados por derecho propio y se presentan como variables dependientes en los estudios de intervención y, por otro lado, se tratan como instrumentos para los resultados académicos. Un hallazgo intrigante fue que se demostró que los programas de aprendizaje socioemocional tienen tamaños de efecto en los resultados cognitivos tan grandes o incluso mayores que las intervenciones cognitivas dedicadas (Scheerens, 2023).

El clima en el aula se puede definir como el ambiente general en el aula. Cuando se analizan más a fondo, las principales facetas de un clima favorable que mejora la eficacia son un estilo de apoyo en las interacciones profesor-alumno, orientación al logro, reglas disciplinarias claras y buenas interacciones alumno-alumno. Algunas de estas facetas se relacionan con aspectos más abiertamente "gestionados", "institucionalizados" y "planificados" de la enseñanza, otras son más interaccionistas y "emergentes" y parte de la cultura escolar (Scheerens, 2023).

Relación empática es la habilidad para entender las necesidades, sentimientos y problemas de los demás, poniéndose en su lugar, y responder de manera correcta a sus reacciones emocionales. Como tal es un sentimiento objetivo cuyo desarrollo requiere un cierto tipo de inteligencia (Montes & Torres, 2021).

2.6.9 ¿Qué es una Definición Operacional?

Una definición operacional consiste en definir con exactitud todos los elementos de una categoría descriptiva en términos de los pasos u operaciones efectuadas al observar y medir sus valores (Anderson, 1968; citado en Romero y Dávila, 2000). Conviene traer a colación la definición que emplea Harel (2010) para definir operacionalmente el Aprendizaje: *“Una definición operacional es una demostración de un* *proceso tal como una variable, un término, o un objeto en términos de proceso o sistema específico de pruebas de validación, usadas para determinar su presencia y cantidad"*[41].

Conclusiones del capítulo 2

Inicialmente, se describe el papel que juega la teoría en la presente investigación: como marco para la investigación y como resultado principal de investigación. Seguido de la estructura teorías de instrucción específica (EMC + TRU+ Dominio Afectivo y socioemocional), luego las teorías de instrucción local (aportes acerca del proceso de enseñanza el Aprendizaje de los porcentajes y temas subyacentes) y finalmente las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje que constituyen las teorías humildes.

Eventualmente, se consideró la EMC por su propósito en apoyar una educación matemática para todos, lo cual resultó consiste con el Movimiento por los distintos AA que propone este Marco. Sin embargo, este marco adolece de criterios de calidad explícitos. De hecho, Skovsmose invita a encontrar una ruta óptima para el movimiento entre los AA. De modo que, hubo necesidad de entrelazar estas ideas con las del Marco de Enseñanza para un Robusto Entendimiento (TRU, Schoenfeld, 2016). Sin embargo, surgió la necesidad de incorporar el Dominio Afectivo hacia las matemáticas y los aspectos socioemocionales como la inteligencia emocional y algunas prácticas de enseñanza inclusiva. De modo que esta imbricación permitió definir las Prácticas de Enseñanza Efectivas y Afectivas (PEEA). Por todo lo anterior, se visualiza al docente como un gestor de Ambientes de Aprendizaje y diseñador de Trayectorias de Hipotéticas de Aprendizaje (THA), a partir del su conocimiento didáctico, pedagógico, del contenido matemático, con dominio afectivo y dinamizador de un ambiente positivo de aula a partir de la empatía cognitiva, afectiva y emocional para apoyar la trayectoria de progreso de los estudiantes.

[41] Harel, G., & Koichu, B. (2010). An operational definition of learning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 115-124. p.2.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe el proceso y resultados de implementar las fases de la Investigación Basada en diseño (IBD). En especial, los experimentos de diseño, por sus dos objetivos duales: 1) diseñar y mejorar los dispositivos de enseñanza y aprendizaje para las aulas y 2) generar contribuciones teóricas a través de la investigación empírica para comprender procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido específico (Prediger, 2019; Gravemeijer & Prediger, 2019).

En línea, con estos objetivos duales se pretende generar Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para que cada estudiante en contexto rural alcance su nivel personal óptimo en matemáticas. A partir de la configuración de ambientes de aprendizaje (AA) y el movimiento entre los mismos (Skovsmose, 2000; 2023), que se van generando y refinando mediante los experimentos de diseño en los ciclos iterativos. Paralelamente, se construye una metodología para generar oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante y una definición sobre OAC para cada estudiante (investigación educativa: generación de teoría). En lugar de ejecutar actividades en secuencia, se realizaron ambas simultáneamente y se entrelazaron en varios ciclos para alcanzar los objetivos duales (Cobb et al.2003; Gravemeijer & Prediger, 2019; Gresalfi, 2015).

Por lo anterior, se determinó que la IBD era el diseño más apropiado, toda vez que su uso se ha incrementado, en el campo de la Educación Matemática, especialmente en los últimos años, los campos de acción se han extendido a todos los niveles e instituciones, desde el jardín de infancia (Sarama y Clements 2002), las escuelas primarias (Confrey y Maloney 2015), escuelas secundarias (por ejemplo, Gresalfi 2015; Lobato et al.2015; Prediger y Krägeloh 2015; Stephan 2015) la universidad (por ejemplo, Kwon et al.2015; Rasmussen 2001; citado en Prediger et al.,2015).

3.1 Tipo, enfoque y Aproximaciones

Se procedió bajo un enfoque cualitativo y dada la postura epistemológica asumida en el presente estudio (el estudiante como centro del proceso de aprendizaje) se configuró el problema de investigación de manera inductiva, a través de la identificación de un problema real de la instrucción, concerniente a la desigualdad e inequidad en el acceso a las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad que experimentan los niños de los contextos rurales colombianos y del mundo. Esta situación, es investigada a profundidad y conocida por la autora desde su vivencia personal (egresó de escuelas rurales). Dicho fenómeno se imbrica con la necesidad del campo de investigar acerca de las OAC y como maximizarlas Cai et al. (2020). De modo que, resultó un problema de investigación que atiende problemas de instrucción que se experimentan en las aulas de varios maestros, según Cai et al. (2019) este tipo de investigaciones ayuda a garantizar que la respuesta a la pregunta tenga el alcance suficiente para ser relevante y significativa más allá del contexto local y, además, aporta avances al campo.

Se asumió un enfoque y fenomenológico y socio crítico, en el sentido que además de buscar descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientes significativas de los fenómenos de estudio, se pretende establecer relaciones entre eventos, derivar esclarecimientos útiles y convincentes, hacer hallazgos novedosos, etc. para finalmente coadyuvar con la transformación social. En consecuencia, se opta por una Aproximación colaborativa social (Camargo,2021). Por tanto, es un enfoque apropiado para abordar problemas para los que no se dispone de directrices para diseñar soluciones (Archer, 2019).

3.2 Modelo de proceso para la investigación de diseño didáctico de temas específicos

La interacción iterativa entre el diseño, el experimento de diseño y el análisis se llevó a cabo dentro del marco metodológico de la Investigación de Diseño Didáctico de Temas Específicos (siguiendo las ideas principales de Gravemeijer & Cobb, 2006; Gresalfi, 2015). El marco se basa en la interacción iterativa y entrelazada entre cuatro áreas de trabajo (Ver Figura 3). Además, los resultados de diseño esperados comprenden los niveles de la Trayectoria para un robusto entendimiento de los porcentajes en torno al Marco TRU y la Trayectoria de Andamiaje basada de los movimientos por los diferentes Ambientes de Aprendizaje propuestos por la EMC, para el caso de los porcentajes. Esta última, también brindó andamiaje para el vocabulario necesario en los diferentes niveles. Asimismo, los principios de diseño aportan los elementos para la Teoría de Instrucción Local Conjeturada: La metodología sobre Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para Cada Estudiante Rural (MOACCER) y la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC).

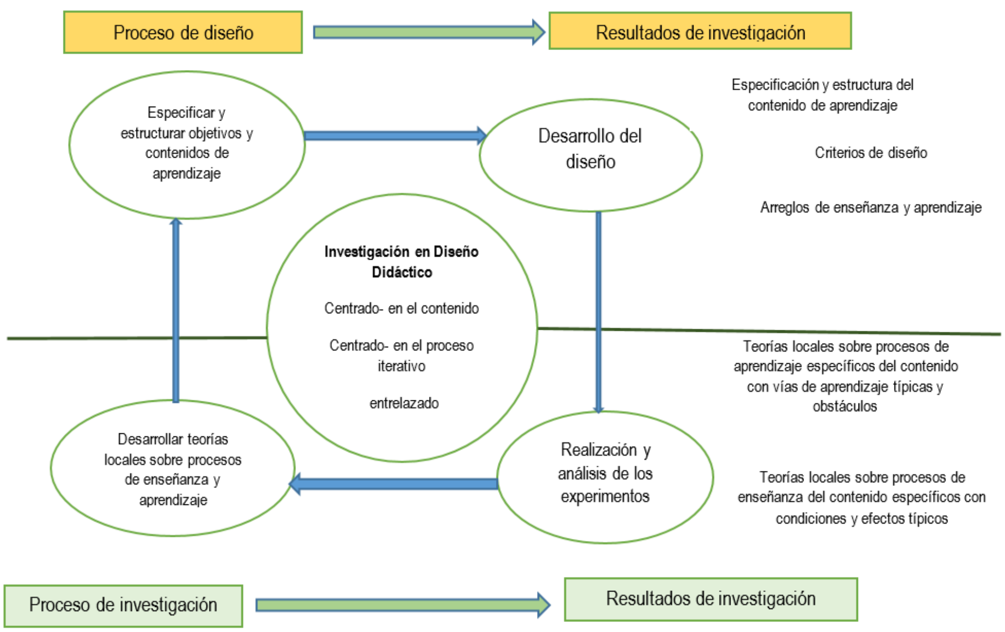


Figura 3. Modelo de proceso con áreas de trabajo para la investigación del diseño didáctico por temas específicos (Prediger et al. 2012; en Gravemeijer & Prediger, 2019).

3.3 Fases de la Investigación Basada en Diseño (IBD)

En la presente investigación se implementaron las fases de la Investigación Basada en Diseño (IBD), generalmente consta de ciclos de tres fases cada uno: Preparación y diseño, Experimento de enseñanza y Análisis retrospectivo de los datos (Cobb et al.,2000). Se profundizó en los modelos propuestos por (Bakker & Van Eerde, 2015); Gresalfi, 2015; Prediger et al. 2012 en Gravemeijer & Prediger, 2019). Se destaca, que para el desarrollo del diseño resultó útil el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) durante todas las fases de IBD como un instrumento de diseño e investigación.

Para generar elementos pragmáticos y teóricos es necesario responder el siguiente problema de investigación: ¿De qué manera interactúan los aspectos de las dimensiones de una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad en la generación de una metodología de enseñanza y aprendizaje que brinde un acceso equitativo a estas OAC para que cada estudiante de un contexto rural colombiano en condiciones de riesgo académico logre su nivel personal óptimo en la clase de matemáticas? De modo que, responder este problema, implicó dar respuesta a otro problema de investigación ¿Cuáles son los criterios que definen operativamente una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante perteneciente en un contexto rural colombiano?

Fase de preparación y diseño: en esta fase se delinearon los Principios de diseño, se escogió a los participantes, se elaboraron evaluaciones sobre el conocimiento inicial de los alumnos, se analizó la escogencia del contenido, se identificaron las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos, se diseñó la recogida de datos, se delineó una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Así las cosas, los principios de diseño establecidos fueron los siguientes:

Principio 1: brindar equidad en el acceso a las OAC y posibilitar que cada estudiante alcance su nivel personal óptimo en matemáticas, deben diseñar los AA y de ser posible formular problemas en conjunto con los profesores mediante la inmersión en el entorno rural y global.

Principio 2: La interacción generada en el proceso de resolución de problemas se centrará en el usó de la mayéutica, con el propósito de que no se le explique al estudiante cómo resolver un problema, sino más bien, mediante preguntas o el diálogo se haga público el pensamiento del estudiante para poder dar brindar el andamiaje apropiado.

3.3.1.1 Los participantes

Los participantes lo conforman 12 estudiantes actualmente están en los grados séptimo a undécimo en edades de 13 a 19 años. Cuando se inició el proyecto los niños estaban en los grados sexto a noveno; en edades de 11 a 17 años. Ocho (8) de ellos estudian en la Institución Educativa Palmira y cuatro (4) en la Institución Educativa Toluviejo. Todos residen en la vereda la Floresta (ver tabla 5). Además, la investigadora principal es quien dirige la instrucción. Es un grupo pequeño en cantidad a lo que se denomina un laboratorio (Prediger, 2019).

Cabe aclarar que para algunas actividades hubo profesores invitados, por ejemplo, Ivan Nuñez: trabajó actividades del pensamiento métrico y geométrico, Jairo Escorcia: Pensamiento Numérico, Gabith Pretel Estadística – Censo (Excel) estos profesores también fungieron como observadores y evaluadores usando la rúbrica TRU. Asimismo, cabe mencionar que en el marco de la investigación se desarrollaron dos trabajos de grado de pregrado uno sobre Sobre el Teorema de Pitágoras y otro en torno a la Compresión conceptual de las fracciones desde los Ambientes de Aprendizaje de la Educación Matemática Crítica en estudiantes de una escuela rural.

Tabla 5. Relación de estudiantes participantes 2020 -2023

No.	Nombre	Edad (años)	Grado 2023	Sexo	Fecha de nacimiento	Quiere ser
E1	Cris	16	Undécimo	M	7 nov. 2006	Zootecnista
E2	Niki	14	Noveno	F	7 agos. 2008	Psicóloga
E3	Rosita	19	Undécimo	F	15 enero de 2004	Estilista o enfermera
E4	Fer	15	Undécimo	M	14 oct. 2007	Ing. Civil
E5	Santi	13	Noveno	M	10 agos.2010	Diseño gráfico, psicólogo, Lic. Español, director de cine
E6	Yohe	14	Octavo	F	15 dic. 2008	Chef – Lenguas extranjeras

E7	Mel	13	Séptimo	F	14 enero 2009	Policía
E8	Ever	16	Noveno	M	9 dic. 2006	Arquitecto
E9	Jos	13	Octavo	M	30 mayo 2009	Matemáticas – Ing. Agrícola
E10	Adry	15	Séptimo	F	3 sep. 2007	Abogada
E11	Guillo	18	Noveno	M	7 nov 2004	Lic. Matemáticas
E12	JuanJo	13	Séptimo	M	24 marzo 2010	Biólogo - Zootecnista

Fuente: Elaboración propia (2021).

En lo que respecta a las evaluaciones del conocimiento inicial de los alumnos, en la Tabla 6 se relaciona el cronograma las diferentes actividades que permitieron comprender el dominio y nivel de conocimiento inicial de cada niño, las necesidades cognitivas y de dominio afectivo de cada niño participante.

Tabla 6. Fechas de implementación de las pruebas de valoración del conocimiento inicial de los estudiantes.

Fecha	Descripción	TIEMPO ESTIMADO
5-sep-21	Puzzle	4 horas directas - 2 semanas
6-sep-21	Problemas (PISA 2000)	1 hora
23-sep-21	Problemas - Singapur, segmentos y bloques	3 horas
29-sep-21	Prueba de sobre fracciones	3 horas
6-oct-21	Prueba de conocimientos operaciones con números enteros	2 horas

Obsérvese, en la Figura 4 la respuesta de un niño de grado noveno, $3^2 = 3 + 3 = 3 \times 3 = 9$ El niño comprende la potenciación como una suma y a la vez un producto, y usa el signo igual de manera indiscriminada sin caer en cuenta que 9 es distinto de 6. Al mismo tiempo, una niña de sexto grado entiende 3^2 cómo 3x2. Así todos los niños, mostraban oportunidades de mejora.

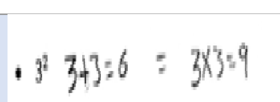
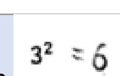
Niño 9º grado		Una niña de sexto grado	

Figura 4. Producción de estudiantes en prueba de conocimientos.

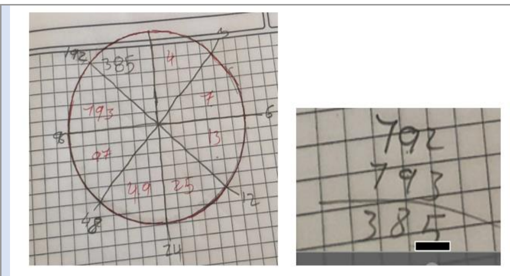
Se pudo evidenciar después de varias interacciones, que los niños tenían deficiencias en el manejo del lenguaje académico. Por lo que el lenguaje del profesor debe atender estas dificultades. A manera de ejemplo la mayoría de los niños no recordaban el nombre de las partes de una fracción, y los niños que sí recordaban los nombres expresaban "el numerador es el número de arriba o de abajo" y adicionalmente, no comprendían conceptualmente. Los gestos y mirada de los niños, sumado a que después de la intervención seguían igual sin saber sumar fracciones, hizo que la autora tomará decisiones de diseño. Pues, la clase tipo paradigma del ejercicio son las que menos generan OA.

Otro ejemplo, en la segunda prueba de situaciones reales. Se evidencia la necesidad de prestar atención al lenguaje académico de los niños además de los pre conocimientos matemáticos, se presenta un ejemplo acerca de una de las preguntas de la prueba No. 2. *Rosita tiene $5000 si regala la quinta parte de estos cinco mil pesos a su primo. ¿Cuánto dinero le queda?* Se les entregó $5000 en monedas de 500 pesos, para que resolvieran el problema. Los niños dividieron entre dos, los $5000 indicando que un quinto era la mitad (Ver video)[42].

Resulta igualmente importante, describir las fortalezas de los niños, a pesar de presentar debilidades en el dominio de habilidades cognitivas, mostraron fortalezas, como la perseverancia al resolver, por ejemplo, el Puzzle (Ver Figura 5). Se procedió bajo los principios de diseño, entre estos el método Socrático, así la docente a través de preguntas, cuidando no darle las respuestas, dirigió la atención de los niños a la búsqueda de patrones para terminar la serie. Se conjeturó que lo interpretarían como potencia de 2, pero las dificultades con la potenciación no se los permitió. Después de pasar más de dos

[42] Evidencia de la actividad: https://drive.google.com/file/d/1gi-wCugKXj7I2W_J84RjMtXx2TrAMy_f/view?usp=sharing https://drive.google.com/file/d/1VNsuDWG1GQqxAADJ6yyG8ZcMjSkcicKq/view?usp=sharing

horas pensando, un niño de séptimo grado logró, no solo dar una respuesta correcta, sino que, propuso un nuevo resto siguiendo la secuencia.



Solución de Ever (7º)

Figura 5. Respuesta de Ever al Puzle.

Con relación a las prácticas de instrucción, aunque no es el objeto de estudio, se debía tener una idea al respecto. Por lo cual, se revisaron algunas guías de trabajos enviadas por los docentes; las notas de clase y algunos exámenes, con lo que se evidencia unas prácticas enmarcadas en el Paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2000). El problema de las desigualdades en oportunidades de aprendizaje de los niños rurales es crítico. Por lo cual, el proceso que se inició con ellos, para construir oportunidades de aprendizaje que respondan a las necesidades de cada niño y que le permita llegar a su nivel personal óptimo en matemáticas es un reto que se asumió en la presente investigación.

Finalmente, la evidencia, permitió estimar que los estudiantes se encontraban cinco años por debajo de su año escolar. Por tanto, un objetivo instruccional principal fue desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que permitiera que los estudiantes progresan en unos niveles de comprensión de aprendizaje conceptual y de resolución de problemas de un tema actual y a la vez ofreciera oportunidades para su progreso de habilidades básicas (conocimientos previos y dominio del lenguaje académico). También permitió escoger el contenido a trabajar, a continuación, se presenta el panorama y la justificación de la escogencia.

3.5.1.1. La enseñanza de los Porcentajes a nivel internacional y Nacional

Los porcentajes se usan ampliamente en el mundo real, el porcentaje está integrado en el concepto más amplio de proporción y razonamiento proporcional, cuyos desafíos han sido ampliamente informados (Gould et al., 2021). A nivel nacional el Ministerio de Educación colombiano, a través de Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y de los (MEN, 2016) La estructura descrita se tienen los cinco procesos generales que se proponen en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) para toda actividad matemática, con relación a los porcentajes se observa una brecha en la instrucción y en los mismos estándares, obsérvese tabla 7 que solo aparecen en dos años y no muestran las conexiones con otros pensamientos y solo se limitan a las distintas representaciones que si bien son necesarias no son suficientes para que el estudiante logre una comprensión conceptual.

Tabla 7. Porcentaje con su respectivo estándar y pensamiento.

Grado Finalizado	Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Estándar
QUINTO	Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes
SÉPTIMO	Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida

Fuente: elaboración propia, basado en MEN (2006)

De manera complementaria, haciendo una revisión de los libros de texto “Todos a Aprender” la cual es una propuesta del MEN, se evidencia que los porcentajes son presentados solo en el grado sexto, en la Unidad 9: Números decimales y porcentajes. Al hacer un análisis, se concluye que se enmarca en los AA 1 y 3. Aunque inician con una fotografía del caso de los descuentos en porcentajes, luego proceden a presentar fórmulas seguidas por ejemplos (ejercicios). Además, no hay uso de representaciones gráficas como la barra. Y aunque se presentan los tres tipos de problemas típicos de porcentajes, su presentación meramente algorítmica no apoya a la comprensión conceptual de los niños.

3.3.1.2 Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Teniendo en cuenta la pregunta de investigación, el marco teórico y el estado del arte del tema a investigar, se ha optado por procedimientos inductivos de recolección de datos.

Métodos teóricos: según Quesada & León (2020) estos métodos "*cumplen una función gnoseológica importante, ya que posibilitan la interpretación conceptual de los datos empíricos encontrados. Así pues, los métodos teóricos al utilizarse en la construcción y desarrollo de las teorías*"[43].

El análisis y síntesis: este método es de gran utilidad para la búsqueda y el procesamiento de la información empírica, teórica y metodológica. La síntesis se realizó a partir del análisis, lo cual conlleva a reconstruir y explicar, y configurar el problema de investigación, el objeto y aportes. Con este método se facilitó la búsqueda sistemática del estado del arte y las bases teóricas y de diseño (Quesada & León, 2020).

Técnicas

Observación (participante): Las observaciones de interacciones en el aula, sistematización y análisis de la interacción de la triada: actividades de aprendizaje – estudiantes – profesor. Análisis de la producción de los estudiantes y las formas de abordar el trabajo en clase, análisis de videos y de audios de lecciones. Además, la recopilación de información sobre la perspectiva de cada estudiante jugó un papel importante (Clarke, 1997; Clarke et al., 2006 en Skovsmose & Borba, 2004)

Entrevistas abiertas y semiestructurada: se aplicaron entrevistas primero a cada de manera individual y grupal, a los padres de familia, a habitantes de la vereda que puedan participar con su experiencia y

[43] Quesada, A., & León, A. M. (2020). Métodos teóricos de investigación: análisis-síntesis, inducción-deducción, abstracto – concreto e histórico- lógico. *Monografías*, p.4.

conocimiento en la configuración de los ambientes de aprendizaje que sean susceptibles de generar oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante. Se entrevistó a una de las profesoras de matemáticas titulares de la IE Palmira. Con el objetivo de analizar su experiencia mediante la indagación de experiencias exitosas y no exitosas que han tenido en su ejercicio docente.

Análisis de video: el contenido de los videos se analizó cualitativamente, siguiendo algunas de las fases del modelo de Planas (2006). Se destaca que la observación presencial y participante de las sesiones de clase permitió tener una imagen detallada y comprensión profunda de lo acontecido.

Instrumentos: Las pruebas de conocimientos básicos, cuestionarios sobre fracciones, las hojas de trabajo, las THA y los cuadernos de apuntes y guión de entrevista.

Rúbricas y cuestionarios dirigidas a los estudiantes: valoración de las actividades (Anexo1), dominio afectivo (Anexo 2), guía de Observación general “Observa la Lección a Través de los Ojos del Estudiante” (Marco TRU, Shoenfeld, 2016) (Anexo 3), y cuestionario Inteligencia Emocional TMMS-24 fuente basada en la versión original de Salovey & Meyer (1995). También **Rúbricas dirigidas a tres docentes**: rúbrica caracterización de las tareas. Fuente: Ni et al., (2018) (Anexo 5), rúbrica caracterización de problemas. Adaptado de Cai et al. (2023) (Anexo 6) y rúbrica TRU para evaluación sumaria (Anexo 7).

Fase 2. Experimento de enseñanza sobre porcentajes iniciando con fracciones y con elementos del pensamiento métrico espacial: el experimento de enseñanza, consistió de tres ciclos. El primer ciclo de experimentos se inició con problemas relacionados con las fracciones, con el propósito de analizar el proceso de aprendizaje que experimentan los estudiantes al interactuar con cambios en la instrucción y el diseño de AA y por ende comprender su progreso en los niveles de la THA. Por lo tanto, la THA sirvió como enlace entre la investigación y la práctica de la enseñanza.

Ciclo 1. En la Tabla 8 se presenta la secuencia de las tareas que conforman la THA fracciones, se inició con una lección sobre porcentajes, de manera exploratoria, para analizar si se podía iniciar el experimento directamente con los porcentajes, pero la compresión conceptual sobre fracciones era muy débil se optó por diseñar tareas que posibilitan el logro de los niveles de aprendizaje sobre las fracciones, para empoderar a los niños en el uso flexible de estas, media el movimiento por los AA.

Tabla 8. Fechas de la implementación y secuencias de la THA sobre fracciones ciclo 1 y 2.

Fecha	Descripción	Duración en horas
25-sep-22	Problemas sobre porcentajes (exploratorio)	3
1 octubre de 2022	Identidades trigonométricas (analizando conocimientos previos – fracciones) propuesta por los estudiantes que cursaba décimo grado.	3
14 nov de 2022	Fracciones TRU y naranja	3
12 y 14 de enero de 2023	Lección usando resolución de problemas No. 2 Fracciones y sus diferentes interpretaciones.	4
15 y 16 ene-2023	Actividad 1 y 2 Recursos sensibles al lenguaje -Prediger.	5
10 y 11 ene-2023	Índice de Masa Corporal -IMC (medirse, pesarse) deducir la fórmula + Toma de muestra Hemoglobina --- NO se culminó la idea original era trabajar un proyecto del plato ideal.	4
9- 20- 21- 23 - 27 ene- 2023	Entrevista a un agricultor 1 (Razonamiento proporcional en el cultivo.	2
	Proyecto: conociendo el cultivo de mi vereda: Midieron un cultivo dibujaron a escala una hectárea y otras áreas	3
	Entrevista a un agricultor 2 y cálculos relacionados	2
	Trabajaron los problemas que resultaron de las entrevistas y las mediciones.	3 horas

De hecho, la actividad sobre demostrar las identidades, motivó aún más la decisión de iniciar el experimento con fracciones, básicamente, lo asumieron de manera divertida, demostrando un buen razonamiento. La mayor dificultad para todos, especialmente para los que estaban en décimo fue el dominio de las operaciones con fracciones. Esta tarea sirvió, para que los niños, reflexionaran sobre la necesidad intelectual como la llama Harel (2000) de los conocimientos matemáticos para avanzar en el aprendizaje. Los niños, se mostraron interesados en aprender más sobre las fracciones. Las tareas sobre el Índice de Masa Corporal en adelante corresponden a AA de aprendizaje que se diseñaron en conjunto con los estudiantes y de los cuales surgieron problemas de un contexto real que involucran actividades inherentes al pensamiento métrico y geométrico.

Componentes de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre Fracciones:

Los objetivos de aprendizaje

Resolver problemas relacionados con dibujos a escala de figuras geométricas, incluido el cálculo de longitudes y áreas reales a partir de una escala dibujar y reproducir un dibujo a escala a otra escala y relacionar con las fracciones.

Tareas: la trayectoria está conformada por dos grupos de tareas 1. Problemas sobre fracciones adaptadas del marco TRU, más un problema que surgió en la instrucción, se usaron unas naranjas como material manipulativo, estas actividades se trabajaron en conjunto con un futuro profesor de Matemáticas (como parte de su trabajo de grado). La lección a través de problemas sobre fracciones, cuyo propósito fue presentar una variedad de problemas a los estudiantes para abordar varios significados de las fracciones (medida, cociente, operador multiplicativo, razón) y un quinto significado que es la relación parte - todo, el cual es la base para la construcción de los cuatro mencionados anteriormente (Kieren, 1983; citado en Garzon y Falk, 2014; Wright, 2014).

Además, se incluyeron problemas de otros artículos como por ejemplo Lobato et al. (2017), este último fue un problema retador para los niños, que permitió abordar las fracciones impropias y afianzar a un nivel superior de comprensión de las fracciones. También, se implementaron dos actividades, con un material sensible al lenguaje de la autoría de Susane Prediger, con tareas que les permitieron a los niños avanzar en los niveles del 1- 5. Este material es apropiado para estudiantes con bajo dominio en sus habilidades de dominio del lenguaje académico como es el caso de los niños participantes.

Las metodologías de enseñanza se colocaron en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos. De modo que las preguntas se plantearon con el propósito de promover la interacción a manera de diálogo entre estudiantes - estudiante, profesor - estudiante, para poder tener evidencia del pensamiento y el progreso en la comprensión y así poder compensar las bajas habilidades. Además, los conceptos erróneos de los estudiantes se usaron como andamiaje.

En cuanto a los niveles, los tres primeros se adaptaron de Fernández & Llinares (2020) y los dos últimos, se aportan desde la investigación.

Tabla 9. Niveles de THA sobre fracciones

Fuente: Fernández & Llinares (2020)			Fuente: Elaboración propia	
Nivel 1. Los estudiantes no pueden identificar ni representar fracciones	Nivel 2. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias	Nivel 3. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones impropia	Nivel 4: Los estudiantes pueden determinar partes de toda una cantidad (comprensión de la fracción como operador)	Nivel 5: Los estudiantes pueden comparar fracciones
No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área (pueden ser diferentes en forma, pero han de ser iguales en área).	Reconocen que las partes en las que se divide un todo deben ser iguales en área. Usan fracciones como unidades iterativas para construir otras fracciones (propias). No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / no consideran un grupo de partes como una parte.	Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes/ Consideran un grupo de partes como una parte. Usan fracciones como unidad iterativa, para construir fracciones.	Comprenden el "de" cómo un producto Determinan las partes de toda una cantidad usando diferentes representaciones o el orden de aplicación de las operaciones; primero la división (permite establecer las partes equitativas en que se divide la unidad y luego se multiplica como lo indica el numerador) o lo contrario.	Ordenan fracciones usando equivalencias puntos de referencia Ordenan fracciones usando representaciones de igual tamaño Ordenan fracciones mediante una división.

Fuente: Elaboración propia adaptado de Fernández & Llinares (2020).

3.5.1.2. Diseño y formulación de Conjeturas

A partir de una revisión de la literatura se concibe **la conjetura inicial** sobre el proceso de aprendizaje que seguirán los alumnos.

C1. Los estudiantes no identifican ni representan fracciones

C2. Los estudiantes pueden identificar fracciones propias con el apoyo de material manipulable

C3. Los estudiantes comprenden que las partes en que se divide un todo debe ser de igual área para ellos es necesario que manipule objetos concretos y de su entorno (como galletas, tortas, frutas)

C4. El tema debe pertenecer a las situaciones cotidianas de los niños, evitar temas cuyo significado de la materia de estudio sólo se pudiera explicar con el desarrollo de todo el contenido temático.

C5. A los niños se les debe ser dado el acceso al contenido desde diferentes niveles y deben poder desarrollar el tema aun si sus habilidades fuesen bastante diferentes.

C6. Los estudiantes tienen una comprensión conceptual de las fracciones impropias mediante la resolución de problemas no rutinarios, porque tienen mayor posibilidad para relacionar diferentes temas subyacentes a las fracciones.

C7. Los estudiantes de un contexto rural con dificultades en el dominio del lenguaje académico relacionado con fracciones responden de manera positiva al material sobre fracciones sensible al lenguaje determinando las partes de una cantidad y comparan fracciones teniendo en cuenta que la unidad debe conservarse.

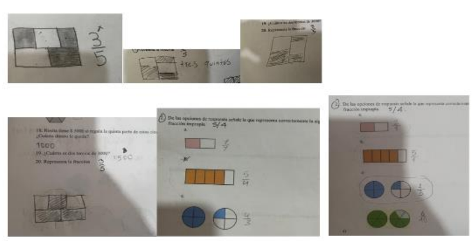
C8. El movimiento por los distintos AA debe hacerse de manera ascendente, es decir iniciando por el paradigma del ejercicio y la matemática y así sucesivamente, para que luego, que el estudiante haya hecho muchos ejercicios pueda aplicar la comprensión a la resolución de problemas del entorno rural.

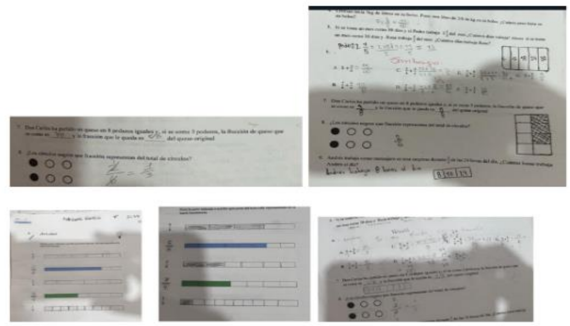
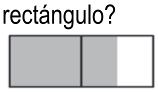
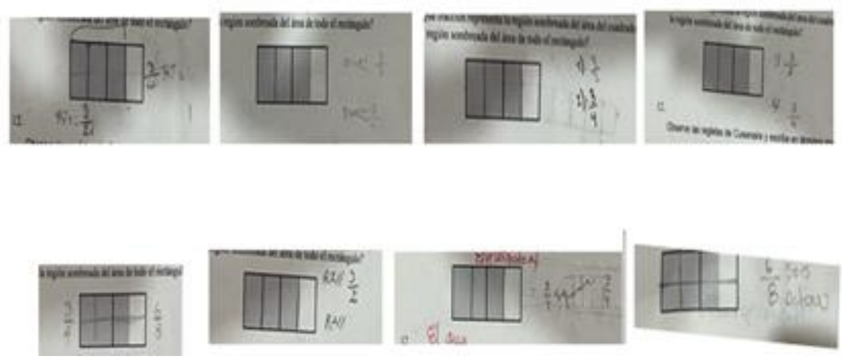
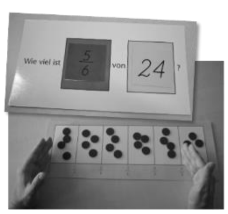
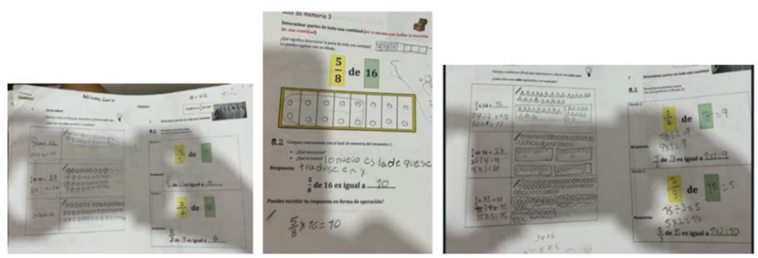
3.3.1.3 *Intervención en el aula y recogida de datos*

A través de la implementación de tareas, se identificó los obstáculos epistémicos que subyacen en la falta de comprensión conceptual y fluidez procesal de las fracciones y sus implicaciones en la comprensión de otros conceptos como el caso de las demostraciones de identidades trigonométricas. De allí, se tomó la decisión de iniciar el experimento con las fracciones y luego los porcentajes, se preparó entonces el experimento siguiendo una THA.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) sobre problemas con fracciones: ante la dificultad que presentaban los estudiantes de comprender los problemas propuestos, se propició el movimiento entre Ambientes de Aprendizaje y se implementó la evaluación formativa (Shoenfeld, 2016). También, se estructuró una secuencia de tres Problemas adaptados del Marco TRU, un problema real que surgió y una secuencia de tareas en el marco de material sensible al lenguaje (Prediger, 2019). Se presentan evidencias de cómo los estudiantes a través de las tareas iban progresando en la trayectoria de aprendizaje, en los distintos niveles, ver tabla 10.

Tabla 10. Trayectoria de los estudiantes frente a las tareas y el logro por niveles.

Niveles	Evidencia
Nivel 1: Los estudiantes no pueden identificar ni representar fracciones. No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área (pueden ser diferentes en forma, pero han de ser iguales en área)	

Nivel 2. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias	
Para el **nivel 3** (Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones impropia) ¿Qué fracción representa la región sombreada con respecto al cuadrado izquierdo? y ¿qué fracción representa la región sombreada con respecto al área de todo el rectángulo? 	
Nivel 4 comprensión de la fracción como operador. Se emplearon tareas sensibles al lenguaje Prediger (2015)**.** 	

Fuente: Elaboración propia

Cabe mencionar, que, con relación a la comparación de fracciones, solo dos estudiantes lograron el Nivel 5, es decir, lograron hacer la comparación de fracciones usando representaciones de igual tamaño, mientras que el resto, no mantenían el mismo tamaño. A pesar de ello, el progreso fue significativo, al evidenciar una comprensión robusta en la representación de las fracciones como parte todo y como operador (Ver Figura 6).

A manera de resumen, de las anteriores actividades y experiencias, se resalta la importancia de generar diálogo y la participación activa de los estudiantes en la clase de matemática, en el que la comprensión de un tema sea expresada a través de hacer público el pensamiento del estudiante, dado que permite al profesor refinar su comprensión. Además, el uso positivo del error permitió una comprensión más robusta de las fracciones como parte de todo.

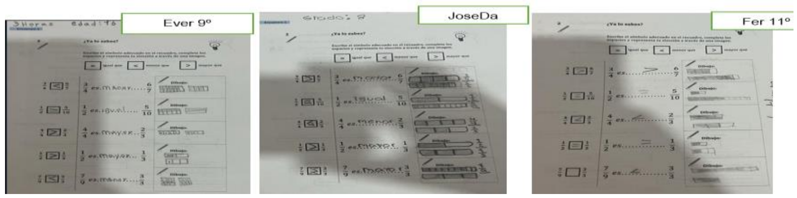


Figura 6. Material sensible al lenguaje comparación de fracciones. Ver video (Santi y Jos)[44]

3.3.1.4 Análisis de los datos, revisión y reformulación de las conjeturas

Al analizar las conjeturas frente al progreso de los niños, se puede concluir que las conjeturas C1- C6 se verificaron, pero no había suficientes elementos para concluir sobre C7, se observó que solo dos estudiantes de los 12 lograron el nivel 5 relacionadas con las tareas propuestas. Y dado que la intención teórica del experimento fue analizar cómo ofrecer Oportunidad de aprendizaje a cada estudiante entonces, aún no había suficientes evidencias, se requirió hacer más movimientos en la instrucción hacia una instrucción centrada en las necesidades e interés de los estudiantes. En cuanto a C8. El movimiento por los distintos AA debe hacerse de manera ascendente, es decir iniciando por el paradigma del ejercicio y la matemática y así sucesivamente, para que luego, que el estudiante haya hecho muchos ejercicios pueda aplicar la comprensión a la resolución de problemas del entorno rural, no hay suficientes elementos para refinarla, aunque se presume que se debe iniciar por AA de la vida real.

[44] Evidencia: https://drive.google.com/file/d/1rlfpEBPb3jQtAw8z2u2EWdI7p459BLsQ/view?usp=sharing

3.3.1.5 Ciclo 2 Re-Diseño y formulación de Conjeturas

Se coloca primero la conjetura C8 que no se pudo concluir acerca de esta y se adicionan dos nuevas conjeturas. $C_2 8$. Conjetura 8 (ciclo2) El movimiento por los distintos AA debe hacerse de manera ascendente, es decir iniciando por el paradigma del ejercicio y la matemática y así sucesivamente, para que luego, que el estudiante haya hecho muchos ejercicios pueda aplicar la comprensión a la resolución de problemas del entorno rural, no hay suficientes elementos para refinarla, aunque se presume que se debe iniciar por AA de la vida real.

$C_2 1$. El uso de las preguntas para guiar la interacción y evitar dar las respuestas a los estudiantes ayuda a mantener la demanda cognitiva. $C_2 2$. Las tareas relacionadas con actividades del entorno rural motivan la participación activa de cada estudiante y ofrecen oportunidades para desarrollar estructuras aditivas, multiplicativas y problemas que involucran el razonamiento proporcional recursos importantes para desarrollar una comprensión conceptual y procesal de porcentajes.

3.3.1.6 Intervención en el aula y recogida de datos

En este experimento sobre fracciones se trabajó desde distintos Ambientes de Aprendizaje a partir de los cuales surgieron tareas basadas en prácticas de la comunidad como el cultivo (Ver Anexo 8) Los ambientes de aprendizaje fueron: actividades de medición (por ejemplo, medición área y perímetro del kiosko, de una mesa usando unidades de medida que podían conseguir a la mano). Antes de esta actividad se había explorado sus conocimientos acerca de la noción de distancia y sus unidades como el metro y kilómetro mostrando profundas necesidades de aprendizaje para mejorar esas habilidades. En esta misma actividad hubo retroalimentación y usaron una cinta métrica para saber cuánto mide cada objeto. Esta actividad les aportó a los niños la noción de la longitud y les ayudó a estimar medidas de distancia. Luego de estas actividades, se continuó con dos actividades paralelas la exploración de los cultivos de mi vereda en donde les tocó medir el perímetro y estimar el área de una parcela cultivada con yuca y ñame. En esta actividad se notó los aprendizajes de las actividades previas con relación a la medición; en el sentido de la organización para realizar el trabajo por grupos y la escogencia de unidades de medidas.

Para realizar las tareas de esta THA los niños entrevistaron a varios campesinos. Se observa cómo los niños muestran mayor robustez en sus razonamientos, hasta el punto que extrapolan información para resolver problemas inherentes. Así por ejemplo el primer problema consistía en usar la información obtenida en las entrevistas con los agricultores para estimar cuántas semillas necesito para el cultivo de una hectárea de 100 m x 100 m. y luego se les preguntó si había 15 mil matas entre ñame y yuca ¿Cuántas matas corresponden a yuca y cuántas a ñame? Ver fotos con algunas de las respuestas. También hicieron dibujos a escala ver Figura 7.

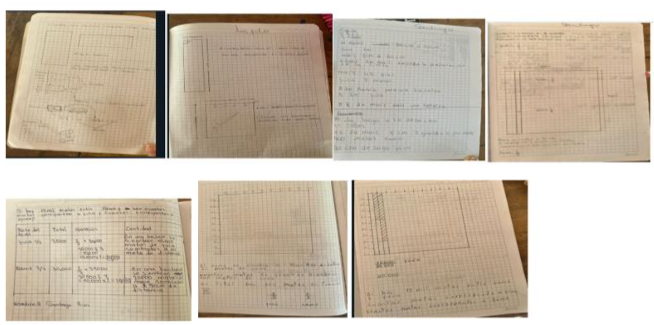


Figura 7. Respuestas de los estudiantes a THA sobre el cultivo. (ver video)[45].

3.3.1.7 Análisis de los datos, revisión y reformulación de las conjeturas

A partir de la interacción con los niños y los agricultores se fueron mejorando la tarea correspondiente a esta sub Trayectoria hipotética de Aprendizaje (STHA) y así mismo, los problemas que surgían posibilitaron el trabajo con contenido que correspondía a pre saberes matemáticos como los son:

[45] Evidencias: https://drive.google.com/file/d/1c3HcNDqstn2tQ-jT3D1GLUwF3Eg68uzl/view?usp=sharing https://drive.google.com/file/d/1A-6lkQUvF4HETFZzKLO8-1eRBjPsSdAq/view?usp=sharing

- El uso de estructuras aditivas y multiplicativas
- La descomposición factorial: esto demandó repetidas multiplicaciones lo que les ayudó a consolidar esta habilidad procesal.
- La construcción y comprensión conceptual del concepto de área.
- El uso de escalas, les ayudó a consolidar el concepto de repartición en partes iguales al usar la cuadrícula para dibujar una hectárea 100 cm x 100 cm.
- Aplicar las fracciones para resolver problemas reales
- Algunos después de arduos usos de las estructuras aditivas, lograron hacer la transición a las estructuras multiplicativas.
- Valorar el conocimiento proporcional que tienen los agricultores.

Por todo lo anterior se concluye que se debe hacer uso de estas prácticas sociales en donde subyacen oportunidades de aprendizaje matemáticas para los niños de escuelas rurales. Para el caso de las fracciones ayudó a consolidar la comprensión conceptual y procedimental hasta el nivel 4. Hasta este punto no se puede decir nada del nivel 5 ver Tabla 11. Más adelante se podrá concluir. Esta actividad de medición es consistente con lo sugerido por el NTCM 2020 que presentan los objetivos mediante los cuales se conecta los porcentajes con temas de geometría por ejemplo El RP.3 Usar relaciones proporcionales para resolver razones de varios pasos y problemas de porcentaje. Se conecta con el TG.1 Resolver problemas relacionados con dibujos a escala de figuras geométricas, incluido el cálculo de longitudes y áreas reales a partir de una escala dibujar y reproducir un dibujo a escala a otra escala, esta fue una tarea en la actividad del cultivo. Como evidencia se presenta el avance de los estudiantes en la trayectoria

Tabla 11. Progreso de los estudiantes en los niveles sobre conocimiento robusto de fracciones.

	Prueba de conocimientos Básicos fracciones	Problemas TRU y Lección problema retador	Recursos sensibles al lenguaje, Prediger

Estudiante/niveles	N1	N2	N3	N4	N5	N1	N2	N3	N4	N5	N1	N2	N3	N4	N5
Cris	x							x						x	
Niki	x							x						x	
Rosita	x					x						x			
Fer	x							x						x	
Santi	x							x						x	
Yohe	x					x						x		x	
Mel	x					x						x		x	
Ever	x							x							X
Jos	x							x							X
Adry	x					x						x		x	
Guillo	x							x						x	
JuanJo	x							x						x	

Al analizar las conjeturas y el progreso de los niños, hasta este punto se puede concluir que las conjeturas la conjetura $C_2 1$ se fortaleció. Pero $C_2 8$ se deben replantearse, con relación a $C_2 2$. las niñas no se mostraron tan motivadas al trabajar temas relacionados con la agricultura por tanto debe evaluarse. En este experimento la participación de los niños fue mayor que de las niñas. En línea con Cai et al. (2020) quienes sostienen que lo que es una OAC para estudiante a lo mejor no lo es para otro. Así las cosas, esta conjetura lleva a plantear ideas sobre la necesidad que los estudiantes de los entornos distintos al rural o identificar otras actividades en el entorno rural que sean del interés de todos.

3.3.1.8 Ciclo 3 Re- *Diseño y formulación de Conjeturas:* experimento con porcentajes

Para este tercer ciclo se avanzó tanto en la compresión teórica como pragmática, para apoyar formas particulares de comprensión y el logro de las metas de aprendizaje sobre porcentajes y conceptualizar más claramente sobre cuáles son los aspectos y dimensiones e interacciones que configuran una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada niño en condiciones de riesgo académico de un contexto rural colombiano. También se documenta sobre la enseñanza de los porcentajes en Colombia y

Se describen objetivos tanto a nivel de habilidades cognitivas como afectivas. Finalmente se establecieron los objetivos al finalizar el experimento:

1. Lograr autonomía, disponibilidad y perseverancia en la actividad de resolución de problemas de porcentajes en sus diferentes formatos (puro, texto y visual) en sus diferentes categorías (calcular: cantidad, tasas, base, base después del descuento y base después del aumento) que provienen de un entorno de la vida real, de una semirrealidad y de las matemáticas incluyen problemas interés simple, impuestos, aumentos y rebajas, gratificaciones y comisiones, tarifas, porcentaje de aumento y disminución, porcentaje de error.
2. Participar en la generación de AA mediante la interacción profesor- estudiante – comunidad rural y global (formulación de problemas)
3. Posibilitar el desarrollo de habilidades cognitivas relacionadas con los conocimientos matemáticos previos y el dominio del lenguaje académico (propio de los porcentajes) paralelamente al trabajo actual.
4. Desarrollar procesos para la comprensión conceptual, procesal y de resolución de problemas no rutinarios con porcentajes.
5. Mejorar la motivación y transformar las creencias, actitudes y emociones negativas hacía el aprendizaje de las matemáticas y hacia las matemáticas, como medio para subir el autoconcepto académico.

Conjeturas: para denotar las conjeturas de este ciclo se emplea el subíndice 3. Que corresponde al ciclo 3. Algunas conjeturas de los ciclos 1 y 2 en esta iteración se refinaron, otras se fortalecerán. En línea con Confrey & Maloney (2015) los estudios de investigación de diseño incluyen conjeturas que vinculan la(s) pregunta(s) de investigación con las actividades de los estudiantes en el salón de clases. Las conjeturas facilitan la observación de comportamientos y expresiones de los estudiantes en torno a tareas e interacciones, y ayudan a identificar, explicar o plantear preguntas sobre variaciones. A diferencia de las hipótesis, no se espera que las conjeturas sean totalmente confirmadas o refutadas; más bien evolucionan a lo largo del estudio, estas pueden ser refinadas, evaluadas, modificadas, fortalecidas o, a veces, rechazadas. La primera conjetura que se va a enunciar $C_2 8$ que se transformó en la conjetura $C_3 1$ y la $C_2 2$ se transformó en la Conjetura. $C_3 2$.

3.3.1.9 Conjeturas asociadas a la Teoría de Instrucción Local Conjeturada generada

Conjetura $C_3 1$**.** El Movimiento por los distintos AA (Skovsmose, 2000) debe iniciar bien sea por el AA 5 o AA6 y así de manera dinámica por los otros AA sin un orden específico.

Conjetura $C_3 2$**.** Incluir conexiones entre las lecciones de matemáticas y la vida de los estudiantes, es importante establecer estas conexiones con sus vidas fuera de la escuela y brindarles la oportunidad de aplicar ideas matemáticas a escenarios del mundo real. Cuando los estudiantes perciben que las matemáticas son relevantes y valiosas, es probable que se involucren más y desarrollen actitudes más positivas hacia la disciplina se le brinda andamiaje para el logro del nivel 6.

Conjetura $C_3 3$**.** Resolver problemas relacionados con dibujos a escala de figuras geométricas, incluido el cálculo de longitudes y áreas reales a partir de una escala dibujar y reproducir un dibujo a escala a otra escala (tarea en la actividad del cultivo) ayuda a resolver problemas de porcentaje de varios tipos.

Conjetura $C_3 4$**.** La Trayectoria de Andamiaje basado en movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño ciclo1 y ciclo2, en conjunto con el Andamiaje basado en estructura por barra porcentual (Van den Heuvel-Panhuizen (2003) brinda andamiaje a cada estudiante en el progreso en la trayectoria de Niveles de un para un Robusto Entendimiento de los modelos para porcentajes (Marco TRU) basado y además apoya el progreso en la Trayectoria de aprendizaje conceptual hacia modelos para porcentajes y para la Trayectoria de aprendizaje léxico de diferentes vocabularios relacionados con los porcentajes en distintos problemas de la vida real y de las matemáticas, sin seguir la trayectoria de Pholer & Prediger (2015) de manera natural mediante la experiencia resultante del Movimiento por los distintos AA.

Conjetura $C_3 5$. Incluir El clima socioemocional del aula como una dimensión de la instrucción brinda una cultura de aula con refuerzo positivo y apoyo emocional que permite el apoyo cognitivo y por ende mejoran las creencias, actitudes y emociones de los estudiantes ante el aprendizaje de la matemática y esto implica que el estudiante se motive y acepte la invitación de involucrarse en la tarea. Los investigadores han señalado la importancia de establecer normas socio matemáticas que creen un entorno para la comprensión matemática, la resolución de problemas y el razonamiento dentro del aula (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001 citado por Walkowiak et al., 2017).

Conjetura $C_3 6$. **Apoyo emocional** para lograr la atención y motivación de los estudiantes, resulta efectivo compartirles experiencias de personas que en sus mismas condiciones socioeconómicas lograron realizar su proyecto de vida. En este entorno rural es importante, motivar tanto con factores intra como extra matemáticos. Y relacionar estas reflexiones con el logro de proyecto de vida, de las oportunidades que existen como las becas.

Conjetura $C_3 7$. Implementar tareas no rutinaria, con alta demanda cognitiva asociadas a los niveles de la THA propuesta, requiere que el estudiante conecte los procedimientos matemáticos con los conceptos subyacentes, demanda el uso de múltiples representaciones, ofrecen múltiples herramientas para que los estudiantes las usen para construir una comprensión más profunda los porcentajes y procedimientos matemáticos para comprender y lograr la solución del problema, y además que atiendan las diferencias y recursos individuales (Ni et al., 2018).

Conjetura $C_3 8$**.** Incorporar criterios de calidad a los AA como (1) La riqueza de los conceptos y las prácticas disciplinares (contenido) disponibles para aprender, (2) Entendimiento y *esfuerzo productivo*. (3) Acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas, (4) Medios para construir identidades disciplinares positivas a través de la presentación, la discusión y el refinamiento de ideas y (5) Sensibilidad del ambiente hacia su forma de pensar posibilitará que estudiantes tengan acceso a Oportunidades de Aprendizaje de Calidad y la maximización de las mismas accediendo de manera equitativa al apoyo para convertirse en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos.

Conjetura $C_3 9$**.** Movimiento por los distintos AA (Skovsmose, 2000): el diseño de los AA propuestos por Skovsmose (2000) que resultan del cruce Tipos de referencia (Matemática pura, semirealidad y situaciones de la vida real) con las formas de organizar la clase en el aula (Paradigma del ejercicio y escenario de investigación) brinda nuevos recursos que permiten el acceso a OAC siempre que estos surjan de la interacción entre estudiantes - profesores - comunidad rural - prácticas globales. Y de este modo, los AA se imbrican con los criterios de calidad (TRU) favoreciendo a la vez la participación de los estudiantes en la configuración y solución de problemas de su interés de modo que desarrollan las habilidades afectivas y la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas (por tanto, la disposición y la autonomía del estudiante). Así las cosas, al estudiante se le brinda un amplio panorama para tomar la decisión de involucrarse en una nueva tarea y de este modo activar el sistema metacognitivo (Nivel 5, Marzano y Kendall, 2007), es decir, contribuye al desarrollo de la disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido (Marco TRU).

Conjetura $C_3 10$**.** Todas las progresiones de aprendizaje de los estudiantes deben cubrir tanto la comprensión conceptual como la habilidad procedimental, tanto para los temas actuales como para los conocimientos previos.

Conjetura $C_3 11.$ Si el docente incorpora como parte de sus estrategias de comunicación la empatía y así ofrece al estudiante: espacio para hablar, riqueza matemática detrás de las preguntas y riqueza discursiva entonces, coadyuva al clima socio emocional del aula y por ende el estudiante se motiva y se compromete con su aprendizaje.

Conjetura $C_3 12.$ La ruta óptima es decir la que aporta a maximizar las OAC de calidad es desde el AA 6 porque este permea los demás en el caso de los porcentajes. Pero es clave precisar que queda abierta la investigación para saber si este movimiento es posible en todo el contenido de la matemática escolar. Aunque este tipo de Ambientes tiene la característica de permitir que se generen tareas que implican conexiones con distintos conceptos matemáticos y permite el uso de diferentes registros y procedimientos o soluciones para los problemas que se generan.

Conjetura $C_3 13.$ Si el estudiante experimenta La Trayectoria de Andamiaje basado en movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño ciclo1 y ciclo2, alcanza los niveles 1--6 y resuelve cualquier tipo de problemas que resulten de las cinco categorías cruzadas con los tres tipos de formato, por distintas vías de solución (ecuación, formando proporciones, regla de tres, etc) y usa con flexibilidad cualquier método gráfico.

Conjetura $C_3 14.$ Si el estudiante experimenta La Trayectoria de Andamiaje basado en movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño ciclo1 y ciclo2, alcanza los niveles 1-4 El Estudiante domina las relaciones existentes entre las fracciones, porcentajes, decimales proporciones y ecuaciones (dominio conocimiento matemático: conceptual y el conocimiento procedimental) mediante la formulación y resolución de resolver problemas de porcentajes no rutinarios.

Conjetura $C_3 15.$ Si el estudiante experimenta la Trayectoria de Andamiaje basado en movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño ciclo1 y ciclo2, alcanza los niveles 1-2 El estudiante usa la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.

Conjetura $C_3 16.$ Si el estudiante experimenta la Trayectoria de Andamiaje basado en movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño ciclo1 y ciclo2, alcanza los niveles 1-3 El estudiante domina la comprensión de los porcentajes en sus tres categorías iniciales: encontrar una parte porcentual de un todo, representar una parte de un todo como un porcentaje y encontrar el todo cuando se le da una parte porcentual.

3.*5.2.7.* *Intervención en el aula y recogida de datos*

Ciclo 3. La intervención en el aula se realizó en las fechas descritas en la Tabla 12.

Tabla 12. Fecha de implementación y duración de las tareas asociadas a las STHA.

Fecha	Descripción	TIEMPO ESTIMADO
6 y 7mar- 2023	Prueba Conocimiento sobre Porcentajes Mula & Hodnik (2020)	4 horas
9-mar-23	Visita Centro Comercial	3 horas (mañana)
9-mar-23	Visita universidad de Sucre	2 hora (tarde)
10-mar	Lección retroalimentación	2 horas
11-mar-23	CENSO – Excel SESIÓN 1	3 horas
14-mar-23	Actividad compensación	2 horas
15-mar-23	Actividad mejora	2 horas
16-mar-23	Juego de roles	2 horas
17-mar-23	Me proyecto hacia la Universidad SESIÓN 1	2 horas
18-mar-23	CENSO – Excel SESIÓN 2	3 horas
20-mar-23	Me proyecto hacia la Universidad SESIÓN 2	3 horas
21-mar-23	THA1 (AA1-AA6Juego de roles)	2 horas
22-mar-23	THA2 (AA1-AA6Juego de roles)	2 horas
25-mar-23	CENSO (socialización comunidad)	3 horas
30-mar-23	Secuencia de problemas adaptado Marco TRU **nivel aprendiz** – **Ofertas**	2 horas
31-mar-23	Secuencia de problemas adaptado Marco TRU **nivel Aprendiz - Venta de camiseta**s	2 horas
1-abr-23	Secuencia de problemas adaptado Marco TRU nivel **Experto – Venta de helado**	3 horas
3-abr-23	THA Pholer & Predier (2015)	2 horas

5-abr-23	Retroalimentación Prueba Cono. Porcentaje Mula & Hodnik (2020)	3 horas

Las tareas de las THA sobre porcentajes surgen a partir de movimiento por distintos Ambientes de Aprendizaje en los que cinco tipos de problemas se cruzan sistemáticamente con tres formatos de problemas (ver Tabla 19), estos cubren diferentes demandas conceptuales, de fluidez procesal y de resolución de problemas no rutinarios. Cabe aclarar que emergieron dos tipos de problemas, relativos a: encontrar la tasa y encontrar la base después del aumento que amplían los propuestos por Pöhler et al. (2017), estos autores escogieron tres tipos de problemas: 'encontrar la cantidad', 'encontrar la base' y 'encontrar la base después de la reducción'. De acuerdo a la literatura consultada, el tipo de problema 'encontrar la base después de la reducción' es el que tiene la demanda conceptual más alta, mientras que 'encontrar la cantidad' tiene la demanda más baja.

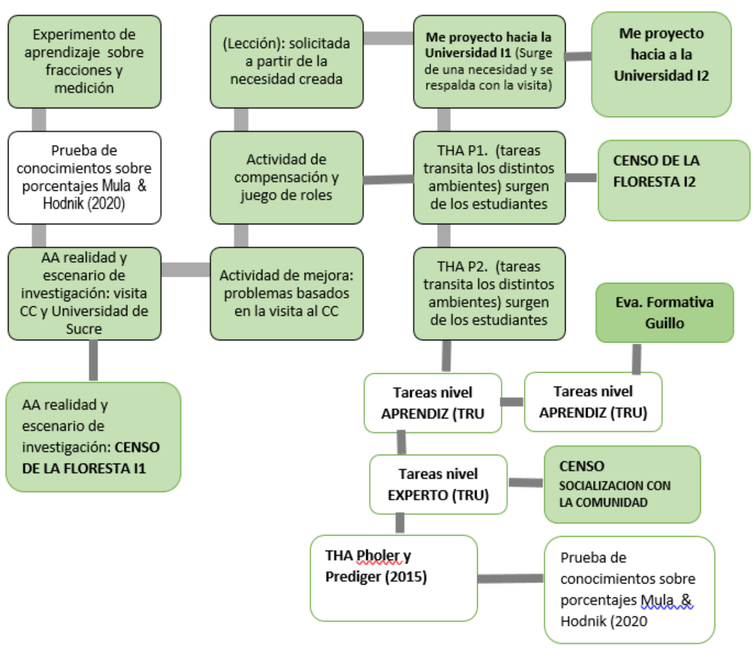


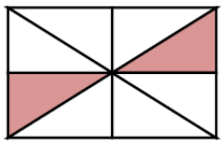
Figura 8. Secuencias de los AA y tareas asociadas a las Subtrayectorias Hipotéticas de Aprendizaje. Fuente: elaboración propia.

Por todo lo anterior, los aportes de los estudiantes se proponen como andamios tanto cognitivos como afectivos. Además, el profesor debe ser un diseñador de Ambientes de Aprendizaje y debe gestionar el movimiento por estos AA como una condición necesaria no solo para ofrecer Oportunidades de Aprendizaje a cada estudiante sino para maximizarlas. Así las cosas, las THA que componen el experimento de enseñanza sobre porcentajes se estructuraron con cuatro trayectorias originales, las THA de Mula & Hodnik (2020) y Pöhler & Prediger (2015); más tres tareas del Marco TRU, dos del nivel Aprendiz y uno del nivel experto, cada tipo de problema se presentó en tres formatos como se puede apreciar en la tabla 19. Además, los problemas de las THA originales, básicamente no usan el formato puro, dado que los problemas surgieron en su mayoría de un tipo de referencia de la realidad y semirrealidad los cuales originan problemas correspondientes al formato texto y formato visual usando las barras de porcentajes establecido para porcentajes (van den Heuvel-Panhuizen, 2003) y las cuadrículas 10x10.

Fase 3. Análisis retrospectivo: se usaron dos tipos de análisis el primero orientado a la compresión de la producción de los estudiantes frente a las tareas y el segundo un enfoque, longitudinal y cíclico. Para el primer tipo de análisis se empleó la matriz de análisis de datos citada por Bakker & Van Eerde (2015), se compararon los datos sobre el aprendizaje real de los estudiantes al resolver las diferentes tareas propuestas frente a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. El análisis longitudinal, se describe en el capítulo de discusión de resultados, aprovechando la triangulación múltiple y las producciones de categorías. A manera de ejemplo, se presenta un análisis mediante una matriz de comparación entre la Trayectoria Hipotética frente a la Trayectoria Real lograda por el estudiante (ver Tabla 13).

Tabla 13. Matriz de análisis de datos para comparar THA y la TRA.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje	**Trayectoria Real de Aprendizaje**

Tarea No. 4 Prueba porcentajes valorar Niveles 2. Adaptado de Mula & Hodnik (2020) Formulación de la tarea.	Conjetura de cómo responderían los estudiantes.	Transcripción extracto –Aclaración.
¿Qué porcentaje del rectángulo está sombreado? Escriba la respuesta en la línea provista  _____ %	Usando el concepto de fracción como parte todo, contando las partes en que está dividido el rectángulo y las partes coloreadas $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ O bien, imaginando que colocan las dos partes coloreadas junta y comprenden que corresponde a la cuarta parte del todo que representa 100% y entonces la cuarta parte es 25%.	Es interesante lo que sucedió con Cris había escrito que no sabía hacerlo, avanzó en las preguntas y luego insistió (esfuerzo productivo) usó el segundo razonamiento conjeturado Figura y Ver video. Cris manifestó haber relacionado las ideas con la actividad del cultivo cuando le tocó dibujar a escala una hectárea. Fer presentó uno de los procedimientos que se había conjeturado, la regla de tres. Y Jos divide 100 entre el número de partes y como había dos coloreadas sumó el resultado dos veces.

Fuente elaboración propia.

Otra de las conjeturas acerca de esta prueba se verificó parcialmente ya que la mayoría de los estudiantes en esta prueba alcanzaron un nivel 2. Efectivamente, el 50 % alcanzó este nivel, y solo un estudiante, alcanzó el nivel 3. Un estudiante no presentó la prueba y el 25% de los estudiantes no alcanzó el nivel 1. En la Figura 9 se muestran las respuestas de cinco estudiantes.

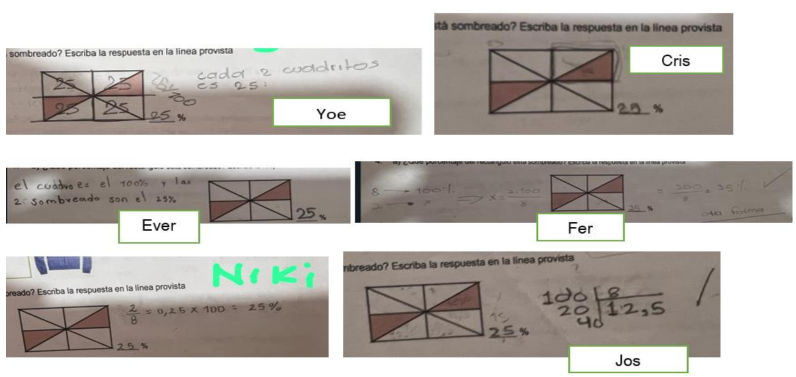


Figura 9. Evidencia de las respuestas de cuatro estudiantes en la prueba de Mula & Hodnik. Ver video [46].

[46] Video evidencia de Cris https://www.youtube.com/watch?v=UWQtLqqBJcY

En este orden de ideas, la tarea 6 consistió de un problema que surgió de un contexto real y se cruza con el escenario investigativo ver tabla 14, la producción y pensamiento de los estudiantes se confirma la conjetura de que los problemas no rutinarios con alta demanda cognitiva, brindan múltiples oportunidades, con este problema los estudiantes ofrecieron distintas soluciones, como la aportada por Fer, que ayudó a los demás niños, mediante una interacción de calidad, a darse cuenta de que su estimación era débil.

Tabla 14. Matriz de análisis de datos para comparar THA y la TRA.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje			Trayectoria Real de Aprendizaje
Tarea No. 6	Formulación de la tarea	Conjetura de cómo responderían los estudiantes	Coincidencia entre THA y TRA
Porcentajes problemas generados "**Juego roles"**	**(Nivel 5)** A los niños del curso de la profe Sandra les hacen una consulta, dado que ellos son expertos en porcentajes. El señor Fulano de Tal dice "Tengo mis cesantías guardadas hace unos años, este año recibí $ 2.600.000 de intereses sobre las cesantías, se sabe que los intereses de cesantías en Colombia son del 9.22% ¿Cuánto tengo ahorrado en cesantías?	1. Se conjeturó que repartirán en 10 partes, entonces cada cuadrito equivalía a $2.600.000 y al totalizar el valor de las cesantías sería igual a $26.000.000 2. Se conjeturó que Fer usaría la regla de tres.	Para favorecer el progreso de cada estudiante en su trayectoria de aprendizaje es importante colocar problemas no rutinarios y hacer público su pensamiento para hacer la comparación y los ajustes necesarios. Para este caso, la coincidencia fue alta.

Fuente: elaboración propia.

Los niños al enfrentar la solución de la tarea seis (6), reflexionaron acerca de los tipos de estimaciones, que algunas veces el error es muy alto (por ejemplo, esta no era una buena estimación: coincidieron en su opinión). Además, usaban diferentes representaciones de los porcentajes. Se hizo evidente el andamiaje estructural que brinda la barra de porcentajes para que el estudiante comprenda más las relaciones proporcionales (Ver Figura 10).

A pesar que *Actividad de mejora* se había explicado sobre las ecuaciones como una alternativa de solución, no fue significativo al 100% esta información, esto implicó la creación de escenario para crear la necesidad, en el estudiante, mediante problemas en los que le demanden un esfuerzo productivo. Cabe aclarar, que esto se logra cuando ya el estudiante pasó por la etapa de involucrarse en la tarea. Para lo cual la trayectoria de andamiaje basado en movimiento por los distintos AA es importante. Así las cosas, se asignó un nivel 5 a este problema, cuando la aproximación vía barra de porcentajes es débil y deben usar una vía de solución 3, por ejemplo, una ecuación (9.22%*Cesantías=2.600.000. De donde, Cesantías =2.600.000/0,0922= 28.199.566). Los estudiantes con la orientación de la PI resolvieron el problema y además analizaron como se podía estimar el error cometido al asignarle un valor de 10% a cada parte de la barra, sin embargo, en la plantilla de Excel se colocó en color naranja la x en el nivel 4 como indicador que aún falta mejorar, consolidar con más problemas.

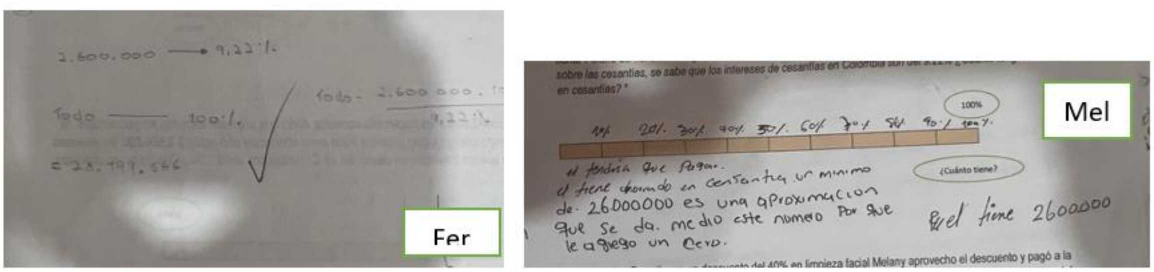


Figura 10. Evidencia de resolución de problema THA Juego de roles.

Otra de las regularidades, que se observó en esta Trayectoria, fue que la mayoría de los niños usaban las estructuras aditivas para obtener un resultado de la barra de porcentajes. Dado que se les dificulta usar las estructuras multiplicativas, pues, no comprenden que si cada parte equivalía a N y la barra está dividida en partes iguales podían obtener el total operando 10*N (Ver Figura 11). Cabe resaltar, el caso de Adry (cursaba por tercera vez séptimo grado) quien en las tareas de la THA “Proyectándome a la Universidad” demandó alto apoyo cognitivo en torno comprender la división y pasar de las estructuras aditivas a las multiplicativas. Además, en esta actividad a Adry se le brindo atención personalizada constantemente. También esta actividad sirvió de andamiaje para que cada niño logrará resolver problemas de manera flexible y además, hacer la transición del uso de las estructuras aditivas a las estructuras multiplicativas (Ver Figura 11). De modo que, se evidenció, que si bien, las habilidades cognitivas de conocimientos previos en matemáticas, son necesarios, no es condición determinante para que el estudiante acceda a Oportunidades de Aprendizaje. En este sentido, el progreso en el aprendizaje, se propició mediante el uso de problemas no rutinarios, estos favorecen la comprensión conceptual y el desarrollo de habilidades procedimentales. Vea en la Figura 11 cómo JuanJo usa sus recursos, si bien son menos refinados que el uso de las estructuras multiplicativas, le permiten dar una solución mediante una aproximación que es débil, pero posibilitó la interacción de calidad, que les permitió generar soluciones más robustas.

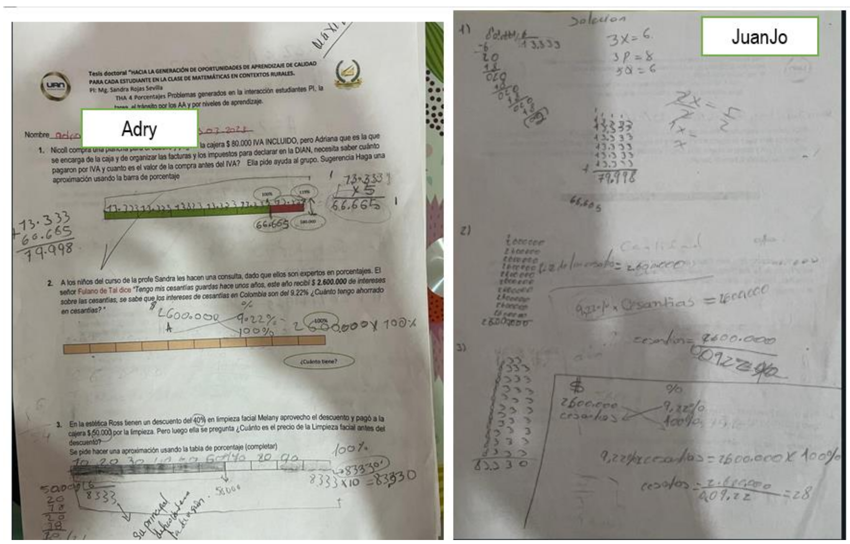
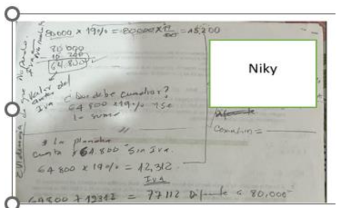


Figura 11. Evidencia de resolución de problema THA Juego de roles.

Así, por ejemplo, en el experimento, surgió un problema interesante, el problema 4 ver tabla 15 de la THA "Juego Roles", este tipo de problemas, es poco frecuente en los artículos consultados. Pues, es producto de la revisión de las facturas de compra. Corresponde al tipo de problema "calcular la tasa después del aumento" y resulta del cruce del tipo de referencia de la vida real (mediante el uso de actividades comerciales como los impuestos). Estos, resultaron de mucho interés para los estudiantes así, por ejemplo, ellos no sabían que existía profesión de contador público, de la existencia de la DIAN y de sus funciones; todas esas experiencias extra matemáticas tributaron a mejorar su lenguaje académico, interés motivación y por ende el compromiso.

Tabla 15. Matriz de análisis de datos para comparar THA y TRA.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje		Trayectoria Real de Aprendizaje	
Problema 4. (**Nivel 4**)	Conjetura de cómo responderían los estudiantes.	Transcripción del extracto.	Coincidencia entre THA y TRA – observación.
Nicoll compra una plancha para el cabello y paga a la cajera $ 80.000 IVA INCLUIDO, pero Adriana que es la que se encarga de la caja y de organizar las facturas y los impuestos para declarar en la DIAN, ¿necesita saber cuánto pagaron por IVA y cuanto es el valor de la compra antes del IVA? Ella pide ayuda al grupo. Sugerencia. Haga una aproximación usando la barra de porcentaje.	Se conjeturó que la mayoría de los niños iba a cometer un error típico (experiencia en los primeros semestres de carreras de Ciencias Económicas) y es calcularle al producto que ya tiene el impuesto, esta tasa y restarla ver Figura 17. En esta Figura se observa también la manera correcta del razonamiento usando la barra de porcentajes.	Obsérvese que en la Figura se muestra un error típico, Niky calcula a $ 80.000 IVA INCLUIDO el 19%, esto es igual a $ 15.200 y este valor se resta a $ 80.000 dando como resultado $ 64. 800 (Valor de la plancha antes del iva) Y este es el valor Antes de iva, ahora se le pide al estudiante que haga entonces la verificación y evaluación de la respuesta, para ello a este valor se le calcula el 19% que es igual a $ 12.312 y se le suma lo cual es igual a $ 77.112 diferente de $ 80.000 IVA INCLUIDO. 	La coincidencia en el razonamiento fue así para la única estudiante que inicialmente lo planeo así, pero la conjetura es que la mayoría de los niños tendrán este mismo razonamiento y resulta que no, esto puede verse como algo positivo, en cuanto al uso de la barra de porcentajes.

Fuente: elaboración propia.

En este orden de ideas, la evaluación formativa se describe a partir de la siguiente situación, primero, se muestra cómo se implementó la evaluación formativa: el estudiante dibujó la barra de porcentajes con diez divisiones, asignándoles 10% a cada una, en la parte superior, así para la tercera división correspondía a un 15%. En la parte inferior asignó 5 dólares a cada cuadrito, manifestó que “cada cuadrito vale 5”. Por tanto, al ver que el 30% coincidía con 15 dólares, no se detuvo en analizar que a Adriana le habían rebajado el 30% no que iba a pagar el 30% de la compra. A partir de allí obtuvo la suma de 50 dólares (Ver Figura 12). Se observa además que usa estructuras aditivas. También es de resaltar, que se generó una interacción muy rica, porque otros estudiantes consolidarán lo hecho y aclaran dudas similares.

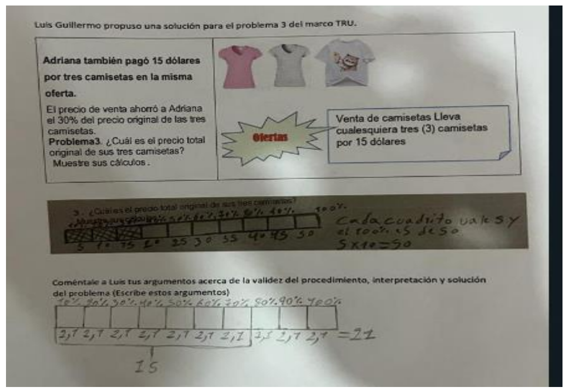


Figura 12. Evidencia evaluación formativa

De otra parte, la valoración de uno de los profesores evaluadores, fue positiva, frente al uso de la tabla de porcentajes y este tipo de problemas, que permiten relacionarlos con temas subyacentes, además sirven de andamiaje para acceder a nuevos conceptos. Finalmente concluyó que el uso de la barra facilitó a los niños la transición de la aritmética al Álgebra de una manera flexible y significativa.

A continuación, se muestra la producción de dos estudiantes ver Figura 13, al resolver problemas propuestos en el marco TRU en el que aplicaron su dominio sobre las fracciones. Se evidenció la compresión robusta sobre fracciones, el uso flexible que los niños tenían sobre las fracciones, les permitió hacer razonamientos usando el concepto de fracción de manera flexible; reconocían que una parte puede estar dividida en otras partes/consideran un grupo de partes como una parte. Usaron las fracciones como unidad iterativa, para construir fracciones. Mostraron una mayor disciplina y perseverancia.

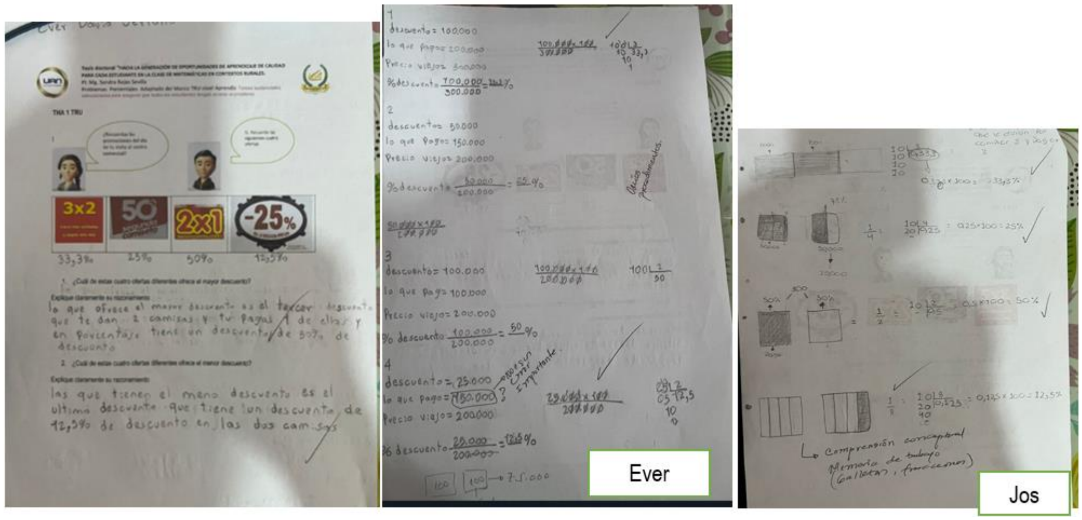


Figura 13. Solución de problemas adaptados del Marco TRU. Ver video evidencia[47]

Al seguir con el análisis, mediante una triangulación de la producción escrita a la THA de Pholer & Prediger (2015) para el logro de niveles conceptuales ver Figura 14 es preciso anotar que los niños no se limitaron solamente a responder de la manera como les indicaba el enunciado, sino que complementaban con otras vías de solución. Una niña que expresaba no ser inteligente para las matemáticas (ver video[48] Al ver el segmento de la transcripción de la entrevista final se evidencia el progreso. Este progreso, no sólo tributa en sus habilidades cognitivas, sino en el nivel metacognitivo y Afectivo.

-*Seño Sandra:* cuéntame cómo ves las posibilidades tuyas para ingresar a la universidad

-Ever: realmente no se ya se me han dificultado un poco desde que iniciara el octavo se me han dificultado un poco

-Jos: Yo sí si me lo propongo si puedo entrar, pero **que las matemáticas se me dificultan no significa que no pueda aprender**

- *Seño Sandra*: excelente me encanta tu respuesta

-**Mel:** yo a veces, lo veo un poco difícil porque **no soy tan inteligente que digamos así, se me dificulta las cosas, la matemática**

- *Seño Sandra*: qué tal si encontramos una manera en que sí las aprendan, Y qué tal si no te vuelves a decir que no eres inteligente. Tú sí eres muy inteligente, créeme y tienes que creerlo tú también

Entrevista final con transcripción parcial Mel, Adriana y Ros.

[47] Jos revolviendo problema https://drive.google.com/file/d/1gI7I_5o1g8K7oWHBItwOVPxQ58MegPbB/view?usp=sharing

[48] Video entrevista Mel expresa no ser inteligente https://youtu.be/LJ9JHKujJlo

- *Seño Sandra:* ustedes cuando enfrentan un problema por ejemplo en el salón o aquí cuando enfrenta un problema que no entiende ¿qué es lo primero que se te viene a la cabeza?

Mel: Al principio se me olvida todo, pero después **digo que yo sí puedo y voy entendiendo,** pero antes mi mente se queda en blanco.

- *Seño Sandra:* Una cosa importante que les quiero preguntar, pero ya con relación a la clase de aquí, ustedes antes de empezar este curso conmigo antes de terminarlo ¿ustedes qué idea tenían de las matemáticas?

Adriana: Que eran aburridas las matemáticas, pero ahora que las entiendo más no me parecen aburridas, pero en cambio con el profe si me parecen aburridas-….

Seño Sandra: ¿Antes que pensabas de ti con relación a las matemáticas?

Mel: **Que no sabía nada con respecto a matemáticas**

Profesora Investigadora: ¿cómo ha cambiado la percepción que tenían de ustedes mismas con respectos a las matemáticas, Por ejemplo, Melany tú antes que pensabas de ti con relación a las matemáticas?

Melany: **Que yo era bien mala**

Seño Sandra: ¿Tú algún día volverás a decirte eso?

Malany: ***no***

Seño Sandra ¿qué significó para ustedes el trabajo del censo? ¿Qué significó para ti rosita?

Rosita: A mí me gustó mucho esa actividad, allá en el colegio yo tenía que estar detrás del profe porque no entendía nada y quedaba "perenita" pero ahora se mas o menos lo que tengo que hacer

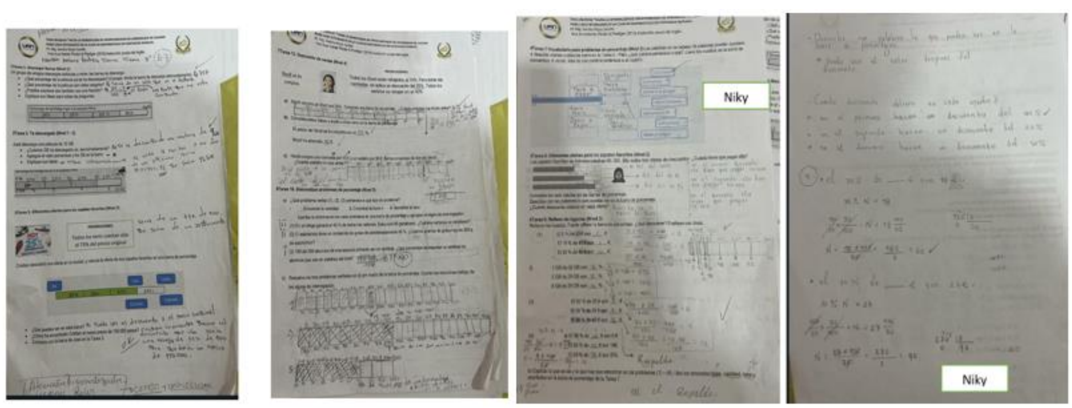


Figura 14. Evidencia solución de tareas asociada a THA Pholer & Prediger (2015) por Mel y Niky.

Los niños fueron tomando confianza, a partir del apoyo de sus padres los cuales en la socialización del "*Censo de mi vereda*" y su socialización recibieron muchos elogios por el trabajo realizado. Además, de ver que las Matemáticas se aplican a muchas situaciones de la vida, o que en las actividades de la vida real subyacen las matemáticas.

Una de las actividades que más gustó a los niños fue la del Censo, esto se pudo observar en el instrumento para conocer su opinión acerca de las actividades trabajadas (ver foto de la socialización y del trabajo con Excel anexo 10) y de la visita a Centro Comercial y Universidad. Al finalizar se volvió a implementar la prueba de entrada de Mula & Hodnik (2020) por petición de los niños. Pero se hizo de una manera dinámica, se rifaron los problemas y los niños tenían unos 20 minutos aproximadamente para resolver y luego pasaron al tablero a socializar. En esta dinámica se destaca que Cris y Ros participaron activamente pasando al tablero, esto se destaca, dado que ellos trabajaron dos sesiones del Censo, porque no aceptaron participar en la socialización (decisión que fue aceptada).

A continuación, se presentan las fotos del desarrollo de Mel, Yohe y Santi. Se observa que Mel, presenta razonamientos propios del nivel metacognitivo, evaluando su respuesta ver Figura 15. Por otro lado, Mel en la entrevista, manifiesta que, aunque persiste en resolver un problema, que antes, pensaba que no era inteligente, se observa que su autoconcepto académico mejoró y con ello sus creencias negativas hacia las Matemáticas se transformó, actitud y creencia positivas, tanto de las Matemáticas como de sí misma frente a la resolución de problemas y aprendizaje.

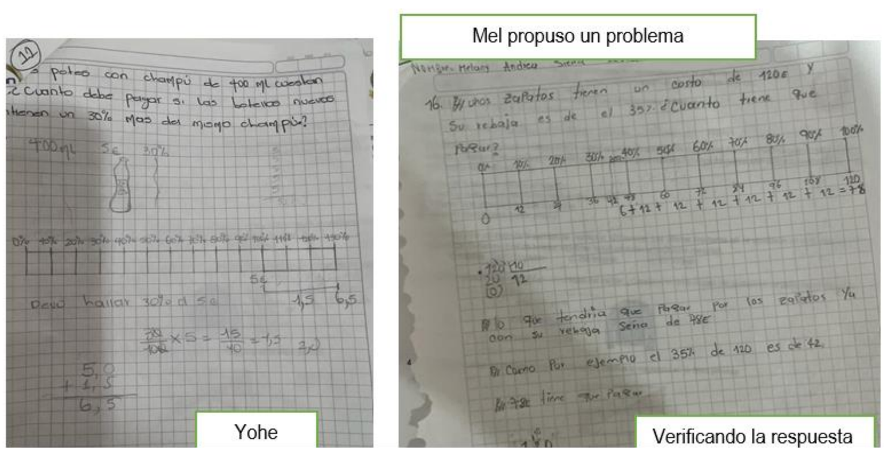


Figura 15. Evidencia solución de tareas asociada a THA Pholer & Prediger (2015)

Asimismo, se observa que Santi, resuelve problemas que le demandan un razonamiento más complejo, ante lo que presentó fluidez y dominio. Además, al hacer público su pensamiento, se observó que tenía un buen razonamiento y que además disponía de los recursos y los usaba de manera flexible para resolver los problemas, dado que presentaba más de una solución para un mismo problema ver Figura 16.

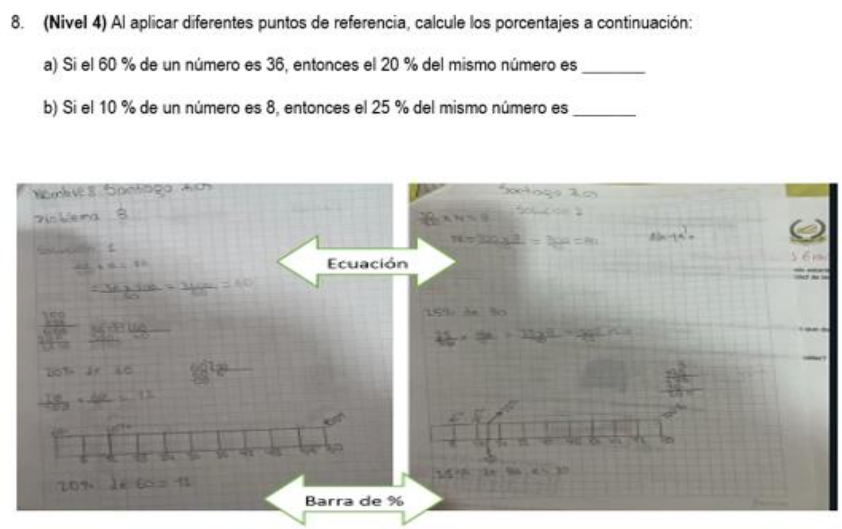


Figura 16. Evidencia solución de tareas Santi problema 8 asociada a THA Mula & Hodnik, 2020). Ver video[49]

Evidencias del apoyo emocional y afectivo relacionado con la decisión de involucrarse en una nueva tarea: según Fernández (2025) "*saber cuándo alentar a sus alumnos para motivarlos hacia la consecución de una meta invitarlo a dar lo mejor de ellos mismos)"*[50]. A continuación, se ejemplifica mediante un fragmento de la interacción con el estudiante JuanJo la manera de brindar este apoyo.

Andamiaje a Juan José frente a la THA parte 1

JuanJo: "seño no se hacer esto", "A mí me va mal en Matemáticas" "en el colegio pierdo los exámenes, usted sabe ya se lo he dicho antes".

---

[49] Evidencia video de Santi https://drive.google.com/file/d/17lfa3quCB_AdXL2LXk7AR8WUEKxJD5aA/view?usp=sharing

[50] Fernández Berrocal, P., & Extremera Pacheco, N. (2005). La Inteligencia Emocional y la educación de las emociones desde el Modelo de Mayer y Salovey. Revista Interuniversitaria de Formación del profesoradop.72)

- *Seño Sandra*: ¿Tú ya leíste bien? ¿Intentaste comprender el problema antes de querer resolverlo?
- JuanJo: Es que no entiendo.
- *Seño Sandra*: No digas que eres malo para las matemáticas, porque no es así. Yo sé, que tú si puedes. Pero debes hacerlo en serio. Te he visto y no te has detenido a leer con detenimiento.

¿Qué hace JuanJo? Se levanta y con desespero y un poco desmotivación insiste que él es malo para las matemáticas

- *Seño Sandra*: Tú eres muy bueno para razonar, cuando te concentras y lo intentas con compromiso. "**Recuerdas una vez que tú fuiste el primero que comprendió un problema** sobre el que se había invertido un buen rato intentando". Sabes que cuando te concentraste lo lograste.
- JuanJo: quedo pensando y recordó ese episodio. Ver video[51]

¿Qué hace la *Seño Sandra*? Se sentó al lado de Juan Jo, e inició la lectura del problema 1. Y luego le pidió que continuará. Luego, le hizo algunas preguntas para motivar la comprensión sin darle las respuestas.

- JuanJo: empezó a leer nuevamente y busco a la profesora para decirle como lo había pensado.
- *Seño Sandra*: Ves, ¿qué te dije? que, si puedes, lo único que necesitas es mayor compromiso, concentración y confiar en ti.
- JuanJo: sonreía y siguió trabajando los tres puntos interactuaba con la profesora y con sus compañeros.

En la parte 2 de la THA JuanJo fue el primero en sugerir una alternativa para resolver el problema 1. Se destaca, su desempeño en sus razonamientos para los problemas 2 y 3. Presentó una estimación: usando la barra de porcentaje, pero al mostrarle una respuesta que resultaba de una ecuación nota que su estimación es débil y que debe calcular el error y sumarlo. Además, al interactuar con compañeros que habían resuelto el problema mediante una ecuación. Juan Jose se mostró ansioso, expresó que nunca había escuchado sobre ecuaciones o sobre incógnitas.

Efectivamente JuanJo comprende que un señor tiene una plata ahorrada que CESANTÍAS y que al sacarle a estas el 9,22% resulta el 2.600.000

- *Seño Sandra*: si perfecto excelente comprensión, entonces vamos a escribir esta interpretación.
- JuanJo: Pero, ¿cómo si yo no sé cuánto es la cesantía? y no puedo escribirlo

Seño Sandra: le vuelve a pedir que exprese lo que comprende y cuando él va hablando le pide que vaya escribiendo. Además, Y no usa una x para la incógnita sino la palabra CESANTÍAS. Para mayor facilidad de los cálculos le sugiere escribir 9,22% como un decimal, el muy acertadamente dice 0,0922. Se observa como el uso de diferentes representaciones ayuda con la fluidez procesal mas no es una condición necesaria para la comprensión, más bien, se puede lograr en el proceso.

[51] Evidencia JuanJo https://drive.google.com/file/d/1dvosXyjmUtfwfcyxy6LJfaHua5hM-7dZ/view?usp=sharing

Conclusiones del capítulo 3

En el desarrollo de la investigación se ha procurado tener una coherencia epistemológica, desde la descripción del problema y la configuración teórica. De tal forma, el marco teórico orientó la decisión, del paradigma cualitativo, con un diseño de investigación basado en la Investigación del diseño: específicamente el enfoque de investigación de diseño centrado en los procesos de aprendizaje y la generación de teoría. Se busca teorizar al respecto de las oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante, esta teoría que van surgiendo de los experimentos de aprendizaje (ciclos), se van revisando y refinando, hasta lograr la teorización que es distinto a validación. La base es la observación de las clases, el registro analítico del lenguaje de estudiantes y docentes, inscripciones y explicaciones, anotando lo que ocurre dentro del contexto de aprender ideas matemáticas (Prediger et al., 2015). Se brindó apoyo diferenciado para que cada estudiante alcanzará los estándares de nivel de grado mediante el diseño de una rica instrucción de nivel 1 que permite múltiples puntos de entrada y vías de solución y utilice una variedad de enfoques. Considere las matemáticas que son absolutamente esenciales para que los estudiantes aprendan y las conexiones de las matemáticas entre grados. Además, los maestros deben seguir conectando el contenido matemático con los procesos matemáticos, como la resolución de problemas, la comunicación, las representaciones múltiples y las conexiones (NTCM, 2020).

CAPÍTULO 4. APORTE PRÁCTICO

Para mantener una coherencia entre las preguntas de investigación, objetivos y resultados se elaboró la matriz de consistencia, Así las cosas, en este capítulo se reporta el aporte práctico de la presente investigación doctoral, dichos resultados se sintetizan ver tabla 16.

Tabla 16. Sub Matriz de consistencia objetivo 1.

Objetivos específicos	Resultados
OE1. Integrar presupuestos teóricos y metodológicos que converjan hacia la generación de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante de secundaria residentes en una zona Rural Colombiana.	**R2OE1.** Categorización a priori de la construcción de una definición OAC para cada estudiante de secundaria de un contexto rural. **R1OE2.** Una caracterización de estudiantes pertenecientes a un contexto rural (estudiantes en riesgo académico).
OE3. Diseñar Oportunidades de Aprendizaje de Calidad basado en la definición operativa propuesta, que responda a las diversas habilidades de los estudiantes y las características afectivas mediante experimentos de enseñanza y trayectorias hipotéticas de aprendizaje para estudiantes pertenecientes a una zona Rural Colombiana.	**R1OE3.**Relato de la co-creación de los AA **R4OE3.** Niveles de la THA para un aprendizaje robusto. **R3OE3**. Una Trayectoria sobre el Andamiaje desde los AA (Skovsmose,2000). **R4OE4**. Sistema de Sub THA sobre porcentajes.

4.1 Categorización a priori de la construcción de una definición OAC para cada estudiante de secundaria de un contexto rural en condiciones de riesgo académico.

Inicialmente se realizó una revisión sistemática de la literatura con diferentes ecuaciones de búsqueda en las principales bases datos JSTOR, Scopus, Springer, Web of Science, Taylor & Francis, Science Direct y google scholar entre otras. Otorgándole prevalencia a los artículos publicados en revista de alto impacto internacional, por ejemplo: ZDM – Mathematics Education, The Journal for Research in Mathematics Education (JRME). De modo que una categorización a priori de la construcción de una definición OAC para cada estudiante de un contexto rural se constituyó en: las prácticas de enseñanza Efectiva y Afectiva, las tareas no rutinarias (Alta demanda cognitiva por niveles de complejidad) y el entorno Rural y global componen las categorías o dimensiones de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de

Calidad. Se trasciende el triángulo didáctico en el sentido que incluye las matemáticas fuera del aula, ver Figura 17.

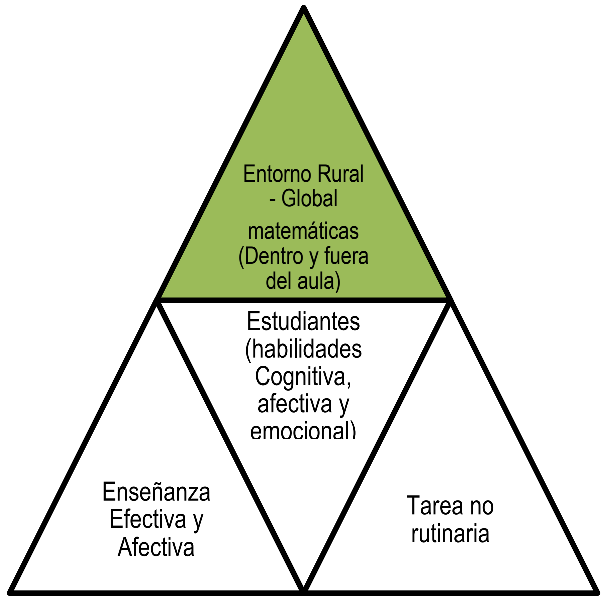


Figura 17. Categorización de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad

De otra parte, también se analizó la presencia de este tema en el ICME -14 observando que es un tema transversal puesto que toca diferentes grupos de estudio. Ver Figura 18. Cabe aclarar que el TSG 10 la enseñanza y aprendizaje de la medición aporta elementos importantes para favorecer las habilidades cognitivas y afectivas de los niños en escuelas rurales, y debe ser un tema obligatorio hacerlo desde las prácticas campesinas por su función epistémica.

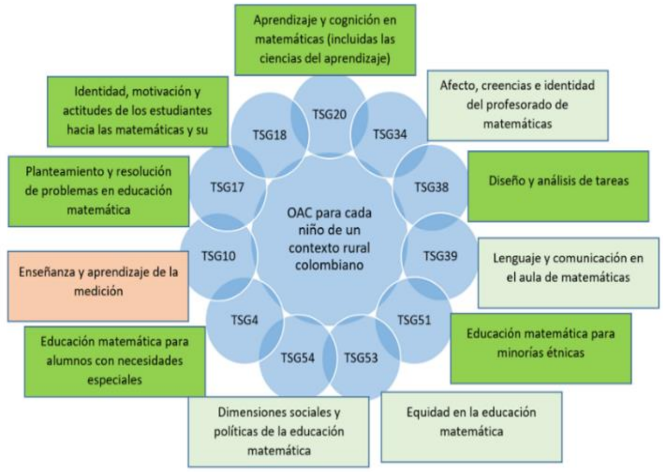


Figura 18. Oportunidades de aprendizaje de calidad para cada estudiante y su relación con los TSG ICME- 14.

4.1.1 Caracterización de los estudiantes vía habilidades cognitivas, afectivas.

Siguiendo las fases de la investigación de diseño, la primera fase es la Preparación, en esta una de las acciones es tener una evaluación del conocimiento inicial de los alumnos, para tal fin se realizó un estudio preliminar en contexto. En primer lugar, se realizó una entrevista a los niños a finales del mes de febrero de 2020, cuando en Colombia aún no había iniciado la cuarentena. La Intención de las entrevistas, fue recoger algunas impresiones de las opiniones y emociones de los niños sobre las matemáticas Para tal fin se inicia con una caracterización de los estudiantes que permite conocer sus necesidades de aprendizaje y sus características afectivas hacia las matemáticas.

Dado que el presente estudio parte de la postura epistémica que un estudiante experimenta una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad cuando se le coloca en el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Así las cosas, resulta necesario conocer características comunes y características específicas de cada de cada uno de los estudiantes, porque cada uno accede, experimenta el aprendizaje y avanza a un ritmo diferente. A continuación, se presentan las opiniones de los niños con mayor frecuencia:

- “No tengo buenas notas porque las matemáticas son difíciles.
- “Me cambiaron al profesor y al nuevo profesor, no le entiendo nada”
- “La profesora X explicaba pausadamente y no cambiaba de tema hasta que uno entendiera, pero el profesor de este año, va muy rápido y cambia de tema sin importar si la mayoría comprende”
- “Los temas solo los vemos en el salón de clase, no veo cómo se puede aplicar las matemáticas en mi mundo”
- “Me da cierto temor preguntarle al profesor cuando no entiendo”[52]

Al aplicar diferentes pruebas para evaluar el conocimiento inicial de los alumnos (año 2021), se tiene la siguiente evidencia: se pudo observar rasgos distintivos de los estudiantes de las escuelas rurales colombianas; tales como, no se encontró diferencia significativa, en el dominio de conocimientos matemáticos básicos, a pesar de estar en distintos niveles de grado (sexto a noveno grado). Así las cosas, sus respuestas fueron similares mostrando un mismo nivel de dominio.

Los niños no tenían experiencia con la medida, a parte del uso de la regla: no distinguían un metro de un centímetro, por ejemplo. Se observó en los niños la débil comprensión de las operaciones aritméticas básicas, es decir, dificultades en el pensamiento que involucra estructuras multiplicativas. Así, por ejemplo, con la división: con una alta frecuencia, los niños decían no saber dividir, y efectivamente, al interactuar con ellos, se observaba que no comprenden el algoritmo de la división, y menos aún comprenden el significado de la división (esta dificultad perduró en varios estudiantes hasta el trabajo con porcentajes). Tenían unas nociones débiles sobre las fracciones, en la prueba conocimientos básicos sobre fracciones todos quedaron en el nivel 1.

[52] Criterio de los estudiantes

Ahora bien, la variedad de pruebas permitió ver las potencialidades de los estudiantes. Así, los problemas que demandaban procesos de razonamiento, pero que tenían ausencia de dominio de contenido matemático, tuvieron una mejor aceptación, despertaron el interés y por tanto pusieron empeño en resolverlos (por ejemplo, el Puzzle). Sin embargo, los problemas que requerían conocimientos matemáticos previos le generan obstáculos generando en ellos actitudes y emociones negativas hacia las matemáticas y hacia su aprendizaje.

Cabe resaltar, que los niños tienen un potencial muy importante, uno es **su felicidad** a pesar de las circunstancias adversas relacionadas con las condiciones de pobreza en que viven. Se observa en su comportamiento (disponibilidad para el trabajo), las expresiones (no se quejan ni se victimizan) y gestos (una sonrisa en su cara). Otro potencial es **la motivación** frente a la invitación de aprender matemáticas en un contexto distinto a su clase convencional. Si bien, la motivación no es observable directamente se pudo apreciar en el compromiso y persistencia frente a la tarea matemática y muestras de alegría frente a cada progreso. Por lo general presentan buen estado de ánimo; sin embargo, a pesar de esto, en varias ocasiones se mostraban desmotivados cuando no contaban con los recursos para resolver un problema, hecho que se presentó con mayor frecuencia iniciando el experimento.

Como resultado de las primeras intervenciones e interacciones con los niños se logró hacer una aproximación de una caracterización en cuanto a las habilidades cognitivas y no cognitivas que tienen los niños del presente estudio. Esto con el propósito de caracterizarlos vía habilidades y no por sus condiciones sociodemográficas, que si bien, son factores importantes, no son los principales factores para el aprendizaje de las matemáticas. Estas habilidades son maleables, y la vía para transformarlas, radica en la empatía del docente hacia la creación de ambientes que permitan que los niños tengan acceso equitativo al aprendizaje.

Así las cosa una caracterización de las habilidades cognitivas referidas a los preconocimientos matemáticos. Se procedió mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes a las pruebas evaluativas sobre operaciones básicas con números enteros, comprensión de las fracciones como parte todo, nociones sobre magnitud, cantidad, medida y unidades de medida, así como la resolución de problemas.

En los sucesivos análisis de los resultados se pudo hacer una caracterización más exhaustiva de las habilidades de los estudiantes, la cual se plasma en la Tabla 17. Esta es una adaptación de los estándares por grado, dada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2020), se pudo observar que los niños participantes se encuentran varios años por debajo de su nivel de escolaridad, en cuanto a los conocimientos matemáticos previos. Así las cosas, hay niños que no dominan procesos básicos, por ejemplo, de estimar y medir; así como representar y resolver problemas que involucran multiplicación y división, siendo estos procesos de segundo y tercer grado de primaria.

Tabla 17. Nivel de los estudiantes de acuerdo al Estándar por grado.

Grado	Estándar por grado	Nivel Bajo
2º	Medir y estimar longitudes en estándar unidades	x
3º	Representar y resolver problemas que involucran multiplicación y división	x
3º	Medición Geométrica: entender conceptos de área y relacionar área a la multiplicación y a la adición	x
4º	Entender notación decimal para fracciones, y comparar fracciones decimales	x
5º	Realizar operaciones con números enteros de varios dígitos y decimales a las centésimas	x
5º	Usar fracciones equivalente como estrategia para sumar y restar fracciones	x
6º	Comprender el concepto de proporción y de uso razonamiento proporcional para resolver problemas	x
6º	Razonar y resolver ecuaciones y desigualdades de una variable	x
7º	Aplicar y extender entendimiento previo de operaciones con fracciones para sumar, restar, multiplicar, y dividir racionales números	x
7º	Analizar relaciones proporcionales y usarlos para resolver problemas matemáticos y del mundo real	x
8º	Entender las conexiones entre relaciones proporcional y ecuaciones lineales	x

Fuente: elaboración propia.

Cabe precisar que las zonas rurales de Colombia presentan un muy bajo logro educativo acompañado de altas tasas de analfabetismo (en la población de la zona rural dispersa mayor de 15 años) es del 12,5%, comparada con el promedio nacional de 3,3%. De igual forma, la tasa de permanencia en el sistema educativo es del 82% en las zonas urbanas, mientras que en las zonas rurales es del 48%, y los resultados de las Pruebas Saber, 5, 9 y 11 en las zonas rurales son inferiores a los de las zonas urbanas (Martínez et al., 2016). Este panorama, refleja desafíos para la Educación Matemática y sus investigadores, en aras de ofrecer OAC para que cada estudiante tenga la posibilidad de experimentar un acceso equitativo hacia el aprendizaje de las matemáticas, y de esta manera coadyuvar a reducir los niveles de pobreza.

Por otra parte, para Martínez et al. (2016) confluyen cuatro grandes problemas de la educación rural en Colombia con respecto a la educación en las zonas urbanas:

- Las altas tasas de deserción reflejadas a través de la baja matrícula en la educación básica secundaria y las bajas tasas de graduación de la Educación Media.
- El bajo rendimiento académico de los estudiantes como evidencia de las brechas en la calidad educativa y niveles educativos en comparación con los estudiantes de zona urbana.
- Una alta tasa de estudiantes en extraedad en las zonas rurales.
- Una reducida tasa de acceso a la educación superior y altas tasas de deserción.

Y, así las cosas, garantizar un acceso al aprendizaje de las matemáticas, para que, de esta manera, el estudiante pueda desarrollar su pensamiento matemático y tenga recursos que estén al nivel de sus homólogos para que pueda competir por becas y demás ayudas que el sistema educativo ofrece, para el acceso a la educación superior. Por todo lo anterior, un niño de un contexto rural con los niveles descritos se puede caracterizar como un estudiante en condiciones de **riesgo académico**.

4.2 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre porcentaje

Para responder la pregunta de investigación **PI3,** se configuró una THA que consiste de tres Sub Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (STHA) de autoría propia, el término sub trayectorias, se usa para referirse, a las THA que tienen sus propias tareas y metas de aprendizaje, pero, las tareas están asociadas a los mismos niveles. Adicionalmente, se implementan dos THA una de Pholer y Prediger (2015) y la otra de Mula & Hodnik (2020) y las tareas se relacionan con los niveles propuestos en la presente investigación, eso, por un lado. Y se diseñaron otras tres STHA con problemas del marco TRU.

Adicionalmente, se analizó el progreso en la Pholer & Prediger (2015) usando su trayectoria de aprendizaje conceptual y léxica y se observó que los niños avanzaron y lograron todos los niveles propuestos a excepción de una sola estudiante. De hecho, un resultado, importante es que, a pesar que en la presente investigación no se siguió la Trayectoria léxica, los niños mediante la Trayectoria de Andamiaje basada en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC) para el caso de los porcentajes lograron el dominio del vocabulario correspondiente a los porcentajes y que es consistente con la trayectoria de Pholer & Prediger (2015).

4.2.1 Relato de la co-creación de AA para generar las tareas de las Trayectoria Hipotéticas de Aprendizaje (THA) sobre porcentajes

4.2.1.1 Diseño de Ambientes de Aprendizaje: Juego de roles

Para la co-creación de los AA1-AA6: requirió la visita de los estudiantes al CC, para observar y comprender la presencia de los porcentajes en actividades de la vida real. El propósito es que indagan al respecto: revisaron facturas de compra donde aparece el IVA, pudieron ver los intereses que un banco determinado ofrecía para el préstamo de libre inversión. Al interactuar con las vendedoras preguntaban por las ofertas, se familiarizaron con el lenguaje propio de esta actividad comercial: (por ejemplo: lleva tres y paga dos, 2x1; 25% en la segunda prenda). Además, empezaron a darle significado a la expresión, “le descuento el tanto por ciento frentes” a la forma correcta de responder la pregunta ¿cuánto debe pagar? ¿de cuánto fue el descuento?; precio antes de la rebaja, precio nuevo, precio con descuento incluido, iva incluido, valor de la compra más iva, precio antes de iva, etc. Cabe resaltar la participación activa de los estudiantes, cuando se dice originó es porque los estudiantes daban ideas para resolver el problema, aunque cabe aclarar que aún no contaban con los recursos cognitivos, pero si con los afectivos y emocionales, surgen de ellos la necesidad de una retroalimentación.

Asimismo, las reflexiones de los estudiantes acerca de los productos que estaban gravados con el impuesto del IVA. Como por ejemplo observar que las gaseosas y jugos empacados tienen un costo adicional por este impuesto y que las frutas frescas no estaban gravadas; reflexionaban sobre varios aspectos relacionados con la conciencia del ahorro y de la salud, así por ejemplo se dialogaba de que el azúcar es perjudicial para la salud y que estos jugos y refrescos tiene alto contenido de azúcar, lo cual es perjudicial para la salud (esta información la observaron en la información nutricional de cada producto) y adicionalmente tiene un mayor precio. Ahora esas reflexiones muestran oportunidades relacionadas con su pensamiento crítico. Con esta inmersión y experiencia personal, estaba el camino hacia el andamiaje léxico y motivacional para la toma de decisión de involucrarme con las tareas subsiguientes.

4.2.1.2 “Me proyecto hacia la Universidad”

Este Ambiente de aprendizaje resultó del cruce de situaciones de la vida real con escenarios de investigación, esta tarea fue muy importante para los niños y padres; fue una motivación extra matemática generada en una lección de un contenido matemático. La idea de llevarlos a la Universidad fue ofrecerles la oportunidad de proyectarse, de sentir la Universidad a su alcance y a la vez favorecer su actitud hacia las matemáticas. Los problemas que surgieron se corresponden al tipo de problemas para Expertos del Marco TRU de Shoenfeld, en el sentido que son poco estructurados. Pero la principal bondad fue que les permitió a los niños que aún persistían los problemas de la comprensión de las estructuras multiplicativas, especialmente la compresión de la división Adry, Mel y Yoe mediante una intervención personalizada y luego grupal lograron desarrollar la comprensión de la división y de las operaciones con decimales.

4.2.1.3 "Censo de mi vereda"

Resultó del cruce situaciones de la Vida real con Escenarios de Investigación: Esta fue una de las tareas que más le gusto a los niños, toca el paradigma de investigación porque va más allá de un conocimiento tecnológico, dado que la vereda no contaba con el CENSO y los niños pudieron argumentar a la comunidad la razones por las que esta información es importante conocerla, tenerla sistematizada y condensada. Una de las razones de peso fue la participación en los proyectos de ayuda a la población rural e indígena. Esta tarea evidencia las bondades de trabajar en el AA 6, relacionadas con la interdisciplinariedad, los niños aprendieron a usar Excel (tablas dinámicas, usar un sí lógico que para los niños no fue algo difícil de comprender, aprendieron a hacer dispositivas, la mayoría por primera vez tocaba un pc, consultaron clasificación demográfica) todo esto les ayuda a los niños a mejorar el dominio de la competencia del lenguaje y a la memoria a largo plazo, al aprender un tema con sentido y que además era significativo , como se observa en el video[53] de socialización.

4.2.2 Niveles asociados a la Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) sobre porcentajes.

En presente estudio investiga acerca de la construcción de OAC y cómo maximizarlas observando el progreso de los estudiantes en las secuencias de tareas de instrucción en la trayectoria de aprendizaje dual (ver Tabla 18). Uno de los aportes de este estudio es la construcción de Subtrayectorias de Aprendizaje con tareas asociadas a diferentes niveles que combinan las Trayectoria de Andamiaje basada en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC) y la Trayectoria para un

[53] Evidencia: https://drive.google.com/file/d/1_NexQsPKmq3QNaS8Aonm09X6w7QE_IHo/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/1o_zbGDRUcJ8RXnugVGNHZWfXtRkRJKNh/view?usp=sharing

Robusto entendimiento de los porcentajes (Marco TRU) a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC) por medio de la barra de porcentaje.

A continuación, se presentan los Niveles de la THA para un para un Robusto entendimiento (TRU) basado en la Taxonomía de Marzano y Kendall (con enfoque en la resolución de problemas y la motivación, en mejora de habilidades cognitivas, afectivas y emocionales frente a la resolución de problemas de porcentajes) y la Trayectoria de Andamiaje basada en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC) para el caso de los porcentajes**.**

Tabla 18. Niveles asociados a Trayectoria para un entendimiento Robusto de los porcentajes a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC).

Niveles asociados a Trayectoria para un Robusto entendimiento de los porcentajes (Marco TRU) a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC)	**Trayectoria de Andamiaje basada en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC) para el caso de los porcentajes**
Nivel 1: Recuperación: el estudiante recuerda el concepto de fracción como parte todo y produce una estrategia para resolver problemas de porcentaje (encontrar la cantidad en sus tres formatos: puro, texto y visual) a partir del reconocimiento aprendizajes en actividades con fracciones (dibujo a escala de la hectárea; material concreto, material sensible al lenguaje).	**AA6.**Situaciones de la vida real y Escenario de investigación. Los estudiantes construyen significado y desarrollan un papel activo en la construcción de su aprendizaje, con autonomía para explorar, formular sus propias preguntas y buscar explicaciones, a partir de la motivación que les genera la inmersión en un contexto global y rural. Al brindarles la oportunidad de observar los porcentajes en distintos escenarios (ingreso a la Universidad, resolviendo y reflexionando junto con la comunidad- CENSO, Impuestos de la canasta familiar en Colombia - Iva, compras, descuentos etc.
Nivel 2: Comprensión: El estudiante integra su compresión informal sobre porcentajes a los temas subyacentes (las fracciones como parte todo (contexto continuo y discreto), como operador y como razón y sus diferentes representaciones) para organizar la información alrededor de un problema y sus posibles soluciones (vía barra de porcentajes)	AA5.Situaciones de la vida real Paradigma del ejercicio Construyendo una comprensión para porcentajes visitas centro comercial (observando las ofertas), bancos - intereses, tablas -de frecuencia, CENSO, Visita a la Universidad - Porcentajes
Nivel 3: Análisis: El estudiante clasifica los problemas de porcentajes de acuerdo a las conexiones realizadas con conceptos subyacente y de la experiencia (información observada en el entorno) en tres categorías (hallar la cantidad, la tasa y el todo o base) e identifica los errores a partir de la comprensión conceptual sobre los porcentajes y elabora una explicación que justifica las conexiones interpretaciones realizadas.	**AA4.** Semirrealidad y Escenario de investigación: el estudiante tiene la autonomía para decidir si acepta la invitación del profesor a la pregunta ¿qué pasa si? para formular sus propias preguntas y buscar explicaciones y pueden descubrir regularidades, con los tipos de problemas de porcentajes a través de experiencias como el juego de roles.

Nivel 4: **Utilización del conocimiento:** El estudiante utiliza la compresión conceptual sobre porcentajes para resolver problemas de la vida real (determina: la cantidad, la base, la base después de la reducción, la tasa y la base después del aumento) en los tres tipos de formato por distintas vías de solución (ecuación, usando la tabla de porcentajes, formando proporciones, regla de tres etc.) y usa diferentes representaciones.	**AA3.** Semirrealidad y Paradigama del ejercicio: Los estudiantes relacionan sus experiencias reales con situaciones hipotéticas planteadas por el profesor sobre las situaciones que conducen a problemas como encontrar la cantidad, la base y la tasa, la base después y antes del descuento en distintos formatos
Nivel 5: **Metacognición**: El estudiante muestra disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) en distintas tareas de resolución y formulación problemas sobre porcentajes (tareas cuya dificultad va de moderada a alta) en sus distintos tipos, formatos y contextos reconociendo que su decisión de hacer un esfuerzo productivo le ayudará a desarrollar habilidades.	**AA2**.Matemáticas y Escenario de investigación: los estudiantes usan la cuadrícula de 10 x 10 y la barra de porcentajes y comprenden los porcentajes como una fracción y como un decimal. Analizan que la suma de los porcentajes es igual a 100% y en su representación como decimal o fracción es igual a 1 mediante el razonamiento repetido
Nivel 6: Afectivo y Emocional: Valora el aprendizaje de las matemáticas basado en su importancia, utilidad y emociones positivas por logro alcanzado, todo esto lo refleja en el compromiso al resolver tareas o problemas no rutinarios de manera autónoma.	**AA1**.Matemáticas Puras y Paradigma del ejercicio los estudiantes resuelven ejercicios relacionados con los porcentajes como operador o como parte todo (Formato Puro) para lograr un proceso de "consolidación".

Fuente. Elaboración propia.

4.3 Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) sobre porcentajes

Inicialmente se presentan las tareas correspondientes a una Trayectoria sobre Fracciones relacionadas con la medición del tamaño de magnitudes de longitud y superficie a partir del Proyecto el cultivo de mi vereda. Seguidamente, se enumeran las Subtrayectorias de Hipotéticas de Aprendizaje (STAH) relacionadas con los porcentajes. De las cuales THA: Proyectándome hacia la Universidad (Universidad); THA Censo de mi vereda; Actividad de Mejora (AM); Actividad de Compensación (AC); Juego de Roles son de autoría propia, las demás THA y secuencia de problemas se referencian.

Algunos problemas se modificaron de manera moderada, pero todos se les adaptó un nivel. Es preciso aclarar que, desde la óptica de la investigación, es tan importante crear THA como el diseño de AA, toda vez que estos permean las OAC. Se presentan de cada THA las metas de aprendizaje y los problemas con sus respectivos niveles. Ahora bien, los niveles asociados a las STHA corresponden a uno de los resultados del presente estudio, como lo es también la trayectoria de andamiaje vía movimientos por los distintos AA. Hubo la necesidad de hacer una clasificación de las diferentes variedades de problemas que resultan del cruce de los tipos de problemas y el tipo de formato, se amplía a 15 casos, ver Tabla 19. Basado en el trabajo de Mula & Hodnik (2020) quien cruzó el método de los tres casos con el tipo de formato. La x significa que se trabajaron todos estos problemas con los estudiantes.

Tabla 19. Clasificación de los problemas sobre porcentajes de veinticuatro combinaciones de tipos y formatos de problemas.

Formato del Problema **Tipo de problema**	**Formato Puro**	**Formato texto**	**Formato visual**
Encuentra la cantidad	X	X	X
Encuentra la base	X	X	X
Encuentre la tasa	X	X	X
Encuentre la base después de la reducción	X	X	X
Encuentre la base después del aumento	X	X	X

Fuente. Elaboración propia.

4.3.1 Actividad cultivo de Mi Vereda

Meta de aprendizaje: Resolver problemas relacionados con dibujos a escala de figuras geométricas, incluido el cálculo de longitudes y áreas reales a partir de una escala dibujar y reproducir un dibujo a escala a otra escala (TG.1, NTCM, 2020)

Resultado de aprendizaje: aplica las fracciones y razonamiento proporcional en la solución de problemas relacionados con cultivos para estimar por ejemplo la cantidad de semillas requeridas para hacer un cultivo de yuca y ñame.

Sugerencia. Trabaja con uno o dos compañeros más para compartir ideas, pero debes evidenciar tus resultados de manera individual.

Etapa I

1. Visita el cultivo más cercano al que puedas acceder junto con tu profesora y compañeros. Para realizar mediciones forman grupos de trabajo y como solo hay una cinta métrica pueden usar la unidad de medida que prefieran. Hacer una descripción, respondiendo por ejemplo las siguientes preguntas.

   ¿Qué cultivos hay?

¿Cuántas calles tiene?

¿A qué distancia está una calle de otra?

¿Cuáles son las medidas de los lados del área cultivada? Explica cómo tomaste las medidas

¿Qué otra observación tienes?

---

2. Haz un dibujo del cultivo (debes tener en cuenta las medidas del terreno que visitaste)

Etapa II

1. Invitar a uno o varios agricultores para que compartan sus conocimientos y experiencia con relación a los cultivos típicos de la vereda y que mencionen problemas relacionados con la cosecha. Tomar nota.

2. Pregunta al agricultor las dudas que te surgen si se va cultivar **una hectárea** cuadrada de yuca, ñame y maíz?

3. En la entrevista con el agricultor solicita información de su parcela, por ejemplo.

   ¿Cuáles son las medidas de los lados del área cultivada?
   ¿Cuántas calles tiene?
   ¿A qué distancia está una calle de otra?
   ¿Cuál es la distancia entre una semilla y otra?
   ¿Qué otra pregunta consideras necesaria hacerle?

   Para responder las siguientes preguntas puedes ver trayectoria de mejora.

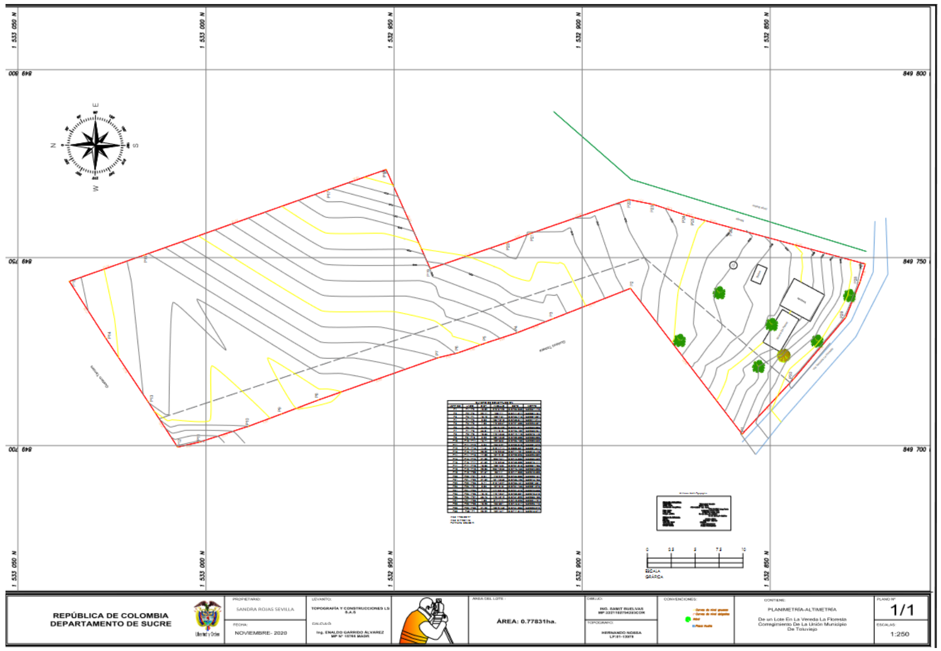
4. Dibujar una hectárea cuadrada usando una escala. Dibuja el terreno del agricultor usando una escala (hacer dibujos en su cuaderno de apuntes)

5. Realiza un dibujo que ilustre que **parte del todo o fracción** del total de las matas **de una calle** corresponde al número de matas de yuca, ñame y maíz respectivamente. En una hectárea cuadrada.

6. De acuerdo con la información suministrada por el agricultor. En una hectárea cuadrada ¿Qué fracción de las matas del cultivo corresponde a yuca? a ¿ñame? a ¿maíz?

Para cultivar el terreno que visitaste

A continuación, se presenta el plano del lote que visitaste, compara las medidas con las que tomaste, ¿Que puedes decir al respecto?



7. Con la información dada por el agricultor. ¿Puedes saber la cantidad de insumos que necesitas para hacer un cultivo en el terreno visitado? ¿Por qué?
8. ¿Cuántas semillas de ñame se necesitan?
9. ¿Cuántos vástagos de yuca?
10. ¿A qué distancia se deben sembrar los tres productos?

Actividad de mejora.

Observa la siguiente figura y responde

1. ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado pequeño?
2. ¿Cuál es el área de cada cuadrado?
3. ¿Cuántos cuadrados forman la figura anterior?
4. ¿Cuál es el área de la figura anterior? Explica que como hallas esta área.
5. Totaliza el área de los cuadrados que conforman la Figura Nº1. Compara con el área obtenida y concluye.

La hectárea o hectómetro cuadrado (del prefijo francés hecto-, y este de la alteración del griego ἑκατόν [hekatón], que significa 'cien')1 es una medida de superficie equivalente a 100 áreas cuadadas o 10 000 m² (metros cuadrados). Es la superficie que ocupa un cuadrado de 100 metros de lado.

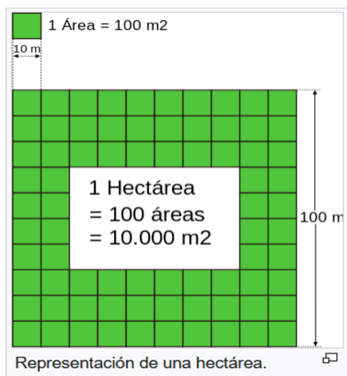


Figura 2 fuente (https://es.wikipedia.org/wiki/Hect%C3%A1rea)

6. Observa nuevamente la Figura Nº1. **Suponga que esta figura representa el dibujo correspondiente a una hectárea** cuadrada de un terreno: ¿cuánto debe medir el lado de cada pequeño? y ¿Cuál es la escala?
7. ¿Será que el área de una hectárea siempre va a tener 100 metros de lado?
8. Piensa y escribe otras dimensiones para que un terreno tenga una hectárea cuadrada. Ayuda: puedes descomponer 10,000 en sus factores primos.
9. Realizar el dibujo de un terreno cuya área sea igual a 10.000 metros cuadrados, pero con dimensiones diferentes a 100 metros de lado. Recuerde mostrar la escala.

4.3.2 Prueba de conocimientos sobre porcentajes (Mula & Hodnik, 2020)

Para esta prueba, se analizaron los problemas propuestos y se le asignó un nivel del 1- 6

Meta de aprendizaje:

- Usar relaciones proporcionales para resolver problemas de porcentaje de varios pasos, como problemas que implica un porcentaje de aumento y disminución.
- Aplicar y ampliar conocimientos previos de fracciones (su compresión como parte todo, operador, razón) y operaciones fracciones y cómo las estructuras multiplicativas.

Resultado de aprendizaje:

- Usa relaciones proporcionales para resolver problemas de porcentaje de varios pasos, como problemas que implica un porcentaje de aumento y disminución.
- Mejora habilidades de conocimientos previos de fracciones (su compresión como parte todo, operador, razón) y operaciones fracciones y cómo las estructuras multiplicativas

Recursos. Recordar los problemas relacionados con dibujos a escala de figuras geométricas, incluido el cálculo de longitudes **y áreas reales** a partir de una escala dibujar y reproducir un dibujo a escala a otra escala (THA cultivo).

1. **(Nivel 1)** El pronóstico del tiempo para mañana muestra que es probable que el 60% del día sea lluvioso, mientras que el resto estará soleado. ¿Cuáles de las siguientes respuestas son correctas para mañana? (Tenga en cuenta que existe la posibilidad de tener más de una respuesta correcta).

a) Más de la mitad del día estará soleado.
b) Durante el día habrá más tiempo lluvioso que soleado
c) Menos de la mitad del día estará soleado
d) El clima lluvioso será menos soleado

2. **(Nivel 1)** Dos horas antes del inicio de la película se vendieron 100 boletas. Las últimas dos horas allí se vendieron un 50% más que dos horas antes. El número total de boletas vendidas fue (Redondea la respuesta correcta).
   a) 50 boletas b) 150 boletas c) 250 boletas d) 350 boletas.

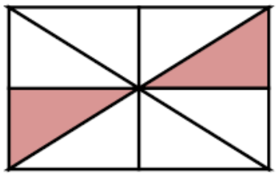
3. **(Nivel 1)** Se elimina el porcentaje de poliéster en el ticket del suéter. ¿Complete la línea debajo del porcentaje de poliéster en el suéter?

Algodón 36 %

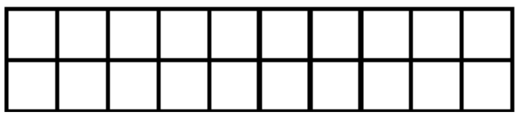
Cachemira 18 %

Poliéster ____%

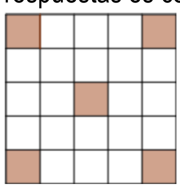
4. **(Nivel 2)** a) ¿Qué porcentaje del rectángulo está sombreado? Escriba la respuesta en la línea provista

 _____ %

b) Sombrear el 15 % del rectángulo siguiente:



5. **(Nivel 2)** Algunos de los cuadrados de la figura dada están sombreados. ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta? Explica tu respuesta



a) Está sombreado exactamente $\frac{5}{20}$
b) Está sombreado exactamente $\frac{1}{3}$ de la figura
c) Se sombrea aproximadamente 0.25 de la figura
d) Se sombrea aproximadamente el 20 % de la figura.

6. Convierta las fracciones dadas a y b en porcentajes (intervenir mejora o compensación)

a) $\frac{3}{10} =$ _____ b) $\frac{4}{5} =$ _____

Convierta los porcentajes dados c y d en fracciones

c) $0{,}5\% =$ _______ d) $113\% =$ _______

7. **(Nivel 2)** Convierte los siguientes números decimales a y b en porcentajes

b) $0{,}4 =$ _____ b) $1.25 =$ _____

Convierte los siguientes porcentajes c y d en números decimales
c) $8\% =$ _____ b) $1.3\% =$ _____

8. **(Nivel 4)** Al aplicar diferentes puntos de referencia, calcule los porcentajes a continuación:

a) Si el 60 % de un número es 36, entonces el 20 % del mismo número es _______

b) Si el 10 % de un número es 8, entonces el 25 % del mismo número es _______

9. **(Nivel 2)** ¿Cuánto es el 18 % de 750?

10. **(Nivel 3)** ¿Qué porcentaje del número 140 es el número 28?

11. **(Nivel 4)** ¿Cuál es el número, si el 32 % es igual a 480?

12. **(Nivel 4)** La proporción entre niñas y niños en una clase es de 2:3. Vincule la parte de las oraciones a la izquierda con la parte correcta de la misma a la derecha (use flechas para vincular partes de las oraciones).

1) El porcentaje de niñas en la clase es 150%

2) El porcentaje de niños en la clase es 66,6%

3) El porcentaje de niñas en comparación con los niños en la clase es 60%

4) El porcentaje de niños en comparación con las niñas en la clase es 40%

13. **(Nivel 4)** Beni ahorró 144 €. Esta cantidad es el 80 % del precio de la Laptop que pretende comprar. ¿Cuál es el precio de la computadora portátil que Ben pretende comprar?

14. **(Nivel 4)** Los potes con champú de 400 ml cuestan 5€. ¿Cuánto debe pagar si las botellas nuevas contienen un 30 % más del mismo champú?

15. **(Nivel 4)** Una empresa fabricó una blusa por $ 20.000. Para venderlo en el mercado, su precio se incrementó en un 5 %. Después de dos meses su nuevo precio se redujo un 5 %. ¿Cuánto cuesta la blusa ahora?

    a) $19.500 b) $19.950 c) $20.000 d) $20.950

16. **(Nivel 4)** Escribe una tarea relacionada con situaciones de la vida real usando los números 35 y 120 y el símbolo de %. Resuelve la tarea que has escrito.

4.3.3 THA: Proyectándome hacia la Universidad

Meta de aprendizaje:

- Usar relaciones proporcionales para resolver problemas de porcentaje de varios pasos, como problemas que implica un porcentaje de aumento y disminución en situaciones de la vida real.
- Aplicar y ampliar conocimientos previos de fracciones (su compresión como parte todo, operador, razón), operaciones con fracciones, operaciones con números decimales y las estructuras multiplicativas.

Resultado de aprendizaje:

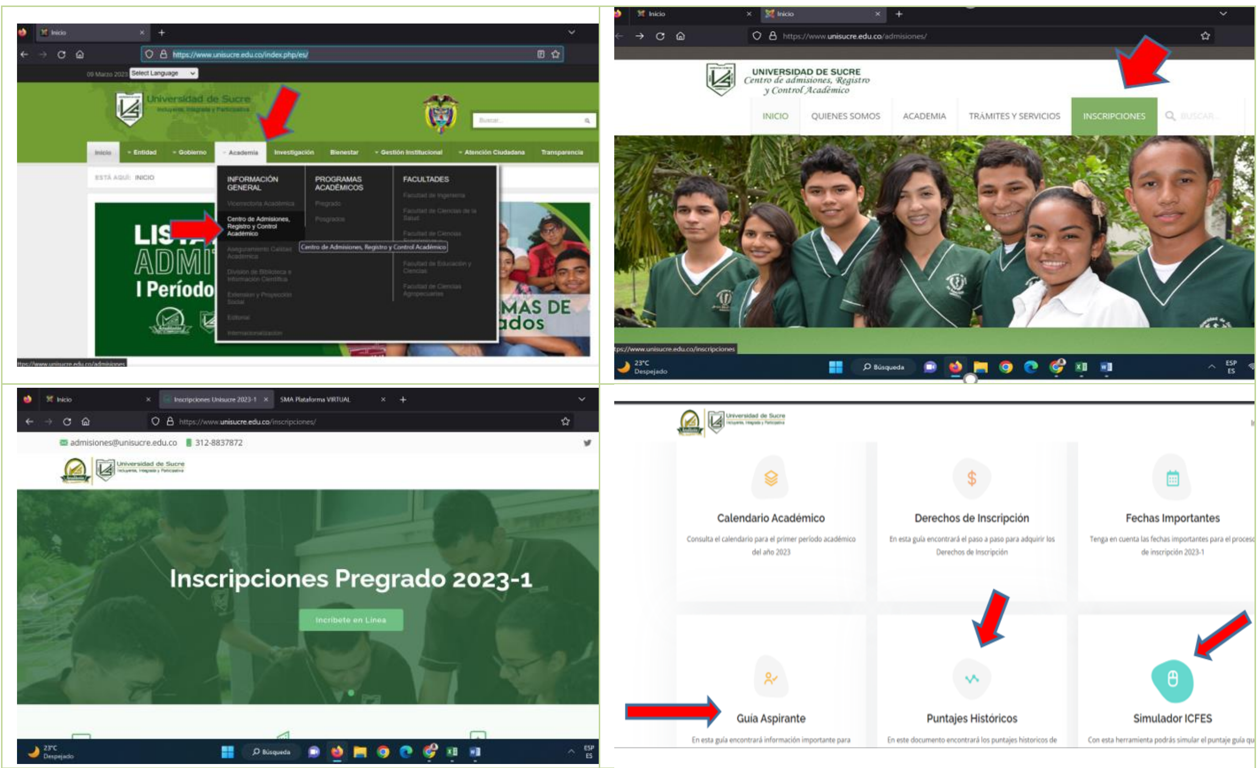
- Uso relaciones proporcionales para resolver problemas de porcentaje de varios pasos, como problemas que implica un porcentaje de aumento y disminución en situaciones de la vida real.
- Mejorar habilidades de conocimientos previos de fracciones (su compresión como parte todo, operador, razón), operaciones con fracciones, operaciones con números decimales y las estructuras multiplicativas
- Aplicó dos tipos de problemas para hallar la cantidad y la base en problemas de la vida real.

Materiales: Barra de porcentajes, cuadrículas 10x10, histórico de notas Universidad de Sucre, Información página web universidad, recursos conceptuales (Actividades previas de mejora y compensación).

Cuestiones importantes.

¿Qué carreras hay? ¿Qué me interesa estudiar? ¿Qué precio tiene? ¿Quiénes pueden ingresar?

Información de interés: En la guía de aspirantes



¿Qué puntaje debo obtener aproximadamente en las pruebas ICFES para ingresar a la carrera de mi interés? (ayuda ver el puntaje histórico)

Programa académico	**Porcentajes por área: para pruebas de 2014- en adelante**	**Costo**
Administración de Empresas, Contaduría Pública Economía, y Tecnología en Gestión Empresarial	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (30%), SOCIALES Y CIUDADANAS (30%), INGLÉS (10%)	

Medicina y Tecnología en Regencia en Farmacia	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (20%), CIENCIAS NATURALES (40%), SOCIALES Y CIUDADANAS (10%)	
Enfermería	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (20%), CIENCIAS NATURALES (30%) , SOCIALES Y CIUDADANAS (20%).	
Fonoaudiología	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (15%), CIENCIAS NATURALES (40%), SOCIALES Y CIUDADANAS (15%).	
Ingeniería Agrícola, Ingeniería Agroindustrial e Ingeniería Civil	LECTURA CRÍTICA (10%), MATEMÁT (30%), CIENCIAS NATURALES (60%)	Entre el 25% y 100% del SMLV (Ing. Agrícola) Entre 1 y 4 SMLV (Ing. Civil)
Biología	LECTURA CRÍTICA (20%), MATEMÁTICAS (15%), CIENCIAS NATURALES (55%) e INGLÉS (10%).	
Derecho	LECTURA CRITICA (50%), MATEMÁTICAS (10%), SOCIALES Y CIUDADANAS (40%).	
Licenciatura en Física	LECTURA CRÍTICA (25%), MATEMÁTICAS (25%), CIENCIAS NATURALES (40%), SOCIALES Y CIUDADANAS (5%) e INGLÉS (5%).	Entre 0.7 a 1.5 SMLV
Licenciatura en Matemáticas	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (40%), CIENCIAS NATURALES (20%), SOCIALES Y CIUDADANAS (5%) e INGLÉS (5%).	Entre el 0.25 y 1 SMLV
Licenciatura en Lenguas Extranjeras	LECTURA CRÍTICA (30%), MATEMÁTICAS (10%), SOCIALES Y CIUDADANAS (20%) e INGLÉS (40%)	
Zootecnia	LECTURA CRÍTICA MATEMÁTICAS (20%), NATURALES (60%)	Entre el 25% y 100% del SMLV

Salario Mínimo Legal Vigente (SMLV): en Colombia se llegó al acuerdo para aumentar el salario mínimo de $1.000.000 a $ 1.160.000 pesos, un crecimiento del 16% respecto al año anterior. ¿Cómo se sabe que el aumento fue de un 16%? Podrías mostrar el procedimiento.

1. **(Nivel 1)** Analiza la información de los porcentajes por área para cada programa académico ¿qué regularidad observas?

2. **(Nivel 2)** En cuanto a los costos, es correcto afirmar que ¿La Licenciatura en Matemáticas es más costoso que Zootecnia? Justifique su respuesta.

3. **(Nivel 3)** Si un estudiante obtuvo los siguientes resultados en las pruebas ICFES 2022, ¿en qué programa académico obtendría un mayor puntaje?

Lectura Critica	Matemáticas	Sociales y Ciudadanía	Ciencias Naturales	Inglés
63	74	57	64	72

4. **(Nivel 3)** ¿Cómo hacer un cálculo estimado, de cuánto tendrías que obtener en cada área en las pruebas ICFES para ser admitido en el programa de preferencia de los que ofrece la Universidad de Sucre?

4.3.4 THA Censo de mi vereda

Problemas generados en la interacción PI- estudiantes y la comunidad PI y el tránsito por los AA y por niveles de aprendizaje.

La presidente de la Acción comunal de la vereda La Floresta, en conversación con estudiantes y la autora le comenta la necesidad de hacer un CENSO y presentar la información "resumida". Se le hace extensiva esta invitación a los niños. La presidenta facilita un libro verde donde tiene el listado de los habitantes, pero les dice que de esa manera no le aceptan la información para un proyecto que la Acción comunal va a presentar.

1. Los niños bajo estas orientaciones hacen consultas en internet (se conectan con el wifi de la escuela primaria y los computadores que el rector presto para llevar a cabo el proyecto del CENSO). Encontraron la siguiente información

Grupos etarios: Primera Infancia (0-5 años); Infancia (6 - 11 años); Adolescencia (12 - 18 años); Juventud (19 - 26 años); Adultez (27- 59 años) y Persona Mayor (60 años o más) envejecimiento y vejez

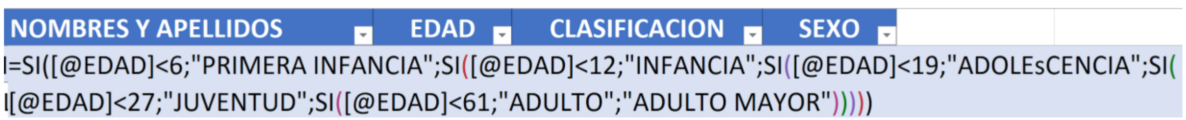
Además, reflexionan sobre la importancia de estar censado, dado que "Esta clasificación permite focalizar las inversiones en cada comunidad teniendo en cuenta la edad de sus habitantes y aplicar políticas públicas que respondan a la demanda de servicios de educación, salud y protección social".

2. En esa búsqueda encontraron información demográfica por ejemplo de Colombia donde usaban los porcentajes y la Estadística. De esta manera se hicieron una idea de cuál era la meta y la ruta.

3. Para este caso, se invitó a un profesor, quien es Lic. Matemática y tiene maestría en Estadística Aplicada, es profesor de un colegio público urbano y catedrático de la Universidad de Sucre. Cabe aclarar que los niños tenían familiaridad con el profesor porque estuvo acompañando el proceso.

La motivación para esta clase fueron muchas: poder ayudar a resolver un problema cuya solución beneficiaría a la comunidad, trabajo con Excel, empatía con el profesor y que éste les dijera que la clase que iban a desarrollar se ofrece a estudiantes de la Universidad. El desarrollo de este proyecto: se llevó a cabo en tres sesiones: primera familiarización con el Software Excel mediante el trabajo de los datos de los niños, segunda sesión: se procedió a poner en práctica lo visto en la sesión 1. (Para optimizar el tiempo se mandó a transcribir información y se les entregó cruda y junto con el profesor le hicieron los arreglos).

Lo más significativo fue la naturalidad con que los niños accedieron a esta oportunidad de aprendizaje específicamente al comprender la lógica del código



NOMBRES Y APELLIDOS	EDAD	CLASIFICACION	SEXO

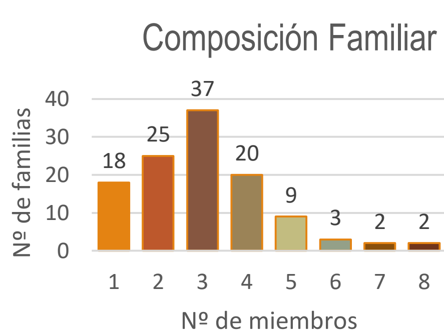
```
=SI([@EDAD]<6;"PRIMERA INFANCIA";SI([@EDAD]<12;"INFANCIA";SI([@EDAD]<19;"ADOLEsCENCIA";SI(
[@EDAD]<27;"JUVENTUD";SI([@EDAD]<61;"ADULTO";"ADULTO MAYOR")))))
```

Además, de la ampliación del vocabulario y la visualización de las diferentes representaciones de los porcentajes. Por ejemplo, eran conscientes qué si la frecuencia relativa estaba expresada como un porcentaje su suma era igual a 100% y si estaba representada cómo decimal su suma era igual a 1.

La tercera sesión consistió en la socialización del Censo de la Floresta a la comunidad: esta parte fue muy importante, porque los niños lideraron el proceso, se le explicó a Santi cómo funciona el Power Point y el a su vez compartió con sus compañeros este aprendizaje y entre todos hicieron las diapositivas y consensuaron la manera de distribuirse la presentación. Cabe aclarar que Cris y Rosita no quisieron participar de la socialización. A continuación, se presentan algunas de las figuras socializadas.

Composición Familiar

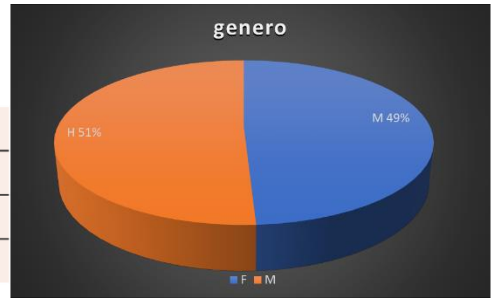
Nº de miembros	Nº de familias
1	18
2	25
3	37
4	20
5	9
6	3
7	2
8	2
Total	116



Al analizar la información se observa que los datos corresponden a una variable cuantitativa discreta. Para este tipo de variable, la tabulación se realiza ordenando en forma ascendente los valores que arroja la característica muestran que los grupos familiares están compuestos en su mayoría de 2 a 4 integrantes, tal como se muestra en la tabla. En la gráfica anterior se puede observar que 37 familias tienen 3 integrantes.

Clasificación por género

GENERO	Cuenta	Porcentaje
MUJERES	173	49,15%
HOMBRES	179	50,85%
Total	352	100,00%

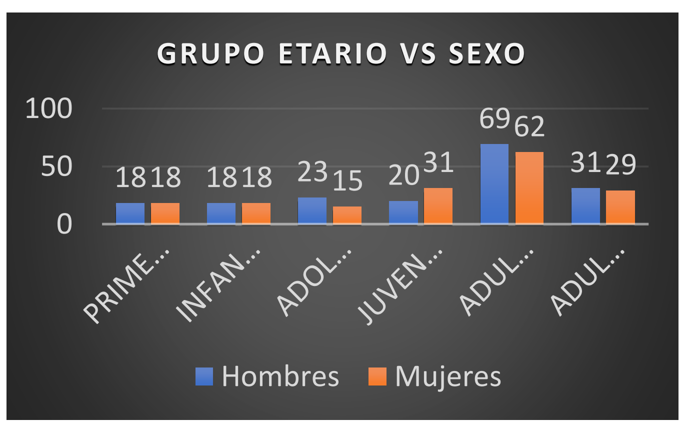


Clasificación por Grupos etarios

Clasificación	Cuenta	Porcentaje
Primera infancia	36	10,23%
Infancia	36	10,23%
Adolescencia	38	10,80%
Juventud	51	14,49%
Adulto	131	37,22%
Adulto mayor	60	17,05%
Total	352	100%

Relación sexo vs edad

Grupo etario	Sexo	
	Hombres	Mujeres
PRIMERA INFANCIA	18	18
INFANCIA	18	18
ADOLESCENCIA	23	15
JUVENTUD	20	31
ADULTO	69	62
ADULTO MAYOR	31	29
Total	179	173



Al finalizar la presentación los participantes expresaron su agradecimiento a los niños y admiraron el trabajo realizado. Y nuevamente reflexionaron sobre la importancia del Censo para los proyectos de ayuda comunitaria. Al finalizar la segunda sesión se les pidió a los estudiantes su opinión acerca de la actividad.

4.3.5 Actividad de Mejora (AM)

Resultado de aprendizaje: Identifico y comprendo diferentes problemas y procedimiento sobre porcentajes a aplicados en contextos reales

PROBLEMA 1 (nivel 1): En cierto almacén realizan descuentos tal como aparece en la foto. Teniendo en cuenta que el precio de una camiseta es de $50. 000 se pide completar la siguiente tabla

	¿Qué debes calcular?	Procedimiento	Descuento	Valor que pagarías en cada caso
¿Cuánto es el descuento de una camiseta?	El 10% de 50.000	El 10% de 50.000 $50.000\ x\ \frac{10}{100} = \frac{50.000\ x10}{100} = 5.000$	**$5.000**	**50.000−5.000=45.000**
¿Cuánto es el descuento de dos camisetas ?		20% de 100.000 100.000/5 = 20.000	**$20.000**	
¿Cuánto es el descuento de tres camisetas?			**$45.000**	

¿Qué porcentaje pago por una sola camiseta? ____ ¿Qué porcentaje pago por dos camisetas? ________

¿Qué porcentaje pago por dos camisetas? _______

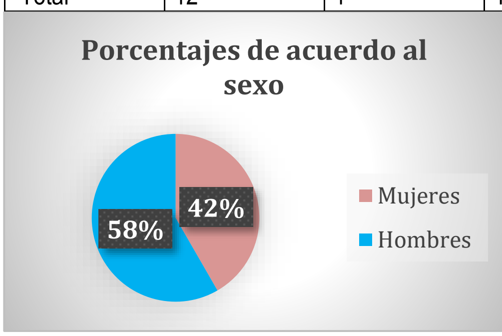
PROBLEMA2 (nivel1): En el salón de la profe Sandra hay 12 estudiantes 5 son mujeres y 7 son hombres

En cada caso escriba la operación correspondiente

El porcentaje (%) de mujeres sobre el total de estudiantes es ___________________________

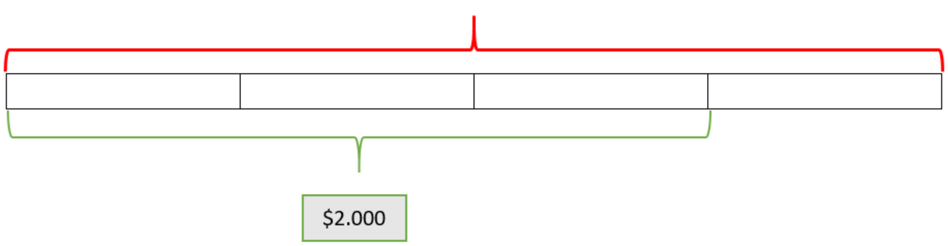
El porcentaje (%) de hombres sobre el total de estuantes es ____________________________

	Cantidad	Parte/total	%
Mujeres	5	0,42	42%
Hombres	7	0,58	58%
Total	12	1	100



PROBLEMA 3: (Nivel 2) Una heladería ofrece una promoción del 26% de descuento sobre el precio de cada helado, el precio actual es de $2.000. ¿Cuál era el precio del helado antes del descuento? Haga una estimación.

Procedimiento1. Como 100% /26% = 3,8: esta representación no es exacta en la barra, entonces este valor lo aproximo a 4



El precio del helado antes del descuento es _______________ aproximadamente.

Procedimiento 2. Con el siguiente procedimiento ¿Qué puedes decir de la estimación del $Valor\ del\ helado\ antes\ del\ descuento$?

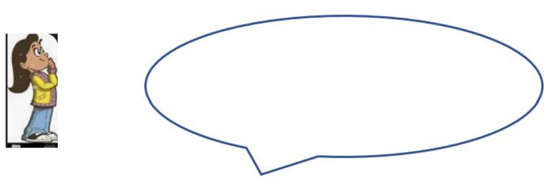
Precio	%
Valor del helado antes del descuento	100 %
2.000	74%

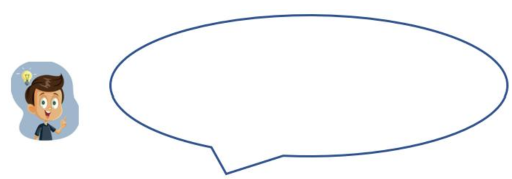
$$\frac{Valor\ del\ helado\ antes\ del\ descuento}{100\ \%} = \frac{2.000}{74\ \%}$$

$$Valor\ del\ helado\ antes\ del\ descuento\ x\ 74\% = 100\%\ x\ 2.000$$

$$Valor\ del\ helado\ antes\ del\ descuento = \frac{100\%\ x\ 2.000}{74\ \%} = 2.702{,}7 \cong 2700$$

¿Se te ocurre otro procedimiento para calcular el valor del helado antes del descuento? Compártelo con tus compañeros





PROBLEMA 4: (nivel 3) Para concluir: Cuando se trabaja con porcentaje se distinguen, principalmente 3 tipos de problemas:

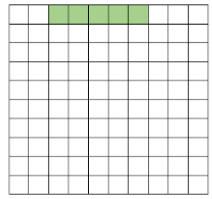
Une con una línea según corresponda

1. Determinar qué porcentaje es un número de otro Problema 1
2. Determinar un número conociendo el porcentaje Problema 2
3. Determinar el porcentaje de un número conociendo el porcentaje Problema 3

   Justificar en cada caso

4.3.6 Actividad de Compensación (AC)

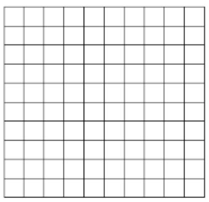
El porcentaje es otra forma de escribir fracciones con un denominador de

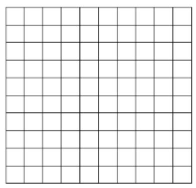


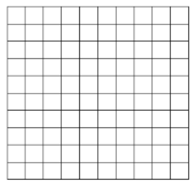
Por ejemplo, 5% significa

1. **Representa los siguientes porcentajes**

25% es $\frac{25}{100}$ $75\ \% = -$ $20\% = -$







2. **Observa la cuadriculas 10x10 y completa la siguiente tabla**

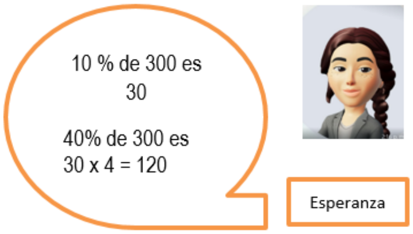
25 %	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	0,25
75 %			
20 %			

Método unitario de porcentaje

10 % de 500 es $\frac{10}{100} \times 500 = \frac{10\times500}{100} = \frac{10\times5}{1} =$ 50	1 % de 500 es $\frac{1}{100} \times 500 = \frac{1\times500}{100} = \frac{1\times5}{1} = 5$
10 % de 2000 es 200 justifica	1 % de 2000 es 20 justifica

3. **Analiza y comparte tu opinión**

El 40% de 300 es $\frac{40}{100} \times 300 = \frac{40\times300}{100} = \frac{40\times3}{1} = 120$



¿Por qué Esperanza calcula tan rápido el 10% de un numero?

4. Emplea el material manipulable (Barra de porcentajes) para representar

25% de 4000 75 % de 20 20% 60

Decimals and Percents

0.2 / ___%	0.05 / ___%	_.___ / 80%
0.375 / ___%	_.___ / 12.5%	0.75 / ___%
1.25 / ___%	_.___ / 50%	_.___ / ___%

4.3.7 Juego de roles vamos a vender, comprar y ahorrar

Para esta actividad usaron información de la experiencia de visitar el centro comercial, se organizaron por grupos. Tres niñas tenían una estética (idea de la profesora: motivada porque una de las niñas quiere dedicarse a la belleza)

Rosita: gerente Nicol Socia y Adriana (área contable)

Tareas: Rosita debía ir al banco YOE por el dinero, el cual había invertido hacía un año y necesitaba retirarlo todo con su interés para invertir en la estética ROSS. Entre las tres niñas realizaron unas ofertas.

Melany y Juan Jose son clientes que llegan para aprovechar la promoción ellos deben calcular en conjunto el descuento y cuanto deben pagar.

Santiago y Luis Guillermo trabajan en un supermercado y tenían la tarea de hacer cada una factura para sus clientes. Uno de ellos hacía la factura con el IVA incluido y el otro la compra más IVA en cada caso debían comprender el proceso y los resultados. Debían tener en cuenta la tabla de IVA de la canasta familiar vigente para Colombia. Rosita llega a comprar productos para belleza y una plancha de cabello. Ambos productos están gravados con el 19%.

Fer y Cris: se encargan de fiscalizar que todas las cuentas se hagan correctamente

Jos trabaja en otro banco que hace préstamos a una tasa del 3% mensual. **Ever** acude al banco a prestar.

Por su parte **Yohe** trabaja en el banco **YOE.**

Esta actividad generó el interés de los niños varios de ellos después manifestaron consultar más sobre porcentajes. La producción de los niños dio origen a varias tareas de la THA. Se clasificó como una actividad de mejora que surgió a partir de una actividad de compensación, luego que el docente observará que no había mucho interés en la clase. Como resultado de aprendizaje importante: los niños evidencian que tienen claro que el porcentaje de descuento debe ser descontado del valor de la venta que no es este el valor a pagar. Emplearon la "tabla de IVA canasta familiar"[54]

GRUPO1. Estética _____________

Ofrecemos ofertas del ------------------- Por cada peinado y maquillaje te rebajamos ______

Grupo 2. Banco y ahorradores Grupo 3. Compras más IVA y compras IVA incluido

En cada caso debes hacer unos carteles con publicidad de las ofertas ofrecidas

[54] https://www.dian.gov.co/impuestos/Reforma%20Tributaria%20Estructural/Listado%20completo%20IVA%20Canasta%20Familiar.pdf

4.3.8 **Sub Trayectoria Hipotética de Aprendizaje “Juego de Roles”**

Problemas generados del JUEGO ROLES en la interacción estudiantes PI y la tarea y el tránsito por los AA y por niveles de aprendizaje.

Objetivo: resolver problemas con los tres tipos de problemas sobre porcentajes (Porcentajes como operadores encontrar (la cantidad, el descuento, el monto, el aumento etc), encontrar la tasa o porcentaje (que porcentaje en una cantidad de otra), encontrar la base o Total (encontrar la base, encontrar la base después de la reducción o encontrar la base después del aumento.

Resultado de aprendizaje: Aplica los tres tipos de problemas porcentajes para conceptos (como base, cantidad y tasa) en la resolución de problemas en distintos ambientes de aprendizaje mediante el uso de diferentes métodos y procesos.

Materiales: Barra de porcentajes, cuadrículas 10x10, regletas Cuisenaire, Tabla IVA Canasta Familiar, marcadores, cartulina, lápiz, papel, regla, billetes didácticos, recursos conceptuales (Actividades previas de mejora y compensación).

1. **(Nivel 2)** En la Estética **Ross** ofrecen un 50% en arreglo de uñas para damas y el 20% en corte y afeitada para hombres. En la lista de precios el arreglo de uñas es de $ 20.000 y el corte de hombre y afeitada cuesta $12.000. Melany y Juan desean saber cuánto debe pagar a la cajera si cada uno aprovecha la oferta. Muestre uno o dos procedimientos que permitan saber cuánto deben pagar Melany y Juan.
2. **(Nivel 2)** En Colombia cobran el **Impuesto al Valor Agregado (**IVA) en la mayoría de los casos es del 19% Rosita y su socia Nicoll están interesadas en hacer una compra para la estética, por ello han consultado si los productos de belleza están gravados y efectivamente lo están como aparecen en la foto.

Rosita va a comprar un Shampoo que cuesta $ 20.000 más IVA y un masaje capilar que cuesta $ 40.000 más IVA

Higiene corporal	[illegible]
Higiene y cuidado facial	19%
Cuidado del cabello	19%
Otros productos relacionados con el cuidado personal	19%
Corte de cabello	19%
Otros servicios relacionados para el cuidado personal	19%
Joyería en oro y plata	19%
Relojes	19%
Otros artículos personales	19%

a) ¿Haga una factura de esta venta?

3. **(Nivel 3)** En el salón de octavo grado hay 30 estudiantes, de los cuales 20 son niñas y 10 son niños se desea saber:

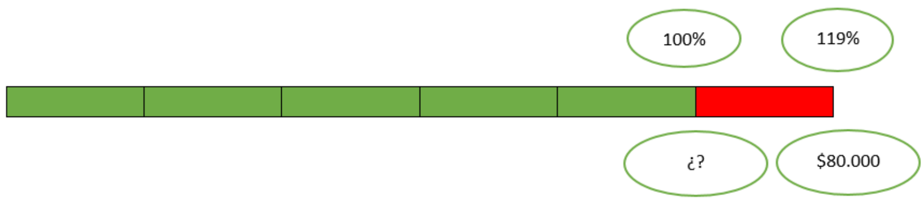
a) ¿Qué **porcentaje** representa las niñas del total de estudiantes?

b) ¿Qué **porcentaje** representa los niños del total del total de estudiantes?

c) ¿Qué **porcentaje** representa las niñas del total de niños?

d) Redacta otra pregunta y respondela.

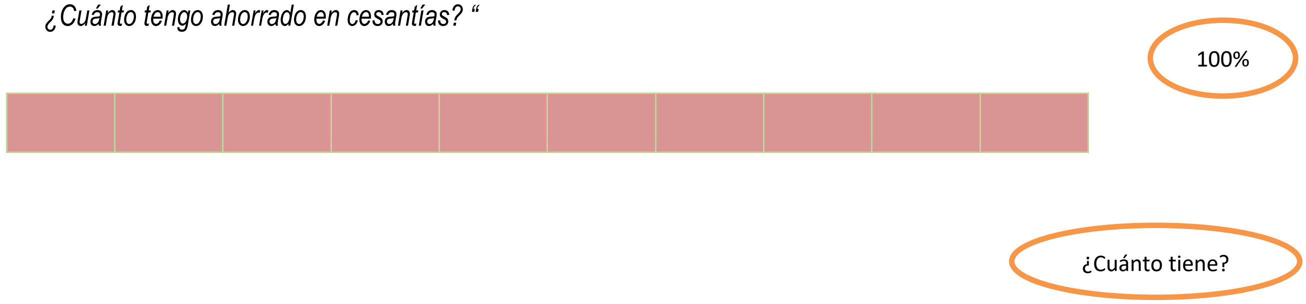
4. (**Nivel 4**) Nicoll compra una plancha para el cabello y paga a la cajera $ 80.000 IVA INCLUIDO, pero Adriana que es la que se encarga de la caja y de organizar las facturas y los impuestos para declarar en la DIAN, ¿necesita saber cuánto pagaron por IVA y cuanto es el valor de la compra antes del IVA? Ella pide ayuda al grupo. Sugerencia Haga una aproximación usando la barra de porcentaje



5. **(Nivel 4)** En la estética Ross tienen un descuento del 40% en limpieza facial Melany aprovechó el descuento y pagó a la cajera $ 50.000 por la limpieza. Pero luego ella se pregunta ¿Cuánto es el precio de la Limpieza facial antes del descuento?

Se pide hacer una aproximación usando la tabla de porcentaje (completar). Muestre otra vía de solución

6. **(Nivel 5)** A los niños del curso de la profe Sandra les hacen una consulta, dado que ellos son expertos en porcentajes. El señor Fulano de Tal dice *"Tengo mis cesantías guardadas hace unos años, este año recibí $* ***2.600.000*** *de intereses sobre las cesantías, se sabe que los intereses de cesantías en Colombia son del 9.22% ¿Cuánto tengo ahorrado en cesantías? "*



4.3.9 Problemas adaptado Marco TRU nivel aprendiz – Ofertas

Problemas Porcentajes Adaptado del Marco TRU nivel Aprendiz *Tareas sustanciales, estructuradas para asegurar que todos los estudiantes tengan acceso al problema* (Shoenfeld, 2016).

1. (Nivel 4) ¿Cuál de estas cuatro ofertas diferentes ofrece el mayor descuento?

Explique claramente su razonamiento

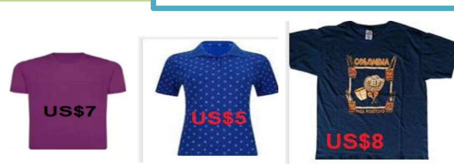
2. (Nivel 4) ¿Cuál de estas cuatro ofertas diferentes ofrece el menor descuento?

Explique claramente su razonamiento

4.3.10 Problemas adaptado Marco TRU nivel Aprendiz - Venta de camisetas

Problemas Porcentajes Adaptado del Marco TRU nivel Aprendiz *Tareas sustanciales, estructuradas para asegurar que todos los estudiantes tengan acceso al problema* (Shoenfeld, 2016)

Venta de camisetas Lleva cualesquiera tres (3) camisetas por 15 dólares

Ever compró estas tres camisetas al precio de oferta de 15 dólares	

1. ¿Cuánto dinero ahorró en comparación con el precio total original de las camisetas?
Muestra tus cálculos

2. ¿Qué porcentaje del precio total original ahorró Ever? _______________%

Muestra tu trabajo.

Adriana también pagó 15 dólares por tres camisetas en la misma oferta. El precio de venta ahorró a Adriana el 30% del precio original de las tres camisetas.	

3. ¿Cuál es el precio total original de sus tres camisetas?
Muestre sus cálculos.

4. ¿Cuál es el precio total original de sus tres camisetas en peso colombiano?

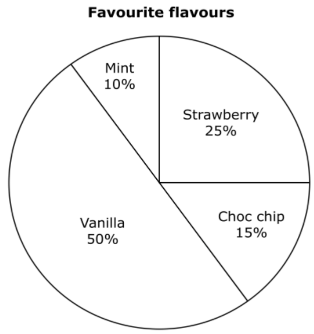
4.3.11 Problemas adaptado Marco TRU nivel Experto – Venta de helado

Problemas Porcentajes. Tareas ricas y menos estructuradas que requieren habilidades estratégicas de resolución de problemas, así como conocimiento del contenido (Shoenfeld, 2016).

Estás planeando hacer y vender helados en un evento deportivo escolar. Esperas hacer y vender 300 helados

El helado lo compran en tarros de 1 litro. Cada tarro cuesta $30. 000 Puedes llenar diez conos de cada tarro. Cada cono vacío cuesta $1.000 Planeas vender cada cono lleno por $6.000			

Antes de comprar el helado, encuestas a 60 personas para saber qué sabores les gusta. Estos son los resultados de la encuesta: Z



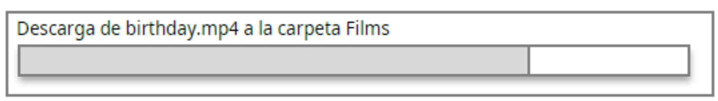
1. Calcule las cantidades que necesita comprar de cada sabor. Muestra todo tu razonamiento con claridad
2. ¿Cuánta ganancia espera obtener si vende los 300 helados?

4.3.12 Problemas adaptados de THA Pholer & Prediger (2015) (niveles propios)

1. Descargar Barras (Nivel 1)

Un grupo de amigos descargan películas y miran las barras de descarga.

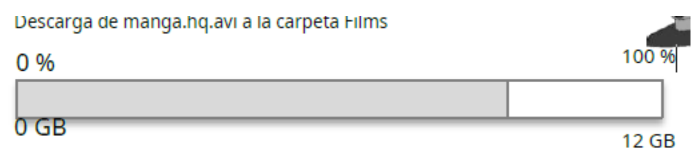
- ¿Qué porcentaje de la película ya se ha descargado? (Consejo: divida la barra de descarga adecuadamente).
- ¿Qué porcentaje de la película aún debe cargarse?
- ¿Puedes expresar eso también con una fracción?
- Explique sus ideas para todas las preguntas.



2. Ya descargado (Nivel 1 - 2)

José descarga una película de 12 GB.

- ¿Cuántos GB ha descargado ya, aproximadamente?
- Agregue el valor porcentual y los GB en la barra.
- Explique sus ideas.

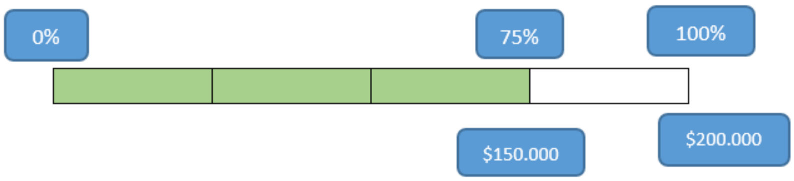


3. Diferentes ofertas para los zapatos favoritos (Nivel 2)

PROMOCIONES

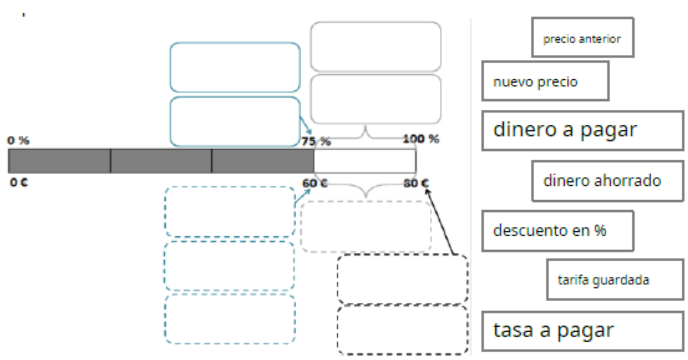
Todos los tenis cuestan sólo el 75% del precio original

Cristian descubrió una oferta en la ciudad, y calcula la oferta de sus zapatos favoritos en una barra de porcentaje



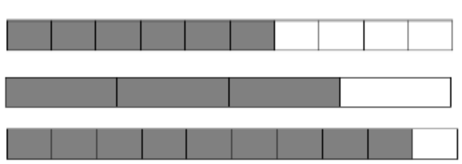
- ¿Qué puedes ver en esta barra?
- ¿Cómo ha encontrado Cristian el nuevo precio de 150.000 pesos?
- Compara con la barra de Jose en la Tarea 3.

4. **Vocabulario para problemas de porcentaje (Nivel 2)** Las palabras en las tarjetas de palabras pueden ayudarlo a describir ofertas y cálculos como en la Tarea 5. -Pero, ¿qué palabra pertenece a qué? -Llene los cuadros en la barra de porcentaje. A veces, más de una palabra pertenece a un cuadro.



5. **Diferentes ofertas para los zapatos favoritos (Nivel 2)**

Los zapatos favoritos de Adriana costaban 80. 000. Ella recibe tres ofertas de descuentos. ¿Cuánto tiene que pagar ella?



Complete los seis valores en las barras de porcentaje.
Describe con las palabras lo que puedes ver en la barra de porcentaje.
¿Cuánto descuento obtiene en cada oferta?

6. **Relleno de lagunas (Nivel 3)**

Rellenar los huecos. Puede utilizar la barra de porcentaje. ¿Qué descubres? Explique sus ideas.

(1) El 5 % de 40 € son _____ €.

El 15 % de 40 € son _____ €.

El 25 % de 40 € son _____ €.

2) 1 GB de 20 GB son ____ %.

2 GB de 20 GB son ____ %.

8 GB de 20 GB son ____ %.

(3) El 30 % de 20 € son ____ €.

El 30 % de 30 € son ____ €.

El 30 % de 40 € son ____ €.

(4) El 30 % de ____ € son 9 €.

El 30 % de ____€ son 18€.

El 30 % de ____€ son 27€.

b) Explicar lo que se da y lo que hay que encontrar en los problemas (1) – (4). Usa los conceptos base, cantidad, tasa y escríbelos en la barra de porcentaje.

7. **Descuento de ventas (Nivel 4)**

PROMOCIONES

Nicoll va de compras

Todos los Short están rebajados al 70%. Para todas las camisetas, se aplica un descuento del 25%. Todos los vestidos se rebajan en un 40%

a) Nicoll compra un Short por 28 €. Completa una barra de porcentaje. ¿Cuánto costaban los shorts antes?

b) Completa estas frases y explica cómo verlo en la barra de porcentaje:

El precio del Short se ha reducido en un ____ %. Nicoll ha ahorrado ___ €.

c) Nicoll compra una camiseta por 15 € y un vestido por 30 €. Barras completas de dos por ciento: ¿Cuánto costaba la ropa antes?

8. **Sistematizar problemas de porcentaje (Nivel 5)**

a) ¿Qué problema verbal (1), (2), (3) pertenece a qué tipo de problema?

i. Encontrar la cantidad ii. Encontrar la base o iii. encontrar la tasa

Escriba la información de cada problema en una barra de porcentaje y agregue un signo de interrogación.

(1) En un bingo ganará el 45 % de todos los cartones. Estos son 90 ganadores. ¿Cuántos cartones se vendieron? (2) El salchichón tiene un contenido de grasa de aproximadamente 40 %. ¿Cuántos gramos de grasa hay en 200 g de salchichón?

(3) 195 de 300 alumnos de una escuela primaria van en autobús. ¿Qué porcentaje representa la cantidad de alumnos que van en autobús del total?

b) Resuelva los tres problemas verbales en a) por medio de la barra de porcentaje. Escribe las soluciones debajo de los signos de interrogación.

Conclusiones del capítulo 4

La construcción de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante implica configurar Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, en dicho proceso, se deben elaborar tareas desde la vida real que proveen un significado para las actividades y para los conceptos matemáticos. De modo que, se demanda del profesor la habilidad para crear Ambientes de Aprendizaje en conjunto con los estudiantes, por lo cual las tareas principales son la formulación y resolución de problemas que resultan de la interacción docente – estudiante- entorno local y global. Además, se debe garantizar el movimiento por los distintos Ambientes de Aprendizaje ver Figura 2. Y promover la maximización de las OAC iniciando el movimiento desde el AA 6 dado que este permea los demás, como el caso de los porcentajes.

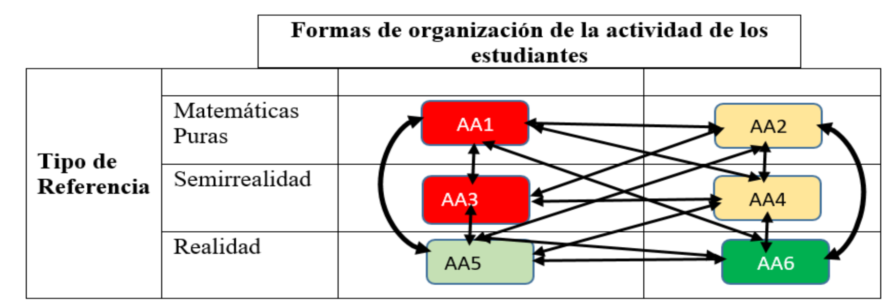


Figura 19. Posibles movimientos por los distintos AA propuestos por Skovmosse (2000). Fuente: elaboración propia.

CAPÍTULO 5. APORTE TEÓRICO

En la tabla 20 se presentan los resultados correspondientes al segundo objetivo de investigación, estos dan respuesta a la pregunta científica ¿Qué tipo de interacciones entre los aspectos de las prácticas docentes, la tarea, los estudiantes y el entorno definen operativamente una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante perteneciente a una zona Rural Colombiana (estudiantes en riesgo académico)? En efecto, fue necesario principalmente, construir una línea de tiempo del constructo Oportunidad de Aprendizaje y plantear la definición de Oportunidad de Aprendizaje en términos de las interacciones entre los aspectos y dimensiones correspondientes a la enseñanza, las tareas matemáticas, el estudiante y los Ambientes de Aprendizaje. De modo que se hace aporte teórico al campo de la educación Matemática, descrito en el presente capítulo.

Tabla 20. Sub Matriz de consistencia objetivo específico 2.

Objetivos específicos	Resultados
OE2. Construir una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante, que posibilitará desentrañar cómo maximizar su calidad a partir de las posibles interacciones entre la enseñanza, los estudiantes, el entorno y las tareas matemáticas en estudiantes pertenecientes a una zona Rural Colombiana en condiciones de riesgo académico.	**R1OE2.** Una línea de tiempo del constructo OTL **R2OE2.** Una matriz con las dimensiones de calidad de la definición operativa de OAC para cada estudiante en condiciones de riesgo académico **R3OE2:** Definición de Prácticas de Enseñanza Efectiva Afectiva **R4OE2.**Definición operativa de OAC para cada estudiante en condiciones de riesgo académico.

5.1 Ruta para elaborar la definición operativa de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante de un contexto rural en condiciones de riesgo académico

A continuación, se presenta una posible ruta para organizar las ideas subyacentes para construir una conceptualización teórica de OAC y como maximizarla en cada estudiante siguiendo las ideas de Rodríguez et al. (2022).

1. Basarse en investigaciones anteriores. Para construir la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante, se partió del análisis de dimensiones esenciales para maximizar las oportunidades de aprendizaje de cada estudiante, para ello se realizó un análisis de las principales investigaciones en torno a este constructo (Ver tabla 21). Los estudios anteriores, sobre Oportunidades de Aprendizaje no incluyen: conexiones entre las lecciones de matemáticas y la vida de los estudiantes, el clima socioemocional, la evaluación y no se evidencia el andamiaje del pensamiento de los estudiantes. Finalmente, y no menos importante, ninguno de los trabajos excepto el de Cai et al. (2020) consideran la necesidad de una definición operativa del Constructo de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante. En este sentido es conveniente citar el trabajo reciente de Neugebauer & Prediger (2023) quienes se preocupan por investigar cómo las interacciones entre las tareas, enseñanza y los estudiantes crean oportunidades de aprendizaje para un objetivo de aprendizaje específico.

Tabla 21. Línea de tiempo del constructo Oportunidad de Aprender (OTL, por sus siglas en inglés).

AUTORES	APORTE
Carroll, J. B. (1963)	Las primeras investigaciones sobre OTL corresponden a las de Carroll (1963), Se centraron en examinar la diferencia entre el tiempo necesario para la comprensión y el tiempo asignado en las escuelas (Yang, Hsu & Cheng 2022; Walkowiak, 2017)
Husén, T. (1967).	Husen (1967) operacionaliza OTL como la superposición entre lo que se enseña a los estudiantes y lo que se evalúa en las pruebas de rendimiento (Walkowiak et al.,2017). A partir de identificar la relación entre los logros en matemáticas y el tiempo destinado a la enseñanza de las matemáticas (Yang, Hsu & Cheng 2022).
Stevens, F. I. (1993).	Stevens (1993) propuso un marco más completo que incluía cuatro grupos de variables, de la siguiente manera: cobertura de contenido, exposición de contenido, énfasis de contenido la calidad de la entrega de instrucción (Yang et al., 2022).
Wang, J. (1998).	Wang (1998) basado Stevens (1993), presentó OTL como un constructo de cuatro dimensiones: exposición de contenido, cobertura de contenido, énfasis en el contenido y calidad de la enseñanza impartida. Las dos primeras dimensiones del marco de Wang se alinean con el trabajo de Carroll (1963) y Husen (1967), respectivamente (Walkowiak et al.,2017)
Tate, W. F. (1995).	Tate (1995) investigaciones extendidas sobre los grupos de énfasis en el contenido y la calidad de la enseñanza (consideró las estrategias de enseñanza de los maestros, la comprensión de la materia y la percepción de las necesidades de los estudiantes) (Yang et al., 2022). Así, el énfasis en el contenido se refiere a la elección del maestro de qué enseñar; el profesor decide qué

	contenido del plan de estudios enseñar y determina qué habilidades destacar. La calidad de la enseñanza incluye las estrategias pedagógicas del maestro y la comprensión de la materia para satisfacer las necesidades de los estudiantes (Walkowiak et al.,2017)
Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013).	Jackson et al. (2013) La implementación de los materiales curriculares por parte de los maestros y su influencia en los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Los investigadores encontraron vínculos entre la configuración de las tareas matemáticas al comienzo de la lección y la calidad de las discusiones finales; era más probable que los estudiantes tuvieran oportunidades de aprender matemáticas significativas cuando la demanda cognitiva de la tarea no se redujo durante la preparación
Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015).	Wijaya et al. (2015) examinaron los materiales del plan de estudios, como los libros de texto, en relación con las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Concluyeron que la falta de tareas basadas en el contexto en los libros de texto limita el OTL de los estudiantes.
Walkowiak, T. A., Pinter, H. H., & Berry, R. Q. (2017).	Walkowiak et al. (2017) presentan un marco reconceptualizado para la oportunidad de aprender (OTL) en matemáticas escolares que incluye cuatro dimensiones: el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza, el tiempo, las tareas y la conversación matemática.
Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., ... & Bakker, A. (2020).	Los autores invitan a centrarse en tres necesidades importante: primero una definición operativa del Constructo de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante, segundo “comprender cómo maximizar la calidad de las oportunidades de aprendizaje para cada estudiante” (Cai et al.,2020, p.13) y desentrañar "qué tipo de interacciones entre las tareas, la enseñanza y los estudiantes crean oportunidades de aprendizaje para un objetivo de aprendizaje específico"
Yang, K. L., Hsu, H. Y., & Cheng, Y. H. (2022).	Investigamos cómo la educación formal y la educación en la sombra en Taiwán proporcionar a los estudiantes oportunidades para aprender matemáticas. Basado en el marco conceptual de Opportunity to Learn (OTL). Los resultados ambientes que generan la ecología de aula en Taiwan, pueden generar resultados de aprendizaje cognitivos y afectivos en los estudiantes.
Neugebauer, P., & Prediger, S. (2023).	Investigan la interacción entre las prácticas docentes y el aprendizaje de los estudiantes en aulas con los mismos recursos curriculares, para responder a pregunta ¿Qué tipos de interacciones entre la calidad de las prácticas docentes y las habilidades de los estudiantes (en el dominio del idioma) crean oportunidades de aprendizaje (para una comprensión sólida de los porcentajes)?

Fuente. Elaboración propia.

5.2 Una matriz con las dimensiones de calidad de la definición operativa de OAC para cada estudiante de un contexto rural en condiciones de riesgo académico

Para abordar este problema multifacético que ocupa la presente investigación se hizo desde una perspectiva que pone en primer plano las oportunidades de aprendizaje que surgen cuando los estudiantes participan en las actividades de clase y se involucran con las tareas de instrucción que promueven el movimiento por distintos AA que permean prácticas sociales tanto del contexto rural y no rural. De esta manera abordar el aprendizaje fuera del aula, estableciendo conexiones entre las lecciones matemáticas y la vida de los estudiantes. Considerar las oportunidades de aprendizaje implica considerar objetivos de aprendizaje específicos. Estos objetivos corresponden a aspectos del pensamiento matemático, como la comprensión conceptual, fluidez procedimental y la resolución de problemas, de allí surgieron los aspectos y dimensiones de la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (Ver tabla 22).

Tabla 22. Matriz con las dimensiones de calidad de la definición operativa de OAC para cada estudiante rural en condiciones de riesgo académico.

	Dimensiones de Calidad de una Oportunidad de Aprendizaje centrada en el estudiante	**Aspectos de calidad**
Enseñanza Efectiva y Afectiva: el profesor como gestor de	**Clima socioemocional positivo del aula**	1. Apoyo Emocional (Empatía) mediada por la inteligencia emocional 2. Apoyo cognitivo: (Empatía) favorece desarrollo de habilidades cognitivas 3. Apoyo Afectivo: Creencias, actitudes y emociones favorece el autoconcepto matemático 4. Conocimiento didáctico, pedagógico y matemático del contenido: El docente usa 1-3 para el diseño de THA favorece compresión conceptual y la resolución de problemas
	Dimensiones de calidad de las interacciones 1. Espacio para hablar. 2. Riqueza Matemática 3. Riqueza discursiva Contacto afectivo y empático para mostrar interés el uno por el otro.	1.1 Contacto afectivo y empático para mostrar interés el uno por el otro. 1.2 Pensando en voz alta muestra a los demás cómo se está razonando. 2. **1** (N5). Proponer preguntas con un propósito 2.2 Aportes de los estudiantes y profesor para diseñar AA 3.1 Pensamiento conceptual/conexiones/múltiples representaciones/múltiples heurísticas 3.3. Intención de los movimientos para la activación cognitiva 3.4 Intención de los movimientos para la activación afectiva 3.5 Errores e imprecisiones 3.6 Resolución de problemas/metacognición de los estudiantes 3.7 Potencial de tareas 4.1 Agencia, 4.2 Razonamiento de los estudiantes 4.3 Número de explicaciones por problema
	Dimensiones de calidad de los AA 1**.** Contenido 2. Demanda cognitiva. 3. Acceso equitativo al contenido 4. Disponibilidad, dominio e identidad 5. Evaluación formativa. 6.Establecer metas matemáticas centradas en el aprendizaje.	Diseño de AA acorde a los criterios de Calidad de los AA (Marco TRU) 1. Proporcionar oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recurso 2. Mantener nivel de esfuerzo productivo: 3. Estudiantes involucrados de manera significativa 4. contribuir al desarrollo de la disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido 5. Uso de las contribuciones de los estudiantes.

	Movimiento por los distintos AA (Skovsmose,2000)	1. Co- creación de los AA entre estudiantes - profesores - comunidad rural - prácticas globales 2. Sinergia entre los Seis AA que resultan del cruce Tipos de referencia (Matemática, semirealidad y realidad) con las formas de organizar la clase en el aula (Paradigma del ejercicio y escenario de investigación) con los criterios de calidad (TRU) para la configuración de tareas que favorecen la comprensión conceptual, procesal y la resolución de problemas no rutinarios. 3. Participación de los estudiantes en la solución de problemas de su interés que favorecen las características afectivas hacia el aprendizaje de las matemáticas y su auto concepto académico.
Tarea Matemática	Tareas (Alta demanda cognitiva por niveles de complejidad).	**1. N2.** Implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas (no rutinarios que desarrollen la comprensión conceptual y fluidez procesal) 2. Relaciona el procedimiento con sus conceptos subyacentes. 3. Se utilizan representaciones múltiples (por ejemplo, manipulación simbólica, visual, práctica- -N3. Usar y relacionar representaciones matemáticas) 4. La tarea fomenta la aplicación de métodos de solución múltiple.
Estudiante como centro del proceso epistémico desde su globalidad (Habilidades cognitivas, afectivas e Inteligencia emocional)	1. Habilidades cognitivas 2. Habilidades afectivas 3. Habilidades de inteligencia emocional 4. Motivación 5. Intereses.	1.1 Preconocimiento matemático 1.2 Dominio del lenguaje académico 2.1 Creencias 2.2 Actitudes 2.3 Emociones 3.1 La percepción emocional 3.2 La comprensión emocional 3.3 La regulación emocional 4.1 Considera el componente de conocimiento importante 4.2 Crea que cuenta con los recursos, la habilidad y el poder para incrementar sus competencias relativas al conocimiento 4.3 Sostiene emociones positivas que ayudan a dar como respuesta conductas que orientan hacia el logro del aprendizaje 5.1 Profesión que desea estudiar.
Ecología de aula rural (Contexto Rural y Global)	Aprendizaje de las Matemáticas dentro y fuera del aula.	Dinamiza el proceso de aprendizaje atendiendo a intereses de los estudiantes, uso de las matemáticas que subyacen en prácticas comunitarias mediante un proceso dialógico y dinámico s relaciones entorno-profesor, entorno-saber, entorno- estudiante; están relacionados con las interacciones, roles, mediaciones, comunicación, reglas y normas, entornos de enseñanza aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

5.2.1 Definición de Prácticas de Enseñanza Efectiva Afectiva

A partir la triangulación de las prácticas propuestas por NTCM (2014) N1-N8: corresponde las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas NTCM (2014); T1-T5 corresponde a las dimensiones de calidad del Marco TRU y PPE 1-2: son Prácticas de Enseñanza Inclusivas documentadas por Prediger & Buro (2021). Mediante un análisis se observó que algunas prácticas se solapan entre sí, y otras aparecen involucradas en las tareas o en las interacciones.; el Marco TRU Y PEI se concibe desde esta investigación las Prácticas Enseñanza Efectivas (PEE) y como aporte se plantea que estas deben complementarse con Prácticas Enseñanza Afectivas (PEA) hacia las matemáticas y su aprendizaje desde la dimensión del Clima socioemocional positivo del aula. De modo que la dimensión: Movimiento por los distintos AA (Skovsmose, 2000) cumple el rol de dinamizador entre las PEE y PEA resultando unas Prácticas Enseñanza Efectivas Afectivas (PEEA). De donde se cumple la ecuación PEE + PEA = PEEA

5.3 Definición operativa de OAC para cada estudiante en condiciones de riesgo académico

Es un proceso multidimensional que produce cambios progresivos en el pensamiento matemático del estudiante (comprensión conceptual, procesal y resolución de problemas) y cambios positivos en el campo afectivo (creencias, actitudes y emociones) y en las habilidades socioemocionales de cada estudiante hacia el aprendizaje de las matemáticas. El cual es resultado de la interacción entre los aspectos inherentes a las tareas no rutinarias (alta demanda cognitiva), los aspectos de las Prácticas de Enseñanza Efectiva y Afectiva, el estudiante (conocimientos matemáticos previos, dominio del lenguaje académico, dominio afectivo, habilidades emocionales e intereses) y el entorno tanto rural como global. Este proceso es permeado por el movimiento en los distintos Ambientes de Aprendizaje (Skovsmose, 2010) para promover una serie de interpretaciones y comprensiones desde las propias experiencias personales de cada estudiante, que coadyuven a construir una esquematización de la información siguiendo la dinámica (Ver Figura 20).

Las OAC se hacen operativas a través del uso de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) las cuales, se configuran como un recurso que permite poner en funcionamiento las interacciones entre los aspectos de las dimensiones de la OAC (ver tabla 21). Estas permiten conjeturar cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje (tareas:

co-creador de AA, de resolución o formulación problemas) del estudiante a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta, los procesos y productos del cambio para el logro de la meta de aprendizaje.

Estas OAC se maximizan a través de la interacción empática entre el profesor (enseñanza), el estudiante y las tareas matemáticas, siempre que se pongan en movimiento los aspectos relacionados con las dimensiones: clima emocional en el aula, las dimensiones de un aula poderosa (Marco TRU), Movimiento por los distintos Ambiente de aprendizaje propuestos por la Educación Matemática Crítica (EMC), las Prácticas de enseñanza inclusiva (Prediger & Buro, 2021) y la interacción en el aula: Espacio para hablar, riqueza matemática y riqueza discursiva (Quabeck et al.,2023).

Una OA es de calidad siempre que le brinde al estudiante la posibilidad de que a medida que avanza en niveles de desarrollo del pensamiento cognitivo, también lo haga a nivel metacognitivo, afectivo y emocional frente al aprendizaje de las matemáticas. Y, paralelamente desarrolle las habilidades cognitivas como los conocimientos matemáticos y el dominio del lenguaje académico. Es decir, se comparte el consenso de que las habilidades deben estar entrelazadas con la comprensión de los conceptos básicos.

Así las cosas, todas las progresiones de aprendizaje de los estudiantes deben cubrir tanto la comprensión conceptual como las habilidades procedimentales, tanto para el tema actual y los previos (Prediger et al.,2022); con el fin que cada estudiante logre la comprensión conceptual y procedimental para convertirse en pensadores y solucionadores de problemas flexibles, con conocimiento y con recursos. De modo que, contribuyen a mejorar el autoconcepto académico, y de esta manera desarrolle habilidades como la perseverancia, el compromiso, disposición y autonomía en la resolución de problemas no rutinarios. Para el caso específico del tema de los porcentajes se debe alcanzar la Trayectoria para un Robusto entendimiento (Marco TRU) a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos

Ambientes de Aprendizaje (EMC), la cual es consistente con el Andamiaje basado en estructura por la barra porcentual.

5.3 Criterios de valoración para analizar cuando un estudiante está experimentando una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad.

En aras de mostrar la coherencia entre objetivos y resultados, en la tabla 23, se presenta el objetivo número 4 con sus correspondientes resultados, que dan respuesta a la pregunta de investigación ¿Cuáles son los criterios que permiten valorar lo que cuenta como una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en riesgo académico?

Tabla 23. Sub Matriz de consistencia objetivo 4.

Objetivos específicos	Resultados
OE4. Elaborar criterios de valoración que permitan saber cuándo un estudiante en condiciones de riesgo académico está experimentando o aprovechando una oportunidad de aprendizaje de calidad	**R1OE4. C**riterios de valoración que permitan saber cuándo un estudiante en condiciones de riesgo académico está experimentando o aprovechando una oportunidad de aprendizaje de calidad

Acerca de las evidencias de que un estudiante ha experimentado una OAC

1. Una característica de los estudiantes que han experimentado oportunidades de aprendizaje de calidad es que el tiempo empleado para resolver un problema disminuye significativamente.
2. La fluidez procesal mejora
3. La capacidad de análisis y de ocurrencia de alternativas de solución surgen de manera fluida y es capaz de usarlas en la solución del problema
4. Usa diferentes métodos, procedimientos, representaciones y realiza conexiones con conceptos subyacentes para dar solución al problema

5. Mayor esfuerzo productivo en la solución de los problemas.
6. Progreso comprensión conceptual.
7. Disposición y perseverancia hacia la resolución de problemas.
8. Demuestra alegría al resolver un problema: expresa sentirse inteligente

Trabajar desde distintos Ambientes de Aprendizaje favorece la inclusión de estudiantes que avanzan a un ritmo diferente para que no se quede atrás en la meta de aprendizaje. Cabe destacar que un mismo grupo que por sí solo se encuentra en condiciones de exclusión y las desigualdades en la clase de matemáticas que operan sobre la base de las condiciones socio demográficas en comparación con el resto de la población urbana, al interior del mismo grupo "homogéneo" hay diferencias en el nivel de progreso. Por tanto, los tránsitos por los distintos ambientes de aprendizaje brindan diversas oportunidades de inclusión para que cada niño se involucre en la construcción y comprensión de los conceptos matemático

¿Qué se puede hacer para que el estudiante experimente una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad?

Se crearon alrededor de un mismo tema distintos ambientes de aprendizaje que resultan del cruce de los tipos de referencia (la matemática misma, la semirrealidad y realidad) con las formas de organizar la actividad de los estudiantes en el salón de clase (el paradigma del ejercicio y los escenarios de investigación) siguiendo la dinámica sintetizada en la Figura 19. Los ambientes que se construyen desde la realidad y el escenario de investigación permean a los demás ambientes y permiten que el estudiante haga una mayor conexión intra matemática (conexión entre conceptos matemáticos), con otras disciplinas, con necesidades de la comunidad, o con prácticas sociales que demandan para su comprensión algunos contenidos matemáticos lo cual le brinda ricas posibilidades para ampliar su competencia del lenguaje.

Por otra parte, al estar inmerso en las situaciones de aprendizaje se logra un clima de aula positivo, por la motivación de los estudiantes. Lo cual conlleva a que cada uno de ellos se motive a brindar un esfuerzo productivo en la solución de los problemas. Las emociones negativas se transforman en emociones de alegría de empatía hacia la tarea. La actitud se transforma, por tanto, hay disposición hacia el trabajo. A tal punto que surgen de ellos mismos problemas para revolver (como ocurrió en el juego de roles). El autoconcepto es maleable y el estudiante logra cambiarlo brindándole andamios tanto cognitivos como emocionales, por ejemplo, este cambia cuando un niño experimenta la emoción de resolver una tarea que implica resolver un problema que para él era difícil: se ve una alegría en su mirada, sus gestos cambian, da muestras de sentirse inteligente (el docente debe notarlo y felicitarlo).

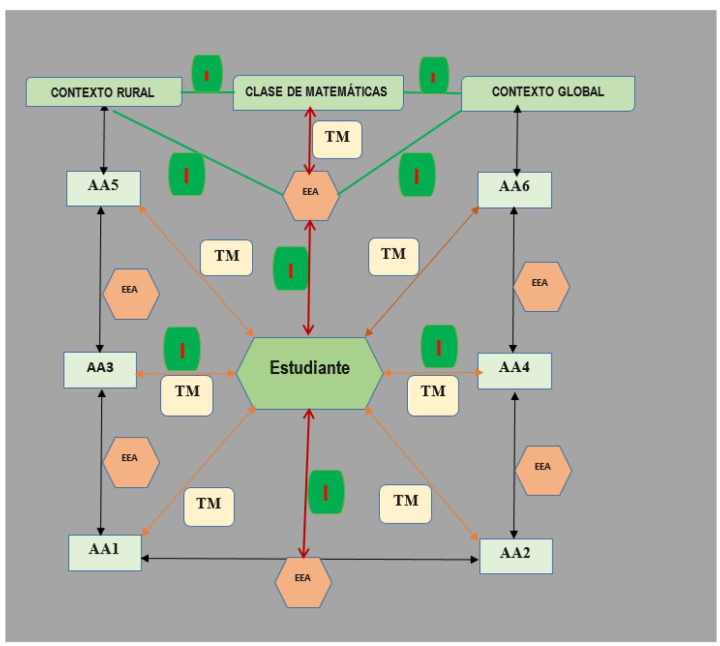


Figura 20. Dinámica del movimiento por los distintos ambientes de aprendizaje (TM: Tarea Matemática; AA1-AA6: Ambientes de Aprendizaje (Skovsmose,2000); EEA: Enseñanza Efectiva Afectiva; I: interacción.

Esta dinámica indica que el estudiante está en el centro del proceso epistémico y que se mueve por los distintos AA, siempre que el profesor gestione estos movimientos poniendo en práctica la dimensión de calidad de un AA de como son el contenido, la demanda cognitiva, el acceso equitativo, la disponibilidad y dominio y la evaluación formativa que es la que une todas las demás 4 dimensiones. En la parte superior se indica que debe haber interacción entre las actividades del aula, el entorno rural y el global; porque de allí surge la información para la creación de AA y surgen los problemas relacionados con el contenido matemático.

5.5 Una metodología para diseñar y maximizar la calidad de Oportunidades de Aprendizaje sobre porcentajes para cada Estudiante Rural en condiciones de Riesgo Académico (MOACCER)

Para generar una metodología de diseño de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad que brinde un acceso equitativo a estas, para posibilitar que cada estudiante de un contexto rural colombiano en condiciones de riesgo académico alcance su nivel personal óptimo en la clase de matemáticas, a partir de la interacción entre los aspectos de las dimensiones de la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en el contexto de los porcentajes se aporta una ruta que permite su implementación (Ver figura 21).

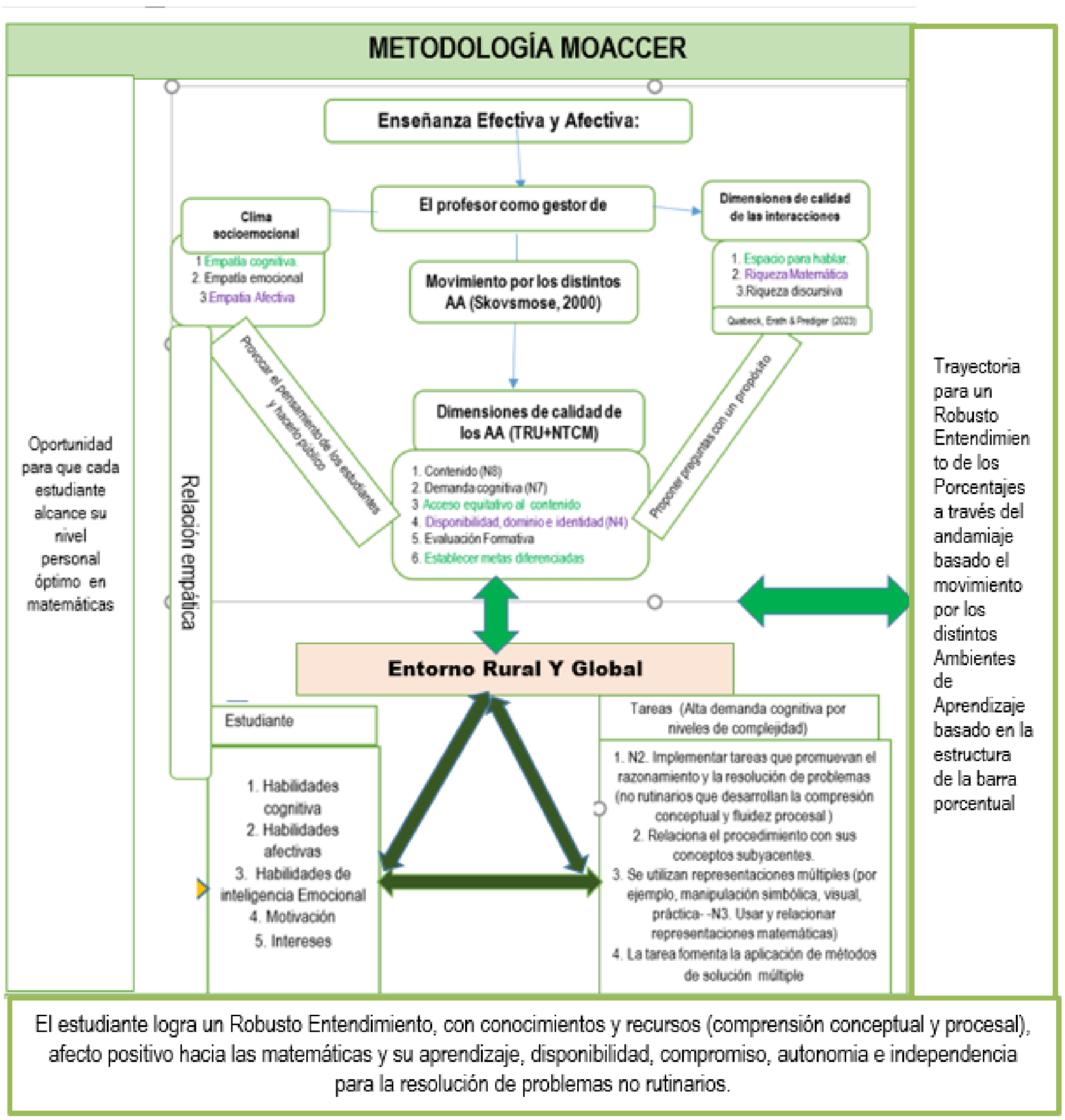


Figura 21. Interacción de las dimensiones y aspectos de la Metodología Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada Estudiante Rural. Fuente: elaboración propia.

La metodología se llevó a la práctica mediante Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje cuyos niveles se adaptaron de la taxonomía de Marzano y Kendall (2007) citado en Gallardo (2009). Cabe aclarar que el logro de los niveles cognitivos (1-4) son progresivos, mientras que Afectivo y Emocional (6) y metacognitivo (5) no lo son. Se plantea que se debe favorecer primero el logro del nivel 6 y luego el nivel 5. Cabe aclarar que el proceso es cíclico ocurre una y otra vez y creciente. Además, para generar nuevas oportunidades de aprendizaje, no solo se fundamenta en los conocimientos previos sino en los interés y necesidades de los estudiantes. Es claro que, estas ideas son isomorfas con los criterios de la definición de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad inscrito en la metodología MOACCER (Ver Figura 22).

Figura 22. Trayectoria de aprendizaje descrita desde la Metodología MOACCER. Fuente: elaboración propia.

Para determinar las habilidades iniciales que deben irse desarrollando, se usa la evaluación formativa, que se fundamentó en la dinámica de preguntas con sentido, relacionado esto con las dimensiones de calidad de la interacción. Para ello es necesario, la solución de problemas vistos desde dos perspectivas: cómo surgen y cómo se resuelven. Para responder lo primero vemos que cuando los estudiantes participan en la formulación de problemas hay una mayor motivación y por ende compromiso en dar una solución, o cuando son problemas de su entorno que valoran su solución (Censo - Universidad), o cuando ellos aportan ideas para la creación, estos procesos surgen de manera natural en la dinámica del movimiento por los distintos AA. Con alguna frecuencia, el estudiante ni siquiera es consciente de que está formulando problemas.

Fases de la metodología MOACCER para el aprendizaje de Porcentajes

Fase 1. Conocer cognitiva, afectiva y emocionalmente al estudiante.

Paso 1. Aplicar: prueba de pre conocimientos matemáticos, instrumento de dominio afectivo e instrumento Inteligencia emocional y valorar el dominio de lenguaje académico.

Paso 2. Analizar los resultados a la luz de la definición de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad y diseñar actividades de compensación o mejora de acuerdo a la necesidad de cada estudiante.

Fase 2. Construcción de AA de calidad (interacción: Profesor –Estudiante- Entorno - Tareas).

Paso 1. Inmersión (Experiencia Sensorial construyendo significado): Implementar Trayectoria de Andamiaje basada en los movimientos por los diferentes Ambientes de Aprendizaje para el caso de los porcentajes (ver Figura 23): inmersión en entornos rurales y globales donde observen prácticas con porcentajes. Paso 2. Invitar a los estudiantes a formular o resolver tareas no rutinarias para que las progresiones de aprendizaje de los estudiantes cubran tanto la comprensión conceptual del tema actual como las habilidades preconocimientos matemáticos y Paso 3. Implementar THA, usando la barra de porcentajes.

Fase 3. Evaluación Formativa (Durante todo el proceso).

Paso 1. Se valora continuamente el progreso de los estudiantes en sus niveles cognitivos, afectivos y emocionales mediante el uso de una interacción de calidad y Paso 2. Mejoramiento de la THA: Evaluación del nivel inicial y comparación trayectoria hipotética vs trayectoria real.

Conclusiones del capítulo 5

En suma, la Metodología MOACCER tiene como propósitos en primer lograr que el estudiante se involucre en la tarea, para lo cual es necesario brindar andamiaje desde el Movimiento por los distintos AA, de modo que el sistema interno de pensamiento del estudiante mediante una interacción de calidad, es decir, que el estudiante tenga espacio para hablar, encuentre riqueza Matemática y riqueza discursiva para lograr consensos pueda dinamizar los procesos y progresar en los niveles de pensamiento.

También se preocupa porque el estudiante examine la importancia de las actividades, por lo cual es importante tener en cuenta los aportes, el interés, creencias, actitudes, emociones, y los recursos con que cuenta, cada estudiante, para ello el docente debe tener empatía. Ahora, las creencias y actitudes negativas son maleables mediante la inmersión del estudiante en un AA que le brinde un clima positivo de aula, con las características de un acceso equitativo al contenido, y se debe considerar el nivel inicial del estudiante y los recursos con que cuenta, para poder así brindarle unos niveles progresivos en el que él no se frustre y se mantenga la demanda cognitiva.

En el mismo orden de ideas, cuando el estudiante asume o no el compromiso de involucrarse en la nueva tarea es crucial poner en juego la inteligencia emocional, tanto del profesor (Empatía y Percepción) como la del estudiante. La comprensión emocional implica una actividad tanto prospectiva como retrospectiva para conocer las causas generadoras del estado anímico y las futuras consecuencias de sus acciones, en el caso de no querer asumir la nueva tarea. El logro de la OAC debe guiarse por la dinámica de las Prácticas de Enseñanza Efectiva y Afectiva.

CAPITULO 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al integrar los presupuestos teóricos, metodológicos y empíricos que convergen hacia la generación de una definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) para cada estudiante de secundaria residentes en una zona Rural Colombiana, se aportó una categorización a priori de la construcción de una definición Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante de un contexto rural: Las prácticas de enseñanza Efectiva y Afectiva, Las tareas no rutinarias (Alta demanda cognitiva por niveles de complejidad); el entorno Rural y global, esta última categoría además de ser la que dinamiza la interacción entre los aspectos de la definición operativa aporta resultados tendientes a disminuir la brecha existente acerca de la necesidad de investigaciones de las matemáticas fuera del aula y que atienda los intereses de los estudiantes.

De modo que, los trabajos más recientes en torno a Oportunidades de Aprendizaje, no abordan las matemáticas fuera del aula, ni el clima socioemocional de aula ni el afecto como aspectos importantes en la generación de Oportunidad de Aprendizaje. Y tampoco atienden explícitamente, la invitación de elaborar una definición operativa, en los términos de Cai et al. (2020). Uno de los trabajos que más se destaca es el estudio de Neugebauer & Prediger (2023), los autores aportan resultados acerca de las interacciones entre la calidad de las prácticas docentes y las habilidades de los estudiantes (en el dominio del idioma). Por su parte, Walkowiak et al. (2017) aportan un constructo sobre oportunidades de aprendizaje de las matemáticas que incluye cuatro dimensiones: *el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza, el tiempo, las tareas y la conversación matemática*, como marco para maximizar la calidad de las Oportunidades de Aprendizaje.

Al igual que Tesfamicael & Ayalew (2021) consideran las prácticas de enseñanza efectivas, pero no las afectivas. Sin embargo, se resaltan varios puntos comunes como la evaluación formativa y la consideración de las prácticas de enseñanza efectivas (NCTM, 2018). En cuanto al propósito de generar resultados de aprendizaje cognitivos y afectivos se encuentran similitudes con el trabajo de Yang et al. (2022). Por su parte Wijaya et al. (2015) investigan sobre la Oportunidad para Aprender que ofrecen los libros de texto indonesios.

Otro resultado importante asociado a este objetivo es la caracterización de un estudiante rural como un estudiante en condiciones de riesgo académico. Cabe aclarar, que la idea de esta caracterización, evita hacerlo vía condiciones demográficas y socioeconómicas. Aunque, son factores que tienen una implicación en el aprendizaje de los niños son las habilidades cognitivas y afectivas que impactan principalmente el aprendizaje (Prediger & Buró, 2021). A partir de estas ideas, se asumen los referentes teóricos la Educación Matemática Crítica, específicamente, los Ambientes de Aprendizaje (Skovsmose, 2000), Marco TRU Shoenfeld con sus cinco dimensiones de calidad para un aula poderosa, el Dominio Afectivo de la Educación Matemática (Creencias, actitudes y emociones) propuesto por McLeod (1992). Dado que estos Marcos son complementarios en función de brindarle un acceso equitativo a los estudiantes a las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad.

En cuanto al marco metodológico, se optó por la Design Research, esta se ha establecido como una metodología de investigación que combina sistemáticamente dos objetivos: (1) mejorar la enseñanza en el aula de materias mediante el diseño de arreglos de enseñanza-aprendizaje para un determinado tema y (2) generar contribuciones teóricas a través de la investigación empírica, para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje iniciados para un determinado tema (Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006; Prediger, 2019). La teoría local resultante sirve como fundamento para el diseño y apunta en el futuro a generalizaciones para otros contextos y temas del aula. A través de la THA como puente entre la teoría y la práctica (Bakker & Van Eerde, 2015).

Así las cosas, el segundo objetivo de investigación, permitió configurar aportes teóricos: una línea de tiempo del constructo oportunidad de Aprender, una matriz con las dimensiones de calidad de la definición operativa de Oportundiad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en condiciones de riesgo académico, una definición de Prácticas de Enseñanza Efectiva Afectiva y finalmente la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en condiciones de riesgo académico. Estos se generaron en el proceso de la Investigación Basada en Diseño al tiempo que avanzaba el experimento de diseño.

En la interacción de los ciclos de diseño se fueron haciendo conjeturas acerca de cómo los estudiantes progresaban en la Trayectoria de porcentajes (THA que también se generó en estos tres ciclos). Así las cosas para generar una metodología de diseño de Oportunidades de Aprendizaje de Calidad que brinde un acceso equitativo a estas OAC para posibilitar que cada estudiante de un contexto rural colombiano en condiciones de riesgo académico alcance su **nivel personal óptimo** en la clase de matemáticas, a partir de la interacción entre los aspectos de las dimensiones de la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada estudiante en el contexto de los porcentajes se debe:

Primero, entender qué significa que un estudiante alcance su nivel personal óptimo en la clase de matemáticas. Pues bien, desde la lente de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad, significa que, logró un Robusto entendimiento de los porcentajes, emergió con conocimiento y recursos, es decir, desarrolló comprensión conceptual y fluidez procesal, transformó sus creencias y actitudes de sí mismo frente al aprendizaje de las matemáticas, siente emoción hacia la resolución de problemas no rutinarios y demuestra compromiso, disponibilidad y autonomía frente a su aprendizaje. Así las cosas, alcanzó los niveles que le permiten resolver cualquiera de distintos problemas sobre porcentajes de las quince combinaciones resultante del cruce de los tipos problema y formatos de problemas (Ver Tabla 19). Implica que experimentó los matices que brinda una Enseñanza Efectiva Afectiva, es decir que:

- Experimentó con un clima positivo de aula, y en el que el profesor se interesó en conocer sus habilidades cognitivas, afectivas y emocionales (puede hacer uso del instrumento de dominio Afectivo, del Inteligencia Emocional, pruebas de conocimientos básicos, etc)
- Contó con apoyo afectivo, cognitivo y emocional (el profesor le brindó la oportunidad de transformar sus creencias y actitudes negativas de sí mismo frente a las matemáticas) y ¿cómo lo hizo? Con el movimiento por distintos Ambientes de Aprendizaje. Lo invitó a ver o indagar sobre prácticas de su comunidad rural y actividades del mundo global a las que puede acceder (trabajo independiente, o haciendo una inmersión virtual) de situaciones que tengan un valor per se y que le brinden oportunidades intra y extra matemáticas. Es decir, entre los profesor- estudiante- estudiante- entorno rural y global se construyen los AA. Y así construyen problemas no rutinarios (Ver Trayectoria de Andamiaje basada de los movimientos por los diferentes Ambientes de Aprendizaje para el caso de los porcentajes).
- Demanda que el estudiante interactúe con agricultores indagando acerca del cultivo y con esa interacción empieza a tener un contacto con problemas que involucran el razonamiento proporcional, luego puede abordar las fracciones con material manipulable, los Recursos Sensibles al Lenguaje problemas del Marco TRU. Es decir, se abordan las fracciones iniciando en el Ambiente de Aprendizaje 6, y así de acuerdo a la dinámica del aula se van generando los demás Ambientes de Aprendizaje.
- A medida que el estudiante avanza en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, en ese proceso va desarrollando una comprensión conceptual, fluidez procesal y finalmente reciben preparación como pensadores y solucionadores de problemas flexibles. Para ello es necesario el uso de la Barra de porcentajes, esto, demanda poner en juego las estructuras aditivas y multiplicativas.

  En síntesis, si a un estudiante se le ha brindado la oportunidad para alcanzar su nivel personal óptimo desde una enseñanza afectiva efectiva + Tareas matemáticas no rutinarias de alta demanda cognitiva por niveles de complejidad + interacción con el entorno y si él ACEPTA la invitación, se conjetura que desarrollará compromiso, disponibilidad y autonomía (no requiere la vigilancia del profesor para realizar la tarea) frente a la resolución de problemas no rutinarios. En este caso se puede decir que alcanzó su nivel personal óptimo en la clase, como fue el caso el de los niños que aceptaron la invitación en el presente estudio.

A continuación, se presenta un gráfico que muestra una escala radial donde el centro es cero y la parte exterior lo más alto pudiéndose evidenciar el progreso de los estudiantes tanto en el campo cognitivo, afectivo y socioemocional. Este permite analizar el progreso de los estudiantes en los diferentes niveles y analizar si la tarea es coherente y brinda andamiaje a este progreso. Para ello se analizan 10 secuencias donde se puede ver el nivel alcanzado por cada estudiante (Ver Figura 23). Así por ejemplo al aplicar "Mula & Hodnik (2020)" por segunda vez y los problemas correspondientes a "Me proyecto a la universidad", también se puede evidenciar que hay estudiantes que presentaron dificultades en las actividades de mejora, pero luego se observa un progreso posterior.

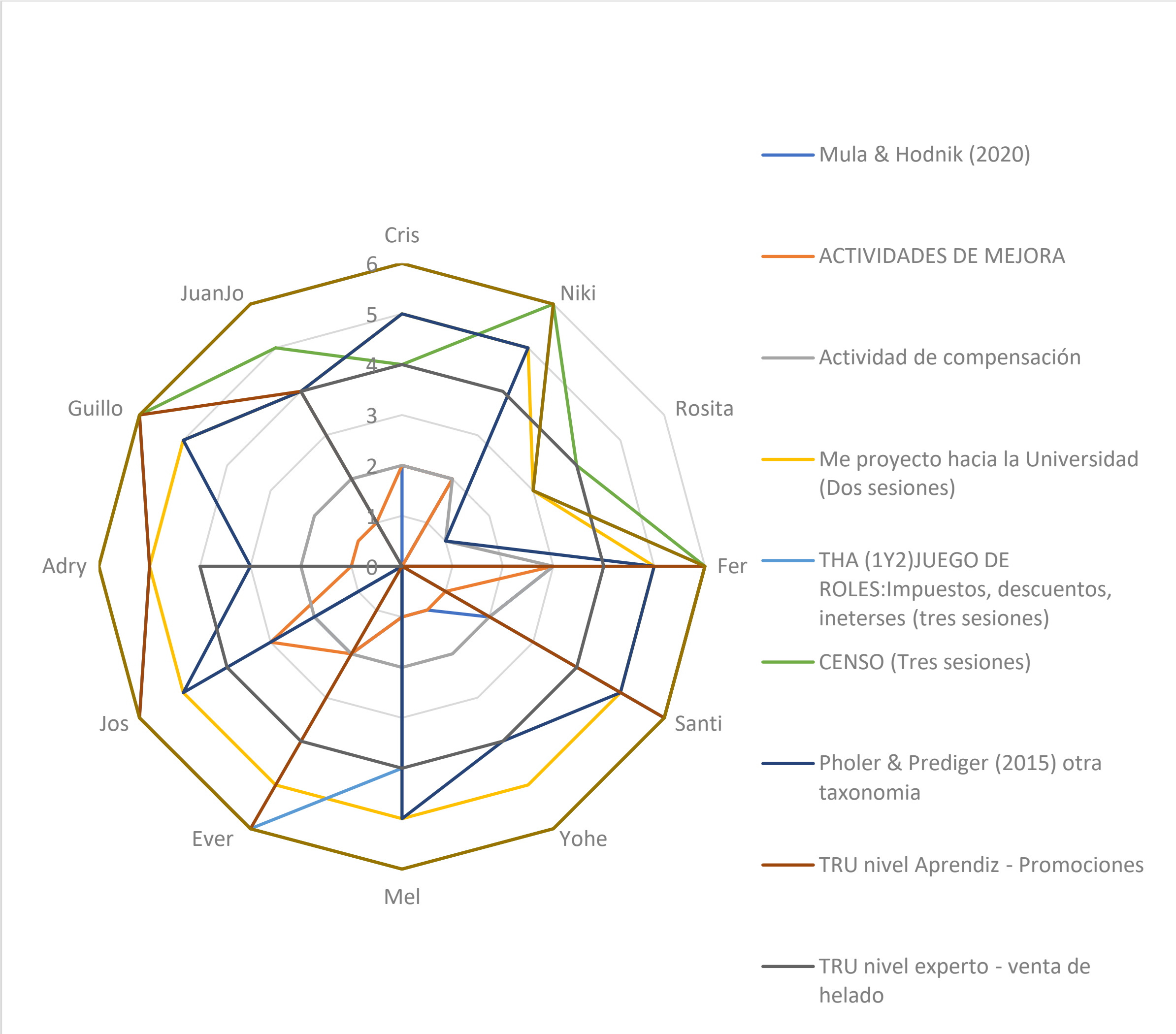


Figura 23. Progresión Trayectoria para un robusto entendimiento (Marco TRU) a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC). Fuente: elaboración propia.

El interés se centró en analizar la correspondencia entre las tareas y el progreso de cada estudiante en los niveles asociados a la Trayectoria hipotética de Aprendizaje. Mediante el gráfico de barras (Ver Figura 24) se aprecia en conjunto el progreso por los niveles cognitivos asociados a las tareas de las Sub Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y el progreso de los niños en el campo cognitivo, afectivo y socioemocional. El gráfico permite observar que las actividades tenían correspondencia con el nivel logrado por cada estudiante. Es de aclarar que el color rojo en la figura 24 significa que, el estudiante no presentó o no logró el nivel. En la prueba 1 de Mula & Hodnik (2020) tres niños no alcanzaron el nivel 1 y un niño no presentó la prueba. Se ofrecieron actividades de mejora y compensación, las actividades de mejora desarrollan habilidades por eso demandan mayor esfuerzo cognitivo, de allí el logro alcanzado. Y así sucesivamente cada niño a su ritmo iba avanzando. Naturalmente que hubo niños que avanzaron más rápido y lograron un nivel 5 y 6 bien desarrollado. Cabe aclarar que los niveles 5 y 6 no son de tipo cognitivos y no se dan de manera lineal.

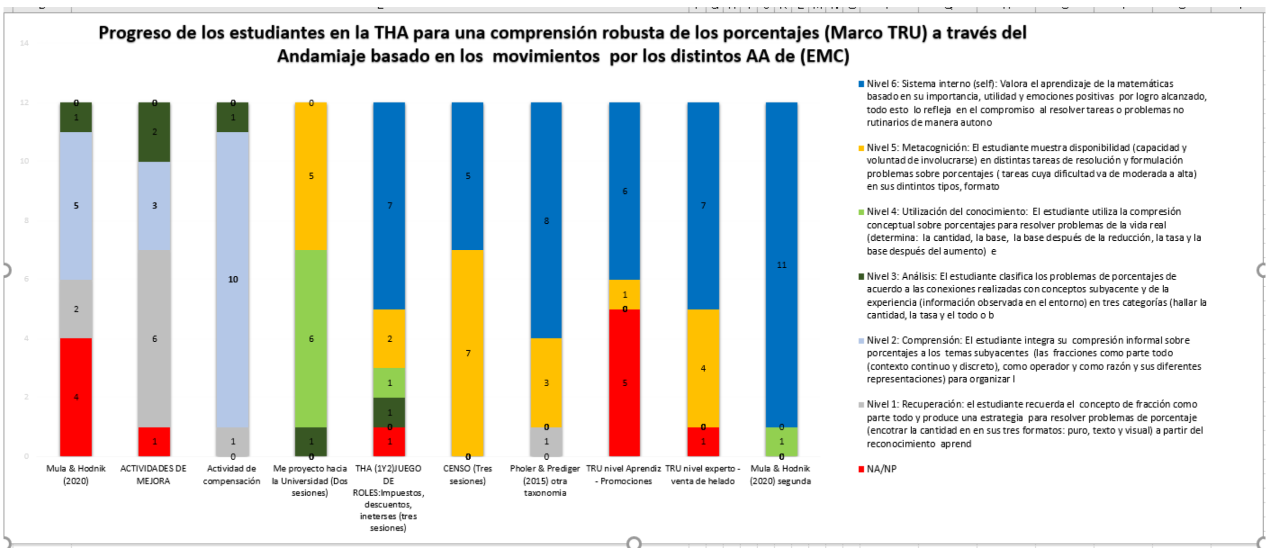


Figura 24. Progreso de los estudiantes en la THA para una comprensión robusta de los porcentajes (Marco TRU) a través del andamiaje basado en los movimientos por los distintos AA (EMC). Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, para valorar el progreso en el nivel afectivo se tienen en cuenta el logro de los estudiantes en los niveles 5 y 6 de la Trayectoria propuesta mediante el compromiso, la disponibilidad la perseverancia en la resolución de problemas, su producción escrita, expresiones, gestos, entre otros. Complementariamente, se construyó un instrumento para valorar las categorías del Dominio Afectivo basado en el Marco de Mc León (1992) (ver Anexo 2). Se le aplicó la prueba Alfa de Cronbach, con un valor α de 0.807, lo que indica que este instrumento tiene un alto grado de confiabilidad, validando su uso para la recolección de datos. Se relacionaron las preguntas por categorías y las subcategorías así: Creencias acerca de las matemáticas (P1 y P5); creencias acerca sí mismo frente al aprendizaje de las matemáticas (P2, P3 y P12); creencias sobre la enseñanza de las matemáticas (P14 y P15) y sobre el contexto social (P4). Las actitudes fueron valoradas por las preguntas (P6; P7, P9, P11 y P13) y las emociones con las preguntas (P8 y P10).

A partir de la comprensión de la evolución de los estudiantes, desde la interacción directa y el análisis retrospectivo, análisis de video, comparaciones de las opiniones de las estudiantes dadas en las entrevistas iniciales y la entrevista final; las respuestas a preguntas abiertas se pueden afirmar que, a medida que iban progresando en los niveles cognitivos lo hacían en el campo afectivo. Estas afirmaciones son consistente con las vías afectivas del afecto local, es decir las emociones que experimentaban los niños cuando lograban hacer un problema que antes no podían, el hecho de experimentar esta sensación de alegría y satisfacción recurrentemente, según Hannula et al., (2004) a medida que se repiten, las vías afectivas, conducen a la construcción de efecto global dentro del individuo: estructuras afectivas a largo plazo que, podrían facilitar el entusiasmo futuro, el compromiso, las expectativas de éxito y una matemática positiva (ver Fragmento de entrevista).

Fragmento de entrevista

-Seño Sandra: ¿han tenido que persistir para resolver para resolver un problema, en las clases del proyecto?

-Estudiante: Si, por que usted nos empieza a decir que nosotros podemos y que somos capaces y así vamos acercándonos más a la respuesta, aunque no esté bien, uno tiene que seguir intentándolo hasta llegar a la respuesta

***-Seño Sandra*:** José, ahorita me comentaste que a ti siempre te han gustado las matemáticas, desde tu experiencia anterior, ¿cuándo no podías resolver un problema que hacías?

***-José**:* lo dejaba, pero **ya ahora no.**

-Seño Sandra: será porque ahora tienes más recursos, Juan José mencionabas acerca de las diferentes formas que tenías para resolver los porcentajes que antes creía que era solamente ¿qué?

-Juan José: Dividir el número sobre el total sobre 100 cancelarle los ceros y multiplicarlo por la cantidad y dividir, pero ya entendí este tema, pero si era para otro más difícil el proceso se complicaba ya uno puede **usar la barra de porcentaje que ayuda bastante a uno, la regla de tres y las ecuaciones**

-Seño Sandra: ¿Ustedes pensaban que los porcentajes estaban relacionados a las ecuaciones?

-Estudiante: nunca había dado ecuaciones

-Seño Sandra: Hablábamos hace rato de las creencias, de las creencias que ustedes tenían acerca de las matemáticas piensen antes de 2020 y después de ver este curso, ¿cambió en algo la creencia que ustedes tenían de la matemática, cuando me refiero a creencias por ejemplo para ubicarlos de la creencia que tus tenías de ti mismo frente a las matemáticas, como te veías para aprender matemáticas?

-Estudiante: Seño **yo me veía incapaz de hacer un ejercicio** de eso porque cada vez que usted traía una guía yo en mi mente decía uy esta difícil no puedo, pero cuando a medida que **hacíamos los primeros problemas ya uno iba entendiendo los demás y entonces uno ya se le iba aclarando el tema.**

Obsérvese que en la Figura 25, los niños daban indicios de haber transformado el afecto negativo hacia las matemáticas. Las expresiones comunes eran: "las matemáticas son sólo fórmulas y números", "yo no participo en clase, ese profesor es muy grosero, si uno se equivoca lo regaña" "las matemáticas son aburridas y muy difíciles no las entiendo", "yo nunca me he ganado un examen de matemáticas", "Yo soy muy bruta para las matemáticas"; o "yo no soy tan inteligente para las matemáticas". Ahora se observa cómo el 100 % está en desacuerdo con esas afirmaciones. De modo que tanto las creencias, actitudes como emociones lograron ser transformadas. En consecuencia, los estudiantes mejoraron el rendimiento académico, el nivel de conocimientos básicos de matemáticas, la motivación y empatía hacia las matemáticas y su aprendizaje.

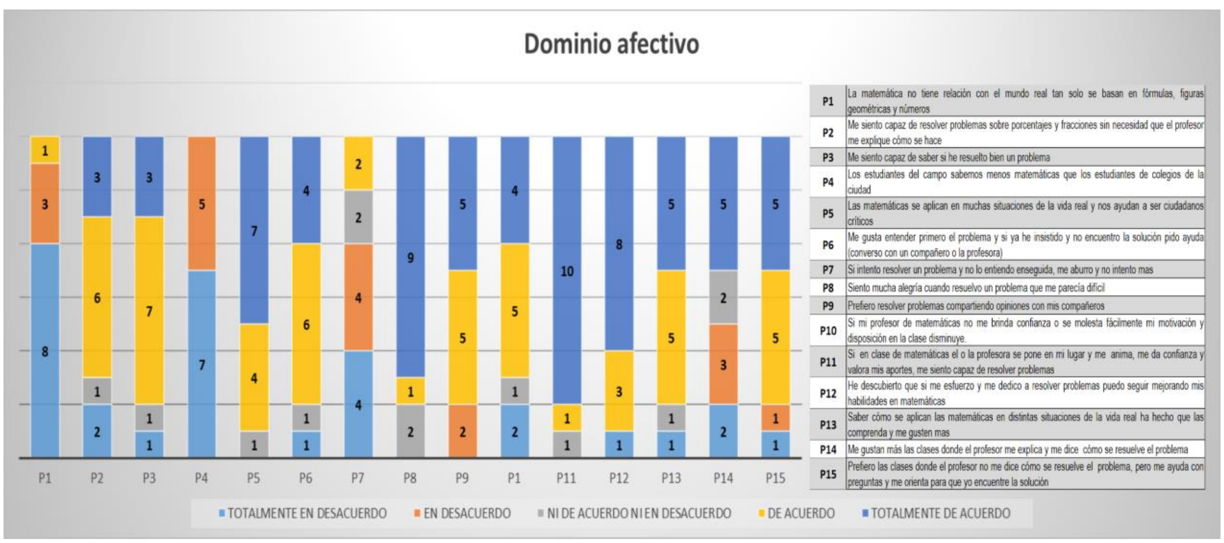


Figura 25. Dominio afectivo hacia las matemáticas y su aprendizaje. Fuente: elaboración propia.

En línea con Cai & Leikin (2020) quienes han investigado y sostienen que los campos cognitivo y afectivo están interrelacionados y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje. Los autores señalan la centralidad de las dimensiones tanto cognitiva como socioemocional en las competencias necesarias para el siglo XXI. Al mismo tiempo, destacaron las habilidades socioemocionales generalmente consideradas como componentes del desarrollo afectivo y social.

Siguiendo con el instrumento sobre Dominio Afectivo, otra fuente que aportó para el análisis basado en triangulación de fuentes y técnicas la constituye las respuestas a la pregunta abierta que contenía el cuestionario: "*Escribe la característica más importante para que una clase de matemáticas te guste muchísimo teniendo en cuenta lo que hace el profesor, el estudiante, como debe ser el problema o tarea de aprendizaje y la aplicación o no al mundo real".* Para este caso se resalta la calidad de la interacción a través de la importancia de las opiniones de los estudiantes: una clase ideal para el estudiante debe ser divertida, debe darse bajo una relación empática y resaltan la claridad en la explicación. Al mismo tiempo destacan, como positivo usar preguntas orientadoras sin decir la respuesta, cabe aclarar que esta apreciación la comparten más los estudiantes de los grados inferiores, los estudiantes de grado once hacen especial énfasis en que el profesor debe explicar de forma clara (Ver Figura 26).

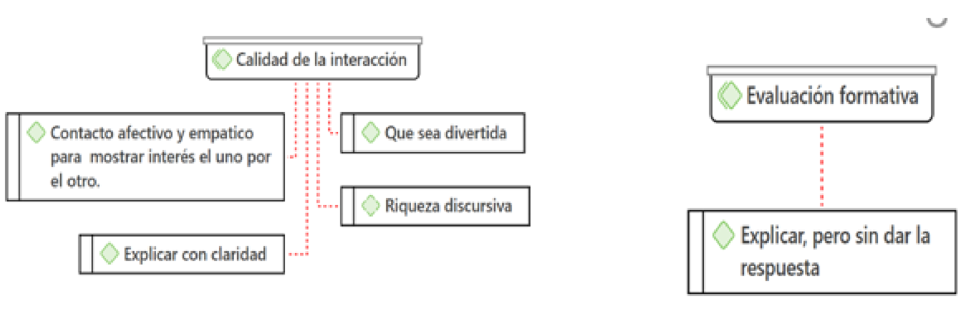


Figura 26. Características de una clase ideal. Fuente. Elaboración propia.

Por otra parte, resaltan las características del profesor en una clase ideal (ver Figura 27) se pone en relieve la inteligencia emocional del profesor, en cuanto a su paciencia, en el manejo de las emociones frente al estudiante, es lo que se infiere cuándo los estudiantes con una alta frecuencia expresan que "el profesor no regañe”, “no grite” y “que tenga paciencia”. Se puede apreciar de los comentarios, que las actitudes negativas del profesor les ocasiona ansiedad, y les causa fuertes emociones negativas y puede dificultar el rendimiento cognitivo (Nor et al., 2016). Además, los niños valoran la motivación por parte del profesor en línea con Schukajlow et al. (2023).

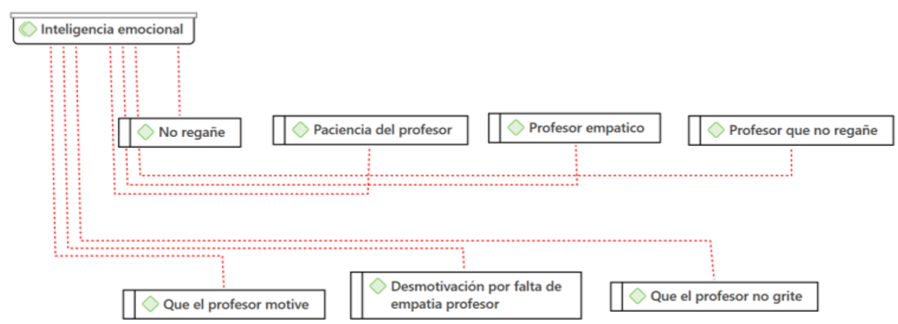


Figura 27. Según los estudiantes que debe hacer y que no debe hacer el profesor. Fuente. Elaboración propia.

Se observa cómo los niños reclaman un trato respetuoso, empatía por parte del profesor. No en vano, en la última década, el interés en la investigación de las dimensiones afectivas del aprendizaje matemático y las conexiones entre los resultados del aprendizaje cognitivo y afectivo de los estudiantes ha aumentado rápidamente en el campo de la educación matemática (Hannula et al.,2019; Schukajlow et al.,2017; Zhang et al.,2023). Todo lo anterior se integra con el hecho que la Inteligencia Emocional se puede considerar como un factor que se puede aprender y enseñar como un indicador que es capaz de preservar y mejorar las habilidades de resolución de problemas (Abdullah et al.,2022).

Los ciclos de experimentos de diseño anteriores mostraron que los estudiantes no podían seguir la trayectoria de aprendizaje TRU sin el apoyo discursivo y de vocabulario para explicar los significados, y este vocabulario fue posible desde el andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje al ofrecerles un clima positivo de aula y apoyo cognitivo. Esta relación empática, resultó ser una condición necesaria para mejorar las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes, mediante la calidad de la interacción (Quabeck et al., 2023). Así las cosas, los aportes de los estudiantes dan cuenta de la necesidad de incluir la categoría clima socioemocional de aula. Esta se caracteriza por el apoyo cognitivo, afectivo y emocional; siendo este último, el que brinda el andamiaje necesario.

Los niños expresan ideas como: el profesor debe tratar con respeto, que tenga buena actitud y que además motive. Cuestiones relacionadas con los diferentes factores de la Inteligencia Emocional, que, a propósito, se observó que los estudiantes presentaron la media más alta en Regulación emocional (Media = 31,92 de una puntuación máxima 40), (Desv. típ. = 6,667), seguida de la percepción emocional (Media = 26,67 de una puntuación máxima 37), (Desv. típ. = 7,475) y de la comprensión emocional (Media = 29,75 de una puntuación máxima 40), (Desv. típ. = 6,717). Teniendo en cuenta los baremos propuestos por el TMMS-24 se puede afirmar que los estudiantes tienen unos niveles adecuados de Regulación emocional (ver tabla 24).

Tabla 24. Estadísticos IE medida con el TMMS-24.

Estadísticos descriptivos de la muestra	N Válidos	Media	Desv. típ.	Mínimo	Máximo
Inteligencia Emocional Percepción	12	26,67	7,475	16	37
Inteligencia Emocional Comprensión	12	29,75	6,717	17	40
Inteligencia Emocional Regulación	12	31,92	6,667	18	40
Inteligencia Emocional Total	12	88,33	14,871	59	112

Fuente. Elaboración propia.

Asimismo, la mayoría de los estudiantes tiene una adecuada comprensión, puntuada con un 67%, seguido de un 58% con una adecuada regulación de sus emociones (ver tabla 25). Resultado que reafirma unas conjeturas realizadas acerca de elementos que los caracterizan, tanto así que una de las fortalezas que se relaciona fue la felicidad que cada niño expresa. Lo que se hizo en el experimento fue aprovechar estas fortalezas y potenciarlas. A través, de un trato empático y con respeto se puede dar cuenta que estas acciones tienen efectos positivos en el aprendizaje de las matemáticas y se consolidan como aspectos importantes para brindar Oportunidades de Aprendizaje de Calidad.

Tabla 25. Test de inteligencia Emocional TMMS-24 Salovey & Meyer (1995) aplicado a 12 estudiantes de un contexto rural en condiciones de riesgo académico.

Inteligencia Emocional	**Atención**	**Comprensión**	**Regulación**
Poca	33%	17%	8%
Adecuada	42%	67%	58%
Demasiada	25%	17%	33%

Fuente. Elaboración propia.

También, los estudiantes manifestaban la importancia del aprendizaje y de las diferentes maneras de acceder a este, es por ello que el movimiento por los Ambientes de Aprendizaje incluye el entorno global. En línea con Rubel & Nicol (2020), quienes consideran que, si bien un enfoque en lo local puede ser generativo, advierten que un énfasis en lo local podría perder oportunidades para investigar y aprovechar la riqueza de las matemáticas que subyacen en distintas actividades sociales, económicas y culturales. Se evidenció la riqueza que brindan algunas prácticas comerciales para la comprensión del vocabulario y para la formulación de tareas no rutinarias con las características descritas por Ni et al. (2018). Para el caso de los porcentajes, las tareas surgen de los Ambientes Aprendizaje reales.

A partir de las ideas Ni et al. (2018) se diseñó un cuestionario para evaluar las tareas y los problemas que surgían del tránsito por los distintos Ambientes de Aprendizaje. Tanto las tareas como lo problemas obtuvieron una valoración alta, por ejemplo: "el problema incorpora matemáticas importantes y útiles" o, "los estudiantes pueden abordar el problema de múltiples maneras utilizando diferentes heurísticas" estas afirmaciones tuvieron una calificación por ambos evaluadores de cinco, de hecho las 10 preguntas obtuvieron valoraciones entre 4 y 5. Se infiere que, efectivamente los problemas eran consistente con lo planeado en el experimento de enseñanza, es decir de alta demanda cognitiva y no rutinarios (ver anexo

9). Se aplicó un instrumento a los estudiantes para valorar las actividades, en general estas tuvieron una alta aceptación. La que más les gustó fue la del Censo y la Universidad.

Se ha documentado, que la definición operativa sobre Oportunidad de Aprendizaje de Calidad considera las cinco dimensiones del Marco TRU. Por lo cual fue necesario aplicar una de las rúbricas que ofrece este marco para evaluación sumaria (Anexo 7), esta rúbrica admite valores de 1 a 3 donde el 3 es la máxima valoración. La valoración más baja fue de 2,5 y la más alta de 2,8, estas valoraciones corresponden al promedio de las notas asignadas por cada uno de los tres profesores evaluadores. Se resalta que la dimensión Disponibilidad Dominio e Identidad la menor calificada con 2,5 y todas las demás dimensiones obtuvieron valoraciones de 2,7 a 2,8.

Mediante la triangulación de esta información se concluyó: que los niños reciben en sus escuelas una instrucción tradicional enmarcada en el Paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2000) cuya referencia es la matemática pura y la semirrealidad. De manera que, no reciben una instrucción diferenciada de acuerdo a sus necesidades, lo que generó en ellos creencias y emociones negativas hacia las matemáticas y su aprendizaje. Adicionalmente, se observó una necesidad de investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje de los porcentajes, así como una gran disparidad entre los enfoques sugeridos. Y, con base en los distintos estudios se percibe que los estudiantes tienen dificultades para interpretar y aplicar conceptos porcentuales en diferentes contextos es el énfasis en los procedimientos y la memoria, en lugar de una comprensión profunda (Gould et al.,2021).

Es necesario resaltar, que la prueba de Pholer & Prediger (2015), así como la de Mula & Hodnik (2020) se enriquecieron al promover en los niños que aportaran más de una solución a los problemas propuestos. Inicialmente resultaba tedioso, pero al poco tiempo, ellos mismos de manera autónoma proponían diferentes soluciones (este comportamiento se observó en la mayoría de los niños que asistieron a todas las sesiones y que avanzaron a un nivel más alto).

En síntesis, es preciso aclarar que en esta experiencia no todos los estudiantes alcanzaron los mismos niveles, y los que sí lo lograron no lo hicieron al mismo ritmo ni con la misma profundidad. Pero lo que sí se logró en el experimento es que ningún niño se quedara atrás. Es decir, todos quedaron satisfechos con sus logros, en la entrevista así lo manifestaron. Así, por ejemplo, el caso de Ros, que tenía 19 años y cursaba undécimo grado, se evidenció que alcanzó una comprensión y unos recursos con los cuales logró dar solución a diferentes problemas. E incluso sobrepasó algunas de sus limitaciones personales como el miedo a comunicar ideas matemáticas frente a todos en el tablero. Esto fue posible gracias a las Prácticas de Enseñanza Efectiva y Afectiva, es decir, se brindó apoyo cognitivo apoyo afectivo y emocional.

De otra parte, la Trayectoria de Andamiaje basado en el movimiento por los diferentes Ambientes de Aprendizaje que surgió como resultado del experimento de diseño y que se refinó en el tercer ciclo, en conjunto con el Andamiaje basado en la barra porcentual (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) apoyó el progreso de cada estudiante en la trayectoria de Niveles de un para un Robusto entendimiento de los porcentajes. Y, además brindó andamiaje para el progreso en la Trayectoria de aprendizaje conceptual hacia porcentajes y para la Trayectoria de aprendizaje léxico de diferentes vocabularios relacionados con los porcentajes en distintos problemas de la vida real y de las matemáticas, sin necesidad de seguir la trayectoria de Pholer & Prediger (2015).

A manera de conclusión, en el presente estudio se evidenció una relación de complementariedad entre los Marcos de la Educación Matemática (EMC) y el Marco TRU. Puesto que, la EMC propone unos Ambientes de Aprendizaje por los que el estudiante debe moverse para lograr una alfabetización matemática (conocer: reflexivo, tecnológico y matemático) lo que es consistente con una comprensión robusta desde el Marco TRU. Pero, los Ambientes de Aprendizaje carecen de unos criterios de calidad que se los aporta el marco TRU. Además, los campos cognitivo y afectivo están interrelacionados y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje (Cai & Leikin, 2020).

Las cuatro dimensiones que forman la definición de una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) generadas en esta investigación son: Prácticas Enseñanza Efectivas y Afectivas, la tarea matemática no rutinaria de alta demanda cognitiva, el estudiante (habilidades cognitivas, Metacognitivas, afectivas y socioemocionales) y el Entorno Rural y Global. Las cuales, se dinamizan para generar los distintos Ambientes de Aprendizaje.

La interacción de los aspectos de las dimensiones que componen la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad, se configura como un proceso multidimensional que produce cambios progresivos en el pensamiento matemático del estudiante (comprensión conceptual, procesal y resolución de problemas); cambios positivos en el campo afectivo (creencias, actitudes, emociones) y en las habilidades socioemocionales de cada estudiante hacia el aprendizaje de las matemáticas al resolver tareas de alta demanda cognitiva; orientados por unas prácticas de enseñanza efectiva (Contenido, Demanda cognitiva, Acceso equitativo al contenido, Disponibilidad, dominio e identidad y Evaluación Formativa; Riqueza matemática, discursiva y espacio para hablar y afectiva permeado por un Clima socioemocional positivo del aula y el movimiento por los distintos Ambientes de Aprendizaje.

En este orden de ideas, las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad se maximizan a través de la interacción empática entre el profesor (enseñanza), entorno, el estudiante y las tareas matemáticas no rutinarias, siempre que se ponen en movimiento los aspectos relacionados con las dimensiones: clima emocional en el aula, las dimensiones de un aula poderosa (Marco TRU), Movimiento por los distintos Ambiente de Aprendizaje propuestos por la Educación Matemática Crítica (EMC), las Prácticas de enseñanza inclusiva (Prediger & Buro, 2021) y la interacción en el aula: espacio para hablar, riqueza matemática y riqueza discursiva (Quabeck et al., 2023).

Para el caso específico de los porcentajes, el estudiante experimenta una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad, al alcanzar la Trayectoria para un entendimiento robusto a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje de la Educación Matemática Crítica, esta es consistente con el Andamiaje basado en la barra porcentual. De modo que contribuye a mejorar el autoconcepto académico, desarrolla habilidades como la perseverancia, el compromiso, disposición y autonomía en la resolución de problemas no rutinarios.

Una Oportunidad de Aprendizaje es de calidad siempre que le brinde al estudiante la posibilidad de que a medida que avanza en niveles de desarrollo del pensamiento cognitivo, también lo haga a nivel metacognitivo, afectivo y emocional frente al aprendizaje de las matemáticas. Para lo cual las tareas no rutinarias posibilitan entrelazar la comprensión conceptual actual con los conocimientos previos, esto tributa a que cada estudiante logre su nivel personal óptimo.

De lo anterior es preciso enfatizar que: el lenguaje inherente a los porcentajes surge en los estudiantes de manera natural mediante la experiencia personal a través de la inmersión, como resultado del Movimiento por los distintos ambientes de Aprendizaje. Por tanto, el progreso de los estudiantes para avanzar en los niveles de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje se da en forma de espiral y para que puedan lograrlo, la enseñanza tradicional no puede ser la única práctica de enseñanza que se les ofrezca a los estudiantes rurales, esta práctica está muy distante de ofrecer Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para estudiante.

La valoración de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje se abordó analizando la comprensión del progreso en los niveles asociado a la trayectoria, además, se aplicaron tres instrumentos y se hizo una valoración a nivel cognitivo, el nivel afectivo y socioemocional se observó por vía compromiso en la constancia y perseverancia en la resolución de problemas no rutinarios. Es decir, bajo esta descripción se puede decir que se comprende una Oportunidad de Aprendizaje de Calidad para cada niño y que se maximiza en la medida que el estudiante se motive y genere compromiso y por tanto autonomía.

Se desarrolló la una metodología para diseñar y maximizar la calidad de Oportunidades de Aprendizaje sobre porcentajes para cada Estudiante Rural en condiciones de Riesgo Académico (MOACCER) con el propósito de brindar a cada niño un acceso equitativo, iniciando por el Ambiente de Aprendizaje 6 (Situaciones de la vida real y escenario de investigación). Esta fue resultado de la Teoría de Instrucción Local Conjeturada, la cual fue revisada y refinada bajo la lente del progreso y evolución del pensamiento de los estudiantes en los niveles asociados a la Trayectoria en torno al aprendizaje robusto de los porcentajes a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje de la Educación Matemática Crítica. Finalmente se concluye que, a medida que los estudiantes progresaban en los niveles cognitivos lo hacían igualmente en el campo afectivo.

LIMITACIONES Y RECOMENDACIONES

- Una limitación del presente estudio es que en sus inicios 2020- 2021 por causa del COVID-19 se tomó la decisión de trabajar con grupo pequeño y fuera del aula, lo positivo es que se profundizó en los análisis. Sin embargo, se deja abierta la investigación para aulas convencionales, y de esta manera dar cuenta de la funcionalidad de la definición operativa de Oportunidad de Aprendizaje de Calidad (OAC) y de la Metodología sobre Oportunidades de Aprendizaje de Calidad para Cada Estudiante Rural en condiciones de Riesgo Académico (MOACCER) y su posible mejoramiento.
- Adelantar estudios del conocimiento profesional del profesor de matemáticas en relación con la dimensión socio emocional y del Dominio Afectivo para ofrecer Oportunidades de Aprendizaje de Calidad.
- Queda abierta la investigación para para indagar si la Teoría de Instrucción Local Conjeturada aquí propuesta es posible en todo el contenido de la Matemática Escolar.
- Se requiere mayor investigación empírica que verifique la conjetura acerca de que la ruta óptima para maximizar las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad es iniciando el movimiento desde el Ambiente de Aprendizaje seis dado que este permea los demás, como en el caso de los porcentajes, y es clave precisar que queda abierta la investigación para saber si este movimiento es posible en todo el contenido de la matemática escolar. Y, además, el tránsito del Ambiente de Aprendizaje seis hacia los demás es el ambiente generador y maximizador de las Oportunidades de Aprendizaje de Calidad.

BIBLIOGRAFÍA

Adler, J. (2021). Levering change: the contributory role of a mathematics teaching framework. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(6), 1207–1220. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01273-y

Alvis-Puentes, J. F., Aldana-Bermúdez, E., & Caicedo-Zambrano, S. J. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *10*(1), 135–147. https://doi.org/10.19053/20278306.v10.n1.2019.10018

Archer, E. (2019). Design Research: Developing effective feedback interventions for school-based monitoring. In A. F. and S. K. Sumaya Laher (Ed.), *Transforming Research Methods in the Social Sciences Book* (Wits Unive). https://www.jstor.org/stable/10.18772/22019032750.25%0AJSTOR

Avery, L. M. (2013). Rural Science Education: Valuing Local Knowledge. *Theory into Practice*, *52*(1), 28–35. https://doi.org/10.1080/07351690.2013.743769

Bakker, A., & Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods*, 429-466.

Balda, P. (2018). *Una epistemología de usos en torno a lo proporcional: un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar* (Issue February). Universidad Santo Tomas.

Bazán-Ramírez, A., Hernández, E., Castellanos, D., & Backhoff, E. (2021). Opportunities to learn, contexts and achievement of Mexican students in Mathematics. *Profesorado*, *25*(2), 327–350. https://doi.org/10.30827/profesorado.vmarco 25i2.9271

Burkhardt, H., & Pead, D. (2020). *30 Design Strategies and Tactics from 40 Years of Investigation*. *4*, 1–10.

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. Educational Studies in Mathematics, 105, 287-301

Cai, J., Hwang, S., Melville, M., & Robison, V. (2023). Theory for teaching and teaching for theory: Artifacts as tangible entities for storing and improving professional knowledge for teaching. In Theorizing teaching: Current status and open issues (pp. 225-251). Cham: Springer International Publishing.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. L., & Hiebert, J. (2019a). Choosing and justifying robust methods for educational research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(4), 342–348. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.4.0342

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. L., & Hiebert, J. (2019b). Posing significant research questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(2), 114–120. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0114

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. L., Hiebert, J., & Bakker, A. (2020). Maximizing the quality of learning opportunities for every student. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(1), 12–25. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.2019.0005

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Hiebert, J., & Cai, J. (2019). *Linked references are available on JSTOR for this article : Research Pathways That Connect Research and Practice*. *50*(1), 2–10.

Camargo Uribe, L. (2022). Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática.

Carranza, P. F., Sgreccia, N., Quijano, M., Goin, M. M. J., & Chrestia, M. (2017). Ambientes de aprendizaje y proyectos escolares con la comunidad.

Chen, C. S., & Lin, J. W. (2019). A Practical Action Research Study of the Impact of Maker-Centered STEM-PjBL on a Rural Middle School in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(134). https://doi.org/10.1007/s10763-019-09961-8

Chiu, M. S., Lin, F. L., Yang, K. L., Hasumi, T., Wu, T. J., & Lin, P. S. (2022). The interplay of affect and cognition in the mathematics grounding activity: Forming an affective teaching model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(12), em2187.

Clements, D.H., Sarama, J., Baroody, A.J. et al.(2020). Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. ZDM Mathematics Education 52, 637–648. https://doi-org.ezproxy.uan.edu.co/10.1007/s11858-019-01122-z

Clements, DH y Sarama, J. (2014). *Learning And Teaching Early Math*. Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Confrey, J., & Maloney, A. (2015). A design research study of a curriculum and diagnostic assessment system for a learning trajectory on equipartitioning. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(6), 919–932. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0699-y

De Araujo, Z., & Smith, E. (2022). Examining English language learners' learning needs through the lens of algebra curriculum materials. Educational Studies in Mathematics, 109(1), 65-87.

Douglas H. Clements & Julie Sarama (2004) Learning Trajectories in Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning, 6:2, 81-89, DOI: 10.1207/ s15327833mtl0602_1

Dröse, J., & Prediger, S. (2020). Enhancing Fifth Graders' Awareness of Syntactic Features in Mathematical Word Problems: A Design Research Study on the Variation Principle. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *41*(2), 391–422. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00153-z

Ernest, P. (2010). Reflections on Theories of Learning. In B. Sriraman, L. English, Editors, & Theories (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 35–47). https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2

Fernández Berrocal, P., & Extremera Pacheco, N. (2005). La Inteligencia Emocional y la educación de las emociones desde el Modelo de Mayer y Salovey. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado*.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N., & Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático.

Fuentes, R. D., Bustingorry, S. O., & Navarro, S. M. (2016). Factores e interacciones del proceso de enseñanza-aprendizaje en contextos rurales de la Araucanía, Chile. Estudios pedagógicos, 42(3), 111-128

Gallardo, K. (2009). La Nueva Taxonomía de Marzano y Kendall: una alternativa para enriquecer el trabajo educativo desde su planeación. Manual nueva taxonompia Marzano y Kendall, 3-43.

Gao, X., Li, P., Shen, J., & Sun, H. (2020). Reviewing assessment of student learning in interdisciplinary STEM education. *International Journal of STEM Education*, *7*(1). https://doi.org/10.1186/s40594-020-00225-4

García, M., Espinosa, J., Jiménez, F., & Parra, J. D. (2013). Separados y desiguales. Educación y clases sociales en Colombia. *Colección DeJusticia. Bogotá, Colombia: Ediciones Antropos*.

Geiger, V. (2019). Using mathematics as evidence supporting critical reasoning and enquiry in primary science classrooms. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(6), 929–940. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01068-2

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., & Wilhelmi, M. R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. *Cerme*, *8*, 1–15.

González, T. B., & Hernández Fernández, J. (2016). Equidad Educativa: Avances en la definición de su concepto. In *Recuperado (01/09/2016) de http://www. comie. org. mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_10/ponencias/1852-F. pdf*.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, 33-57.

Gresalfi, M. S. (2015). Designing to support critical engagement with statistics. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(6), 933–946. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0690-7

Hannula, M. S. (2006). "Motivation in Mathematics: Goals Reflected in Emotions." Educational Studies in Mathematics 63: 165-178.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161.

Hannula, M. S. (2015). Emotions in problem solving. In *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 269-288). Springer International Publishing.

Hannula, M. S. (2019). Young learners' mathematics-related affect: A commentary on concepts, methods, and developmental trends. *Educational studies in mathematics*, *100*(3), 309-316.

Hannula, M., Evans, J., Philippou, G., & Zan, R. (2004). Affect in Mathematics Education--Exploring Theoretical Frameworks. Research Forum. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Harel, G., & Koichu, B. (2010). An operational definition of learning. The Journal of Mathematical Behavior, 29(3), 115-124.

Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, 54(1), 9–35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.DC

Höveler, K. (2019). Inclusive Mathematics Education. *Inclusive Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0

ICFES. (2019). Informe nacional de resultados para Colombia-PISA 2018. In *Módulos de competencias genéricas* (p. 75). https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1529295/Informe nacional de resultados PISA 2018.pdf

ICME 14-TSG 38. (2020). *Task design and analysis*.

ICME 14-TSG 4. (2020). *Mathematics education for students with special needs*.

ICME 14-TSG 51. (2020). *Mathematics Education for Ethnic Minorities*.

ICME 14-TSG53. (2020). *Equity in mathematics education*.

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(4), 646–682. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.4.0646

Jackson, K., Gibbons, L., & Sharpe, C. J. (2017). Teachers' views of students' mathematical capabilities: Challenges and possibilities for ambitious reform. Teachers college record, 119(7), 1-43.

Jacques, L. A. (2017). What does project-based learning (PBL) look like in the mathematics classroom? *American Journal of Educational Research*, *5*(4), 428–433. https://doi.org/10.12691/education-5-4-11

Jorgensen, R. (2018). Building the mathematical capital of marginalised learners of mathematics. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(6), 987–998. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0966-9

Kaiser, G. (2019). Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. In *Pleasures, Power, and Pitfalls of Writing up Mathematics Education Research*.

Kilpatrick, J. (2018). Where are we? The third take: review of Compendium for Research in Mathematics Education. *Zdm*, *50*(4), 757–763. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0958-9

Lestiana, H. T. (2021). What are The Difficulties in Learning Percentages? An Overview of Prospective Mathematics Teachers' Strategies in Solving Percentage Problems. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(3), 260-273.

Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., & Duschl, R. A. (2019). Design and Design Thinking in STEM Education. *Journal for STEM Education Research*, *2*(2), 93–104. https://doi.org/10.1007/s41979-019-00020-z

Li, Y., Wang, K., Xiao, Y., & Froyd, J. E. (2020). Research and trends in STEM education: a systematic review of journal publications. *International Journal of STEM Education*, *7*(1). https://doi.org/10.1186/s40594-020-00207-6

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. Compendium for research in mathematics education, 74-101.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019a). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(6), 869–884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019b). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(6), 869–884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Martínez-Maldonado, P., Armengol Asparó, C., & Muñoz Moreno, J. L. (2019). Interacciones en el aula desde prácticas pedagógicas efectivas. Revista de estudios y experiencias en educación, 18(36), 55-74.

Martínez-Restrepo, S., Pertuz, M. C., & Ramírez, J. M. (2016). La situación de la educación rural en Colombia, los desafíos del posconflicto y la transformación del campo. Recuperado de https://bit. ly/2AU0WP2.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 575-596.

MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares*. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_recurso_6.pdf

MEN. (2006). ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MÁTEMÁTICAS. In *Magisterio* (pp. 46–48). https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje DBA versión 2*. http://iedar.edu.co/DBA/DBA MATEMATICAS 2 EDISION.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Proyectos Pedagógicos Productivos. Una estrategia para el aprendizaje escolar y el proyecto de vida* (p. 45).

Montes Vera, J. I., & Torres Maya, H. F. (2021). La habilidad para la relación empática en la labor comunicativa del entrenador con los atletas. Revista Conrado, 17(80), 7-20

Morris, J., Slater, E., Fitzgerald, M. T., Lummis, G. W., & van Etten, E. (2021). Using Local Rural Knowledge to Enhance STEM Learning for Gifted and Talented Students in Australia. *Research in Science Education*, *51*, 61–79. https://doi.org/10.1007/s11165-019-9823-2

Mula, M., & Hodnik, T. (2020). The PGBE Model for Building Students' Mathematical Knowledge about Percentages. European Journal of Educational Research, 9(1), 257-276.

Murphy, S. (2019). School location and socioeconomic status and patterns of participation and achievement in senior secondary mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(3), 219–235. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0251-9

Murphy, S. (2021). Mathematics success against the odds: the case of a low socioeconomic status, rural Australian school with sustained high mathematics performance. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00361-8

National Council of Supervisors of Mathematics & National Council of Teachers of Mathematics. (2020). *Moving forward: Mathematics learning in the era of COVID-19.* NCTM. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/NCTM_NCSM_Moving_Forward.pdf

Neugebauer, P., & Prediger, S. (2023). Quality of Teaching Practices for All Students: Multilevel Analysis of Language-Responsive Teaching for Robust Understanding. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-24.

Ni, Y., Zhou, D. H. R., Cai, J., Li, X., Li, Q., & Sun, I. X. (2018). Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive demand. *The Journal of Educational Research*, *111*(6), 704-719.

Nicol, C. (2018). Connecting Mathematics, Community, Culture and Place: Promise, Possibilities, and Problems. In G. Kaiser (Ed.), *In Invited Lectures of the XIII International Congress of Mathematical Education* (pp. 423–440). https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_32

Nor, N. A. K. M., Ismail, Z., & Yusof, Y. M. (2016). The relationship between emotional intelligence and mathematical competency among secondary school students. *Journal on Mathematics Education*, *7*(2), 91-100.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la Educación Básica* (Doctoral dissertation, Universidad del Valle).

OCDE. (2021). *Recuperación educativa eficaz y equitativa Agradecimientos*.

OECD. (2021). *Pisa 2021 Mathematics Framework (Second Draft)*. *March 2017*, 1–47. https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA 2021 Mathematics Framework Draft.pdf

Pastén, A., Tobar, G., & Madrid, M. (2017). *Construcción de identidad de la niñez en contextos de ruralidad en la comuna de de Concepción, Chile*. https://doi.org/10.11600/1692715x.1520722112016

Penteado, M. G., & Skovsmose, O. (2022). Landscapes of Investigation: Contributions to Critical Mathematics Education (p. 360). Open Book Publishers.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, *18*(1), 37-72.

Pöhler, B., & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories-A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1697-1722

Prediger, S. (2019). Theorizing in design research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de Investigacion En Educacion Matematica*, *15*, 5–27. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.265

Prediger, S., & Buró, R. (2021). Fifty ways to work with students' diverse abilities? A video study on inclusive teaching practices in secondary mathematics classrooms. *International Journal of Inclusive Education*, *0*(0), 1–20. https://doi.org/10.1080/13603116.2021.1925361

Prediger, S., & Neugebauer, P. (2021). Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU. ZDM–Mathematics Education, 53(2), 289-304.

Prediger, S., & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro-and macro-scaffolding: an empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. *ZDM*, *47*, 1179-1194.

Prediger, S., Dröse, J., Stahnke, R., & Ademmer, C. (2022). Teacher expertise for fostering at-risk students' understanding of basic concepts: conceptual model and evidence for growth. Journal of Mathematics Teacher Education, 1-28.

Prediger, S., Erath, K., Weinert, H., & Quabeck, K. (2022). Only for Multilingual Students at Risk? Cluster-Randomized Trial on Language-Responsive Mathematics Instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 53(4), 255-276

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(6), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Quabeck, K., Erath, K., & Prediger, S. (2023). Measuring interaction quality in mathematics instruction: How differences in operationalizations matter methodologically. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101054.

Quesada, A., & León, A. M. (2020). Métodos teóricos de investigación: análisis-síntesis, inducción-deducción, abstracto – concreto e histórico- lógico. *Monografías*, *December*, 1–23.

Quigley, C. F., Herro, D., Shekell, C., Cian, H., & Jacques, L. (2020). Connected Learning in STEAM Classrooms: Opportunities for Engaging Youth in Science and Math Classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(8), 1441–1463. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10034-z

Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., & Pochulu, M. D. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Universidad Nacional de General Sarmiento.

Romero, P. E., & Davila, P. J. C. (2000). Operativización de variables en la investigación psicológica. Psicothema, 12(Su2), 157-162.

Rubel, L. H., & Nicol, C. (2020). The power of place: spatializing critical mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(3), 173–194. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1709938

Scheerens, J. (2023). Theory on teaching effectiveness at meta, general and partial level. In Theorizing teaching: Current status and open issues (pp. 97-130). Cham: Springer International Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1994). *MATHEMATICAL THINKING AND PROBLEM SOLVING*.

Schoenfeld, A. H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404–412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM - Mathematics Education*, *52*(6), 1163–1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Schoenfeld, A. H., Baldinger, E., Disston, J., Donovan, S., Dosalmas, A., Fink, H., Foster, D., Haumersen, R., Lewis, C., Louie, N., Mertens, A., Narasimhan, L., Ortega, C., Ruiz, S., Sayavedra, A., Sola, T., Tran, K., Weltman, A., & Wilson, D. (2018). Learning With and From TRU: Teacher Educators and The Teaching for Robust Understanding Framework. *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, *4*, 271–304.

Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. ZDM–Mathematics Education, 1-19.

Simón, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for research in mathematics education, 26(2), 114-145.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*.

Skovsmose, O. (2000). Scenarios de investigación1. *Ema*, *6*, 3–26. http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Skovsmose, O. (2005). MEANING IN MATHEMATICS EDUCATION. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.), *MEANING IN MATHEMATICS EDUCATION* (A.J. Bisho, Vol. 37, pp. 83–99).

Skovsmose, O. (2011). *An Invitation to Critical Mathematics Education*.

Skovsmose, O. (2016). Critical Mathematics Education: Concerns, Notions, and Future. In P. Ernest, O. Skovsmose, J. P. van Bendegem, M. Bicudo, R. Miarka, L. Kvasz, & R. Moeller (Eds.), *The Philosophy of Mathematics Education ICME-13 Topical Surveys Series* (Gabriele K, Vol. 44, Issue

8, pp. 9–13). https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201

Skovsmose, O., & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education* (pp. 207–226). https://doi.org/10.1007/b120597

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la Educación Matemática con la democracia. *Educación Matemática Crítica. Una Visión Sociopolítica Del Aprendizaje y La Enseñanza de Las Matemáticas.*, *1994*, 1–24. http://funes.uniandes.edu.co/2001/1/Skovsmose2012Rompimiento.pdf

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(6), 905–917. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0651-6

Tabitha Gould, Lucy Rycroft-Smith & Fran Watson, 2021 what does research suggest about the teaching and learning of percentage? Cambridge Mathematics.

Tesfamicael, S. A., & Ayalew, Y. (2021). Mathematics education in Ethiopia in the era of COVID-19: Boosting equitable access for all learners via opportunity to learning. Contemporary Mathematics and Science Education, 2(1), 1-9

The New Teacher Project (TNTP). (2018). The opportunity myth: What students can show us about how school is letting them down—and how to fix it. https://tntp.org/assets/documents/TNTP_The-Opportunity-Myth_Web.pdf

UNESCO. (2017). *La Nueva Agenda Educativa Para América Latina*. http://www.fundacionsantillana.com/PDFs/860697.PDF

Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). *Educación matemática crítica Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (Issue April).

Walkowiak, T. A., Pinter, H. H., & Berry, R. Q. (2017). Opportunity to Learn' in School Mathematics. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *8*(1), 7–18.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 41–65. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1

Wilhelm, A. G., Munter, C., & Jackson, K. (2017). Examining relations between teachers' explanations of sources of students' difficulty in mathematics and students' opportunities to learn. The Elementary School Journal, 117(3), 345-370.

Wilson, K. (2021). Exploring the Challenges and Enablers of Implementing a STEM Project-Based Learning Programme in a Diverse Junior Secondary Context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(5), 881–897. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10103-8

Wiseman, D., Lunney, L., Beatty, R., Jao, L., & Carter, E. (2020). Whole-some artifacts: (STEM) Teaching and Learning Emerging from and Contributing to Community. In *Paper Knowledge . Toward a Media History of Documents* (Vol. 20, Issue 2).

Wright, P. (2021). Transforming mathematics classroom practice through participatory action research.

Journal of Mathematics Teacher Education, *24*(2), 155–177. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09452-1

Wright, V. (2014). Towards a hypothetical learning trajectory for rational number. *Mathematics education research journal*, *26*, 635-657.

Yang, K. L., Hsu, H. Y., & Cheng, Y. H. (2022). Opportunities and challenges of mathematics learning in Taiwan: a critical review. ZDM–Mathematics Education, 1-12.

Yang, K., & Strietholt, R. (2018). Does schooling actually perpetuate educational inequality in mathematics performance? A validity question on the measures of opportunity to learn in PISA. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(4), 643–658. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0935-3

Yaro, K., Amoah, E., & Wagner, D. (2020). Situated Perspectives on Creating Mathematics Tasks for Peace and Sustainability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(2), 218–229. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00083-w

Zhang, Y., Yang, X., Sun, X., & Kaiser, G. (2023). The reciprocal relationship among Chinese senior secondary students' intrinsic and extrinsic motivation and cognitive engagement in learning mathematics: a three-wave longitudinal study. ZDM–Mathematics Education, 1-14.

ANEXOS

Anexo1. Instrumento: caracterización de las tareas. Fuente: Ni et al. (2018)

Instrucciones:

A continuación encontrará algunas afirmaciones sobre características asociadas a las tareas que surgieron en el presente estudio. Lea atentamente cada frase e indique el grado de acuerdo o desacuerdo con respecto a las mismas. Marque con una "X" la respuesta que más se aproxime a sus preferencias.

Opciones de respuesta:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

	CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS DE LA TAREA	1	2	3	4	5
1	Requiere simplemente memorización o un procedimiento de rutina					
2	Relaciona el procedimiento con sus conceptos subyacentes.					
3	Se utilizan representaciones únicas o múltiples (por ejemplo, manipulación simbólica, visual, práctica)					
4	La tarea fomenta la aplicación de métodos de solución múltiple					

Nombre ____

Formación ____

Experiencia ____

Observación ____

Anexo 2. INSTRUMENTO SOBRE DOMINIO AFECTIVO

Instrucciones:

A continuación encontrará algunas afirmaciones sobre sus creencias, actitudes y emociones en la clase de matemáticas. Lea atentamente cada frase e indique el grado de acuerdo o desacuerdo con respecto a las mismas. Marque con una "X" la respuesta que más se aproxime a sus preferencias.

Opciones de respuesta:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

No.		1	2	3	4	5
1	La matemática no tiene relación con el mundo real tan solo se basan en fórmulas, figuras geométricas y números					
2	Me siento capaz de resolver problemas sobre porcentajes y fracciones sin necesidad que el profesor me explique cómo se hace					
3	Me siento capaz de saber si he resuelto bien un problema					
4	Los estudiantes del campo sabemos menos matemáticas que los estudiantes de colegios de la ciudad					
5	Las matemáticas se aplican en muchas situaciones de la vida real y nos ayudan a ser ciudadanos críticos					
6	Me gusta entender primero el problema y si ya he insistido y no encuentro la solución pido ayuda (converso con un compañero o la profesora)					
7	Si intento resolver un problema y no lo entiendo enseguida, me aburro y no intento mas					
8	Siento mucha alegría cuando resuelvo un problema que me parecía difícil					
9	Prefiero resolver problemas compartiendo opiniones con mis compañeros					
10	Si mi profesor de matemáticas no me brinda confianza o se molesta fácilmente mi motivación y disposición en la clase disminuye.					
11	Si en clase de matemáticas el o la profesora se pone en mi lugar y me anima, me da confianza y valora mis aportes, me siento capaz de resolver problemas					
12	He descubierto que si me esfuerzo y me dedico a resolver problemas puedo seguir mejorando mis habilidades en matemáticas					
13	Saber cómo se aplican las matemáticas en distintas situaciones de la vida real ha hecho que las comprenda y me gusten mas					
14	Me gustan más las clases donde el profesor me explica y me dice cómo se resuelve el problema					
15	Prefiero las clases donde el profesor no me dice cómo se resuelve el problema, pero me ayuda con preguntas y me orienta para que yo encuentre la solución					

Fuente. Elaboración propia

Pregunta abierta. Escribe la característica más importante para que una clase de matemáticas te guste muchísimo teniendo en cuenta lo que hace el profesor, el estudiante, como debe ser el problema o tarea de aprendizaje y la aplicación o no al mundo real.

Anexo 4. INSTRUMENTO CARACTERIZACION DE LOS PROBLEMAS. Adaptado de Cai et al. (2023)

Instrucciones:

A continuación encontrará algunas afirmaciones sobre características asociadas a los problemas que surgieron en el presente estudio. Lea atentamente cada frase e indique el grado de acuerdo o desacuerdo con respecto a las mismas. Marque con una "X" la respuesta que más se aproxime a sus preferencias.

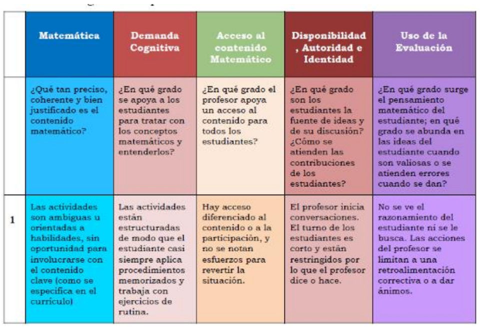
Opciones de respuesta:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

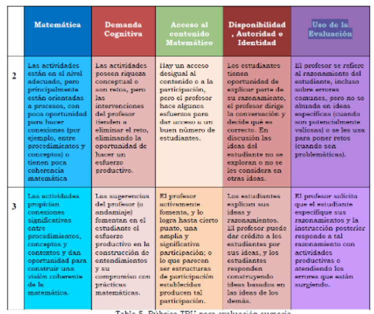
	Características	1	2	3	4	5
1	El problema incorpora matemáticas importantes y útiles					
2	Los estudiantes pueden abordar el problema de múltiples maneras utilizando diferentes heurísticas					
3	El problema permite tomar y defender diferentes decisiones o posiciones frente a su solución					
4	El problema fomenta la participación, discusión y argumentación de los estudiantes					
5	La resolución requiere un alto nivel de razonamiento					
6	El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes					
7	El problema se conecta con otras ideas matemáticas importantes					
8	El problema promueve el desarrollo de habilidades matemáticas					
9	El problema brinda la oportunidad de practicar habilidades importantes					
10	El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus alumnos están aprendiendo y dónde están experimentando dificultades					

Anexo 5 RUBRICAS PARA PROFESORES MARCO TRU

Rubrica de evaluación
Profesor _______________________ ________



	Matemática	Demanda Cognitiva	Acceso al contenido Matemático	Disponibilidad, Autoridad e Identidad	Uso de la Evaluación
	¿Qué tan preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	¿En qué grado se apoya a los estudiantes para tratar con los conceptos matemáticos y entenderlos?	¿En qué grado el profesor apoya un acceso al contenido para todos los estudiantes?	¿En qué grado son los estudiantes la fuente de ideas y de su discusión? ¿Cómo se atienden las contribuciones de los estudiantes?	¿En qué grado surge el pensamiento matemático del estudiante; en qué grado se abunda en las ideas del estudiante cuando son valiosas o se atienden errores cuando se dan?
1	Las actividades son ambiguas u orientadas a habilidades, sin oportunidad para involucrarse con el contenido clave (como se especifica en el currículo)	Las actividades están estructuradas de modo que el estudiante casi siempre aplica procedimientos memorizados y trabaja con ejercicios de rutina.	Hay acceso diferenciado al contenido o a la participación, y no se notan esfuerzos para revertir la situación.	El profesor inicia conversaciones. El turno de los estudiantes es corto y están restringidos por lo que el profesor dice o hace.	No se ve el razonamiento del estudiante ni se le busca. Las acciones del profesor se limitan a una retroalimentación correctiva o a dar ánimos.



	Matemática	Demanda Cognitiva	Acceso al contenido Matemático	Disponibilidad, Autoridad e Identidad	Uso de la Evaluación
2	Las actividades están en el nivel adecuado, pero principalmente están orientadas a procesos, con poca oportunidad para hacer conexiones (por ejemplo, entre procedimientos y conceptos) o tienen poca coherencia matemática	Las actividades poseen riqueza conceptual o son retos, pero las intervenciones del profesor tienden a eliminar el reto, eliminando la oportunidad de hacer un esfuerzo productivo.	Hay un acceso desigual al contenido o a la participación, pero el profesor hace algunos esfuerzos para dar acceso a un buen número de estudiantes.	Los estudiantes tienen oportunidad de explicar parte de su razonamiento, el profesor dirige la conversación y decide qué es correcto. En discusión las ideas del estudiante no se exploran o no se les considera en otras ideas.	El profesor se refiere al razonamiento del estudiante, incluso sobre errores comunes, pero no se abunda en ideas específicas (cuando son potencialmente valiosas) o se les usa para poner retos (cuando son problemáticas).
3	Las actividades propician conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos y dan oportunidad para construir una visión coherente de la matemática.	Las sugerencias del profesor (o andamiaje) fomentan en el estudiante el esfuerzo productivo en la construcción de entendimientos y su compromiso con prácticas matemáticas.	El profesor activamente fomenta, y lo logra hasta cierto punto, una amplia y significativa participación; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas producen tal participación.	Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El profesor puede dar crédito a los estudiantes por sus ideas, y los estudiantes responden construyendo ideas basados en las ideas de los demás.	El profesor solicita que el estudiante especifique sus razonamientos y la instrucción posterior responde a tal razonamiento con actividades productivas o atendiendo los errores que están surgiendo.

Tabla 5. Rúbrica TRU para evaluación sumaria.

Rúbrica TRU para evaluación sumaria y la guía de Observación de la Lección a Través de los Ojos del Estudiante se encuentra en la página web[55]

Algunas fotografías del trabajo hecho por los estudiantes entrevista a agricultores ver video[56].

[55] Página Marco TRU https://www.map.mathshell.org/trumath.php

[56] Evidencia entrevista a agricultor https://drive.google.com/file/d/1BIthmELbRjxVyVKld5WK0PMnc87j6gYP/view?usp=sharing

Anexo 7. Repuestas de docentes evaluadores.

Opciones de respuesta:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

	Características	1	2	3	4	5
1	El problema incorpora matemáticas importantes y útiles					X
2	Los estudiantes pueden abordar el problema de múltiples maneras utilizando diferentes heurísticas					X
3	El problema permite tomar y defender diferentes decisiones o posiciones frente a su solución					X
4	El problema fomenta la participación , discusión y argumentación de los estudiantes					X
5	La resolución requiere un alto nivel de razonamiento				X	
6	El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes				X	
7	El problema se conecta con otras ideas matemáticas importantes					X
8	El problema promueve el desarrollo de habilidades matemáticas				X	
9	El problema brinda la oportunidad de practicar habilidades importantes					X
10	El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus alumnos están aprendiendo y dónde están experimentando dificultades					X

Nombre ___IVAN DDARIO NUÑEZ OROZCO___________

Formación __LICENCIADO EN MATEMATICAS, Mg EN MATEMATICAS___

Experiencia __7 AÑOS EN NIVEL BASICA Y MEDIA Y 34 AÑOS A NIVEL UNIVERSITARIO ___

Observación _La problemática propuesta resulta muy apropiada al abordar de manera significativa en contexto real, conceptos fundamentales de la aritmética tales como fracciones, proporcionalidad y porcentajes llevando al estudiante a desarrollar procesos de pensamiento y capacidad para dar argumentos que dan cuenta de una construcción de nociones propias del algebra.

espuesta:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

	Características	1	2	3	4	5
1	El problema incorpora matemáticas importantes y útiles					x
2	Los estudiantes pueden abordar el problema de múltiples maneras utilizando diferentes heurísticas					x
3	El problema permite tomar y defender diferentes decisiones o posiciones frente a su solución					x
4	El problema fomenta la participación , discusión y argumentación de los estudiantes					x
5	La resolución requiere un alto nivel de razonamiento					x
6	El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes					x
7	El problema se conecta con otras ideas matemáticas importantes					x
8	El problema promueve el desarrollo de habilidades matemáticas					x
9	El problema brinda la oportunidad de practicar habilidades importantes					x
10	El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus alumnos están aprendiendo y dónde están experimentando dificultades					X

Nombre Roberto Carlos Torres Peña

Formación Doctor en Educación Matemática

Experiencia Docente de Matemáticas, Director Maestría en E Mate

Observación Es un instrumento que se ajusta a su objetivo

Anexo 8. Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje Pholer & Prediger 2015.

Niveles	Trayectoria de aprendizaje conceptual hacia modelos para porcentajes	Andamiaje basado en estructura por barra porcentual (diferentes funciones)	Trayectoria de aprendizaje léxico a través de diferentes vocabularios	Trayectoria para un solido entendimiento (Marco TRU) a través del Andamiaje basado en los movimientos por los distintos Ambientes de Aprendizaje (EMC)	Trayectoria de Andamiaje basada de los movimientos por los diferentes Ambientes de Aprendizaje (Skovsmose,2000) para el caso de los porcentajes
Nivel 1: Informal pensando en empezar de los recursos de estudiantes delos	Construyendo significado para porcentajes representando y estimando tasas (en la barra de descarga de contexto	Introducir barra de porcentaje como modelo de un contexto familiar (barra de descarga)	Uso intuitivo de recursos de los estudiantes en el registro diario, oferta limitada de nuevos medios léxicos	Nivel 1: Recuperación: el estudiante **recuerda el** concepto de fracción como parte todo y produce una estrategia para resolver un probelma de porcentaje (encotrar la cantidad en en sus tres formatos: puro, texto y visual) a partir del **reconocimiento** de experiencias en activiades con fracciones (dibujo a escala de la hectarea; material concreto, material sensible al lenguaje).	AA1 .**Matemáticas Puras y Paradigama del ejercicio** los Estudiantes resuelven ejercicios relacionados con las porcentajes resolviendo ejercicios sobre porcentajes como operador o como parte todo (Formato Puro) para logar un proceso de "consolidación".
Nivel 2: Primero informal estrategias y significado basico relacionada vocabulario	Desarrollar estrategias informales para determinar tasas, montos y bases posteriores (cambio al contexto de compras)	Barra de porcentaje como modelo de situaciones, utilizadas para encontrar estrategias informales y para estructurar las relaciones de conceptos y elementos de contexto	Establecer vocabulario básico relacionado con el significadoen el registro escolar académico para la construcción de significado de tasas, montos, bases en el contexto de compras	**Nivel 2: Comprensión**: El estudiante integra su compresión informal sobre porcentajes a los temas subyacentes (las fracciones como parte todo (contexto continuo y discreto), como operador, como razón, sus diferentes representaciones) para organizar la información alrededor de un problema y sus posibles soluciones (vía barra de porcentajes)	AA2 .**Matemáticas y Escenario de investigación**: los estudiantes usan la cuadrícula de 10 x10 y la barra de porcentajes y comprenden los porcentajes como una fracción y como un decimal. Analizan que la suma de los porcenatjes es igual a 100% y en su representacion como decimal o fraccion es igual a 1 poniendo en práctica el razonamineto repetido
Nivel 3: Procedimiento para tipos de problemas estándar	Cálculo de importes, tasas y bases posteriores (en contexto de compras)	Barra de porcentaje como modelo para calcular y estructurar las relaciones de significados y elementos formales	Introducir vocabulario formal en el registro tecnico	**Nivel 3: Análisis:** El estudiante clasifica los problemas de porcentajes de acuerdo a las conexiones realizadas con conceptos subyacente y de la experiencia (información observada en el entorno) en tres categorías (hallar la cantidad, la tasa y el todo o base) e identifica los errores a partir de la comprensión conceptual sobre los porcentajes y elabora una explicación que justifica las conexiones interpretaciones realizadas.	AA3. **Semirrealidad y Paradigama del ejercicio**: Los estudiantes relacionen sus expericias reales con situaciones hipóteticas plantedas por el profesor sobre la situaciones que conducen a problemas de encontrar la cantidad, la base y la tasa en Formato texto.
Nivel 4: Ampliacion del repertorio	Ampliación a otro problema: tipos: cambio y comparación (en contexto de compras)	Barra de porcentaje como modelo para construir relaciones más complejas	Enriquecer el vocabulario básico relacionado con el significadoa tipos de problemas más complejos	Nivel 4: **Utilización del conocimiento: El estudiante** utiliza la compresión conceptual sobre porcentajes para **resolver problemas** en contextos cotidianos y matemáticos (Encuentre la base después de la reducción, Encuentra la cantidad, encuentra la base, Encuentre la tasa Encuentre la base después del aumento) como la presentación de datos usando tablas y gráficos pictogramas, gráfica de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares	AA4. **Semirrealidad y Escenario de investigación** El estudiante tiene la autonomia para decidir si acepta la invitación del profesor para formular sus propias preguntas y buscar explicacione y pueden descubrir regularidades. con los tipos de problemas de porcentajes tarves de experiencias como el juego de roles. Todas estas actividades como una invitación para que los estudiantes e
Nivel 5: Identificacion de problema diferente tipos	Identificar tipos de problemas de (también no) problemas estándar (en diversos contextos)	Barra de porcentaje como base estructural para identificar tipos de problemas	Uso explícito y entrenamiento del vocabulario formal y básico relacionado con el significado	Nivel 5: Metacognición: El estudiante muestra disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) en distintas tareas de resolución y formulación problemas sobre porcentajes (tareas cuya dificultad va de moderada a alta)es sus dientitos tipos y formatos contextos de compra, impuestos, ponderaciones para ingreso a la universidad, elaboración de CENSOS, intereses ect.) siendo consiente que decisión de un esfuerzo productivo le ayudará a desarrollar habilidades y a lograr la meta propuesta, y además le brindará recursos identificándose positivamente como aprediz y pensador capaz de aprender de sus errores.	AA5 .**Situaciones de la vida real Paradigama del ejercicio** Construyendo una comprensión para porcentajes visitas centro comercial (observando las ofertas), bancos - intereses, tablas -de frecuencia, CENSO, Visita a la Universidad - Porcentajes
Nivel 6: Flexible uso de conceptos y estrategias	Grietas más complejas problemas de contexto de manera flexible (en contextos no familiares)	Barra de porcentaje como base estructural para identificar tipos de problema	Introducir extendido leer vocabulario	**Nivel 6: Sistema interno (self)**: Valora el aprendizaje de la matemáticas basado en su importancia, utilidad y emociones positivas por progreso logrado, todo esto lo refleja en el compromiso al resolver tareas o problemas no rutinarios de manera autonoma (autorregulación).	AA6 .**Situaciones de la vida real y Escenario de investigación** los estudiantes adquieren el papel de sujeto activo en su proceso de aprendizaje mediante la innmersión en un contexto global y rural observar los porcentajes en distintos escenarios (ingreso a la Universidad, resolviendo y reflexionando junto con la comunidad- CENSO, Impuestos de la canasta familiar en Colombia - Iva , compras, facturas de compra, analizar a porfundidad una compra con descuento adional o incluido. Con autonomia para decidir si acepta la invitación del profesor para formular sus propias preguntas y buscar explicaciones.

Las THA de color rosa corresponden al aporte y las de color verde Pholer & Prediger (2015)

Anexo 9 consentimiento informado.

DOCTORADO EN EDUCACION MATEMÀTICA

Universidad de Sucre

La Floresta Toluviejo (Sucre), 25 de julio de 2020.

Señor (a):

Cordial saludo

Su hijo Ever Serrano 6 ha sido invitado(a) a participar en el estudio "**HACIA LA GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE DE CALIDAD PARA CADA ESTUDIANTE EN LA CLASE DE MATEMÁTICA DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA Y LA EDUCACIÓN STEM EN ESTUDIANTES DE BÁSICA SECUNDARIA EN CONTEXTOS RURALES**". Dicho estudio corresponde a la tesis doctoral de la profesora **Sandra Patricia Rojas Sevilla** estudiante del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño y docente de la Universidad de Sucre.

La participación de su hijo (a) o representado en este proyecto investigativo, consiste en desarrollar actividades de tipo académico como lo son:

Responder test para evaluar los conocimientos matemáticos que posee y los procesos generales que emplea, para analizar las necesidades que tiene para lograr su nivel óptimo en matemáticas.
Responder entrevistas para analizar la percepción y creencias que tiene acerca de las matemáticas.
Participar en las actividades de tipo formativas como la huerta casera o escolar.
Realizar una visita a la universidad de Sucre, siempre que las condiciones de la pandemia lo permitan.
Recibir charlas, capacitaciones que surjan en el marco del proyecto.
En las actividades formativas se tomarán evidencias fotográficas, además de grabaciones de video y de voz.
Las actividades formativas se realizarán al menos tres veces a la semana en un horario concertado.
Estos resultados obtenidos no tendrán repercusiones o consecuencias en las actividades escolares, evaluaciones o calificaciones del estudiante.

Su participación en la investigación no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por ella.
Los docentes investigadores garantizarán la protección de imágenes y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente, durante y posteriormente al proceso de investigación. Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012), y de forma consciente y voluntaria.

Por tanto,

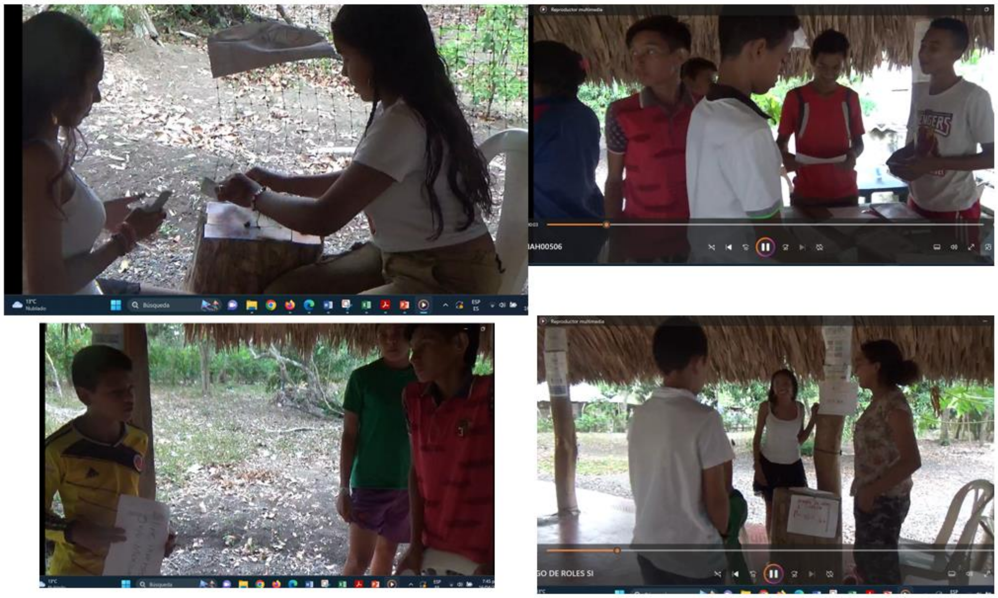
Yo ________________, mayor de edad, padre, madre o acudiente del estudiante ________________ He leído el documento, entiendo las declaraciones contenidas en él y la necesidad de hacer constar mi consentimiento, para lo cual lo firmo libre y voluntariamente.

Xelida Guzmán. V. — FIRMA CC padre o acudiente
cc 23221911

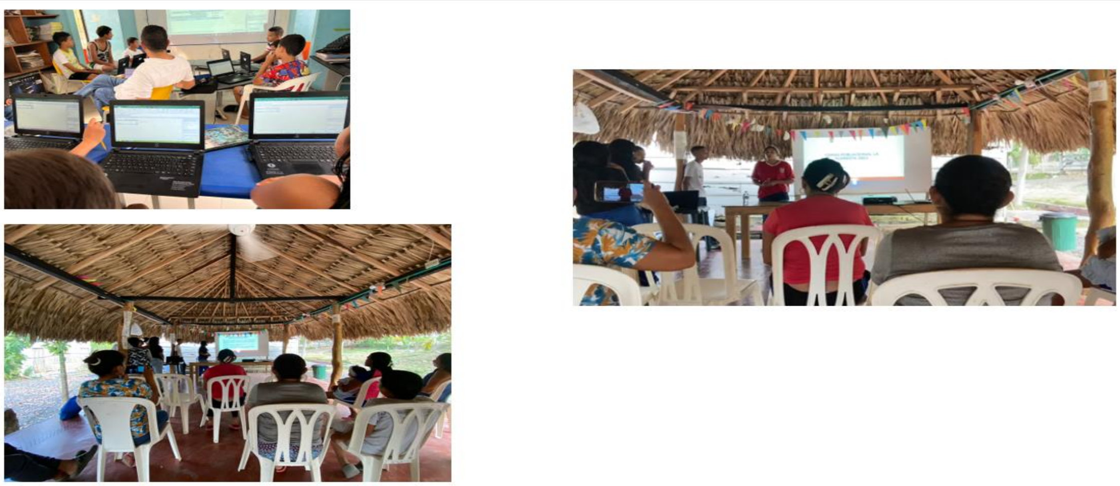
Ever David — FIRMA TI: estudiante

Anexo 10.Evidencias fotográficas.

EVIDENCIA FOTOGRAFICA EXPERIENCIA CON PORCENTAJES EN LA VIDA REAL



EVIDENCIA FOTOGRAFICA JUEGO DE ROLES



EL CENSO DE LA FLORESTA

Ver Video [57]

[57] https://photos.app.goo.gl/U5GEVBf639YZbEvn7 **(Video preparando la socialización)**
https://photos.app.goo.gl/U5GEVBf639YZbEvn7 **(video preparando la socialización)**

VISITA UNIVERSIDAD DE SUCRE

Tabla de Índice de Masa Corporal para adolescentes de ambos sexos

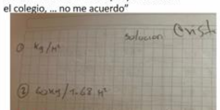
Edad (años)	MUJERES			
	BAJO PESO	NORMAL	SOBREPESO	OBESIDAD
10	≤13.5	16.6	≥19.0	≥22.6
11	≤13.9	17.2	≥19.9	≥23.7
12	≤14.4	18.0	≥20.8	≥25.0
13	≤14.9	18.8	≥21.8	≥26.2
14	≤15.4	19.6	≥22.7	≥27.3
15	≤15.9	20.2	≥23.5	≥28.2
16	≤16.2	20.7	≥24.1	≥28.9
17	≤16.4	21.0	≥24.5	≥29.3
18	≤16.4	21.3	≥24.8	≥29.5
19	≤16.5	21.4	≥25.0	≥29.7

"El índice de masa corporal (IMC) es el peso de una persona en kilogramos dividido por el cuadrado de la estatura en metros"

Cristian murmura "creo que yo vi esto en el colegio, … no me acuerdo"

TAREAS: CUIDADO DE MI SALUD

1. Escribir una expresión o una fórmula matemática para el IMC
2. Calcular su IMC



$(5x)^2 = 5x^2$

Dimensión: Clima socioemocional del aula

tu no pesas nada"; "estas llevado", "tan viejo y estas así de bajito". Se presume que a raíz de estos comentarios Ros no acepto participar de la actividad de medirse.

Fotografía 2021.