Programa de Doctorado en Educación Matemática

EL RAZONAMIENTO REPETIDO EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Tesis presentada como opción al Grado científico de
Doctora en Educación Matemática

Mg. Diana Isabel Quintero-Suica

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

EL RAZONAMIENTO REPETIDO EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Tesis presentada como opción al Grado científico de
Doctora en Educación Matemática

Mg. Diana Isabel Quintero-Suica

Director de tesis
Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. junio de 2023

DEDICATORIA

A la trinidad que me ha ayudado y acompañado: mi mamita, mi esposo y mi familia.

Mi mamita, que siempre merecerá un espacio en las páginas de mi trabajo. Por su disciplina, trabajo constante y empeño en cada cosa que se propone. Demostraciones de templanza y resiliencia que moldearon mi carácter y me permiten ver las maravillosas cosas que este mundo tiene para ofrecer.

Mi esposo, mi monito querido, mi “duende chiflado”. Eres tú quien persiste en verme a mí, tu “hada chalada”, siendo feliz al hacer lo que más le gusta: aprender y estudiar. Te dedico cada palabra de este trabajo por ser el motor de mi vida, mi gran compañía, mi único y leal amigo.

Y mi familia. Esa “tropa” de seres que la vida y el universo han conjurado para tener aún con vida y a mi lado. A ellos, espero servirles de inspiración y orgullo para poder hacer lo que vale la pena hacer; vivir en plenitud. Y para ellos también, la dedicación de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Aun sin ser un trabajo culminado, se debe expresar la sentida gratitud hacia todos aquellos que hacen posible la presentación de esta producción. Por su puesto, la primera persona destacable es mi director de tesis, el Doctor Gerardo Antonio Chacón Guerrero. No solo por sus valiosas y pertinentes orientaciones en la conducción del trabajo investigativo, sino por ser el soporte académico y personal necesario y oportuno para no desfallecer durante todo este tiempo.

A la Universidad Antonio Nariño en general, y a los profesores Doctora Mary Falk de Losada, al Doctor Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, al Doctor Rafael Sánchez Lamoneda, al Doctor Miguel Ángel Borges Trenard y a la Doctora Diana Carolina Pérez Duarte, en particular. Su conocimiento y profesionalismo me han inspirado para seguir trabajando día a día en mi formación como docente e investigadora.

Y a mis colegas y compañeros de estudio. Muchos de ellos hicieron aportes y sugerencias útiles y provechosos. Su ayuda es preciada y mi gratitud inestimable.

SÍNTESIS

Considerando la importancia del razonamiento repetido en el aula de matemáticas como una forma de consolidación del aprendizaje, la presente investigación busca avanzar en la descripción, explicación y enriquecimiento de los procesos subyacentes a este razonamiento (internalización; organización y reorganización; y retención del conocimiento), en el marco del principio de razonamiento repetido postulado por el modelo de instrucción DNR[1]. Al analizar este fenómeno de aula desde una perspectiva cualitativa, empleando los métodos de la teoría fundamentada, y a través de la implementación de cinco actividades que incorporan once problemas matemáticos retadores con estudiantes de secundaria, se estructura un modelo de acciones y esquemas mentales que incorpora dos entidades de interés: una *Unidad Básica de Acciones - UBA*, constituida por la evaluación de las condiciones iniciales, seleccionar o decidir el punto de partida, usar narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados-convencer; y, una *Unidad de Acciones de Ajuste - UAA*, que incorpora el mostrar un ejemplo(contraejemplo), y el uso de un problema auxiliar. Cuando la *UBA* se implementa satisfactoriamente para hallar la solución de un problema, pero es insuficiente para abordar un problema similar e interrelacionado, surge la necesidad de recurrir a la *UAA* en cada nueva ocasión que sea requerida, hasta que la unidad inicial vuelva a ser suficiente para resolver la categoría que subsume a tales problemas.

[1] Siglas que representan los constructos D – Dualidad, N – Necesidad y R – Razonamiento repetido.

Por lo anterior, la formulación de problemas que desencadene la UBA o la UAA es parte fundamental del trabajo en el aula y supone un conocimiento profundo por parte del docente acerca de las ideas, conceptos, procedimientos, etc., que se pretende sean aprendidos a largo plazo por los estudiantes.

Finalmente, el determinar categorías de problemas y sus instancias-problema (enunciados específicos para ser planteados a los estudiantes), se revela como uno de los principios de diseño clave que permite promover el razonamiento repetido y el fomento del aprendizaje de la matemática a largo plazo.

ABSTRACT

Considering the importance of repeated reasoning in the mathematics classroom as a way of consolidating learning, this research seeks to advance in the description, explanation, and enrichment of the processes underlying this reasoning (internalization; organization and reorganization; and retention of knowledge), within the framework of the principle of repeated reasoning postulated by the DNR instruction model. By analyzing this classroom phenomenon from a qualitative perspective, using the methods of grounded theory, and through the implementation of five activities that incorporate eleven challenging mathematical problems with high school students, a model of actions and mental schemes is structured that incorporates two entities of interest: a Basic Unit of Actions - BUA, constituted by the evaluation of the initial conditions, select or decide the starting point, use existing or agreed accepted narratives and communicate results-convince; and, an Adjustment Actions Unit - AAU, which incorporates showing an example (counterexample), and the use of an auxiliary problem. When the BUA is implemented satisfactorily to find the solution to a problem, but it is insufficient to address a similar and interrelated problem, the need arises to resort to the AAU on each new occasion that is required, until the initial unit is sufficient again. to solve the category that subsumes such problems.

Due to the above, the formulation of problems that trigger the BUA or the AAU is a fundamental part of the work in the classroom and supposes a deep knowledge on the part of the teacher about the ideas, concepts, procedures, etc., that are intended to be learned through long term by students.

Finally, determining categories of problems and their problem-instances (specific statements to be posed to students), is revealed as one of the key design principles that allows promoting repeated reasoning and fostering long-term learning of mathematics.

TABLA DE CONTENIDO PÁG.

INTRODUCCIÓN

La diversidad de teorías y marcos teóricos en el campo de investigación de la educación en matemáticas supone para los investigadores un reto, tanto para el análisis de los complejos fenómenos que le atañen, así como para la integración de bases epistemológicas que permitan guiar los diseños de investigaciones futuras (Prediger, Bikner-Ahsbahs & Arzarello, 2008).

Al respecto, Niss (2021 – en prensa) llama la atención sobre la necesidad de continuar con los esfuerzos que buscan clarificar los términos y constructos teóricos que sirven de base en el campo de investigación en educación matemática, teniendo en cuenta que la diversidad de teorías mencionada conduce al uso e interpretación distintivo de alguno de ellos. Esta postura confirma una aseveración hecha por el mismo investigador, quien en 2007 indica que "*En las investigaciones en educación matemática las definiciones de los términos utilizados típicamente no se dan o, cuando se dan, son muy vagas*"[2].

Ahora bien, los estudios que posibiliten y redunden en esta empresa de clarificación deben comportar problemas de investigación estrechamente relacionados con las problemáticas y fenómenos que se hallan en el aula de clase, al procurar el aprendizaje de los estudiantes. En ese sentido, el insumo principal para esta investigación acontece en la práctica educativa en la escuela secundaria, el cual es el campo de

[2] Niss, M. (2007). The concept and role of theory in mathematics education. In Bergsten, C., Grevholm,B., Måsøval, H.S. Rønning, F. (Eds.) *Proceedings of NORME05: Relating Practice and Research in Mathematics Education – Fourth Nordic Conference on Mathematics Education, Trondheim, Norway, 2–6 September 2005*, pp. 97–110. Trondheim, Norway: Tapir Academic Press.

labor de la autora de esta investigación, considerando inquietudes sobre cómo promover la consolidación del aprendizaje en los estudiantes al movilizar diversos contenidos curriculares, cuáles elementos favorecen dicha consolidación, cómo evaluarla y cuáles indicios de la práctica ofrecen evidencia de esto.

Sin embargo, y para garantizar que los cuestionamientos antes planteados trascienden un contexto local, se construye una encuesta con seis preguntas cerradas y cuatro preguntas abiertas, estas últimas analizadas por medio de la construcción de categorías que representan las respuestas, y que fue aplicada a diez docentes de matemáticas.

En términos generales, los docentes encuestados muestran consenso acerca del uso de rúbricas, criterios, instrumentos de evaluación, etc., para el seguimiento de la consolidación del aprendizaje de la matemática, además de la necesidad de una amplia gama de actividades que la favorezcan y no de solo una actividad o problema particular. Por otro lado, se halla consenso acerca de la observación cuidadosa de los productos cognitivos de los estudiantes como evidencia de su aprendizaje, con el fin de evaluar y emitir valoraciones sobre este en el corto, mediano y largo plazo.

En la pretensión de fundamentar el problema de investigación antes descrito, se encuentra en la literatura especializada una variedad de perspectivas teóricas que buscan el estudio de estos fenómenos como, por ejemplo, el modelo de pensamiento matemático DNR[3] al postular el principio de razonamiento repetido. Lo anterior permite

[3] D – Dualidad, N – Necesidad y R – Razonamiento repetido

sustentar la pertinencia de una investigación correspondiente con la situación descrita pues, ha sido un tema incluido en la exposición teórica del campo.

En el modelo de pensamiento matemático DNR se establece que "*...los estudiantes deben practicar el razonamiento para interiorizar formas deseables de entender y de pensar*"[4]. En Harel (2021) este principio se describe en términos de tres acciones esenciales: internalización del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de aplicar el conocimiento de forma autónoma y espontánea...*"[5]; organización y reorganización del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de reestructurar el conocimiento en ricas redes conceptuales jerárquicas...*"[6]; y la retención del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de recordar el conocimiento durante un largo periodo de tiempo...*"[7].

Se adopta así, de ahora en adelante, las palabras razonamiento repetido para referirse al fenómeno que acontece en el aula de clase al estudiar el principio de razonamiento repetido del modelo DNR, teniendo en cuenta que este modelo se acoge como el marco de referencia para la actual investigación.

Así las cosas, se orienta el estudio del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática, por medio de las diversas acciones llevadas a cabo por el docente que constituyen este razonamiento y que lo favorece en quienes aprenden.

---

[4] Harel (2008). What is mathematics: a pedagogical answer to a philosophical question. *University of California*, p. 21.
[5] Harel (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective. *ZDM-Mathematics Education*, p. 718.
[6] Ibídem.
[7] Ibídem.

Lo anterior supone buscar la comprensión del modelo de pensamiento matemático propuesto en el modelo de instrucción DNR, el cual es planteado en Harel (2008), atendiendo los procesos de internalización, organización y reorganización, y retención de esquemas de pensamiento matemático al involucrar el acto mental de resolver problemas retadores.

Para evidenciar la actualidad y pertinencia del tema a investigar, se halla en congresos como *International Congress on Mathematical Education* – ICME por medio de los *Topic Study Group* – TSG, el llamado a estudiar los enfoques teóricos y metodológicos para examinar los aspectos epistemológicos, cognitivos, didácticos, evaluativos, sociales, o cuestiones interculturales relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del razonamiento (TSG 18 – ICME 13 y TSG 16 – ICME 14).

Por otro lado, y debido al uso cada vez más frecuente de la matemática en diversas disciplinas como la informática, la ingeniería, la empresa, la química, la biología y la economía, se resalta la necesidad de comprender cómo se han utilizado diferentes marcos conceptuales para explicar el desarrollo de habilidades matemáticas en el planteamiento o resolución de problemas, o qué podemos aprender al considerar y comparar tradiciones y enfoques de la práctica con respecto a la resolución de problemas matemáticos y el planteamiento de problemas en todos los países (TSG 17 – ICME 14).

Con base en la evidencia anterior, se establece la importancia del tema a investigar, pues, además de abordar las cuestiones planteadas por la comunidad internacional para un campo nutrido en teorías y marcos de referencia, se hace un aporte a la integración de tales cuestiones que permitan un conocimiento holista del aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas.

Poder avanzar en la comprensión del modelo de pensamiento matemático DNR por medio de la caracterización de los procesos inherentes al razonamiento repetido para el aprendizaje, permite clarificar la toma de algunas decisiones en el aula, tanto en la determinación de algunos principios de diseño de secuencias o sistemas de actividades, como en la evaluación de las formas matemáticas de pensar que se constituyen en los estudiantes involucrados.

Configurar y determinar descripciones, explicaciones y formas de enriquecer el razonamiento repetido en el aprendizaje de la matemática abre, además, la posibilidad de investigaciones teóricas futuras que involucren al mismo marco de referencia (modelo DNR), al analizar el aprendizaje de campos específicos de la matemática (*v.g.* geometría, estadística, probabilidad, etc.).

Aparte de ello, seleccionar un grupo de estudiantes de educación secundaria pertenecientes a un círculo matemático, permite la estructuración de prácticas que comportan y extienden los elementos básicos y usuales del aprendizaje de la matemática regular en la escuela secundaria. Este tipo de comunidades son novedosas en el Instituto Técnico Olga Santamaría del municipio de Anolaima, en el cual se implementa esta investigación.

Ahora bien, es importante exponer las fuentes para seleccionar el tema de investigación. El primer aspecto surge en la práctica profesional docente en la cual emergen preguntas acerca de los medios y formas apropiadas para desarrollar ciertos tipos de prácticas como, por ejemplo, el razonamiento repetido para el aprendizaje de las matemáticas para la cual, se halla en la literatura especializada, una perspectiva teórica correspondiente con estas inquietudes (el ya mencionado modelo de instrucción DNR).

No obstante, y como señalan Sriraman, VanSprosen and Haverhals (2010), existen aún preguntas pendientes por resolver sobre este modelo y, en particular, sobre el principio de razonamiento repetido (PRR a partir de ahora). Ejemplos de estas preguntas son: ¿cuántas repeticiones son necesarias para reforzar las formas de pensar? ¿Cómo se desarrolla el proceso de movilización de los estudiantes en este principio? o ¿qué métodos de análisis o aplicación son adecuados?

Buscando validar y enmarcar estos cuestionamientos sobre el razonamiento repetido, se estudian 36 informes de investigación y reflexiones teóricas sobre el modelo DNR desde cuatro estrategias diferentes de análisis encontrando que, si bien estas implican respuestas parciales a las preguntas planteadas, se requiere mayor investigación para completar las brechas teóricas existentes.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente problema de investigación: ¿Cuáles son los aspectos que permiten describir, explicar y enriquecer los procesos subyacentes al razonamiento repetido, sus relaciones y propiedades, por medio de la resolución de problemas retadores con estudiantes de secundaria?

Como objeto de estudio se tiene el razonamiento repetido, sus relaciones y propiedades, y con ello, se infiere como objetivo general el describir, explicar y enriquecer el razonamiento repetido, por medio de la resolución de problemas retadores con estudiantes de secundaria.

Los objetivos específicos son:

1. Identificar las tendencias de investigación relacionadas con el razonamiento repetido, las propuestas metodológicas que la abordan y las sugerencias para futuros trabajos en el campo de la educación matemática.

2. Articular los constructos y marcos teóricos para la construcción de un diseño y herramientas de análisis, que permitan obtener evidencias sobre los procesos inherentes al razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática.

3. Predecir y revisar las predicciones emergentes sobre el razonamiento repetido, a partir de los procesos de internalización, organización y reorganización, y retención, en un contexto de resolución de problemas matemáticos retadores con estudiantes de secundaria.

4. Explorar y analizar la evidencia sobre el razonamiento repetido en un contexto de resolución de problemas retadores de matemáticas con estudiantes de secundaria por medio de diversas herramientas analíticas.

5. Presentar los hallazgos obtenidos que sustenten las descripciones, explicaciones y formas de enriquecer el razonamiento repetido, en un contexto de resolución de problemas retadores de matemáticas con estudiantes de secundaria.

De acuerdo con el objeto de estudio, se establecen los procesos de internalización, organización y reorganización, y retención en el aprendizaje de matemáticas por medio de la resolución de problemas retadores con estudiantes de secundaria, como el campo de acción.

Para lograr el objetivo y resolver el problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Cuáles son las tendencias relacionadas con el razonamiento repetido en el ámbito de la investigación en educación matemática y cuáles son las sugerencias para futuras propuestas?

2. ¿Qué constructos y marcos teóricos están disponibles para el estudio del razonamiento repetido en el campo de la investigación en educación matemática?

3. ¿Cuáles formas de abordar tareas, uso de representaciones y del lenguaje se movilizan entre los estudiantes al internalizar, organizar y reorganizar, y retener, al resolver problemas matemáticos y cómo es el proceso de toma de decisiones por parte de los estudiantes secundaria al desarrollar razonamiento repetido?

4. ¿Qué hallazgos permiten evidenciar los elementos y las relaciones que están presentes al fomentar el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas retadores, en el desarrollo del razonamiento repetido con estudiantes de secundaria?

Para cumplir el objetivo y resolver el problema, así como para orientar el curso de la investigación, se proponen las siguientes tareas:

1. Actualización del estado del arte y del marco de referencia de acuerdo con las nuevas publicaciones en la literatura especializada.

2. Consolidación de la fundamentación del problema de investigación y del diseño metodológico adoptado.

3. Construcción del diseño de actividades a partir de las hipótesis de trabajo que se obtienen de la aplicación sucesiva de secuencias de actividades que comportan problemas matemáticos retadores, y de los lineamientos sobre el modelo de investigación.
4. Diseño de los instrumentos para la recolección de datos.
5. Verificación del análisis retrospectivo a partir del planteamiento de nuevas actividades, que atiendan a las categorías de problemas establecidos en el marco teórico.
6. Redacción de un artículo de investigación con los avances parciales obtenidos sobre las etapas de implementación del aporte práctico.

El **aporte práctico** se basa en una secuencia de actividades sustentadas en problemas retadores que promueven el razonamiento repetido como soporte para el aprendizaje de la matemática con estudiantes de secundaria. Esta secuencia contiene, además, algunas sugerencias para el diseño de actividades correspondientes con el objeto de investigación.

Por otro lado, el **aporte teórico** se basa en la descripción, explicación y enriquecimiento del razonamiento repetido con estudiantes de secundaria, por medio de la resolución de problemas retadores.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

El panorama de las indagaciones previas es una forma de obtener una visión general de la investigación, permite tratar diversas perspectivas sobre un tema específico y ofrece derroteros para futuras investigaciones. A continuación, se estudia el estado de la cuestión sobre el razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática, el PRR en el desarrollo del pensamiento matemático, así como las perspectivas y las potencialidades en un contexto de resolución de problemas matemáticos retadores.

1.1 Búsqueda y recolección de la información

Algunos de los aportes significativos en el campo de la educación matemática provienen del análisis de las dinámicas del aula en todos los niveles educativos. Esto se apoya en la afirmación de Cai, Morris, Hohensee, Hwang, Robinson, Cirillo, Kramer, y Hiebert (2019) quienes afirman que: "*…las preguntas de investigación significativas pueden y deben surgir directa o indirectamente de los problemas de la práctica de los profesores*"[8], por lo que el insumo principal de esta investigación se ubica en el contexto de la práctica de la escuela básica y media. En particular, surgen algunas dudas sobre el desarrollo de formas de pensar matemáticas en los estudiantes al enseñar diferentes temas curriculares, cuáles elementos ayudan a ese proceso y cómo pueden los profesores evaluar y valorar dicha formación a través de las evidencias de aprendizaje en el aula.

[8] Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Hiebert, J. (2019). Posing Significant Research Questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(2), p. 115.

Pero, además de estas inquietudes sobre la práctica educativa concreta, es necesario garantizar que "*…los problemas de instrucción [...] se experimentan en múltiples aulas de profesores [...] más allá del contexto local*"[9], lo cual conduce a analizar el estado de la cuestión en un campo de investigación.

De este modo, confirmar estos asuntos en las prácticas educativas de profesores de la escuela secundaria es un elemento imprescindible para empezar. Por ello se discuten las respuestas de seis preguntas cerradas y cuatro abiertas, de una encuesta implementada con diez profesores de matemáticas (Ver Anexo 1), sobre cómo se suscita la consolidación del conocimiento matemático.

En general, los profesores encuestados muestran un acuerdo sobre los instrumentos necesarios (*v.g.* rúbricas, criterios, valoración, herramientas de evaluación, entre otros), para seguir el desarrollo de formas de pensar matemáticamente en sus estudiantes. Además de la necesidad de un amplio abanico de actividades que permitan su consolidación y no solo el planteamiento de un único problema o actividad. Por otro lado, se encuentra el acuerdo sobre la consideración de las acciones y prácticas de los estudiantes para ofrecer cualquier tipo de valoración sobre sus logros y desarrollo de formas de pensar matemáticamente.

La siguiente opción lógica en la fundamentación del problema es la búsqueda de investigaciones relacionadas con el tema que fuesen publicadas en eventos y congresos del campo de la educación matemática, como el ICME (13ª y 14ª versiones), y el Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática -

---

[9] Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Hiebert, J. (2019). Posing Significant Research Questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(2), p. 115.

CERME (11ª y 12ª versiones) rastreándolas en el tiempo, así como la recolección de informes de investigación publicados en revistas especializadas como *International Journal of Educational Research in Mathematics Education*, *The Journal of Mathematical Behavior*, y *Educational Studies in Mathematics Education*, entre otras.

La recopilación de documentos se realiza a través de la búsqueda en bases de datos como *Springer Link*, *Science Direct*, *Scopus*, *Taylor, and Francis Online*, *Web of Science*, y *JSTOR*, las cuales cuentan con una amplia gama de publicaciones en investigación. La búsqueda se orienta a las dos últimas décadas, utilizando las palabras clave *way of thinking* o *habits of mind*, las cuales se refinan en relación con la perspectiva *DNR* a *ways of thinking*, *ways of understanding*, *mathematics repetition*, *robust understanding*. Estas palabras clave muestran la posibilidad de estudiar el fenómeno del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática desde un modelo de instrucción, como lo es el DNR, y que es correspondiente con las inquietudes iniciales.

Se utilizan dos estrategias para el análisis de la información. La primera consiste en una lectura del resumen o introducción de los registros hallados, para una la lectura cuidadosa posterior a través de la Metodología de la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002) de los 36 documentos acopiados, haciendo una codificación abierta estructurada en una red semántica desde el punto de vista del pensamiento matemático cognitivista-piagetiano (especialmente el modelo-instrucción DNR).

La justificación y problema de investigación registrados en las publicaciones analizadas son el centro de atención en la codificación abierta y axial. También se analizan las perspectivas de investigación incluidas en los resultados y las conclusiones. Esto último permite inferir direcciones útiles que sitúan el problema dado y le ofrecen la relevancia necesaria para ser un problema de investigación.

La segunda estrategia de análisis aplicada a los documentos que contienen la perspectiva del DNR se basa en ofrecer juicios sobre los elementos de este modelo en contraste con los requisitos de una teoría (*v.g.* poder descriptivo, explicativo y predictivo, rigor, significación, especificidad, falsedad y capacidad de replicación y triangulación) postulados por Schoenfeld (2000), para evaluar si una propuesta específica puede alcanzar el estatus de teoría. Esta especial atención al modelo DNR se debe a que la visión, explícitamente, trabaja sobre el desarrollo del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática.

Finalmente, para los mismos documentos, se estudian los aportes de la investigación relacionados con los comentarios y cuestionamientos hechos al modelo DNR en un artículo escrito y publicado por Sriraman et al. (2010). Para ello, se hace un resumen de las respuestas parciales y completas, así como de las cuestiones de investigación pendientes por ser abordadas.

En lo que sigue, se destacan algunas de las publicaciones relevantes analizadas por medio de las estrategias descritas anteriormente. A partir de esto, se presentan algunas tendencias de investigación y explicaciones a la formulación de problemas de investigación.

1.2 Desarrollo de formas de pensar

1.2.1 **What is Mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question**[10]

Abriendo la perspectiva acerca de lo que es la matemática desde el campo de la educación en matemáticas, el investigador Guershon Harel expone un marco de instrucción que permite la operacionalización de algunos elementos fundamentales involucrados en la enseñanza en el aula, uno de los cuales tiene una fuerte relación con el desarrollo de formas de entender y de pensar matemáticamente.

En particular, se atiende a la recomendación particular de adelantar procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos, considerando las formas de entender y de pensar resultantes de actos cognitivos sabiendo que "*…las afirmaciones y acciones de las personas pueden significar productos cognitivos de un acto mental […] Tal producto es la forma de entender de la persona asociada con tal acto mental. Repetidas observaciones de las formas de entender de un individuo asociadas con un acto mental dado pueden revelar cierta característica cognitiva […] la cual se refiere a la forma de pensar…*"[11].

Además, se adoptan los principios instruccionales del modelo, a saber: *principio de dualidad*, que establece una relación de dependencia entre las formas de entender y de pensar; *principio de necesidad*, que establece la importancia de que los estudiantes tengan la necesidad de aprender, entendiendo esta como una necesidad intelectual; y *principio de razonamiento repetido*, en el cual los estudiantes deben practicar el razonamiento con el fin de internalizar y retener formas de entender y de pensar

[10] Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question.* San Diego, California: Universidad de California.
[11] Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question.* San Diego, California: Universidad de California, p. 4.

deseables. Este último principio tiene una estrecha conexión con las inquietudes planteadas y expuestas desde la práctica docente.

1.2.2 **Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework**[12]

En este documento, los autores hacen referencia a las potencialidades y oportunidades de mejora que son evidenciables en el modelo de instrucción DNR, con lo cual establecen información necesaria para poder enriquecerlo, a la vez que se hacen aportes novedosos e imprescindibles en el campo de la educación en matemáticas. De las cinco oportunidades de mejora, se asumen dos de ellas por ser correspondientes con las inquietudes sobre las formas de pensar matemáticamente, planteadas con anterioridad.

La primera, establece la dificultad de definir con claridad y de analizar en los estudiantes las formas de entender y de pensar postuladas en el modelo, además de la necesidad de considerar las implicaciones en la recolección de datos que permita inferir las formas de pensar involucradas en una apuesta curricular determinada. Señalan, por un lado, que "*La interpretación de comportamientos metacognitivos […] no es transparente o carece de problemas de confiabilidad y validez en la recopilación de datos*"[13], y, por otro, que "…*la capacidad de recopilar datos sobre las relaciones*

[12] Sriraman, B., VanSpronsen, H., & Haverhals, N. (2010). Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (p. 369-378). Berlin: Springer, Berlin, Heidelberg.
[13] Ibídem, p. 376.

entre las formas de entender y las formas de pensar requiere una previsión y un marco adicional sólido fuera del presentado [por el modelo]"[14].

El segundo, relacionado con el afianzamiento de formas de entender y de pensar, para el cual plantean cuestionamientos como *"…cuánta repetición es necesaria para lograr nuestras metas, cómo movemos a nuestros estudiantes a través de este proceso y [cuáles] métodos abordan múltiples estilos de aprendizaje*"[15]. Para esto, indican que es necesario el diseño, implementación y estudio de diversas metodologías antes de dar una respuesta.

1.2.3 **DNR-Based Curricula: The Case of Complex Numbers**[16]

En este documento se reporta una exposición detallada, precisa y minuciosa de la elaboración de una unidad curricular basada en los constructos del modelo de instrucción DNR, orientada a la enseñanza de los números complejos en el contexto de formación de futuros docentes y docentes en ejercicio, ambos en nivel secundario.

De este reporte se acogen tres elementos. El primero, relacionado con la indagación y análisis del desarrollo histórico del concepto movilizado en la unidad curricular, el cual expone el autor para el caso de los números complejos, analizando las perturbaciones cognitivas que originaron el surgimiento de estos números.

El segundo elemento, basado en las consideraciones curriculares para tener en cuenta en la construcción de unidades, por medio de la respuesta a preguntas como: ¿cuáles

---

[14] Sriraman, B., VanSpronsen, H., & Haverhals, N. (2010). Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (p. 369-378). Berlin: Springer, Berlin, Heidelberg, p. 376
[15] Ibidem, p.376.
[16] Harel, G. (2013). DNR-Based Curricula: The Case of Complex. *Journal of Humanistic Mathematics*, 2-61.

son los conocimientos y habilidades cognitivas típicas en los estudiantes? ¿cuál es el tiempo y secuenciación pertinente con la que se dispone? ¿cuáles son las relaciones que se pueden establecer entre la unidad y los contenidos programáticos curriculares? ¿qué formas de pensar son reconocibles en el estudio histórico del concepto o proceso, y cuáles de estas son accesibles a los estudiantes por medio de la unidad?

El último elemento, tiene que ver con el método e implementación, utilizando el experimento de enseñanza y la elaboración y mejora de prototipos en varias fases, incluyendo diversos tipos de actividades como los problemas en clase, las preguntas, las exploraciones y los problemas para la casa. Este último elemento, sobre todo, permite la orientación del marco metodológico que se detallará en un capítulo posterior.

1.2.4 **The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective**[17]

Analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo multivariable, abordando la cuestión de cómo se tratan los conceptos básicos y fundamentales de este campo en la enseñanza actual y cómo deberían tratarse desde la perspectiva de la enseñanza del modelo DNR, es el objetivo de este trabajo.

Conceptos como la linealización, la derivada total, la regla de la cadena, la diferenciación implícita y el producto cruzado se examinan desde los constructos del modelo DNR. En particular, el principio de dualidad o la interacción de desarrollo dual entre las FE y las FP para la linealización; el PRR, y la introducción de "atajos"

[17] Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective. *ZDM Mathematics Education*, 53, p. 709–721.

prematuros para el uso de la derivada total, la regla de la cadena y la diferenciación implícita; y finalmente el principio de necesidad para la formación de las actitudes de los estudiantes hacia las creencias sobre el producto cruzado.

De especial interés en esta investigación es el análisis del PRR, estableciendo los actos de internalización; organización y reorganización; y la retención del conocimiento como procesos básicos para la formación de un razonamiento repetido en el aula de matemáticas. El autor proporciona un ejemplo a través de los fundamentos del cálculo multivariable, los cuales serán tomados para los conceptos de matemáticas discretas que serán tratados en la presente investigación.

1.3 La repetición como estrategia de aprendizaje de la matemática

1.3.1 **Why do students not check their solutions to mathematical problems? A field-based hypothesis on epistemological status**[18]

El investigador de este documento busca presentar un estudio basado en la relación entre la decisión que puede tomar un estudiante de verificar una solución dada a un problema determinado y el acto mismo de verificar, por medio de la validación de la siguiente hipótesis: la decisión de verificar la solución a un problema está moldeado por el estatus epistemológico de la solución desarrollada. Esta investigación es implementada por medio de dos escenarios de evaluación a estudiantes de primer año de un seminario de Álgebra Lineal.

[18] Kontorovich, I. (2019). Why do students not check their solutions to mathematical problems? A field-based hypothesis on epistemological status. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1050-1062.

De este documento se asimilan dos elementos, a saber: el primero, tiene que ver con la consideración de la necesidad intelectual planteada por Harel (2008), así como otros factores que no deben obviarse pues "…*varias escuelas de pensamiento comparten la opinión de que la participación de uno en una situación problemática provoca un complicado entrelazamiento de modalidades cognitivas, afectivas y sociales*"[19].

El segundo, tiene que ver con el papel relevante que puede llegar a tener el estatus epistemológico en la resolución de problemas pues, este "…*puede ser útil para entender la distinción entre una respuesta que los estudiantes perciben como correcta y una solución que encontrarían externamente satisfactoria*"[20], lo cual es un factor considerable para el diseño y planteamiento de las estrategias didácticas en la presente tesis.

1.3.2 **Recursion and the mathematical experience**[21]

Al hablar de la experiencia matemática de los niños como una entidad compleja, los autores consideran la comprensión (*understanding*) en el conocimiento matemático de una persona como una estructura, más que como un cúmulo de conocimientos, e identifican la recursión como una metáfora apropiada para discutir dicha entidad. En consecuencia, el conocimiento matemático de un niño, las actividades matemáticas de construcción de conocimiento y la resolución de problemas, son analizados en

---

[19] Kontorovich, I. (2019). Why do students not check their solutions to mathematical problems? A field-based hypothesis on epistemological status. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, p. 1054.
[20] Ibídem, p. 1059.
[21] Kieren, T., & Pirie, S. (1991). Recursion and the Mathematical Experience. In P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 78-101). New York: Springer-Verlag.

cualquier punto en el tiempo a partir de su enlace con el conocimiento y compresión previos.

De especial atención de este ensayo, es la caracterización que hacen los autores sobre la experiencia matemática de los niños desde un punto de vista recursivo, indicando que el conocimiento matemático, la comprensión matemática y la actividad de resolver problemas se referencian a sí mismas, involucran estados que difieren entre sí, la estructura de los estados en una construcción particular de conocimiento o en la resolución de problemas son autosimilares y que, el estado actual del conocimiento matemático trascendental elaborado en estados previos, se conecta de tal forma que puede ser evidenciado dentro de acciones actuales de conocimiento.

Así, desde esta particular visión, el acto de conocer ocurre a través de acciones del pensamiento que se enlazan con resultados de acciones mentales previas y que se toman como entradas (*inputs*) en una situación problemática determinada. Además, la resolución de problemas y la construcción de conocimiento se postulan como facetas complejas de la experiencia matemática.

1.3.3 **Understanding mathematics**[22]

Haciendo una amplia exposición del significado y aspectos relacionados con el constructo "comprensión" (*understanding*), la autora de este libro propone el examen de aspectos como la diferenciación entre comprensión y significado, los componentes y condiciones que comporta el acto de comprender, los procesos subyacentes que se movilizan en el desarrollo de la comprensión, lo que se ha entendido a lo largo de la

[22] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: Taylor & Francis.

investigación como una “buena comprensión” y su relatividad de acuerdo con el contexto, entre otros.

De relevancia, se asume la postura de la autora acerca de que “*Un acto de comprensión sucede únicamente en una mente activa, motivada a identificar objetos, a discriminar entre estos, a percibir generalidad en las particularidades y particularidades en la generalidad, con el fin de estructurar amplios dominios del pensamiento y la experiencia*.”[23]. Así, se aboga por un aprendizaje activo que involucre al estudiante en las situaciones que se han configurado para él, y que busquen desarrollar un aprendizaje matemático sobre algún contenido específico.

1.3.4 **The role of mathematical transformations and practice in mathematical development**[24]

Tal y como lo declara el autor, “*El foco de atención de este capítulo es el papel de la experiencia repetida en el desarrollo de conceptos matemáticos.*”[25] Ilustrando, por medio de cuatro ejemplos, la incidencia de esta en la evolución conceptual y la organización y reorganización del conocimiento matemático asociados a una “práctica extensiva”.

Para el presente trabajo, se tienen en cuenta tres aspectos mencionados por el autor. Uno de estos es la identificación de la experiencia repetida como la repetición de un

---

[23] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: Taylor & Francis, p. 101.
[24] Cooper, R. (1991). The Role Mathematical Transformations and Practice in Mathematical Development. In P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 102-123). New York: Springer-Verlag.
[25] Cooper, R. (1991). The Role Mathematical Transformations and Practice in Mathematical Development. In P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 102-123). New York: Springer-Verlag, p. 102.

conjunto actividades similares e interrelacionadas, fomentando el desarrollo de aspectos diferentes una y otra vez. Esto conduce a reflexionar sobre el significado de los términos “similar” e “interrelacionado” en la construcción de actividades o tareas que involucren diferentes elementos de conocimiento, tanto para la formación de conceptos como para la reorganización de estructuras de conocimiento.

El segundo tiene que ver con el llamado de atención que hace el autor acerca de la escasa importancia que se le otorga a la experiencia repetida para la organización y reorganización de estructuras mentales de conocimiento, en comparación con el estudio de su incidencia en la formación de unidades de conocimiento. Reconoce que la experiencia repetida puede influir en estos y otros aspectos adicionales del desarrollo del conocimiento como, por ejemplo, el surgimiento de asociaciones entre tales unidades, la configuración de acciones particulares a un determinado grupo de situaciones problemáticas, entre otros.

Por último, se atienden las explicaciones de por qué la experiencia repetida ha sido, en general, ignorada a lo largo del desarrollo de la investigación. El autor sugiere una explicación de tipo histórico en la cual, las indagaciones asociadas se han limitado a puntos de vista clásicos sobre el aprendizaje; y, otra de tipo teórico, en la cual tales puntos de vista han focalizado sus observaciones en la faceta de la experiencia repetida como elemento en formación de conceptos, dejando de lado en muchos casos las demás consecuencias de esta experiencia en la configuración del conocimiento de una persona.

1.3.4.1 Why are learning and teaching mathematics so difficult?[26]

Poniendo de manifiesto una problemática profunda en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela y a lo largo de la vida de una persona, Schoenfeld ilustra en este capítulo los objetivos que debe perseguir la investigación en este campo para permear positivamente las prácticas matemáticas que favorecen la formación del pensamiento matemático en el aula de clases.

De especial importancia para este trabajo, es la mención que hace el autor acerca de que "*… la comprensión matemática es solo un componente de la enseñanza efectiva o ambiciosa, entiendo esta última como la creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos y equitativos*"[27]. Así, uno de los retos de los educadores es la creación de dichos ambientes, buscando favorecer el aprendizaje robusto en cada uno de los estudiantes, vía el desarrollo de un sentido matemático, así como de prácticas y conocimientos matemáticos que soporten pensamiento matemático efectivo.

1.4 Desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas

1.4.1 One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving[28]

Por medio del análisis de dos libros de texto turcos para la enseñanza de las matemáticas en grado sexto, los autores comparan las prácticas que buscan promover

[26] Schoenfeld, A. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult? In M. Danesi, *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 1-32). London: Springer International Publishing.
[27] Schoenfeld, A. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult? In M. Danesi, *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 1-32). London: Springer International Publishing, p. 2.
[28] Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*(31), 237-257.

el aprendizaje de contenidos matemáticos, y las comparan con tres categorías que explicitan la forma de emplear la resolución de problemas en el aula de clase.

Además de considerar que el aprendizaje de la matemática se puede abordar *para* la resolución de problemas, *sobre* la resolución de problemas o, *a través de* la resolución de problemas, se tiene en cuenta el llamado de atención que hacen los autores acerca de dos aspectos: pertinencia y coherencia al asumir el modo de empleo de la resolución de problemas en el aula de clase.

En relación con la pertinencia, se explicitan los aspectos favorables y el deber de la inclusión de la resolución de problemas en la construcción de currículos, textos escritos, recursos de aprendizaje y programas de formación de profesores.

Por otro lado, se enfatiza en la necesidad de ser coherente al involucrar la resolución de problemas como hilo conductor del aprendizaje pues, es posible que, aun asumiendo los principios de alguna de las perspectivas de trabajo de la resolución de problemas en el aula, la creación y propuesta de situaciones matemáticas a los estudiantes con la intención de desarrollar aprendizaje no se sigan con fidelidad tales principios, y se encajen tales situaciones en el paradigma de la ejercitación.

1.4.2 **Thinking mathematically**[29]

Considerando los elementos, procesos, situaciones y fases del desarrollo de la solución de un problema matemático, los autores de este libro buscan dar una explicación y predicción de los sucesos que acontecen en este proceso, atendiendo a

[29] Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* Edinburgo: Pearson Education Limited.

la realidad que enfrenta un resolutor y ofreciendo alternativas y acciones clave en caso de que la solución quede anquilosada en un punto específico.

En particular, se incorporan al presente trabajo dos elementos relevantes. El primero de ellos relacionado con las fases generales que supone el desarrollo de la solución de un problema, a saber: la **fase de entrada**, en la cual se establece lo que se sabe, lo que se persigue y lo que se quiere introducir; la **fase de ataque**, en la cual se implementan las acciones particulares y las operaciones del pensamiento sobre el problema propuesto; y, la **fase de revisión**, que contempla verificar la solución, reflexionar sobre las ideas y momentos clave, y extender el problema a un contexto más amplio.

El segundo elemento, acerca de las recomendaciones para el desarrollo del pensamiento matemático basados, primero, en la competencia en el uso de procesos en la indagación matemática; segundo, en el desarrollo de habilidades para el manejo en estados emocionales y psicológicos; y, tercero, el favorecimiento de comprensión del contenido matemático y el área en la cual será aplicado en caso de ser necesario.

1.4.3 **Mathematical practices, in theory and practice**[30]

Este documento describe las prácticas de los matemáticos profesionales y su relación con el aprendizaje de la matemática en la escuela considerando que, por la juventud del campo de investigación de la educación en matemáticas, varios de los protagonistas que intervienen en la agenda y discusiones sobre sus temas propios son filósofos y matemáticos de profesión.

[30] Schoenfeld, A. . (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, 1163-1175.

De aquí se toman dos ideas centrales. La primera relacionada con las prácticas de cuestionar a los aprendices al buscar que se suscite el aprendizaje. En este sentido, se asume la postura de que "*Las preguntas que sitúan a los estudiantes en un camino predeterminado son, esencialmente, cerradas aun cuando no lo parezcan. Por su parte, las preguntas que llevan al estudiante a conjeturar, a proponer problemas y buscar abstracciones y generalizaciones pueden situar a los estudfiantes en el centro de las prácticas matemáticas*"[31].

La segunda, relacionada con las características de aquellos problemas matemáticos abordables en el aula de matemáticas que, además de promover el hallazgo de una solución, proveen oportunidades para el desarrollo de prácticas matemáticas específicas y formas de pensamiento en cualquier contexto instruccional. Así, el autor determina que dichos problemas deben ser: *i*) fáciles de entender; no se requiere un amplio voabulario para entenderlos, *ii*) abordables de diferentes maneras, viendo las matemáticas como un campo de exploración, *iii*) introducciones a ideas matemáticas fundamentales, y *iv*) engranajes para promover el planteamiento de más problemas que involucre a los estudiantes en la construcción de las matemáticas.

Conclusiones del capítulo 1

De acuerdo con el análisis de la información, se hallan dos panoramas que enmarcan la fundamentación del problema de investigación: el primero, que sitúa los conceptos y constructos involucrados en las inquietudes iniciales (*v.g*. consolidación del conocimiento, su formación, etc.) en un marco específico como lo es el modelo de

[31] Schoenfeld, A. . (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, 1163-1175, p.1165.

instrucción DNR. Así, es posible hallar una correspondencia entre el razonamiento repetido para el aprendizaje y los constructos de este modelo de instrucción (formas de pensar, formas de entender, principios de dualidad y PRR).

El segundo, presenta un escenario de oportunidades de progreso teórico del modelo DNR, las cuales se sustentan a partir de las precisiones hechas por Sriraman et al. (2010), y el análisis del poder explicativo descrito por Schoenfeld (2000)[32] de este modelo, que convergen en la necesidad de clarificar la distinción entre las formas de entender y de pensar, así como establecer parámetros que facilite su evidencia en las producciones de los estudiantes durante las prácticas de enseñanza. Igualmente, se requieren estudios que detallen los procesos inmersos en el razonamiento repetido para el aprendizaje o de la experiencia repetida, lo cual es reforzado por la afirmación de Cooper (1991), sobre la necesidad de involucrar este constructo no solo como soporte en la construcción robusta de conceptos, sino también como elemento para la organización y reorganización de los esquemas de conocimiento.

Así mismo, los diversos enfoques para la solución de problemas son vistos, en conjunto, como formas de pensar desde el modelo DNR (Harel, 2008), y para añadir mayor precisión, se centra la mirada en la resolución de problemas retadores, en el contexto del razonamiento repetido para el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria debido a que esto es de actual interés en la educación en matemáticas.

[32] Schoenfeld (2000) presenta ocho criterios, bajo los cuales es posible clasificar un marco específico como una teoría, los cuales son: poder descriptivo, poder explicativo, alcance, poder predictivo, rigor y especificidad, capacidad de falsación, capacidad de replicación y triangulación.

Igualmente, se adoptan algunas guías para la elección de diseño metodológico, atendiendo las recomendaciones sobre la confiabilidad y validez a la hora de la recopilación de datos (Sriraman et al., 2010), los experimentos de enseñanza como estrategia para implementación de actividades en el aula (Harel, 2008), y las condiciones para el diseño de las tareas que promuevan el aprendizaje robusto de conceptos (Schoenfeld, 2020).

Por último, se puede identificar la significativa cantidad de estudios y publicaciones con reflexiones teóricas sobre el desarrollo del modelo de pensamiento DNR para el aprendizaje de las matemáticas universitarias, más no tantos para el aprendizaje de las matemáticas en niveles de escolaridad primaria o secundaria. Teniendo en cuenta la importancia señalada por Harel (2008) sobre las formas de pensar como parte esencial del currículo, y que esto permitiría satisfacer parcialmente el criterio de alcance descrito por Schoenfeld (2000), se considera necesario la realización de estudios en la escuela secundaria, tanto en el aula regular de matemáticas, como en espacios extraescolares, que movilicen saberes fundamentales en la formación del pensamiento matemático.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 Modelo de instrucción matemática – Modelo de pensamiento DNR

Buscando ofrecer un enfoque que ilustre una organización y consideraciones relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como una nueva perspectiva para la didáctica de las matemáticas, Guershon Harel consolida una propuesta siguiendo a Piaget, principalmente, en su concepción del aprendizaje como "*...adaptación dirigida a la conquista del equilibrio...*"[33] bajo tres principios: Dualidad-D, Necesidad-N y Razonamiento repetido-R. Estos principios se postulan en la ya mencionada instrucción del modelo DNR.

2.1.1 Fundamentos básicos

Si bien el modelo instruccional basado en el DNR se fundamenta en los principios antes mencionados (dualidad, necesidad y razonamiento repetido), incluye tres categorías como un esqueleto teórico: premisas, conceptos y principios.

Las ocho **premisas** buscan, por un lado, ofrecer cierto tipo de identidad para su modelo, es decir, construir y poner a disposición de la comunidad docente e investigadora un modelo o un enfoque propio para la educación matemática y, por otro lado, destacar los supuestos filosóficos y epistemológicos que guían la implementación del modelo, que además permiten operacionalizar algunos constructos para su análisis en el aula.

[33] Moreno-Armella, L. (2010). Preface to Part XI DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework by Guershon Harel. In B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education*. Londres: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 341.

Las premisas propuestas se toman de otros puntos de vista sobre el aprendizaje, ya que se trata de un conjunto ecléctico sobre la instrucción. Ese conjunto se agrupa en cuatro categorías según Harel (2010), a saber: matemáticas, aprendizaje, enseñanza y ontología (Ver Tabla 1).

Tabla 1: Conjunto de premisas del modelo de instrucción DNR

Matemáticas	Matemáticas	Conocimiento de las matemáticas que consiste en todas las formas de entender y de pensar que han sido institucionalizados a través de la historia. (Harel, 2008, citado en Harel, 2010)
Aprendizaje	Epistemofilia	Los humanos, todos los humanos, poseen la capacidad de desarrollar un deseo de perplejidad y de aprender a realizar actos mentales para resolver los acertijos que crean (Lawson-Tancred, 1998, citado en Harel, 2010)
	Conocer	Saber es un proceso de desarrollo que avanza a través de una tensión continua entre la asimilación y la acomodación, dirigida hacia un equilibrio (temporal) (Piaget, 1985, citado por Harel, 2010)
	Vínculo conocimiento-conocer	Cualquier conocimiento que los humanos conozcan es el resultado de su resolución de una situación problemática (Piaget, 1985 y Brousseau, 1997, citados en Harel, 2010).
	Dependencia del contexto	El aprendizaje depende del contexto.
Enseñanza	Enseñanza	Aprender matemáticas no es espontáneo. Siempre habrá una diferencia entre lo que uno puede hacer bajo la guía de expertos o en colaboración con pares más capaces y lo que el estudiante puede hacer sin orientación (Vygotsky, 1987, citado en Harel, 2010).
Ontología	Subjetividad	Cualquier observación que los humanos afirmen haber hecho se debe a lo que su estructura mental atribuye a su entorno (teoría del constructivismo de Piaget, ver, por ejemplo, von Glasersfeld 1983, citado en Harel, 2010; teorías de procesamiento de información, ver, por ejemplo, Chiesi et al. 1979; Davis 1984, citados en Harel, 2010).
	Interdependencia	Las acciones de los humanos son inducidas y gobernadas por sus puntos de vista del mundo y, a la inversa, sus puntos de vista del mundo están formados por sus acciones.

Aparte de las premisas y teniendo en cuenta las últimas investigaciones, Harel señala cuatro **conceptos** del modelo DNR: las FE, las FP, la necesidad intelectual y la justificación epistemológica. Son constructos emergentes de forma inductiva y cuando se incorporan a este marco permiten dar una lente teórica para el análisis del diseño de las aulas.

En una situación concreta de aprendizaje de las matemáticas, es posible que una persona (estudiante) ponga en juego varios actos mentales como el razonamiento, la interpretación, la resolución de problemas, etc. Una FE asociada a un acto mental es el resultado de dar un significado y obtener un producto basado en este acto mental (Harel, 2008). Por otra parte, "*…las observaciones repetidas de las formas de entender pueden revelar una característica cognitiva común.*"[34]

Por último, el PRR indica que "*Los estudiantes deben practicar el razonamiento para internalizar formas deseables de comprensión y formas de pensar.*"[35] denominada la FP asociada a ese acto mental.

Ahora bien, la necesidad intelectual "*...tiene que ver con el conocimiento disciplinar que se crea a partir del conocimiento actual de las personas a través del compromiso con situaciones problemáticas concebidas como tales por ellas...*"[36]. Así, Harel identifica al menos dos tipos de necesidades diferentes: la primera, relacionada con el currículo de matemáticas y su estructura; y la segunda, relacionada con las necesidades intelectuales emergentes en las aulas de matemáticas (Harel, 2018).

Sobre esas necesidades curriculares se aprecian tanto las necesidades intelectuales locales como globales. Las primeras son "*...la necesidad de construcción de conceptos*

---

[34] Harel, G. (2008-a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*, 40, p. 490.
[35] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 359.
[36] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 11.

e ideas particulares."[37] Y las segundas son "*...una secuencia parcial de preguntas centrales destinadas a ayudar a los estudiantes a construir una imagen global coherente de los propósitos del estudio de...*"[38] algún concepto o proceso matemático.

Sobre las necesidades intelectuales emergentes, se puede subrayar la complementariedad entre la necesidad de certeza y la de causalidad ya que "*...la comprensión de la causa trae consigo la certeza, y la certeza podría desencadenar la necesidad de determinar la causa...*"[39].

La necesidad de cálculo se refiere a cuantificar o calcular buscando dar sentido a aspectos aritméticos o algebraicos; la necesidad de comunicación sirve para la traducción de enunciados al lenguaje matemático desde el lenguaje natural o cotidiano, así como para formalizar ideas y conceptos; y la necesidad de estructura, que fomenta la construcción de esquemas complejos de relaciones con objetos, conceptos, entre otros (Harel, 2018).

Para concluir la sección sobre fundamentos básicos, la justificación epistemológica involucra la justificación apodíctica, relacionada con el proceso de demostración matemática; la justificación de setencia, es decir "*...una situación en la que se tiene conciencia de cómo una definición, axioma o proposición nació de una necesidad de*

[37] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 14.
[38] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 13.
[39] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 15.

resolver una situación problemática."[40]; y la meta-justificación relacionada con "*...una situación en la que uno no solo ve una demostración en términos explicativos, sino que también es consciente de cómo se produjo la demostración.*"[41].

Por último, el modelo tiene tres principios de instrucción. El **principio de dualidad** ofrece una relación entre las FE y las FP que surgen de los actos mentales mientras se desarrolla la actividad matemática. Este principio plantea que "*…los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de entender y, viceversa, las formas de entender que producen son impactadas por las formas de pensar que poseen*."[42]

El **principio de necesidad** establece que "*…para que los estudiantes aprendan las matemáticas que pretendemos enseñarles, deben tener necesidad de ellas, donde 'necesidad' se refiere aquí a la necesidad intelectual.*"[43]

2.1.2 Principio de razonamiento repetido PRR

El **PRR** tiene un apartado especial por ser el núcleo y corazón de la presente investigación. Establece que "*…los estudiantes deben practicar el razonamiento para interiorizar formas deseables de entender y de pensar.*"[44]. Además, Harel señala que

[40] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 17.
[41] Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3-27). Switzerland: Springer International Publishing, p. 20-21.
[42] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 357.
[43] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 358.
[44] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 359.

"*…la secuencia de problemas que se da a los alumnos debe exigir continuamente la reflexión sobre las situaciones y las soluciones, y los problemas deben responder a las necesidades intelectuales cambiantes de los estudiantes...*"[45] lo cual, es la base del PRR.

En Harel (2021) el PRR se describe en términos de tres acciones esenciales: internalización del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de aplicar el conocimiento de forma autónoma y espontánea...*"[46]; organización y reorganización del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de reestructurar el conocimiento en ricas redes conceptuales jerárquicas...*"[47]; y la retención del conocimiento, "*...manifestada en la capacidad de recordar el conocimiento durante un largo periodo de tiempo...*"[48].

Además, este principio está orientado a desarrollar, entre otras cosas, "atajos" que permitan resolver problemas no rutinarios. Estos problemas no rutinarios se plantean bajo un esquema particular y, según Harel, es posible distinguir entre dos formas de "atajos":

- Inhibición: si introduce y presenta a los estudiantes antes de que hayan aplicado repetidamente el proceso de razonamiento subyacente.

---

[45] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 360.
[46] Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In S. Barath, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Londres: Springer, p. 359.
[47] Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM – Mathematics Education.* 53, p.717.
[48] Ibid.

- Catalizador: cuando se puede realizar una forma abreviada de un proceso mientras se construyen en el pensamiento los vínculos conceptuales abreviados que subyacen al proceso.

2.2 Enfoques del aprendizaje en la resolución de problemas

2.2.1 Enseñanza de las matemáticas *sobre*, *para* y *a través* de la resolución de problemas

El enfoque que busca la enseñanza de la matemática *sobre* la resolución de problemas se encuentra estrechamente relacionado con el modelo de resolución de problemas planteado por Pólya en 1957, y se dirige a *"…enseñar explícitamente las fases que, de acuerdo con Pólya, los resolutores de problemas expertos usan cuando resuelven problemas matemáticos …"*[49]. Además de esto, es particular desde esta perspectiva la enseñanza de un banco de heurísticas o estrategias para abordar los problemas propuestos y dar una solución satisfactoria a los mismos (Schroeder & Lester, 1989).

La perspectiva de enseñanza de la matemática *para* la resolución de problemas, por su parte, centra la atención en las matemáticas como herramienta usadas y aplicadas en la resolución de problemas tanto de tipo rutinario como no rutinario (Schroeder & Lester, 1989). Además de esto "…*el docente que enseña para resolver problemas está muy preocupado por la capacidad de los estudiantes para transferir lo que han aprendido de un contexto de problemas a otros*"[50].

---

[49] Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton, & A. Shulte, *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 32.
[50] Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton, & A. Shulte, *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 32.

Por último, la perspectiva de enseñanza *a través* de la resolución de problemas puede ser vista "*…como un movimiento desde lo concreto (un problema de la vida real que sirve como instancia de un concepto o técnica matemática) a lo abstracto (una representación simbólica de una clase de problemas y técnicas para operar con esos símbolos).*"[51] En concordancia, el uso de fórmulas no es dado en el inicio de la actividad matemática sino que son desarrolladas y usadas posteriormente a la exploración de la situación, y conforme se conceptualizan sus elementos (Schroeder & Lester, 1989).

2.2.2 Fases del trabajo en matemáticas: una mirada al desarrollo del pensamiento matemático

Al abordar un problema matemático en la búsqueda de su solución, el resolutor debe enfrentar diversas situaciones durante el proceso y tomar decisiones, basadas en los resultados parciales que va obteniendo en la exploración del problema. Mason, Burton y Stacey (2010) relacionan dichas situaciones y decisiones con dos procesos y tres fases que se desarrollan durante el trabajo matemático, a saber: procesos de **especializar** y **generalizar**; y fases de **entrada**, **ataque** y **revisión**. Además de esto, relacionan palabras clave que sirven de rúbrica para su desarrollo y entendimiento. Los autores son enfáticos en describirlos como cualidades de la experiencia, mas que como actividades mecánicas para la solución de problemas.

Partiendo de la filosofía de que cualquier persona puede aventurarse en el desarrollo del pensamiento matemático, se determina el proceso de **especializar** como una

[51] Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton, & A. Shulte, *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 33.

actividad que puede brindar soporte para el inicio de la exploración y que implica "*…recurrir a ejemplos para aprender sobre la pregunta. Los ejemplos que elija son especiales en el sentido de que son instancias particulares de una situación más general en la pregunta.*"[52] Ahora bien, se reconoce que en algún momento se puede llegar a un estado de **estancamiento** para el cual, especializar puede ser una respuesta que favorezca la superación de dicho estado.

A medida que se especializa, surge el proceso de **generalizar**, concebido como "*…el movimiento de unos pocos casos a hacer conjeturas sobre una amplia clase de casos.*"[53], sabiendo que "*La generalización comienza cuando sientes un patrón subyacente, incluso si no puedes articularlo.*"[54]

Ahora bien, así como el trabajo entre los procesos de especializar y generalizar pueden dar paso a un estado de estancamiento, en el cual no surge idea alguna sobre cómo seguir con la exploración del problema, también es posible encontrar momentos en los cuales una buena idea viene a la mente, o cuando una idea clave ha sido escrita con anterioridad y puede ser aplicada en algún momento posterior durante el trabajo matemático. Estos momentos denominados como (**¡aha!)**, suelen ser producto de acciones como revisar y reflexionar sobre el trabajo anterior y las ideas que surgen al examinar el problema.

[52] Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* Edinburgo: Pearson Education Limited, p. 3.
[53] Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* Edinburgo: Pearson Education Limited, p. 8.
[54] Ibidem.

De igual importancia se hallan las fases en las cuales se movilizan los momentos y procesos descritos en líneas anteriores. La **fase de entrada**, que contribuye con la fundamentación de las decisiones y acciones posteriores, inicia con la lectura y comprensión del problema, y se desarrolla por medio de la respuesta a las preguntas ¿qué conozco? ¿qué quiero o pretendo? y ¿qué puedo introducir? en función de procurar la solución del problema que se está trabajando.

Por su parte, la **fase de ataque** inicia cuando se ha apropiado el problema gracias al examen inicial de este en la fase de entrada, y termina cuando el problema se abandona o se resuelve. Aquí se implementan diferentes planes concebidos por el resolutor, verificando su pertinencia y validez para avanzar o no hacia la solución del problema. En esta fase puede suceder que una idea clave favorezca progresos importantes, pero también puede conducir a largos periodos de tiempo en los cuales no se evidencian alternativas de trabajo.

Por último, y sin importar si se ha abandonado o resuelto el problema, es importante dar paso a la **fase de revisión**, la cual permite recapitular el trabajo realizado con el fin de promover y extender las habilidades de pensamiento que han sido desarrolladas. Comporta tanto el **repaso** de las ideas clave producidas con anterioridad, como la **extensión** de procedimientos y resultados a contextos más amplios que el problema tratado inicialmente. Una manera de obtener el mayor beneficio de esta fase es la escritura de las ideas que surjan para que otra persona pueda leerlas.

2.3 La matemática discreta escolar en el contexto de la resolución de problemas

La matemática discreta es un campo de las matemáticas que ha cobrado especial relevancia en la actualidad porque muchos de sus resultados son aplicables y utilizados en un amplio espectro de conocimientos y ciencias específicas. De acuerdo con las investigaciones presentadas en el ICME13, existen cinco categorías de problemas de matemáticas discretas fundamentadas en varios dominios del conocimiento en matemáticas y otras ciencias, a saber: problemas de enumeración (pensamiento combinatorio), de cambio secuencial (pensamiento recursivo), de relación entre un número finito de elementos (teoría de grafos), de procesamiento de la información (pensamiento algorítmico) y de toma de decisiones justas (teoría de juegos y votaciones/elecciones justas).

Los **problemas de enumeración**, que involucra activamente el proceso de contar, pueden ser formulados y planteados desde tres perspectivas: la primera, contar un número de elecciones a partir de una colección de objetos; la segunda, contar un número de casos combinados en una secuencia de tareas; y, la tercera, contar algo específico por medio de principios básicos como el de adición, multiplicación o inclusión-exclusión.

Los **problemas de cambio secuencial** cobran especial importancia por ser aquellos que mayor relación tienen con contextos del mundo real. Usualmente son abordables por medio del planteamiento de un modelo recursivo de comportamiento con el cual se busca, usualmente, describir de qué manera una cantidad del siguiente paso se relaciona con una cantidad ya conocida, o cuántos pasos de recursión son necesarios para un estado específico, o de qué manera inicia el proceso de recursión.

La categoría que trata sobre la **relación entre un número finito de elementos** contiene problemas en los cuales hay muchos objetos o elementos que pueden ser relacionados entre ellos por medio del emparejamiento, tal y como sucede en situaciones de redes de comunicación, de transporte, de relaciones sociales, entre otros. Incorporan la habilidad de pensar y analizar los problemas por medio de la generación de estructuras gráficas que representen dichas redes de relaciones.

Por su parte, los problemas sobre el **procesamiento de la información** están basados en la necesidad de buscar, asegurar, enviar o recibir información, casi siempre en contextos sobre la comunicación digital y el internet. Para estos, se suelen plantear problemas relacionados con el acceso, la oportunidad, la seguridad y la eficiencia del envío de información.

Por último, los problemas sobre **toma de decisiones justas,** los cuales se desarrollan y plantean en contextos relacionados con elecciones o votaciones, pretenden considerar modelos de votación en los cuales una persona puede tener, ya sea, una única elección o, una gama de opciones por elegir. En esta categoría se evalúan, igualmente, modelos de división para un grupo de personas determinando si tal división es posible, si es homogénea y si las partes divididas son idénticas.

Conclusiones del capítulo 2

Sin duda, el razonamiento repetido es un elemento clave en el aula de matemáticas de una u otra forma, considerando incluso la diversidad de maneras en las cuales puede ser comprendida en los diferentes contextos en los cuales se utiliza. Y este es un punto importante porque, en el ámbito de la investigación en educación matemática, se reclama continuar explicando y planteando los fundamentos en términos claros para conseguir avances en el campo de investigación.

Teniendo en cuenta el marco teórico expuesto anteriormente, la relación y los posibles vínculos entre el modelo de instrucción DNR y el aprendizaje a través de la resolución de problemas, pueden favorecerse y suscitarse en el aula a través del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática.

Sin embargo, debido al análisis de la literatura, acciones como la internalización, la organización y reorganización, y la retención (propias del PRR), aún deben ser estudiadas para ampliar las fuentes de información y, por lo tanto, su alcance.

Ahora bien, teniendo en cuenta la conceptualización de las experiencias de aprendizaje a partir de la metáfora de la recursión y, aceptando el supuesto de que las prácticas matemáticas tienen preludios culturales, históricos y sociales que confluyen en los fenómenos del aula, es pertinente adoptar eminentemente, aunque no exclusivamente, el aprendizaje de las matemáticas *a través* de la resolución de problemas por su consistencia en: *i*) propiciar un ambiente de desarrollo del razonamiento repetido para el aprendizaje y *ii*) movilizar los procesos subyacentes al PRR.

En resumen, el aprendizaje de las matemáticas *a través* de la resolución de problemas como componente, centrado en problemas matemáticos retadores, sirve como uno de los escenarios que favorecerá la evidencia del razonamiento repetido como elemento para la construcción de conceptos robustos y reorganizaciones de esquemas de conocimiento.

Además de esto, se consideran los procesos y fases en el trabajo matemático que son expuestos por Mason, Burton y Stacey (2010), como guía para orientar las experiencias de aula al implementar las actividades del aporte práctico, teniendo en cuenta que la investigadora será una observadora participante en el contexto experimental.

Con lo anterior, es posible construir una representación tabular (Ver Tabla 2) que sintetiza los constructos del modelo DNR, los cuales son el núcleo central de esta investigación y que, a su vez, permiten observar las evidencias en las sesiones de clase.

Table 1: herramienta analítica basada en el marco de referencia

<table>
<tr><th colspan="3">Contenido matemático discreto</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Resolución de problemas</td><td rowspan="2">Formas de entender</td><td>✓ En el momento: solución actual o posibles soluciones (correctas o incorrectas) que alguien aporta a un problema.</td></tr>
<tr><td>✓ Estable: características que subyacen a las formas de comprensión en los momentos de resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Formas de pensar</td><td>✓ Características que subyacen a las formas de entender estables que implican procesos o conceptos (correctos o incorrectos) y que establecen particularidades, potencialidades y obstáculos.</td></tr>
<tr><td>Dualidad</td><td>✓ FP a FE: directrices que caracterizan la solución o soluciones de un participante, o la elaboración de tareas, actividades, problemas, etc.
✓ FE a FP: alcance, limitaciones, potencialidades de las prácticas usuales, al solucionar problemas, que ofrece cada participante a una tarea, actividad, situación, etc.</td></tr>
</table>

	Razonamiento repetido	✓ Problemas que ofrecen un contexto alternativo, cuya vía de solución no es evidente, pero que implican los mismos procesos y conceptos que otras actividades anteriores con vistas a una comprensión profunda de los mismos o a la construcción de relaciones con otro conocimiento. - **Internalización:** se manifiesta en la capacidad de aplicar los conocimientos de forma autónoma y espontánea. - **Organización y reorganización:** se manifiesta en la capacidad de reestructurar el conocimiento en ricas redes conceptuales jerárquicas. - **Retención:** se manifiesta en la capacidad de recordar los conocimientos durante un largo periodo de tiempo.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se pretende ilustrar, además de las selecciones sobre los diversos aspectos metodológicos, las razones que justifican tal elección a partir de la teoría sobre la metodología de la investigación científica, así como las vías en las que estas permiten potenciar la exploración, análisis y modelación en relación con el problema planteado para la presente investigación.

3.1 Tipo, enfoque y diseño de la investigación

La investigación detallada en el diseño teórico se enmarca en un paradigma y enfoque de investigación cualitativo pues, debido a la formulación de la pregunta científica, es requerido, por un lado, la concepción de la realidad como una entidad dinámica, múltiple, cambiante y holísta y, por otro, una orientación a revelar los elementos que influyen en la manifestación de un fenómeno y sus interrelaciones.

Toda vez que se enmarca la investigación en un paradigma y enfoque determinado, se analizan las posibilidades de selección del diseño más apropiado para la indagación. Así, luego de un estudio completo de los diseños planteados por Hernández, Sampieri y Baptista (2014), y una lectura profunda a los documentos de Strauss y Corbin (2002), y Vollstedt y Rezat (2019), se elige la teoría fundamentada como diseño metodológico.

Esta elección se basa en dos aspectos fundamentales. El primero, sustentado en la naturaleza y carácter de la teoría fundamentada pues permite "…*apoyar la abstracción* *de los datos para desarrollar una teoría que se base en los datos empíricos…*”.[55] Esto conduce a llevar a cabo un trabajo de campo que posibilite identificar los elementos para describir, explicar y enriquecer el razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática, por medio de una fase preliminar en la que se recopilen, continuamente, nuevos datos y casos (muestreo teórico) identificando las primeras categorías que sean verificables con nuevos análisis, hasta que la nueva información no contribuya sustancialmente a revelar nueva información (saturación teórica). Esto último sabiendo que la teoría fundamentada involucra “…*un proceso iterativo y la interrelación de la planificación, la recopilación de datos, el análisis de datos y el desarrollo de la teoría*”[56].

El segundo aspecto que sustenta la elección tiene que ver con la correspondencia de los tipos de preguntas de investigación que atañen a esta metodología, y los objetivos del presente trabajo. De acuerdo con Vollstedt y Rezat (2019), la teoría fundamentada es apropiada para el estudio de fenómenos, objetos o conceptos que carecen de un desarrollo teórico suficiente o, cuando la relevancia de conceptos y sus relaciones aún no han sido corroboradas en un contexto o población particular. Esto es coherente al verificar el alcance de la investigación relacionada con el modelo DNR, la cual se ha enfocado en el estudio de los principios de dualidad y necesidad intelectual en el nivel universitario, principalmente, más no en el PRR en la educación básica y media.

[55] Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. In G. Kaiser, & N. Presmeg, *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs.* (pp. 81-100). Switzerland: Springer Cham, p. 83.
[56] Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. In G. Kaiser, & N. Presmeg, *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs.* (pp. 81-100). Switzerland: Springer Cham, p. 82.

Además de lo anterior, esta metodología favorece los intereses investigativos que buscan "*predecir y explicar el comportamiento en la interacción social*"[57] y, por ello, la pregunta de investigación del presente trabajo se fundamenta en la descripción, explicación y enriquecimiento de los procesos de internalización, organización y reorganización, y retención, que son procesos propios del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática.

3.2 Población y unidades de análisis

Debido a los hallazgos en la literatura especializada, un factor de novedad en el análisis del modelo de pensamiento DNR es el contexto en el cual se lleva a cabo, considerando que gran parte de la investigación se ha orientado en el desarrollo de la matemática universitaria. Así, un escenario constituido por estudiantes de secundaria del Instituto Técnico Olga Santamaría de Anolaima es, por sí mismo, un elemento necesario y requerido para la comprensión del fenómeno.

Ahora bien, con el ánimo de promover ambientes de aprendizaje en los cuales los integrantes involucrados se apersonen de cada paso del proceso y se responsabilicen de su conocimiento por medio de prácticas matemáticas acordadas, se propone la configuración de un grupo de estudiantes de la institución y nivel mencionados que gusten de las matemáticas y tengan la disponibilidad de participar en encuentros semanales para debatir y movilizar saberes matemáticos. Este grupo se denomina

[57] Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. In G. Kaiser, & N. Presmeg, *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs.* (pp. 81-100). Switzerland: Springer Cham, p. 83.

círculo matemático y fue estudiado en la aplicación de las actividades durante dos años y medio de trabajo tanto virtual como presencial.

De allí, como sujetos objeto de estudio, se seleccionarán las acciones y prácticas de los participantes que, de forma permanente se involucren en el proceso y asistencia a los encuentros convocados, pues son quienes se involucran en cada práctica realizada en el grupo y quienes tendrán la posibilidad de proveer información relevante para dar respuesta al problema de investigación planteado.

En ese sentido, la selección de las unidades de análisis se hace por su conveniencia (estudiantes de secundaria, que gustan de las matemáticas y que tienen posibilidad de asistencia a los encuentros), y por ser de tipo teórico o conceptual, pues es un caso que permite entender conceptos y relaciones entre estos en el marco del modelo de pensamiento DNR, por medio de un análisis iterativo de la implementación del trabajo de campo.

3.3 Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

Toda vez que se selecciona el diseño metodológico, es oportuno describir los métodos y técnicas que este incluye. En una fase inicial, de sensibilidad teórica y de conceptos sensibilizantes (Vollstedt y Rezat, 2019), el estudio tiene una naturaleza exploratoria en la cual el investigador se involucra en el contexto experimental, observando las primeras manifestaciones del fenómeno objeto de indagación, siendo "*…capaz de penetrar y dar significado a los acontecimientos y sucesos que muestran los datos*"[58].

---

[58] Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellin: Editorial Universidad de Antioquia, p. 52.

Debido a la naturaleza iterativa de la teoría fundamentada, la recolección de los datos, su análisis y desarrollo teórico no son pasos sucesivos y secuenciales sino, más bien un proceso alternante que provee, por un lado, precisión sobre las preguntas de indagación y el campo de acción y, por otro, categorías emergentes a partir de los datos que sirven como hipótesis para los análisis posteriores. Así las cosas, la primera exploración conducirá a la constitución de categorías conceptuales primigenias, las cuales son puestas a prueba con nuevos muestreos teóricos que las enriquecen, especifican, diferencian, consolidan y validan.

Pero ¿hasta qué punto se debe realizar dicho proceso iterativo de revisión de categorías conceptuales a partir del muestreo teórico? Hasta que se alcance el nivel de saturación teórica, es decir, cuando "*…los nuevos datos ya no parecen contribuir a la elaboración de categorías. Las relaciones entre las categorías están bien desarrolladas y validadas.*"[59].

Ahora bien, el proceso de evaluación de los datos recolectados se realiza bajo sendas técnicas establecidas, denominadas codificación. En Strauss y Corbin (2002) se distinguen tres, a saber: codificación abierta, codificación axial y codificación selectiva.

La **codificación abierta** es el proceso analítico por medio del cual se identifican los basamentos fundamentales de la teoría (**conceptos**), se descubren en los datos las características de una categoría (sus **propiedades**), y la escala en la cual varían las propiedades generales de esta (sus **dimensiones**) (Strauss y Corbin, 2002).

[59] Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. In G. Kaiser, & N. Presmeg, *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs.* (pp. 81-100). Switzerland: Springer Cham, p. 85.

La **codificación axial** es el "*proceso de relacionar las categorías a sus subcategorías, denominado "axial" porque la codificación ocurre alrededor del eje de una categoría, y enlaza las categorías en cuanto a sus propiedades y dimensiones*"[60].

Y la **codificación selectiva**, que es el "*…proceso de integrar y refinar la teoría.*"[61], alcanzando la saturación teórica e incorporando los **rangos de variabilidad,** entendidos como "*…el grado hasta el cual varía un concepto en cuanto a las dimensiones de sus propiedades […] por medio de un muestreo que busca la diversidad y los rangos [de estas]*"[62].

Por último, es importante tener en cuenta que estas técnicas de codificación no son una receta o algoritmo para la construcción teórica. Se encuentran mediadas por acciones y construcciones (o interrupciones) por parte del investigador, que apoyan la mirada objetiva de los datos sin perder la sensibilidad teórica frente a estos.

Estas acciones y construcciones se materializan en la producción de **memorandos** y **diagramas**. Los primeros, que se constituyen en notas escritas sobre las ideas relacionadas con el registro del proceso analítico, las conexiones conceptuales entre categorías, las decisiones metodológicas, los pasos de planificación, la selección de casos, entre otros (Vollstedt y Rezat, 2019).

Los segundos, siendo dispositivos visuales que favorecen el distanciamiento del investigador cuando está sumergido en las especificidades de los datos, y que le

[60] Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellin: Editorial Universidad de Antioquia, p. 134.
[61] Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellin: Editorial Universidad de Antioquia, p. 157.
[62] Ibid.

permiten tener una visión holista sobre la relación entre conceptos, categorías, enlaces gráficos entre elementos identificados, etc. (Vollstedt y Rezat, 2019).

3.4 Trabajo de campo

Atendiendo a las consideraciones del diseño metodológico seleccionado, el trabajo de campo se inicia con la aplicación de dos actividades exploratorias basadas en cuatro problemas retadores que servirán, por un lado, para la caracterización de la población (habilidades, capacidades, prácticas discursivas, etc.), y por otro, para iniciar con la fase de sensibilización teórica, vía la construcción de las categorías primigenias que servirán de hipótesis para el diseño de la secuencia de actividades de la investigación.

Posteriormente, se consideran tres actividades basadas en ocho problemas retadores, cuya solución posibilita la intersección de diversos campos de conocimiento para la descripción, explicación y enriquecimiento del razonamiento repetido para el aprendizaje de la matemática, y que constituyen el aporte práctico de la presente tesis. A continuación, se ilustran tales actividades.

3.4.1 Fase preliminar de investigación

Se propone una fase preliminar que busca explorar el contexto experimental en el cual se desarrollará la investigación, consiguiendo un conocimiento profundo de las dinámicas de participación de los sujetos involucrados. Esto servirá de apoyo para el análisis de las producciones obtenidas, por medio de los métodos de la teoría fundamentada y, así, obtener una base conceptual para el diseño de las actividades que constituyen el aporte práctico de la presente investigación.

3.4.1.1 Actividades de la fase preliminar

A continuación, se describen las dos actividades implementadas en la fase preliminar. La construcción de la primera se fundamenta en la práctica clásica de proponer problemas conocidos y resueltos con anterioridad por la docente, y que son usuales en el aula de matemáticas de secundaria. La construcción de la segunda actividad obedece a las dinámicas que se van desarrollando en el contexto experimental a medida que se va obteniendo un conocimiento de este.

Actividad 1 – Enumerando, ando.

Esta actividad se encuentra basada en un problema clásico del campo de la combinatoria tomado de una competición matemática. El problema se encuentra formulado, inicialmente, con cuatro opciones de respuesta, pero en el planteamiento durante la fase preliminar se suprimen tales opciones para obtener datos con un rango mayor de acciones e interacciones al ser resuelto por los participantes. A continuación, se ilustra la ficha de descripción de la actividad.

Objetivo:	Construir productos cognitivos derivados de la resolución de problemas de pensamiento combinatorio, utilizando las herramientas y algoritmos disponibles, con el fin de determinar la solución de estos.
Sugerencias metodológicas:	La propuesta está basada en actividades de olimpiadas matemáticas[63] relacionadas con problemas de matemáticas discretas. Específicamente, esta primera actividad se encuentra relacionada con el pensamiento combinatorio. Con esa actividad se promueve el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de secundaria cuando están

[63] Los problemas de esta actividad se toman de los problemas de preparación Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad del Valle, recuperado de https://drive.google.com/file/d/14xZyJFs9aNT6N4ik3mFApdw-6BF4XXfT/view el 15 de julio de 2021.

	involucrados en la resolución de problemas matemáticos. Se espera que la actividad se desarrolle en un tiempo de seis sesiones de 90 minutos cada una.
Materiales:	Lápiz, papel, calculadora.
Introducción:	La actividad se compone de un problema de razonamiento combinatorio en el cual se plantea un cuestionamiento para ser resuelto por los participantes y que se ha denominado “el problema de las placas”. Allí se propone a los participantes el reto de determinar la cantidad de matrículas que se pueden hacer en cierta ciudad, formadas por dos letras diferentes seguidas de cinco dígitos diferentes.

Problema 1 - ¿Cuántas placas pueden hacerse?

En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. ¿Cuántas matrículas pueden hacerse?

Actividad 2 – Acercándose a un mundo binario

Esta actividad se basa en tres problemas, el primero de los cuales fue seleccionado de un banco de problemas conocido por la investigadora en uno de los seminarios de su formación de pregrado. Los restantes dos problemas fueron seleccionados posteriormente y con base en el hilo conductor que se desarrolló al implementar el primero con los participantes. A continuación, se presenta la ficha de descripción de la actividad.

Objetivo:	Resolver problemas de matemática discreta que involucran el uso de los números en su representación binaria, planteamiento de algoritmos y adición de números naturales.
Sugerencias metodológicas:	Se desarrolla esta actividad con base en problemas de matemática recreativa y de olimpiadas cuya explicación y hallazgo de su solución viene determinada por el uso de los números en su representación binaria, por la unicidad de sumas de potencias de base 2, o la determinación de algoritmos en el contexto de la representación binaria de números naturales. En ese sentido, se requiere que los participantes conozcan y manejen el concepto de sistema de numeración para un sistema

	de representación y los algoritmos aditivos y multiplicativos de los números naturales.
Materiales:	Tarjetas de números, lápiz, papel, calculadora.
Introducción:	La actividad se compone de tres problemas sobre procesamiento de la información con sendos cuestionamientos para ser resueltos por los participantes. El primero de estos, denominado “el problema de las tarjetas”, propone a los participantes determinar la forma en que uno de ellos puede adivinar un número del 1 al 60 en un aparente “truco de magia”. El segundo problema, denominado “el problema de la barra de plata”, se sitúa en el contexto del intercambio de plata entre un arrendador y un arrendatario, bajo ciertas consideraciones de eficiencia en la entrega y devolución de esta. El tercer problema, denominado “el problema de los ceros”, plantea el reto de determinar la cantidad de ceros que es necesario escribir para los números naturales del 1 al 256 en su representación binaria.

Problema 1 – ¡Yo puedo adivinar el número![64]

La docente propone a un participante que piense en un número entre 1 y 60. Luego, este debe indicar en cuál de las siguientes tarjetas se encuentra el número que pensó. La docente dirá el número que pensó el estudiante, basada únicamente en la información de las tarjetas en las cuales se halla, en un aparente “truco de magia” ¿Por qué el truco de magia funciona? ¿Hay alguna explicación matemática para ello?

0 CARD					
1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59

1 CARD					
2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59

2 CARD					
4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	

3 CARD					
8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	

4 CARD					
16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	

5 CARD					
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	

[64] Problema propuesto por la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta, en el seminario Aritmética, desarrollado en el segundo semestre de 2011 en la Universidad Pedagógica Nacional.

Problema 2 – Pagando el alquiler[65]

Un buscador de plata no podía pagar su alquiler de marzo por adelantado. Tenía una barra de plata pura de 31 centímetros de largo; de modo que hizo con su casera el siguiente arreglo: Le dijo que cortaría la barra en pedazos más pequeños. El primer día de marzo le daría a la casera un centímetro de la barra, y cada día subsiguiente le agregaría otro centímetro más. Ella conservaría la plata en prenda. A fin de mes, el buscador esperaba estar en condiciones de pagarle la renta completa, y ella le devolvería los pedazos de la barra de plata.

Marzo tiene 31 días, de modo que una manera de cortar la plata era dividirla en 3 1 partes, cada una de un centímetro de largo. Pero como era bastante laborioso cortarla, el buscador deseaba cumplir el acuerdo dividiéndola en el menor número posible de partes. Por ejemplo, podía darle a la casera un centímetro el primer día, otro centímetro el segundo día, y el tercer día podía entregarle una parte de tres centímetros y recibir a cambio las dos partes anteriores de un centímetro.

Suponiendo que las porciones de barra fueran entregadas y devueltas de esta manera, ve si puedes determinar el menor número posible de partes en las que el buscador debe dividir su barra de plata.

Problema 3 - ¿Cuántos ceros escribirías?[66]

¿Cuántos ceros escribimos cuando escribimos todos los enteros del 1 al 256 en binario?

3.4.2 Fase de investigación

Considerando el hecho de que las actividades de la fase preliminar promueven, principalmente, la exploración de los problemas a través de los recursos disponibles, los conocimientos previos individuales y colectivos, las herramientas de comunicación y las reglas de producción de conocimiento enmarcadas en las prácticas aceptables

[65] Problema tomado del libro de Martin Gardner, *Matemática para divertirse*, publicado en 1986 cuyo título es La barra de plata (p. 15).
[66] Problema tomado en Mike's Math Page recuperado el 19 de julio de 2021 en el enlace https://mikesmathpage.wordpress.com/2014/07/19/a-great-counting-problem-for-kids-involving-binary/

dentro de la comunidad particular que se conforma con el círculo matemático, en la fase de investigación se busca la construcción de actividades que promuevan otros procesos matemáticos como el de conjeturar, justificar o demostrar.

Así las cosas, los problemas involucrados en las actividades que se presentarán a continuación, buscan promover la formulación y perfeccionamiento de conjeturas, vía la construcción inicial de argumentos para su justificación.

3.4.2.1 Actividad 3 – Más allá de un sistema binario

Esta actividad está basada en las inquietudes que surgen dentro de los participantes, al realizar actividades con problemas que involucran el manejo del sistema binario. El esquema de pregunta "Y ¿qué pasa si…?" es lo que motiva a pensar en sistemas de numeración con un conjunto de dígitos mayor que el binario y, por tanto, en que las agrupaciones que representa cada dígito según su posición fuesen en potencias cuyas bases sean diferentes a la base 2. Estos problemas son creados y adaptados de esquemas de problemas relacionados por lo cual, son de autoría propia.

Objetivo:	Explorar representaciones alternativas de los números naturales siguiendo el esquema de un sistema de numeración posicional en una base diferente a la decimal y binaria.
Sugerencias metodológicas:	La propuesta está basada en el conocimiento y manejo del sistema de numeración decimal y binario para la representación de números naturales. Así, los estudiantes deben conocer dichos sistemas, identificando el rasgo fundamental de estos: los dígitos representan una cantidad diferente de unidades de acuerdo con la posición en la que se encuentren.
Materiales:	Lápiz, papel, calculadora.
Introducción:	La actividad se compone de dos problemas sobre las representaciones de los números naturales en sistemas de numeración base 2, 3 y 5. El primero, busca familiarizar a los

	estudiantes con el cambio de representación de un número natural entre bases diferentes, y la equivalencia en unidades de cada dígito según su posición. El segundo problema busca fortalecer la necesidad de contar basados en números que se encuentran representados en un sistema de numeración base cinco. Este problema es una adaptación de aquel titulado “¿cuántos ceros escribirías?” descrito en la fase preliminar de la investigación.

Problema 1 - ¿Y qué pasa si las agrupaciones de números son diferentes?

Teniendo los sistemas de numeración en base dos, base tres y base cinco, ¿cuál es la representación de cada uno de los siguientes números en las otras dos bases?

$$101101_{(2)}$$

$$201112_{(3)}$$

$$11001_{(5)}$$

Problema 2 - ¿Cuántas veces se repite cada dígito?

¿Cuántos ceros, unos, doses, treses y cuatros escribimos cuando escribimos todos los números enteros del 1 al 3125 en sistema base cinco?

3.4.2.2 Actividad 4 – Paridad más allá de un sistema binario

Se propone una actividad con tres problemas que buscan ampliar el concepto de paridad como recurso para el análisis de diversas situaciones matemáticas. Los dos primeros problemas son tomados y adaptados de la *55th Dutch Mathematical Olympiad* de 2016, modificando en el segundo problema el sistema de numeración a uno base 8. El problema 3, es de autoría de la docente, basado en las necesidades que se estiman serán emergentes durante la solución del problema 2.

Objetivo:	Ampliar la noción del concepto de paridad a través de problemas enmarcados en un sistema de numeración en base 8.

	Desarrollar la noción de paridad como un recurso para el análisis de cierto tipo de problemas Construir un algoritmo de adición en el sistema de numeración base 8.
Sugerencias metodológicas:	Los problemas planteados requieren un manejo considerable de los sistemas de numeración en una base diferente a la decimal y, por tanto, el conocimiento de los rasgos principales de un sistema posicional. Además, se debe manejar el significado de la notación subíndice para identificar la base en la cual está situada la representación del número.
Materiales:	Lápiz, papel, calculadora.
Introducción:	La actividad se compone de tres problemas sobre la noción de paridad en el sistema de numeración base 8 y 10. El primero, busca determinar la paridad de una suma de acuerdo con el carácter de paridad de los sumandos. Es decir, si dos sumandos tienen la misma paridad, la suma es un número par y, si la paridad de los sumandos es diferente, entonces la suma es un número impar. El segundo problema busca incentivar la construcción de un algoritmo para la suma de números naturales en un sistema de numeración base 8, además de recurrir al proceso de conteo como necesidad en la solución de un problema. El tercer problema persigue la consolidación del manejo del algoritmo de adición construido en el segundo problema proponiendo ejercicios en los que sea necesario considerar permanentemente la cantidad de unidades que representa cada dígito según su posición.

Problema 1 – par + par, impar + impar, par + impar e impar + par

Frank tiene dos números enteros que suman 26. Kees suma dos números enteros más a este y obtiene 41. Peter adiciona otros dos números enteros a este y obtiene 58. ¿Al menos cuántos, de los seis números sumados, son impares?

Problema 2 – Que la suerte nos acompañe

Diez y seis balotas numeradas del $1_{(8)}$ al $20_{(8)}$ están en una jarra. Jorge extrae de la caja una de las balotas de manera aleatoria. Luego extrae otra balota aleatoriamente de las restantes en la jarra ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las balotas extraídas sea un número par?

Problema 3 – A sumar se dijo.

¿Cuál es el resultado de?

$$34_{(8)} + 14_{(8)}$$

$$107_{(8)} + 11_{(8)}$$

$$72_{(8)} + 21_{(8)} + 15_{(8)}$$

3.4.2.3 Actividad 5 – Teoría de números en sistemas de numeración

Los problemas de esta actividad buscan que los estudiantes determinen un criterio de divisibilidad sobre la paridad en sistemas de numeración con base impar (p. ej. base 5 y 9), de tal forma que se favorezca su comparación con el criterio de paridad en sistemas de numeración con base par (p. ej. base 2, 8 y 10). Además de esto, se promueve la consolidación del conocimiento sobre el algoritmo de adición de números naturales en sistemas de numeración de cualquier base. Los dos primeros problemas son construcciones a partir de esquemas similares que suelen proponerse en competiciones matemáticas. El tercer problema es de autoría propia.

Objetivo:	Determinar criterios de paridad para sistemas de numeración con base par e impar.
Sugerencias metodológicas:	Es requerido el dominio de algoritmos para la suma de números naturales representados en cualquier sistema de numeración, además de conocer que, en sistemas de numeración con base un número par, la paridad de un número se determina a partir de la paridad del último dígito.
Materiales:	Lápiz, papel, calculadora.
Introducción:	El primer problema propuesto busca que se consolide el algoritmo de adición en sistemas de numeración a la vez que pretende introducir el criterio de paridad en un sistema de numeración con base un número impar.

	El segundo problema pretende retomar la necesidad de conteo para la solución de un problema que involucra el criterio de paridad de un número en un sistema de numeración con base un número impar. El tercer problema persigue el uso de la noción de paridad como recurso para determinar la cantidad de formas de construir un número a partir de la suma de una cuádrupla de números específicos.

Problema 1 – buscando números impares

¿Cuál es el número impar de dos cifras en base cinco cuya suma de dígitos es máxima?

¿Cuáles son los números impares de tres cifras en base cinco y base nueve, respectivamente, cuya suma de dígitos es máxima?

Problema 2 – ¿Cuántos de cada uno?

¿Cuántos números entre $1_{(5)}$ y $1004_{(5)}$ son pares? ¿Cuántos son impares?

3.5 Previsión de los resultados

El aporte práctico se basa en una secuencia de actividades sustentadas en problemas retadores que promueven el razonamiento repetido como soporte para el aprendizaje de la matemática con estudiantes de secundaria. Esta secuencia contiene, además, algunas sugerencias para el diseño de actividades correspondientes con el objeto de investigación.

Por otro lado, el aporte teórico se basa en la descripción, explicación y formas de enriquecer el razonamiento repetido como estrategia de aprendizaje de la matemática con estudiantes de secundaria mediante la resolución de problemas retadores.

Conclusiones del capítulo 3

Este capítulo permite la orientación en la estructura metodológica de la investigación, pero, además, propone y explicita todas las justificaciones necesarias para la adopción de cada suposición, diseño, instrumentos teóricos y prácticos. Es importante llamar la atención sobre la importancia de adoptar un paradigma y enfoque cualitativo pues es, justamente, lo que permite centrar la atención en el desarrollo del aprendizaje en el complejo proceso de razonar repetidamente.

Además de esto, se hace visible la fuerte correspondencia que hay entre los métodos teóricos y prácticos utilizados y el propósito de la tesis el cual, por un lado, busca la comprensión y modelación de un fenómeno específico, y por otro, pretende hacer un aporte teórico consecuente con el programa posgradual que se cursa.

Por último, vale la pena resaltar que la descripción de las fases de investigación y lo que ellas comportan, permiten colegir fácilmente la no linealidad entre estas, por lo cual, es posible el desarrollo de más de una fase en un mismo momento o, incluso, estar desarrollando primero una fase que, en apariencia, debería ser posterior a otra.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

El presente apartado se divide dos partes: la primera, que constituye la presentación de los resultados de la fase preliminar por medio de la exposición de un esquema inicial que sigue el curso de razonamiento de los estudiantes al resolver los cuatro problemas de las primeras dos actividades; y, la segunda, que incorpora los resultados de la implementación de las tres actividades restantes, valorando y enriqueciendo el esquema emergente en la fase preliminar.

4.1 Resultados fase preliminar

Al analizar la evidencia recolectada por medio de la codificación abierta, se hallan algunos elementos de consideración en términos de la descripción del razonamiento repetido para el aprendizaje, a saber:

- El uso frecuente de mediadores como tablas de datos numéricos y no numéricos, representaciones posicionales de los números naturales por medio de cajas y alfas, las tarjetas simétricas de colores de acuerdo con propiedades de los números involucrados en el problema y empleo de los algoritmos usuales de adición y multiplicación en el sistema de numeración decimal.
- Las reiteradas estrategias que son empleadas para exploración de los problemas como el trabajo sobre un conjunto de dígitos o vocales más pequeño, construcción de razonamientos para ejemplos diferentes con una menor cantidad de variables, proponer particiones específicas como ejemplos para aproximar soluciones, el análisis de la eficiencia de una respuesta obtenida, y

usar casos conocidos como símiles o engranajes para extender la comprensión de los procedimientos que conducen a una solución del problema.

- Los criterios habituales para la selección de un registro de representación o de las estrategias empleadas que fueron descritas anteriormente, de acuerdo con su pertinencia y según la cantidad de datos involucrados en el problema, o el momento en el cual deben ser aplicados durante el proceso de solución del problema.

Una muestra de los anteriores elementos se ha dispuesto en el Anexo 2 de este documento. En el tratamiento de dichos elementos por medio de la codificación axial, se identifican nueve acciones que se categorizan en cuatro niveles, de acuerdo con las funciones asignadas que les asignan los participantes durante la solución de los problemas. A continuación, el detalle de esto.

4.1.1 Categorías de acciones identificadas en la solución de los problemas

En el **Nivel 1 - acciones globales**, se ubican dos acciones de carácter global que sustentan la formulación de un plan general de solución para el problema, alejándose de sus singularidades. Ayudan al participante a tomar distancia en el proceso de solución y a construir una visión general del curso adecuado a seguir. Tales acciones son:

- **Dividir el problema**: analizar el problema dividiéndolo en partes pequeñas sobre las cuales usar un mediador, una heurística o tomar decisiones sobre cuándo o cómo usarlos. Luego se unen las partes para ofrecer una solución completa.

- **Inmersión/emersión del problema**: ver paralelismos entre problemas auxiliares y el problema original, o entre una generalidad o proceso de inducción determinado y su comportamiento con las condiciones originales en el problema. Acudir y retornar permanentemente entre “mundos” diferentes, siguiendo el plan trazado en búsqueda de la respuesta o solución al problema abordado.

Las acciones del **Nivel 2 – acciones intermedias**, despliegan puntos de conexión entre el plan general y algunas particularidades del problema. El participante reflexiona sobre el problema, acercándose al uso de datos concretos de la formulación inicial o alternando entre diversas hipótesis. En todo caso, se usan como mecanismos de ayuda que soportan la búsqueda de solución al problema.

- **Uso de un problema auxiliar**: evaluar las condiciones del problema, modificándolas o explorando todas sus posibilidades en un intento cada vez. El que esta acción emerja depende, en todo caso, del examen cuidadoso de las premisas o condiciones iniciales que incorpora el problema.

- **Buscando una generalidad**: observar cuidadosamente el trabajo hecho para hallar regularidades y poder expresar un patrón general que las represente. Este patrón debe conducir al uso de un cálculo, de un algoritmo, o de un procedimiento, entre otros, para determinar una respuesta.

En el **Nivel 3 – acciones específicas** se agrupan aquellas que le ofrecen al resolutor la posibilidad de lo que llamaríamos “ensuciarse las manos” con el trabajo matemático. Representan el trabajo de campo con el problema, aplicando rutinas, cuestionándose, revisando cálculos, estructurando vías para agotar casos, posibilidades y alternativas, etc.

- **Evaluar las condiciones iniciales**: comprender a profundidad las condiciones del problema para así actuar en consecuencia. Se configura en el apoyo para la toma de decisiones sobre el curso del razonamiento apropiado para hallar una solución. Pueden incluir la determinación de acuerdos sobre lo que se entiende por una palabra, o una indicación, una expresión, etc., estableciendo, incluso, todas las posibilidades que surgen de conjugar afirmaciones o negaciones de dichas condiciones. Puede surgir como parte de la reflexión de algún participante, como cuestionamiento a las posibilidades de exploración o como respuesta a la necesidad de cálculo, o creación de procedimiento que plantee un cuestionamiento particular.
- **Seleccionar o decidir el punto de partida**: optar por un conjunto particular de condiciones, luego de haber analizado el planteamiento del problema, cuestionado las premisas, conjugado las condiciones iniciales y explorado sus posibilidades. Surge de la necesidad de encauzar alguna exploración, cálculo, o procedimiento; o de capturar aquello que es fundamental y relevante entre las opciones disponibles; o de dar tratamiento como problemas independientes y diferentes a las posibilidades identificadas. Puede conducir a realizar trabajo sintético (con las condiciones clarificadas buscar una respuesta), o trabajo hacia atrás (dada una respuesta comprobada, ver si conduce a las condiciones que deben ser tenidas en cuenta).

- **Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas**: ilustrar y socializar procedimientos y acciones algorítmicas, o de otra naturaleza, que contribuyen con el hallazgo de resultados que pueden ser la respuesta al problema. Está comandada por el plan original que se ha concebido, o por la inmersión/emersión entre problemas, o en el curso del trabajo inductivo. Los resultados obtenidos pueden ser parciales o totales, dependiendo de si se divide o no el problema según el plan de acción, y pueden favorecer la reflexión en el problema (atendiendo a valores específicos), o sobre el problema (acerca del enriquecimiento del plan de acción o las pautas a tener en cuenta para seguir con el trabajo matemático).

Por último, en el **Nivel 4 – acciones de engranaje** se hallan aquellas que permiten enlazar las acciones de los niveles anteriores, permitiéndole al participante desenvolverse entre estos, durante la solución del problema. Pueden, por ejemplo, ser fundamentales para un cambio de plan en el Nivel 1, o para agregar posibilidades a corroborar en el Nivel 2, o para redireccionar las acciones del Nivel 3. Aunque juegan un papel decisivo en diferentes momentos, siempre atienden a un nivel concreto, incluso cuando influye en niveles abstractos.

- **Mostrar un ejemplo (contraejemplo)**: aportar un ejemplo o instancia particular en el problema que sirva para tomar una decisión sobre el plan general utilizado para abordar el problema. El ejemplo utilizado es seleccionado cuidadosamente para alguno(s) de los siguientes propósitos:
    - corroborar un resultado y así saber si se han contemplado todos los casos posibles,

- resaltar información irrelevante que lleva a errores de cálculo o a resultados que no se ajustan a las premisas y las condiciones dadas,
- ejemplificar la búsqueda de una generalidad de procedimiento o de cálculo,
- contrastar resultados obtenidos entre diferentes participantes con el fin de ajustarlos.

- **Comunicar resultados-convencer**: exponer, ilustrar o explicar a otros las formas de proceder adoptadas durante la solución del problema. Puede tener la intención de revisar tales formas de proceder al decirlas en voz alta o, de convencerse a sí mismo y a los demás de lo apropiado del procedimiento utilizado. Se auxilia de recursos, mediadores, y argumentos para apoyar la presentación de resultados.

4.1.2 Curso del razonamiento en actividades de la fase preliminar.

Aunque se identifican las acciones y sus niveles de funcionalidad en la solución de los problemas, es necesario articularlos en el contexto del curso de razonamiento empleado por los estudiantes, de tal forma que se pueda cumplir con el objetivo de la investigación: describir, explicar y enriquecer el proceso de razonamiento repetido, al llevar a cabo actividades de resolución de problemas retadores con estudiantes de secundaria. Para esto, se analiza y presenta a continuación dicho razonamiento para cada uno de los problemas contemplados en las actividades de la fase preliminar. La presentación se organiza en bloques separados por filas sombreadas de color gris, cuando la naturaleza de las intervenciones de los participantes cambia lo suficiente para plantear escenarios de atención particular.

4.1.2.1 Actividad 1 – problema: ¿cuántas placas/matrículas pueden hacerse?[67]

Aunque es un problema clásico de la combinatoria el cual, seguramente, los participantes han estudiado en sus actividades curriculares regulares, supuso para ellos una demanda cognitiva importante la comprensión de las condiciones iniciales y, por tanto, poder determinar con claridad aquello que deberían obtener en la búsqueda de un plan para su solución.

A continuación, se detalla la forma de proceder de los participantes al iniciar la exploración del problema. La primera acción evidente entre ellos es la de dividir el problema en dos: *i*) construir y contabilizar las parejas de vocales tomadas de un conjunto de cinco (a, e i, o, u), *ii*) construir y contabilizar sucesiones de cinco dígitos tomados de un conjunto de diez (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Con esta contabilización, se utilizan narrativas algorítmicas aceptadas (como la multiplicación) para el cálculo del valor total.

Es importante hacer ver que, durante la solución del problema, los estudiantes utilizan recurrentemente el término "conjunto" al referirse a las parejas de vocales (*v.g.* "conjuntos de vocales") o a las sucesiones de cinco dígitos (*v.g.* "conjuntos de dígitos" o "conjuntos con cinco dígitos"). No obstante y, de acuerdo con lo observado en el

[67] Videos de clase en https://youtu.be/rJsVjEFmWIk - https://youtu.be/_jLEkhMtRlA - https://youtu.be/GPWUfiBuvVs - https://youtu.be/e0cHufkrk9M - https://youtu.be/FU-Zm7t66Co

análisis posterior, la noción con la que trabajaban era la de “sucesión”, mas no con la de “conjunto”.

Es de resaltar que estos problemas son instancias de un problema general, el cual supone elegir sucesiones de *n* elementos diferentes, de un conjunto de *m* elementos con $n<m$, notado aquí como *(n, m)*. Así, las parejas *(2, 5)* y *(5, 10)* corresponden a los casos de vocales y dígitos, respectivamente. Desde nuestra perspectiva, concebir y poder justificar la validez de un plan de solución para el caso *(n, m)*, sabiendo que dicho plan es aplicable a los casos *(2, 5)* y *(5, 10)* por ser instancias específicas, se constituye en la evidencia de que un aprendiz ha comprendido y resuelto, en cierta medida, el problema de las matrículas. No obstante, no es la primera manifestación evidente entre los participantes y, para llegar a este estado mental, requieren un proceso de exploración que implica la aplicación de razonamientos repetidos y de modificación de estructuras mentales.

Caso de las vocales – (2, 5)
Problema 1: construir y contabilizar parejas de vocales tomadas de un conjunto de cinco.

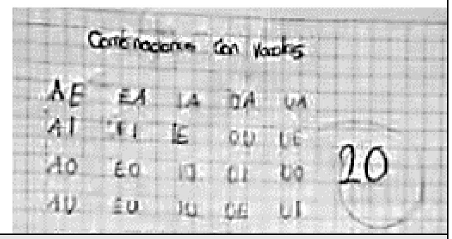
1. Evaluar las condiciones iniciales.
¿Qué significa “diferentes” en el problema? ¿Las matrículas que inicien con las vocales AE son diferentes de las que inician con las vocales EA? ¿Importa el orden de las vocales para la contabilización?

2. Seleccionar o decidir el punto de partida.
Las matrículas que inician con las vocales AE son diferentes de las que inician con las vocales EA porque se cumple la condición de que sean vocales diferentes. En ausencia de la indicación sobre el orden, se acuerda que el orden importará para la contabilización.

3. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Como hay cinco vocales, se determinan por extensión todas las parejas posibles, a saber: AE. AI, AO, AU, EI, EO, EU, IO, IU, OU. Como se considera el orden de las vocales, entonces hay 20 parejas de vocales posibles.

4. Comunicar resultados-convencer.

Se presenta la lista completa de las 20 parejas de vocales posibles, sugiriendo realizar un procedimiento análogo para calcular la cantidad de sucesiones de cinco dígitos.



Las acciones descritas sirven como construcción mental inicial aplicable al caso de los dígitos.

Caso de los dígitos – (5, 10)

Problema 2: construir y contabilizar sucesiones de cinco dígitos tomados de un conjunto de diez (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

Como las 20 parejas de vocales se pueden obtener a partir de cinco vocales disponibles, 2 vocales por matrícula y 2 posibilidades para cada pareja de vocales, se extiende el cálculo para la contabilización de sucesiones de dígitos, considerando que hay 10 dígitos disponibles, 5 dígitos por matrícula y 2 vocales seguidas de 5 dígitos, por matrícula.

2. Comunicar resultados-convencer.

Se ilustra el cálculo análogo de la siguiente forma. Para las vocales:

5 vocales en total × 2 vocales × 2 posibilidades para cada sucesión,

entonces las sucesiones de dígitos se obtienen, como sigue:

10 dígitos en total × 5 dígitos = 50 sucesiones de dígitos,

para calcular el total de las placas, se deben adicionar

10 sucesiones de vocales sin considerar el orden × 10 dígitos en total = 100 matrículas,

por lo cual, hay 50 + 100 = 150 matrículas.

3. Evaluar las condiciones iniciales.

Con base en las 150 matrículas calculadas se cuestiona ¿qué significa que la matrícula contenga una sucesión de cinco dígitos todos diferentes?

Uso de un problema auxiliar.

Problema 3: ¿Cuántas matrículas pueden elaborarse de tal forma que inicien con las vocales AE, seguidas de cinco dígitos diferentes?

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

Sólo hay una sucesión posible de vocales formado por A y E, por lo cual existen dos opciones de inicio de las matrículas: AE y EA.

Caso de los dígitos – (5, 10)

Problema 2: construir y contabilizar sucesiones de cinco dígitos tomados de un conjunto de diez (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Para contabilizar la cantidad de sucesiones de cinco dígitos se utiliza el principio de multiplicación.

2. Comunicar resultados-convencer.

La cantidad de sucesiones de cinco dígitos es:

Cinco dígitos denominados como primero, segundo, tercero, cuarto y quinto.
10 posibilidades para el primero.
10 posibilidades para el segundo.
10 posibilidades para el tercero.
10 posibilidades para el cuarto.
10 posibilidades para el quinto.
$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ sucesiones de cinco dígitos.

---

1. Inmersión/emersión del problema y uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Como hay dos opciones de parejas de vocales (AE y EA), y 10^5 sucesiones de cinco dígitos, el total de las matrículas se obtiene multiplicando estos valores.

2. Comunicar resultados-convencer.

$2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 10^5 = 200.000$ matrículas con las vocales AE.

3. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).

La docente muestra que la matrícula AE00000 se encuentra contabilizada en las 200.000 cuyas vocales son AE y, por tanto, no se cumple la condición de que todos los dígitos deben ser diferentes.

---

1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Construir un registro numérico sin considerar el orden, que muestre la cantidad de sucesiones de cinco dígitos que pueden elaborarse con los diez dígitos disponibles, trasladando una cifra a la izquierda cada vez que se construye un nuevo conjunto.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9

2. Comunicar resultados-convencer.

El registro resultante se presenta en el gráfico de la derecha. La cantidad de sucesiones de cinco dígitos que contienen el 0 son seis pues, se puede unir a cualquier otra fila de números con los cuatro últimos dígitos de esta. Así, se tienen los conjuntos **0**, 1, 2, 3 y 4; **0**, 2, 3, 4 y 5; **0**, 3, 4, 5 y 6; **0**, 4, 5, 6 y 7; **0**, 5, 6, 7 y 8; y **0**, 6, 7, 8 y 9.

3. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).

La docente hace ver que hacen falta algunas sucesiones de dígitos que se pueden hacer y que no se encuentran representados allí, como por ejemplo **0**, 1, 3, 7 y 8.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Para ajustar el cálculo se construyen conjuntos de cinco dígitos, iniciando con aquellas cuyo primer dígito es un número particular, multiplicar el resultado por la cantidad de variaciones posibles y, luego, reemplazar el primer dígito de las sucesiones por alguno de los nueve dígitos restantes.

1. Inmersión-emersión del problema y uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

La cantidad de matrículas del problema inicial se pueden calcular multiplicando la cantidad de sucesiones de cinco dígitos y las sucesiones de parejas de vocales posibles.

2. Comunicar resultados-convencer.

Como hay 9 × 25 × 10 sucesiones de cinco dígitos y, además, 20 parejas de vocales, la cantidad de matrículas es 2 × 9 × 25 × 10 = 4.500 matrículas.

#	Tiempo	Participante	Intervención
6	15:45	Alberto	Lo que hice no lo terminé de hecho. Lo que estaba haciendo era buscar una razón. Las vocales, por ejemplo, [poder] multiplicar las dos vocales [que debe ir en cada placa] por la cantidad de vocales [disponibles], o buscar una razón que me permita sacar los *números* multiplicándolos.

3. Mostrar un ejemplo (contraejemplo) y comunicar resultados-convencer.

Se presenta un plan para justificar los procedimientos hechos a ambos problemas (vocales y dígitos).

#	Tiempo	Participante	Intervención
7	20:56	Alberto	Bueno, lo que pasa es que está[n los conjuntos] AE, AI, AO, AU, EI, EO, EU, IO, IU y OU. Hay diez [conjuntos de] letras ¿sí?
8	21:04	Docente	Sí.
9	21:05	Alberto	Y pues, como el acertijo nos dice que las letras son diferentes entonces no pueden repetirse (…) entonces, de [los] diez [conjuntos de] letras, hay [o contiene cada uno] dos letras, entonces como son dos vocales, coloco [esas] dos en una placa y como son cinco vocales [de las que puedo disponer], entonces [si se multiplica] 5 por 2 [el resultado] es diez. Entonces ahí me dan [los] diez [conjuntos de dos] vocales. La primera parte me quedó bien, pero cuando le agregué una supuesta vocal, una tal [vocal] *X*, [obtuve] AE, AI, AO, AU, AX, EI, EO, EU, EX, solamente para probar la razón que estoy buscando, la que [se halla cuando] multiplique los números, llegó al final y me da 15, pero al multiplicar 6 [que es la cantidad de vocales disponibles ahora] por 2, me da 12.

Obtener las 10 parejas de dos vocales, sin importar el orden, a partir de la multiplicación de 5 y 2, buscando verificarlo por medio de la suposición de que el cardinal del conjunto de vocales no fuese de cinco sino de seis. Se construye una hipótesis sobre la multiplicación de 6 y 2 (12 conjuntos posibles), y se evalúa por medio de la escritura de cada uno de las sucesiones posibles con esas seis vocales.

En la búsqueda de una generalidad, se hace uso de un problema auxiliar que modifica las condiciones iniciales para el problema de las vocales, variando el cardinal del conjunto de elementos disponibles del cual tomarlas. A continuación, el curso de razonamiento para la solución de dicho problema.

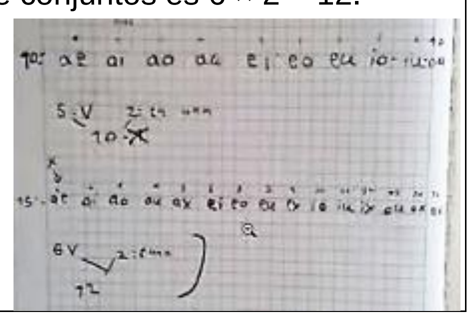
Caso de las vocales – (2, 6)
Problema 1: construir y contabilizar conjuntos de parejas de vocales tomadas de un conjunto de seis.

1. Evaluar las condiciones iniciales.
¿La cantidad total de parejas de vocales se puede obtener multiplicando la cantidad total y el número de elementos a tomar?

2. Uso de un problema auxiliar.
Cambiar el cardinal del conjunto del cual se toman los elementos de cinco a seis y siete elementos.

3. Seleccionar o decidir el punto de partida.
Para obtener 10 parejas de vocales se multiplica 5 y 2: el cardinal del conjunto de elementos disponibles y el número de elementos a tomar, respectivamente. El producto de estos valores, en cualquier caso, será equivalente al número de sucesiones buscadas. Cambiar, ahora, el cardinal del conjunto de elementos disponibles de cinco a seis, con una nueva vocal "X".

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Hay un conjunto con 6 vocales disponibles, a saber: A, E, I, O, U y "X", y se deben tomar parejas de vocales. Así, la cantidad total de conjuntos es 6 × 2 = 12.



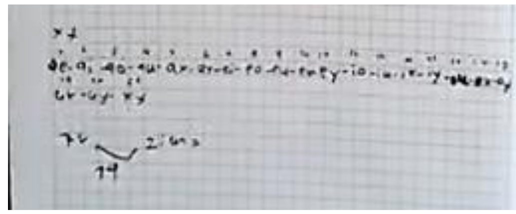
5. Comunicar resultados-convencer.
Hacer el listado completo y comparar los resultados para convencerse a sí mismo y a los participantes.

6. Seleccionar o decidir el punto de partida.

Cambiar el cardinal del conjunto del cual se toman los elementos, de seis a siete, con “X” y “V” nuevas vocales.

7. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Hay un conjunto con 7 vocales disponibles, a saber: A, E, I, O, U, “X” y “V”, y se deben tomar parejas de vocales. Así, la cantidad total de conjuntos es 7 × 2 = 14.

8. Comunicar resultados - convencer.
Hacer el listado completo y comparar los resultados para convencerse a sí mismo y a los participantes.

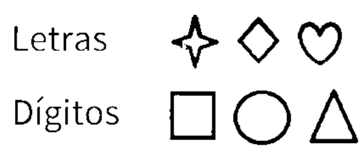


Se razona hacia atrás teniendo el caso de (2, 5) para las vocales, y luego de forma deductiva, con los casos (2, 6) y (2, 7).

En este punto los participantes entienden que resolver completamente el problema requiere de dos elementos fundamentales: la respuesta y los medios para poder justificar lo apropiado de la respuesta. Siguiendo la idea de plantear problemas auxiliares, se formulan dos de estos que permitan inducir algún algoritmo para calcular la cantidad total de conjuntos posibles.

1. Uso de un problema auxiliar.
Se propone un problema auxiliar con una cantidad de letras y dígitos disponibles menor para la construcción de una narrativa.

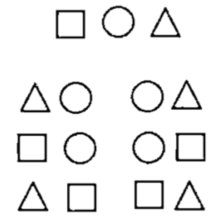
Construir matrículas de dos vocales seguidas de dos dígitos, todos diferentes teniendo conjuntos de tres vocales y dígitos, cada uno.



Caso de las vocales – (2, 3)
Problema 1: construir y contabilizar conjuntos de parejas de vocales tomadas de un conjunto de tres.
1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Con tres letras disponibles pueden hacerse seis parejas sin importar el orden.
2. Comunicar resultados - convencer.
Se hace el listado completo de las parejas de vocales. Para comunicar.

Caso de los dígitos – (2, 3)

Problema 1: construir y contabilizar conjuntos de parejas de vocales tomadas de un conjunto de tres.



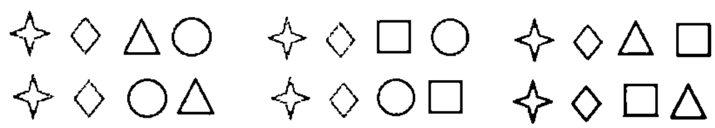
1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Con tres dígitos disponibles pueden hacerse seis parejas sin importar el orden.

2. Comunicar resultados - convencer.
Se hace el listado completo de las parejas de dígitos. Para comunicar.

---

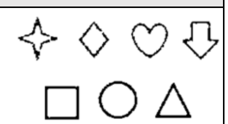
1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Por cada pareja de letras, es posible formar seis matrículas al combinar dichas letras con las parejas de dígitos.

2. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).
Para la pareja de letras, se tienen las siguientes matrículas.



3. Comunicar resultados (convencer).
Para cada pareja de letras se pueden construir seis placas diferentes y, como se tienen seis parejas de letras diferentes, la cantidad de placas totales que se pueden construir se calcula operando 6 × 6 = 36.

Uso de un problema auxiliar.
Construir matrículas de dos vocales seguidas de dos dígitos todos diferentes, teniendo sucesiones de cuatro vocales y tres dígitos.



Caso de las vocales – (2, 4)
Problema 1: construir y contabilizar conjuntos de parejas de vocales tomadas de un conjunto de cuatro.

1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Con cuatro letras disponibles pueden hacerse doce parejas sin importar el orden.

2. Comunicar-convencer.
Se hace el listado completo de las parejas de vocales. Para convencerse.

Caso de los dígitos – (2, 3)
Problema 1: construir y contabilizar conjuntos de parejas de dígitos tomadas de un conjunto de tres.

1. Comunicar resultados - convencer.
Por el problema auxiliar anterior, se sabe que, con tres dígitos disponibles, pueden hacerse seis parejas sin importar el orden.

1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas. Por cada pareja de letras, es posible formar seis matrículas al combinar dichas letras con las parejas de dígitos. 2. Comunicar resultados - convencer. Para cada pareja de letras se pueden construir seis placas diferentes y, como se tienen doce parejas de letras diferentes, la cantidad de placas totales que se pueden construir se calcula operando 6 × 12 = 72.

Con estos resultados, la docente propone a los participantes modificar el número de letras y dígitos que deben conformar una matrícula determinada, para cada de letras y dígitos. De esta manera, se busca que esta reformulación de las condiciones sirva de acicate para la construcción de un mecanismo o algoritmo que permita usar lo conocido para calcular tales respuestas, que sea funcional a todas las preguntas propuestas, y que sea pertinente al problema propuesto inicialmente.

1. Uso de un problema auxiliar.

¿Cuántas matrículas pueden elaborarse con 1 letra seguida de dos dígitos diferentes, con 3 letras diferentes seguidas de 1 dígito, con 3 letras diferentes seguidas de 2 dígitos diferentes, y con 3 letras diferentes seguidas de 3 dígitos diferentes, si los conjuntos de letras y dígitos contienen:

- 3 letras y 3 dígitos.
- 4 letras y 3 dígitos.

	3L - 3D	4L-3D
Placas	Camino 1	Camino 1
1 Letra - 2 Dígitos	18	24
3 letras - 1 dígito	18	72
3 letras - 2 dígitos	36	144
3 letras - 3 dígitos	36	144

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Cuando la cantidad de elementos a tomar es mayor que 1, se hace el listado de la cantidad de conjuntos posibles y se combinan con los datos restantes para obtener el total.

3. Comunicar resultados - convencer.

Se presenta cada resultado usando una tabla como mediador.

Se analiza la obtención de cada resultado, volviendo a aplicar la narrativa de multiplicar la cantidad de elementos disponibles tantas veces como elementos se deban elegir. Sin embargo, en esta ocasión, se modifica el procedimiento al disminuir de a una unidad cada vez que escribe un nuevo factor en la multiplicación.

4. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).
Para placas que deben ser formadas con 1 letra (casilla azul) y 2 dígitos (casillas naranjas).

$\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}$

Para placas que deben ser formadas con 3 letras (casilla azul) y 1 dígito (casillas naranjas).

$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \ \boxed{3}$

A medida que se usa un dígito o una letra en cada casilla, la cantidad de opciones para la siguiente casilla se disminuyen en una unidad. Al operar los valores, se obtiene $3 \times 3 \times 2 = 18$ para el primer caso, y $3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$, para el segundo.

5. Comunicar resultados - convencer.
Con esto los resultados de la tabla se pueden expresar con los valores azules representando la cantidad de letras en las placas y los valores naranja representado los dígitos.

	3L - 3D	4L-3D
Placas	Camino 1	Camino 1
1 Letra - 2 Dígitos	$3 \times 3 \times 2 = 18$	$4 \times 3 \times 2 = 24$
3 letras - 1 dígito	$3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$	$4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$
3 letras - 2 dígitos	$3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 = 36$	$4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$
3 letras - 3 dígitos	$3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$	$4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$

6. Inmersión-emersión del problema y uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Se retorna al problema original aplicando la narrativa construida. La operación para realizar es $5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ cuyo resultado es 604.800 placas posibles de construir.

4.1.2.2 Actividad 2 - ¡Yo puedo adivinar el número![68]

La docente líder planteó el problema, siendo ella quién realizaba el truco de magia adivinando el número que cada uno de los participantes pensaba y ponía a prueba. La cantidad de veces que fue necesario realizar el proceso de adivinanza fue numeroso,

[68] Videos de clase https://youtu.be/jjr9KYjaCyk - https://youtu.be/7XSnRt5uWsg

surgiendo la valoración de regularidades entre los números de cada tarjeta como estrategia.

1. Dividir el problema Valoración de las particularidades de los números de cada tarjeta por separado. Con base en esto, observar particularidades en los conjuntos de números que allí se agrupan.
1. Evaluar las condiciones iniciales. ¿Cuál es la particularidad que tienen los números de cada tarjeta? ¿Hay alguna particularidad entre los números de una misma tarjeta que permita descartar o considerar opciones a la hora de adivinar el número? 2. Seleccionar o decidir el punto de partida. Los números de cada tarjeta deben tener algún tipo de característica común que permite descartar o considerar opciones a la hora de adivinar el número. 3. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas. Al analizar los números de la tarjeta 0, por ejemplo, se halla que todos estos son números impares y que contiene a todos los números impares del intervalo 1 al 60. 4. Comunicar resultados-convencer. Todos los números impares que hay entre 1 y 60 están contenidos en la tarjeta 0 y, por tanto, si un participante piensa en un número par, no es requerida tal tarjeta para adivinarlo. De esta forma, en las demás tarjetas es posible ocultar o dejar ver un cierto tipo de números de acuerdo con la paridad, sobreponiendo papel calco sobre cada tarjeta con una configuración particular.   
1. Inmersión-emersión del problema. Cada tarjeta debe tener una particularidad, pero debe verse a partir de los números que ya se han adivinado hasta el momento.

2. Evaluar las condiciones iniciales.
Si se plantea la adivinanza de un número específico ¿qué tienen de particular los números de las tarjetas en las que sí se encuentra el número pensado? ¿Hay algún indicio entre los números o en algún número de tales tarjetas?

3. Seleccionar o decidir el punto de partida.
Hay alguna particularidad en un número o conjunto de números de las tarjetas en las que sí se encuentre un número particular que se esté adivinando.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Al pensar un número, la suma de los números que ocupan la primera casilla de cada tarjeta en las cuales este se encuentre, es igual dicho número.

5. Mostrar un ejemplo (contraejemplo).
El número 14 se encuentra en las tarjetas 1, 2 y 3. Los números de la primera casilla de cada una de esas tarjetas es 2, 4 y 8, respectivamente. Entonces 14 = 2 + 4 + 8.

#	Tiempo	Participante	Intervención
1	48:49	María	Profe, pues la 2explicación sería que (.3) digamos (.) en el número digamos que ella dice que, que está el número que ella eligió que es el 14, entonces digamos, en la tarjeta 1 estaba el 14[=
2	49:04	Docente	=Sí.
3	49:05	María	Entonces lo que a mí se me ocurrió pues, [fue] poner el número de la esquina ((refiriéndose al primer número de la tarjeta 1)).
4	49:10	Docente	Este es el [número] que Alejandra pensó ((encerrando en una circunferencia en la imagen de la tarjeta 1 el número 14)) y este es el [número] de la esquina ((encerrando en una circunferencia en la imagen de la tarjeta 1 el número 2)). Ajá.
5	49:16	María	Y entonces digamos, los otros dos números que yo puse, entonces esos salieron de las otras tarjetas [en las] que ella dijo que sí estaba el número. Entonces, a mí se me ocurrió tomar eso, pero pues no sé si será (.) si sea verdadero o no.

6. Evaluar las condiciones iniciales.
¿De qué manera es posible comprobar que todos los números pensados se pueden adivinar por medio de la suma de los números de la primera casilla de las tarjetas en las cuales se encuentra?

7. Seleccionar o decidir el punto de partida y uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Comprobar este mecanismo por medio de la adivinanza de más números, jugando varias veces más.

8. Comunicar resultados-convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se hace lleva a cabo el truco de magia con tres números más: 32, 33 y 59. Se tiene el detalle de tarjetas y operación.

Número	**Tarjetas en las cuales se halla el número**	**Operación**
32	Tarjeta 5 – 32	32 = 32
33	Tarjeta 0 – 1 Tarjeta 5 – 32	1 + 32 = 33
59	Tarjeta 0 – 1 Tarjeta 1 – 2 Tarjeta 3 – 8 Tarjeta 4 – 16 Tarjeta 5 – 32	1 + 2 + 8 + 16 + 32 = 59

9. Buscando una generalidad.
La docente cuestiona si la narrativa descrita como el mecanismo con el cual es posible adivinar los números pensados es válida para todos los números naturales entre el 1 el 60.

1. Uso de un problema auxiliar.
¿De qué manera comprobar que todos los números naturales entre el 1 y el 60 se pueden hallar en las tarjetas del truco de magia de tal forma que sean la suma de los números de la primera casilla de cada una de estas?

2. Inmersión/emersión del problema.
Adoptando e integrando las dos formas de abordar el problema, se requiere comprobar que todos los números naturales entre el 1 y el 60 pueden ser marcados en una combinación de tarjetas cuyos números de las primeras casillas, al ser operados con la adición, arrojan como suma el número pensado por un participante.

3. Dividir el problema.
La comprobación requerida se divide entre los participantes por medio de intervalos de números naturales, a saber:

Del 1 al 20.	Del 10 al 30.	Del 20 al 40.	Del 30 al 50.	Del 40 al 60.	Del 50 al 60 y del 1 al 10.

4. Evaluar las condiciones iniciales.
¿Los números en el intervalo asignado pueden ser expresados como los números de la primera casilla de cada tarjeta en las cuales se encuentren?

5. Seleccionar o decidir el punto de partida.
Los ejemplos mostrados (32, 33 y 59) muestran que son suma de los números de la primera casilla de las tarjetas en las que se encuentran.

6. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Registrar en una tabla cada una de las ubicaciones de los números naturales

		Números																													
Tarjeta	**0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0 -1		x	0	x	0	X	0	x	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X		X		X		X	
1 - 2			x	x			X	x			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X
2 - 4					X	X	X	x					X	X	X	X					X	X	X	X					X	X	X
3 - 8									X	X	X	X	X	X	X	X									X	X	X	X	X	X	X
4 - 16																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5 - 32																															

		Números																													
Tarjeta		31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0 -1		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
1 - 2		X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X	
2 - 4		X					X	X	X	X					X	X	X	X					X	X	X	X					X
3 - 8		X									X	X	X	X	X	X	X	X									X	X	X	X	X
4 - 16		X																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5 - 32			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

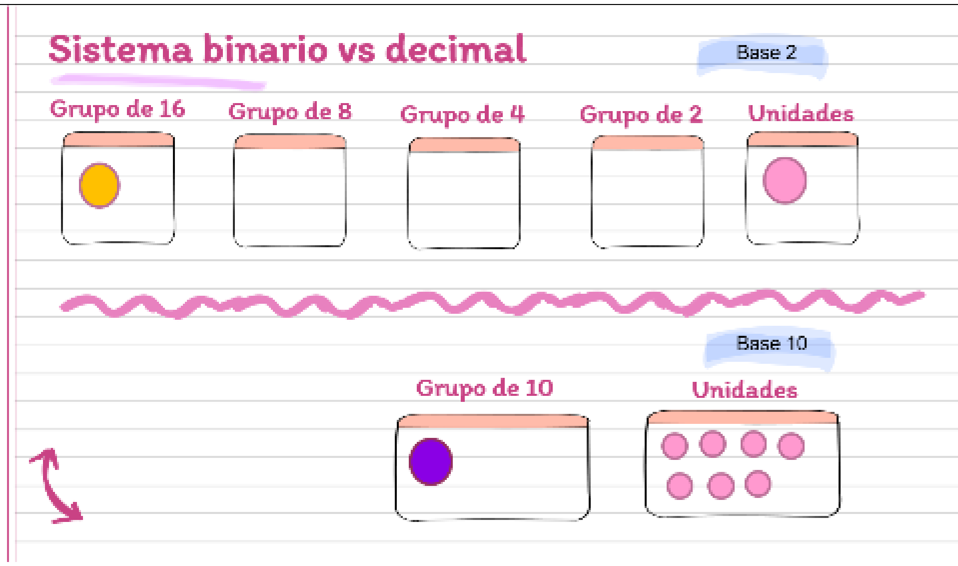
entre el 1 y el 60, inclusive, de acuerdo con su aparición en las 6 tarjetas del truco de magia.

7. Comunicar resultados - convencer.

Cada uno de los números tiene una configuración particular en las tarjetas del truco de magia que, además, al operar con la adición los números de la primera casilla de cada una de aquellas en la que se encuentre, se obtiene como resultado dicho número. La configuración es, además, única.

Se evidencia una conexión con el sistema de numeración binario. Si cada marca X se cambia por un dígito 1, y cada espacio vacío por un dígito 0, se obtiene de forma vertical la representación binaria de cada número natural en la tabla.

A partir del uso de un mediador que identifica una caja con la posición de un dígito y un alfa con una unidad o grupos de unidades como la siguiente,



Se puede establecer una relación entre la representación decimal y binaria de lo números naturales.

#	Tiempo	Participante	Intervención
6	52:26	María	Yo noto que, digamos (.) cada número de la esquina [de cada tarjeta] corresponde como a (.) al valor [que representa una esfera] de cada cajita. Digamos, en la tarjeta 0 [tomamos] el 1, que son las unidades; el 2 [de la tarjeta 1, que coincide con el valor de la segunda posición]; el 4 [de la tarjeta 2, que coincide con el valor de la tercera posición]; el 8, [de la tarjeta 3, que coincide con el valor cuarta posición]; el 16, [de la tarjeta 4, que coincide con el valor quinta posición] y el 32 [de la tarjeta 5, que coincide con el valor sexta posición].

4.1.2.3 Actividad 2 – Pagando el alquiler[69]

Por la extensión del problema y el contexto en el cual se enmarca, la evaluación de las condiciones iniciales requirió un espacio de tiempo amplio, el cual abarcó la mitad de la sesión de trabajo buscando tanto su identificación como en su conjunción a la hora de aventurar alguna respuesta.

[69] Videos de clase https://youtu.be/Pir7ZINWrpA - https://youtu.be/FixM6gcJW2A - https://youtu.be/tZXAW8MRhnA

En singular, la manera de abordar este problema se distinguió por la forma en la cual se busca la solución del problema. *Grosso modo* y hasta ahora, los participantes determinan el punto de partida con base en el cual aplican narrativas y comunican resultados. Aquí, el trabajo se basó, principalmente, en proponer soluciones que son evaluadas de acuerdo con su ajuste a las condiciones iniciales. La solución que se ajuste es la respuesta al problema.

De acuerdo con lo anterior, los problemas que se identifican aquí se basan en la verificación de que una partición específica de la barra de plata sea apropiada, tanto en términos de la eficiencia en la cantidad de cortes, como en que esta permita suplir el pago del alquiler en la justa medida por medio del mecanismo de devolución y entrega. A continuación, se ilustra el curso de razonamiento de los participantes.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.
¿Cuáles son las condiciones de entrega y devolución de trozos de plata de tal forma que la casera no tenga, en un día específico, ni una mayor ni una menor cantidad de plata de la que debe tener?

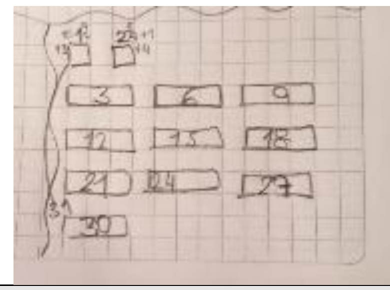
Las condiciones son las siguientes:

- Como marzo tiene 31 días, la cantidad de centímetros de la barra de plata se ajusta a estos. Así, es posible cubrir todos los 31 días.
- El primer día de marzo, el buscador debe darle a la casera un trozo de plata de 1cm de longitud.
- Cada día subsiguiente, la casera deberá tener en su poder trozos de plata cuya longitud en centímetros se corresponda con el número del día de marzo correspondiente.
- Como la plata es laboriosa de cortar, se debe dividir la barra en un número eficiente de partes para disminuir el trabajo de corte y cubrir la deuda diaria en la cantidad justa de trozos de acuerdo con su longitud.
- Los intercambios de trozos de plata pueden iniciar como sigue: primer día, dar un trozo de 1cm de longitud; segundo día, dar un trozo de 1 cm más; tercer día, dar un trozo de 3cm de longitud y solicitar la devolución de los trozos de 1cm que tiene la casera en su poder.

2. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Teniendo en cuenta la sugerencia de intercambios para los tres primeros días, el método de entregas puede ser de la siguiente forma: en el cuarto día, dar a la casera uno de los trozos de plata de 1cm que fueron devueltos en el tercer día; el quinto día, dar el otro trozo de plata de 1cm; el sexto día, cortar y dar a la casera un trozo de 6cm de longitud solicitando la devolución de los trozos anteriores. De esta manera, cortar la barra en trozos de longitud que sean múltiplos de 3cm hasta agotar la barra y cubrir la deuda del mes.

3. Comunicar resultados - convencer.
La cantidad de partes en las que se divide la barra de plata para garantizar la entrega y devolución de trozos de acuerdo con el número del día es doce. Se presentan las divisiones por medio de un gráfico de partición.



1. Evaluar las condiciones iniciales.
¿La división propuesta cumple con las condiciones iniciales del problema teniendo en cuenta la longitud de la barra y el método de entrega y devolución?

2. Seleccionar o decidir el punto de partida.
La barra de plata tiene 31cm y esta longitud debe ser la suma de las longitudes de los trozos en las cuales se corte.

3. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.
Al sumar 1cm + 1cm + 3cm + 6cm + 9cm + 12cm + 15cm+ 18cm + 21cm + 24cm + 27cm + 30cm = 167cm.

4. Comunicar resultados - convencer.
La suma de las longitudes de los trozos de barra que son propuestos excede en 136cm la longitud de la barra que se establece en las condiciones iniciales.

5. Evaluar las condiciones iniciales.
¿De qué manera interpretar el mediador que ilustra la partición de la barra de plata para que la suma de las longitudes de los trozos pequeños no exceda la longitud total?

6. Seleccionar o decidir el punto de partida.
Como la longitud de la barra de plata es de 31cm, la interpretación de la partición propuesta debe contemplar que todos los trozos, excepto tres, miden 3cm de longitud cada uno.

7. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Teniendo en cuenta la sugerencia de intercambios para los tres primeros días, el método de entregas puede ser de la siguiente forma: en el cuarto día, dar a la casera uno de los trozos de plata de 1cm que fueron devueltos en el tercer día; el quinto día, dar el otro trozo de plata de 1cm; el sexto día, cortar y dar a la casera un trozo de 3cm de longitud solicitando la devolución de los dos trozos de 1cm. De esta manera, cortar la barra en trozos de longitud de 3cm hasta agotar la barra y cubrir la deuda del mes.

8. Comunicar resultados – convencer.

La suma de las longitudes de los trozos de barra que son propuestos excede en 1cm la longitud indicada. La división sugiere que la barra debe medir 32 cm, por lo cual en el día 26 la última parte que le queda al buscador no es de 3 cm sino de 2 cm.

Con el esquema mental construido se aborda el problema desde una perspectiva diferente, llegando a encontrar que una cantidad menor de partes es posible.

1. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Dividir la barra, inicialmente, en dos partes de una longitud similar. Luego, dividir la parte la parte más pequeña en cinco pedazos, de tal forma que al menos uno de estos sea de 1cm de longitud para poder cubrir la deuda del primer día.

#	Tiempo	Participante	Intervención
9	27:38	Alberto	Entonces, primero que todo tomé el 31 y lo dividí a la mitad. Es decir 16. Bueno, aproximado porque está el 16 y el 15, no sé a cuál de los dos, pero se veía que tenía que haber una barra más (.) partida a la mitad. Mejor dicho, es como un experimento que la partí[era] a la mitad (…) Escogí el 16 por [ser] el más alto y una suma de números seguidos que dieran 15 (…) Por ejemplo, dividí la barra en 6 pedazos: [de tamaños] 1, 2, 3, 4 y 5 [centímetros], principalmente (…) 4 más dos me da 6; 4 + 3, 7; ((indicándolo en la Figura 5 que proyectaba)) en total la suma de estos ((refiriéndose al 1, 2, 3, 4 y 15)) dan 15.

2. Evaluar las condiciones iniciales y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Asumiendo que la barra se divide en partes de longitud 1cm, 2cm, 3cm. 4cm. 5cm y 16cm, es posible cubrir la deuda de algunos días de dos formas diferentes, al menos. Por ejemplo, para el día 7 se puede hallar más de una configuración.

#	Tiempo	Participante	Intervención
10	32:42	Alberto	Este grupo de barras o de partes (…) [representan] el 6, el 7, el 8, el 9, el 10, el 11, el 12, el 13 o el 14. Solo hay que saberlos sumar. Por ejemplo, tenemos (…) [el día] 6. Entonces, tomamos la barra [que mide] 4 [cm] y la barra [que mide] 2 [cm y que, en total suman 6 cm]. Después tomo la barra de 4 [cm] y la barra de 3 [cm para el día 7]. Después la barra de 4 [cm], 3 [cm] y 1 [cm para el día 8], aunque también puede colocar la barra de 5 [cm] y la barra de 2 [cm para el día 7].
11	33:05	Docente	Sí, eso te iba a decir. ¿Qué influye en la selección [de una configuración de barras]? ¿Nada?
12	33:10	Alberto	Puede darle menos, puede darle más. Lo importante es que la suma cumpla con el día.

3. Comunicar resultados - convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se ilustra la forma de sumar día a día las longitudes de las seis partes en las cuales fue dividida la barra.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las longitudes de cada una de las partes en las cuales se divide la barra de plata, de tal forma que se pueda garantizar que el número de cortes es el menor posible?

La menor cantidad posible hallada hasta ahora es de seis partes.

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados-convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Con base en la división de la barra de plata en dos partes de similar longitud (15cm y 16cm), determinar la cantidad de partes en la cual debe ser dividida la parte más pequeña verificando el cumplimiento de las condiciones.

Una de las partes debe tener 1 cm de longitud, pues es necesaria para suplir la deuda del primer día y de días impares. Otra de las partes debe tener 16 cm, pues el valor restante de la barra debe adecuarse de tal forma que la suma de piezas sea 15cm y, el tener dos piezas que corresponden a la mitad (aproximadamente) de la barra original ahorra un corte posterior.

De forma similar, se evidencia la necesidad de que una de las otras piezas deba tener 2cm de longitud y, así, sabe que al menos son necesarias más de tres particiones. Se descarta que el número de particiones sea 4 pues, en el día 19, no será posible dar la cantidad de plata necesaria. En consecuencia, si hay una cantidad menor a la propuesta hasta el momento (6 partes), esta cantidad debe ser 5.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Es posible obtener 5 partes de la barra de plata que cumplan con las condiciones del problema y, además, se sujeten a las deducciones antes descritas?
Se asume que tres partes deben tener 1cm, 2cm y 16cm de longitud, respectivamente.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados - convencer.

El pedazo restante de la barra que aún no ha sido cortado tiene 12 cm, el cual debería ser dividido en dos partes. Las posibilidades son:

- caso 1: 1 y 11 cm;
- caso 2: 2 y 10 cm;
- caso 3: 3 y 9 cm;
- caso 4: 4 y 8 cm;
- caso 5: 5 y 7 cm; y
- caso 6, 6 cm cada parte.

Luego de cada verificación día por día y caso por caso, se concluye que la división favorable es la propuesta en el caso 4.

Uno de los participantes (Carlos) hace mención acerca de la particularidad sobre la aparición de los números 1, 2, 4, 6, 8 y 16 pues, se relacionan con los valores que representan las unidades en el sistema de numeración binario trabajado en el problema de adivinanza del número. Esta conexión puede sugerir un entendimiento profundo sobre las particularidades de los problemas y, por tanto, ser susceptible de anclarse a la internalización y organización de las formas de entender y de pensar manifestadas por los participantes.

4.1.2.4 Actividad 2 - ¿Cuántos ceros escribirías?[70]

El planteamiento de este problema busca que los estudiantes internalicen la noción de posición en la representación de un sistema de numeración, lo que hace que cada dígito sea equivalente a una cantidad determinada de unidades dependiendo de dicha posición. Los participantes abordan el problema desde, al menos, tres perspectivas identificables: *i*) escribir el listado completo de números y hacer el conteo de los dígitos cero, uno a uno, *ii*) valorar un patrón o regularidad entre aquellos números que no contienen dígitos ceros en su representación, quizás con la idea de calcular el complemento de algún conjunto y, *iii*) la determinación de un patrón o regularidad en la representación de los primeros números naturales, que permita inferir la cantidad de dígitos ceros para el resto de números en la lista.

La segunda manera de abordar el problema surge del trabajo inicial realizado en la primera forma, aunque es desechada en el momento en el cual la regularidad percibida es difícil de precisar en términos precisos. La tercera manera de abordar el problema es una iniciativa que surge de forma independiente de las dos primeras formas descritas. En las líneas siguientes, se describe el curso del razonamiento.

1. Evaluar las condiciones iniciales.
   ¿Es posible realizar el conteo de los ceros, número a número, para tener la certeza del resultado del problema?

2. Seleccionar o decidir el punto de partida.

[70] Videos de clase https://youtu.be/tZXAW8MRhnA - https://youtu.be/ZLDe_HqkEuM - https://youtu.be/KxdsShdbExU - https://youtu.be/TWYr24iMZro

Teniendo en cuenta que el intervalo de números naturales propuesto es finito y, además, pequeño (hasta 256), es posible realizar el conteo número a número.

3. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Por medio de un registro tabular, escribir la representación binaria de cada uno de los números naturales entre 1 y 256, inclusive.

4. Comunicar resultados - convencer.

La siguiente tabla contiene los primeros 24 números naturales.

Número natural	**Representación binaria**	**Número natural**	**Representación binaria**	**Número natural**	**Representación binaria**
Uno	1	Nueve	1001	Diecisiete	10001
Dos	10	Diez	1010	Dieciocho	10010
Tres	11	Once	1011	Diecinueve	10011
Cuatro	100	Doce	1100	Veinte	10100
Cinco	101	Trece	1101	Veintiuno	10101
Seis	110	Catorce	1110	Veintidós	10110
Siete	111	Quince	1111	Veintitrés	10111
Ocho	1000	Dieciséis	10000	Veinticuatro	11000

5. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Hay algún patrón o regularidad en el registro de los dígitos de la representación binaria de los números naturales?

6. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados - convencer.

Se evidencia un patrón en el registro de los dígitos "uno" en la representación binaria de los primeros 24 números naturales.

#	Tiempo	Participante	Intervención
14	56:55	Alejandra	Cuando comencé en el [número] ocho (2000) comenzaba [la representación binaria] mil [1000 que corresponde a la representación del número 8 en binario], después se le ponía [el número] uno [al dígito de las unidades para representar el número nueve con 1001], después se le corría [el número] diez [1010 en representación binaria del número diez], después se le volvía a repetir el [número] uno [en el dígito de las unidades para representar el número once con 1011], y después se corrió a [el número] cien [1100 en representación binaria del número doce], y así sucesivamente.
15	57:40	Docente	Sí.
16	57:41	Alejandra	Entonces, comenzaba en 0 [representación binaria del número cero], luego en 1 [representación binaria del número uno], luego en 10 [representación binaria del número dos], luego en 11 [representación binaria del número tres], luego en 100 representación binaria del número 4], luego en 101 [representación binaria del número cinco], luego en 110 [representación binaria del

			número 6], y quedaba en 111 [representación binaria del número siete], y así se repetía (.) iba subiendo.

Si bien la docente invita a Alejandra a explorar un poco más en la observación hecha por ella en su búsqueda de la respuesta evitando la verificación en cada caso, encuentra una dificultad al ver el comportamiento cambiante del patrón, por lo cual es necesaria la inclusión de un digito más a la izquierda para los números a partir del 16.

1. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera el registro de los dígitos “uno” en la representación binaria de los primeros números naturales contribuye con el conteo pedido en el problema? En el problema inicial se solicita contar los dígitos “cero” en la representación binaria de los números naturales entre el 1 y el 256, inclusive.

2. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados - convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Con las consideraciones anteriores, se puede decir que “el [número] uno no tiene [dígitos ceros]; el [número] siete tampoco, después hasta el [número] 15 (...), luego va hasta el [número] 31; (...) y ya desde el 31 no sé cuáles más” (Participante Alejandra).

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Cantidad de ceros	0	1	0	2	1	1	0	3	2	2	1	2	1	1	0	4	3	3	2

Número	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Cantidad de ceros	3	2	2	1	3	2	2	1	2	1	1	0	5	4	4	4

Esto permite determinar, sin hacer el cálculo, que 63 tampoco tendría dígitos ceros. La forma de determinar esto se puede suponer al ver que la secuencia de números 0, 1, 3, 7, 15 y 31 (aquellos que no requieren ceros para su escritura binaria) se comporta de forma recursiva al sumar una potencia de dos cada vez pues, 0 + 1 = 1, 1 + 2 = 3, 3 + 4 = 7, 7 + 8 = 15 y 15 + 16 = 31. Con esto, se obtiene que 31 + 32 = 63.

3. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera el patrón observable sobre la ausencia de dígitos ceros en la representación binaria de algunos números, proporciona indicios sobre la cantidad de “ceros” en la representación binaria de los números naturales tomados en intervalos?

Con base en la evidencia, la cantidad de ceros necesarios para escribir los números comprendidos entre 31 y 63 deben tener alguna regularidad.

4. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados - convencer.

Como no es posible visualizar un patrón o regularidad en la cantidad de ceros por intervalos de números naturales de forma inmediata, se escribe cada número del problema en representación binaria y se totaliza la cantidad pedida por el problema. Se obtienen 773 ceros, lo cual difiere de la cantidad real por 4 ceros debido, posiblemente, a un error de cálculo.

Por su parte, Alberto propone desde el inicio la estrategia de buscar algún tipo de patrón o regularidad con base en la escritura de los primeros números y, así, hacer una hipótesis sobre el resultado. Su razonamiento se describe a continuación.

1. Evaluar las condiciones iniciales.

¿Es posible realizar el conteo de los ceros recurriendo a la observación de algún patrón o regularidad en la representación binaria?

2. Seleccionar o decidir el punto de partida.

Teniendo en cuenta que debe alguna regularidad en la cantidad de ceros en la representación binaria para el intervalo propuesto, se debe observar la representación de los primeros números y así enunciar una conjetura.

3. Usar narrativas aceptadas existentes o acordadas.

Por medio de un registro tabular, se escribe la representación binaria de los primeros 19 números naturales. Se hacen marcas rectangulares en determinados conjuntos de dígitos de acuerdo con el siguiente patrón: el primer dígito del primer número es un 1 seguido de dígitos 0 y, el último número tiene todos sus dígitos 1. A estos conjuntos los llama “conjuntos de dígitos” y se pueden construir a partir de la representación del número dos.

4. Comunicar resultados - convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Para la primera marca (color turqués) hay un número; para la segunda (color amarillo), dos números; para la tercera (color púrpura), cuatro números, para la cuarta (color negro), ocho números; y así sucesivamente. Se estima que las siguientes cuatro marcas contendrán, 16, 32, 64 y 128 números, respectivamente.

5. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Hay alguna regularidad o patrón en la cantidad de ceros que hay en cada "conjunto de dígitos"? Se debe establecer la cantidad de ceros en cada conjunto y observar la secuencia resultante.

6. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas.

La cantidad de ceros que hay por cada una de las cuatro marcas completas es como sigue: en la primera, no hay ceros; en la segunda, hay un cero; en la tercera, hay cuatro ceros; y en la cuarta, hay doce ceros.

7. Comunicar resultados - convencer.

En la secuencia 0, 1, 4 y 12, que corresponde a la cantidad de ceros en los primeros cuatro "conjuntos de dígitos", no hay evidencia de un patrón identificable. Por lo anterior, no es posible estimar la cantidad de ceros en el quinto "conjunto de dígitos" por lo que es posible que la cantidad de ceros no siga una única regularidad, sino varias.

8. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿Qué otro patrón o regularidad es observable en el registro de los ceros de la representación binaria en los primeros 19 números naturales que sirva para hacer el conteo total hasta el número 256?

9. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se observa que la representación binaria de los números 5 y 6, (101 y 110) se puede ver reflejada en forma similar entre la representación binaria de los números 10 y 12 (1010 y 1100) pues, para ambos, se agrega un dígito 0 al final, lo cual puede ser "un patrón amplificado del código binario".

10. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas y comunicar resultados - convencer.

En color amarillo, se resalta todos los números cuyo último dígito es 0 y el resto de los dígitos son 1. El color rojo, resalta todos los números cuyos últimos dos dígitos son 00, y el resto de los dígitos son 1. El color verde resalta todos los números cuyos últimos dos dígitos son 01, y el resto de los dígitos son 1. A estos conjuntos los llama "conjuntos similares".

De seguir con el mismo registro tabular, cada línea de un "conjunto similar" se repite ocho veces (para el amarillo) o siete veces (para el verde y el rojo) pues, hay nueve columnas en la tabla (las requeridas para escribir los números del 1 al 256), a las cuales se les debe restar una unidad que corresponde con el primer número, y una adicional para las líneas ausentes de cada "conjunto similar", según el “conjunto de dígitos” estudiados. Así, se debe obtener la cantidad de ceros por cada “conjunto similar” que resaltar los números específicos.

Color	Cantidad de ceros por número	Cantidad por “conjunto similar”	Cantidad total de ceros
Amarillo	1	8×1=8	8
Verde	1	7×1=7	8+7=15
Rojo	2	7×2=14	8+7+14=29

11. Evaluar las condiciones iniciales y seleccionar o decidir el punto de partida.

¿De qué manera es posible contar los dígitos ceros de los números que no han sido resaltados? Debe ser útil la construcción de los “conjuntos similares” y los “conjuntos de dígitos”.

12. Uso de narrativas aceptadas existentes o acordadas, comunicar resultados - convencer y mostrar un ejemplo (contraejemplo).

Se visualiza una contenencia entre los “conjuntos de dígitos”. Por ejemplo, el “conjunto de dígitos” amarillo se encuentra contenido en “conjunto de dígitos” morado y, a su vez, este último se encuentra contenido en el “conjunto de dígitos” negro, y así sucesivamente. Así, los números que no han sido resaltados también forman “conjuntos de dígitos” los cuales, omitiendo la columna que contiene dígitos 1, se les asigna el nombre de “cuadros reflejos”. De esta forma,

#	Tiempo	Participante	Intervención
17	54:41	Docente	Me di cuenta de que el cuadrito reflejo ((subrayando el “cuadro reflejo” contenido en el “conjunto de dígitos” morado)), intercambia los dígitos. Si en este cuadrito ((señalando el “conjunto de dígitos” amarillo contenido en el “conjunto de dígitos” morado)) hay dígitos 1, 1, 1 y 0, en el [cuadro] reflejo están los contrarios: 0, 0, 0 y 1. Entonces (…), en este cuadrito ((señalando el “conjunto de dígitos” morado)) hay tantos ceros como dígitos tiene el cuadrito anterior ((señalando el “conjunto de dígitos” amarillo)). Como el cuadro anterior tiene 4 dígitos, no importa si son unos o ceros, acá hay ((señalando el “conjunto de dígitos” morado)) 4 ceros.
(…)	(…)	(…)	(…)
18	1:02:34	Alberto	Profe, encontré algo muy, pero muy estupendo (…) Vamos a empezar con esto. En el conjunto número 3 ((el “conjunto de dígitos” negro)) que está con ocho números, como usted dice son números opuestos, [entonces] son equitativos a la cantidad de números dividido entre dos. Por ejemplo, [en ese conjunto] hay ocho números, [y] en ese mismo hay 12 [ceros] ¿por qué? (…) Voy a hacer esto más breve (…) Hay 12 ceros y es equitativo a la mitad del [la cantidad de dígitos del] conjunto [omitiendo la columna que tiene dígitos 1].
19	1:05:25	Docente	Ah, ya entiendo lo que Alberto está diciendo. Sí, si uno arma esto aquí ((señalando tanto la “caja reflejo” como el ”conjunto de dígitos” morado que están contenidos en el

			“conjunto de dígitos” negro)), esto sería ocho por tres, [que es igual a] 24, [lo cual] dividido [entre] 2 [es igual] a 12.

Con base en la explicación proporcionada por Alberto [18] y la interpretación de la docente [19], se tiene la siguiente forma de cálculo (Ver Tabla 2).

Tabla 2: Tabla de conteo de ceros

“Conjunto de dígitos”	Cantidad de números (filas)	Columnas	Total de dígitos (sin la primera columna)	Cantidad de ceros	Acumulado
Primero (amarillo)	2	2	2 × 2 – 2 = 2	2/2 = 1	1
Segundo (morado)	4	3	4 × 3 – 4 = 8	8/2 = 4	1+4=5
Tercero (negro)	8	4	8 × 4 – 8 = 24	24/2 = 12	5+12=17
Cuarto (naranja)	16	5	16 × 5 – 16 = 64	64/2 = 32	17+32=49
Quinto	32	6	32 × 6 – 32 = 160	160/2 = 80	49+80=129
Sexto	64	7	64 × 7 – 64 = 384	384/2 = 192	129+192=321
Séptimo	128	8	128 × 8 – 128 = 896	896/2 = 448	321+448=769

El valor total (769 ceros) es muy cercano al valor dado por Alejandra y Carlos. Se omiten en esta última respuesta, los dígitos ceros que tiene la representación binaria del 256, los cuales son 8. Por tanto, si se suma 769 + 8, se obtiene la cantidad que es la respuesta al problema (777 ceros).

En esta forma de calcular, se resalta el uso de pensamiento inductivo y de un algoritmo recursivo para la determinación de la respuesta. Así, es posible generalizar las indicaciones de la siguiente manera (Ver Figura 1):

“Conjunto de dígitos”	Cantidad de números (filas)	Columnas	Total de dígitos (sin la primera columna)	Cantidad de ceros
n	2^n	$n+1$	$2^n \times (n+1) - 2^n$	$\frac{2^n \times (n+1) - 2^n}{2}$

Figura 1. generalización conteo de ceros

Con esto, se desarrolla un cálculo recursivo “hacía atrás” para un número natural dado que sea potencia de 2, teniendo como ejemplo particular el número 256 que estaba dado por el problema original.

4.1.3 Esquema-modelo de razonamiento repetido en la fase preliminar.

Al estudiar, comparar y consolidar la información analizada en los razonamientos empleados por los participantes en la solución de los cuatro problemas anteriores, emerge un esquema de relaciones que permite evidenciar los aspectos que permiten describir y explicar los procesos subyacentes al razonamiento repetido, sus relaciones y propiedades (respuesta parcial al objetivo de esta investigación).

Cada uno de los caminos tomados por los participantes para dar solución a los problemas de las actividades 1 y 2 que fueron descritos anteriormente, se fijaron en un esquema particular para observar de forma global su sucesión. Luego, y teniendo como punto de partida el esquema emergente en el problema de las placas/matrículas, se realiza la comparación de los esquemas de los problemas de la actividad 2 (Ver Anexo 3), uno seguido de otro, conservando en dicha comparación el mismo orden de presentación de los problemas. Con esto se determinan los puntos de conexión, los elementos divergentes, las similitudes e invariantes de interés para el objeto de investigación, lo que permite la estructuración de un esquema final que representa a los esquemas particulares emergentes para cada problema. A continuación, se ilustra dicho esquema final.

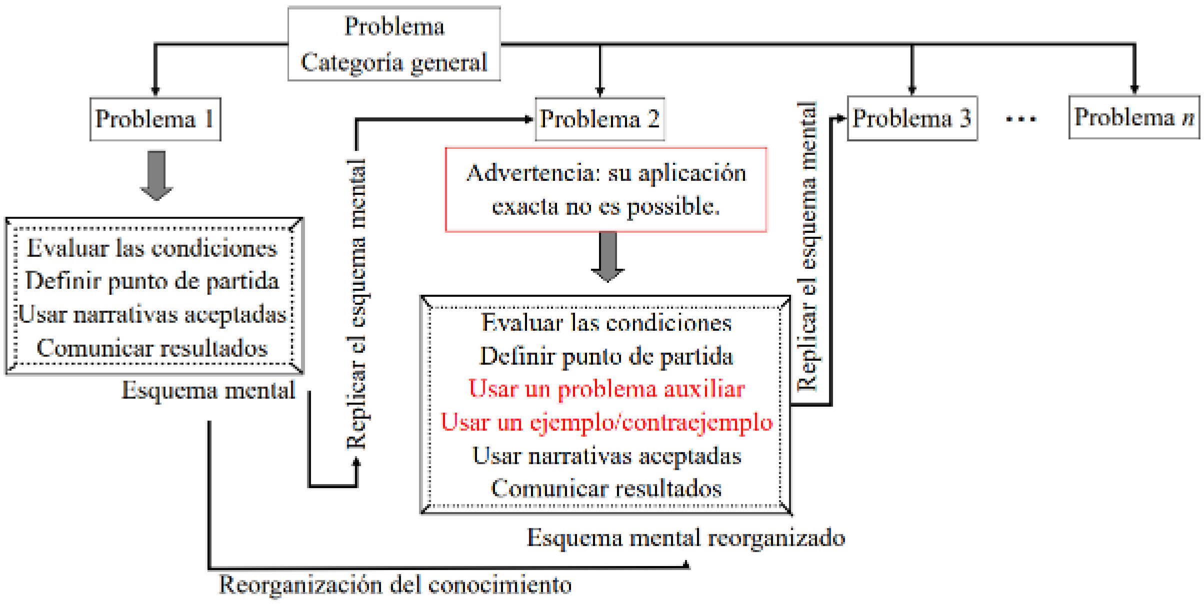


Figura 2. Esquema de razonamiento de la fase preliminar

La Figura 2 ilustra que, para una categoría general de problemas, los estudiantes analizan algunas de sus posibles instancias-problema, las cuales conservan la misma entidad, pero tienen en cierto modo, diferencias.

Los participantes abordan uno de los problemas (el primero) y desarrollan las acciones que constituyen lo que se ha llamado una *unidad básica de acciones*. Tal unidad sustenta la formación de un esquema mental y sus objetos, nociones, artefactos, heurísticas, prácticas, narrativas, etc., que les indican cómo abordar este tipo de problemas.

Luego, los estudiantes buscan replicar su esquema mental en una nueva instancia que es similar e interrelacionada encontrando que, por sus diferencias con lo abordado hasta ahora, deben ajustar y desarrollar acciones complementarias, agrupadas en lo que se denomina una *unidad de acciones de ajuste*, que permiten explorar y trabajar con las particularidades del(los) nuevo(s) problema(s). Esta unidad provoca la reorganización de la estructura mental y se lleva a cabo repetidamente hasta que, ante instancias-problema de la categoría general, es posible su resolución utilizando únicamente la *unidad básica de acciones*, habiendo conquistado así una nueva categorización de los problemas.

4.1.4 Verificación esquema-modelo de razonamiento repetido en la fase de investigación

Desde este momento, el análisis de la información y su presentación se lleva a cabo de forma diferente teniendo en cuenta la búsqueda de saturación teórica del modelo hipotético que emerge de la fase preliminar. Para esto, se conduce el mismo procedimiento de la fase preliminar: comparación de los esquemas que emergen en la evidencia de solución de los problemas incorporados en las actividades 4, 5 y 6, uno seguido de otro, conservando en dicha comparación el mismo orden de presentación de los problemas. A partir de esto, se determinan los puntos de conexión, los elementos divergentes, las similitudes e invariantes de interés, siendo estos últimos la fuente de validación y saturación teórica de cada parte del esquema.

4.1.4.1 Actividad 3 - ¿Y qué pasa si las agrupaciones de números son diferentes?[71]

Siguiendo la iniciativa del "¿Y qué pasa si…?", se orienta en las sesiones de clase el cuestionarse si es posible utilizar la idea de posición en un sistema de numeración, de tal forma que cada una de dichas posiciones represente un número de unidades diferente a las potencias de diez (sistema decimal) o de dos (sistema binario).

En este modelo de razonamiento (Ver Figura 3) se hallan cuatro tipos de problemas relacionados con la categoría inicial sobre representar un mismo número natural de un sistema de numeración a otro, a saber: *i*) de representación base diez a base dos, *ii*) de representación base diez a base tres, *iii*) de representación base diez a base dos, tres y cinco; y, *iv*) de representación base dos, tres o cinco a las bases restantes.

[71] Videos de clase https://youtu.be/EGzO4D026T0 - https://youtu.be/oq66Q9krLqQ - https://youtu.be/62ASkfjvktI - https://youtu.be/DXSD5hIC0a0

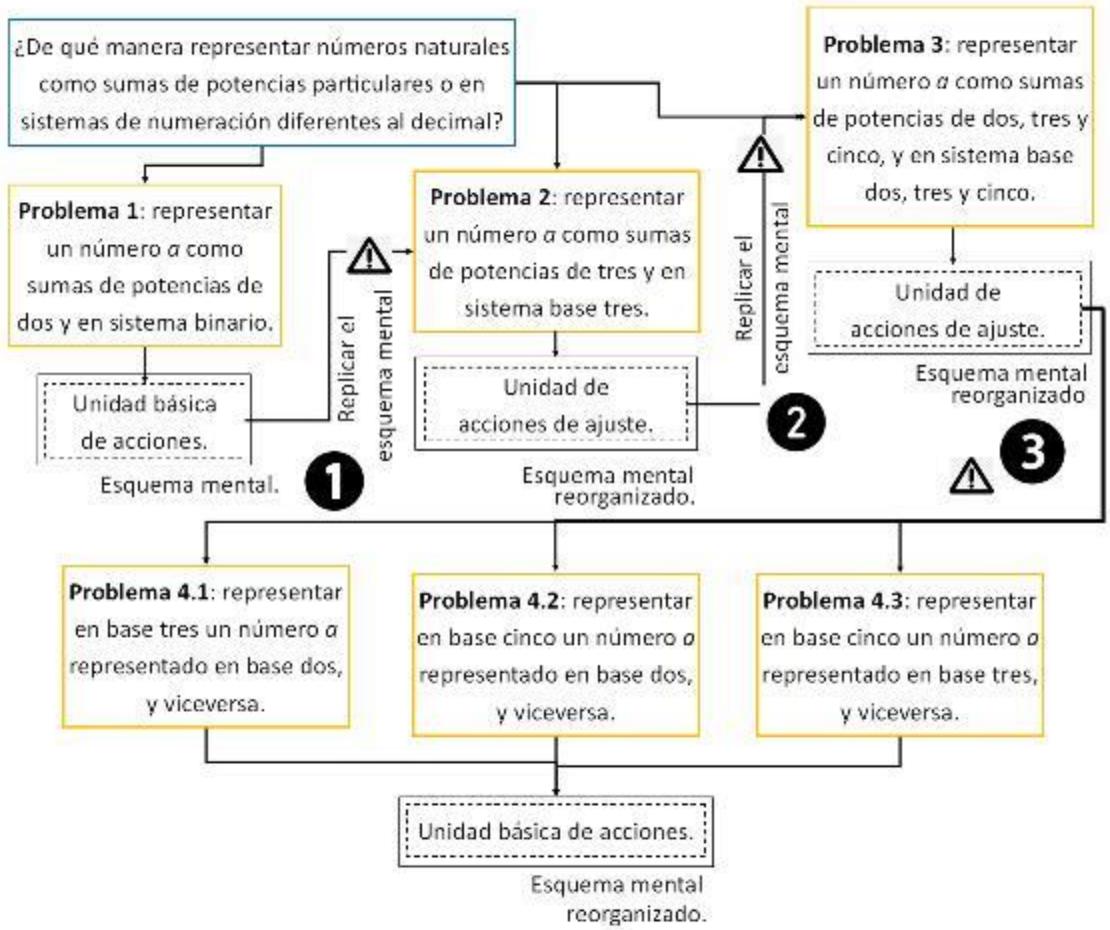


Figura 3. Esquema de razonamiento del Problema 1, Actividad 3

Uno de los impedimentos que los participantes hallan es al hacer la primera réplica del esquema mental entre el problema 1 y 2. Tal esquema se construye a partir de la unidad básica de acciones que permite representar en base dos un número dado en representación base diez (en particular 19 y 34). No obstante, al cambiar la cantidad de unidades que representa cada posición en un número, de potencias de dos a potencias de tres, deben utilizar la acciones de mostrar un ejemplo (contraejemplo) con el número siete, para luego representar en base tres los números dados inicialmente en base diez. Además de esto, deben ajustar la narrativa sobre cómo determinar el número de unidades que representa una nueva posición a la izquierda, determinando una secuencia de números que son potencias de tres, para el sistema base tres, o de dos, para el sistema base dos.

En la segunda réplica sobre el problema 3 del esquema mental reorganizado que emerge de resolver el problema 2, se evidencia un impedimento con la misma naturaleza que aquel que se ha descrito entre el problema 1 y 2, salvo el hecho de que en esta ocasión se deben considerar potencias de cinco y, por tanto, un sistema de numeración base cinco.

El impedimento hallado entre la réplica al problema 4 del esquema mental que surge del problema 3, ofrece unas particularidades en comparación con los otros dos. En este caso, se pide a los participantes partir de un número representado en un sistema de numeración diferente al decimal (dos, tres y cinco) para representarlo, igualmente, en las bases restantes. Esto supone una demanda cognitiva importante para los participantes pues, en su unidad básica de acciones y de ajuste se evidencia un uso frecuente de las narrativas del sistema decimal (quizás por ser aquel sobre el cual tienen mayor dominio), y al ser restringido este aspecto, las acciones de ajuste cobran especial valor para reorganizar el esquema mental.

Por lo anterior, el problema 4 es, en realidad, un grupo de problemas que busca fomentar en los participantes la búsqueda de narrativas que les permita representar números naturales en, al menos, estos tres sistemas de numeración, dejando el soporte que brinda la representación en el sistema base diez. Esto último se logra, al ver que los estudiantes retornan al uso de la unidad básica de acciones que resultó en del primer problema.

4.1.4.2 [72]Actividad 3 - ¿Cuántas veces se repite cada dígito?

Como adaptación del problema "¿Cuántos ceros escribirías?", de la Actividad 2 en la fase preliminar, se presuponía que los participantes utilizaran registros tabulares y de construcción de nuevos conceptos para su solución lo cual, en efecto, emplearon en el curso del razonamiento.

Una particularidad de este problema es que, por decisión de los mismos participantes, no fue resuelto completamente. La razón: el nivel de comprensión del plan que debía ser ejecutado y la suficiencia en las acciones empleadas para llegar a los resultados parciales ofrecidos, hicieron que ellos consideraran que era suficiente el trabajo desarrollado hasta ese momento y que a partir de ese momento podían dedicarse a un nuevo reto.

Lo anterior puede ser considerado un malogro en algunos contextos educativos, pero no en este. De hecho, se resalta la conciencia de los participantes en reconocer que, en ese punto de solución, basta el empleo de la unidad básica de acciones una y otra vez para completar el cálculo solicitado y que ello, posiblemente, ya no ofrece desafíos u oportunidades novedosas para la modificación del esquema mental ya establecido.

Para la categoría general del problema (Ver Figura 4), se identifica la instancia contenida en el problema 1, que busca el conteo de cada tipo de dígito en un intervalo más pequeño que el propuesto inicialmente en el problema. Para este último se emplea una UBA que integra como narrativa elaborar la lista completa de los números

[72] Videos de clase https://youtu.be/GZ4U04aEtcc - https://youtu.be/w4Y-dTmZlD8 .

del intervalo (los primeros diez números naturales) en su representación base cinco y, luego, uno a uno contar los unos, doses, treses y cuatros.

Este procedimiento genera la organización mental que supone la obtención de las cantidades de unos, doses, treses y cuatros en el intervalo que contiene los siguientes noventa números naturales (problema 2), a partir de la multiplicación de los valores obtenidos en el primer intervalo por diez. Esta forma de razonar ocasiona un impedimento que obliga al uso de un ejemplo (contraejemplo) al mostrar que las cantidades difieren en el intervalo que contiene los siguientes diez números naturales, situación que constriñe el uso de una UBAA y de la reorganización del esquema mental establecido.

No obstante, los participantes consideran que los siguientes noventa números naturales es un intervalo que puede ser dividido para facilitar el trabajo de conteo. Esto suscita la división del trabajo en el conjunto de problemas 3.1 al 3.12 aplicando la misma narrativa: elaborar la lista completa de los números del intervalo en su representación base cinco y luego contar uno a uno los unos, doses, treses y cuatros. Al final, se hace la suma de los resultados parciales para ofrecer la respuesta.

Si bien la UBA hasta ahora empleada es productiva, los participantes se percatan rápidamente que no es eficiente. El problema original incorpora un intervalo de números que sobrepasa los miles y, seguir evaluando el conteo en intervalos de diez, implica un tiempo importante para recabar una respuesta. Este impedimento exhorta a los estudiantes a formular el problema con intervalos de veinte números naturales, en lugar de diez, y a crear una nueva narrativa para el conteo.

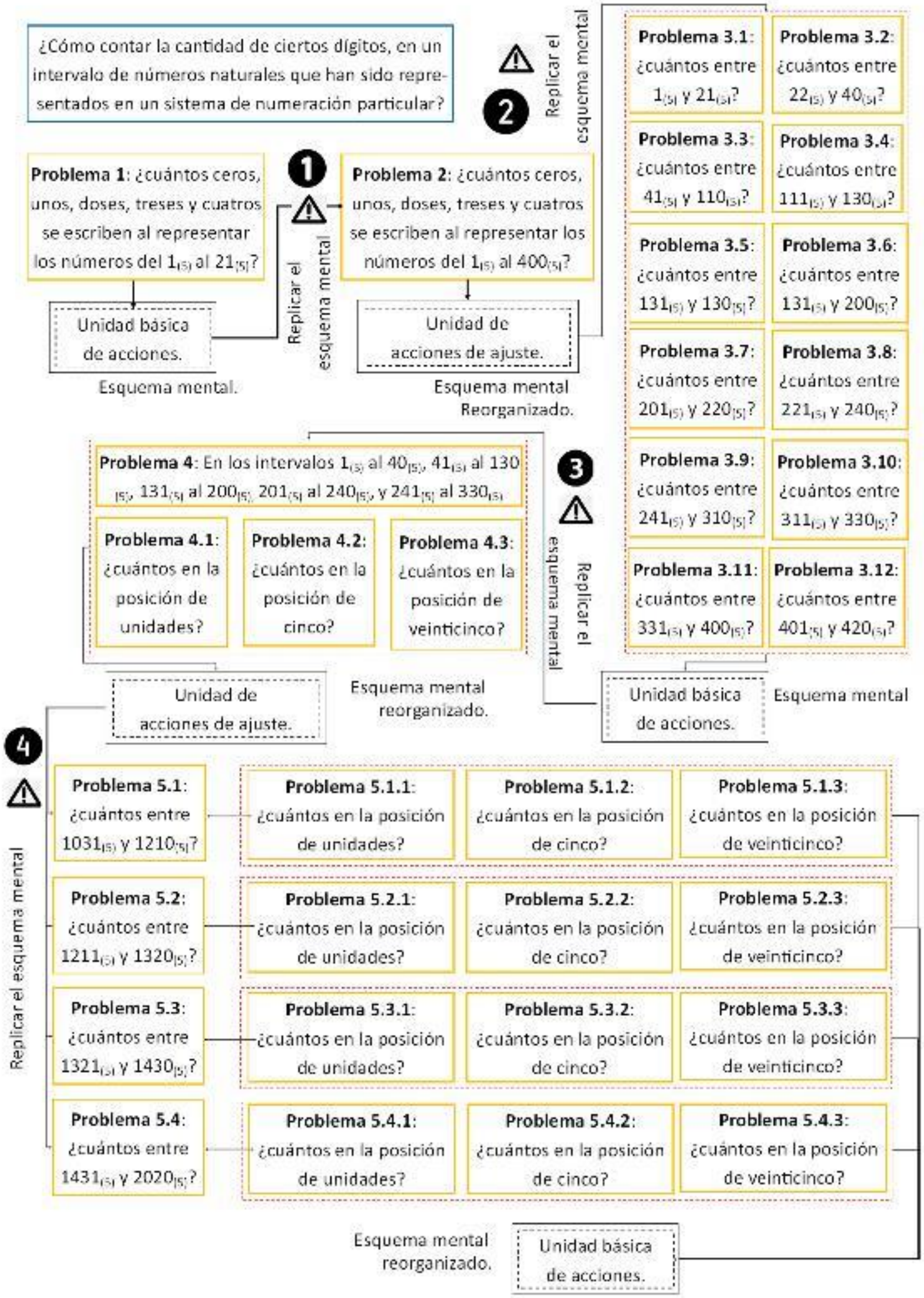


Figura 4. Esquema de razonamiento del Problema 2, Actividad 3

Con la representación tabular en base cinco de los números naturales agrupados de veinte en veinte (Ver Figura 5), surge en una UBAA tres problemas auxiliares (4.1, 4.2 y 4.3) que se basan en el análisis de la aparición de cada dígito en las posiciones de los números estudiados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

Figura 5. Representación en base cinco en intervalos de veinte números naturales

Por ejemplo, en la posición de los grupos de cinco, hay un bloque en el cual los dígitos aparecen en forma ascendente cinco veces cada uno (Ver Figura 6). Este bloque se repite, uno seguido del otro, hasta el último número del intervalo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

Figura 6. patrones de bloques de dígitos resaltados

De la misma forma sucede con los dígitos que se ubican en las posiciones que representan unidades y grupos de veinticinco. Las regularidades son evaluadas en los intervalos de veinte números naturales y se hace el cálculo de cada uno de los dígitos unos, doses, treses y cuatros (Ver Figura 7).

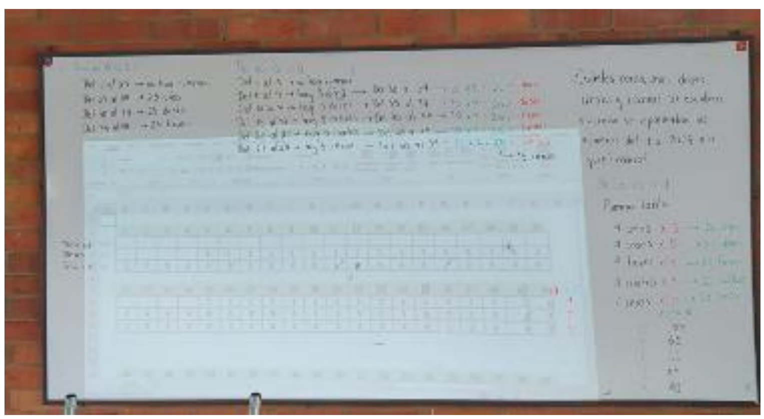


Figura 7. Evidencia de trabajo realizado en el aula

Las apreciaciones anteriores, conducen a la construcción de un esquema mental que pretende resolver el problema utilizando las dos narrativas empleadas hasta el momento: analizar los números en intervalos de cierta cantidad, determinando el patrón en la aparcición de unos, doses, treses y cuatros por cada posición en esos intervalos para terminar el cálculo sumando todas las cantidades halladas.

Tal esquema es aplicado a el grupo de problemas 5.1 al 5.4, hallando como único impedimento la necesidad de analizar el patrón de dígitos en una posición adicional (la que representa grupos de ciento veinticinco). No obstante, para este impedimento aplican la narrativa construida y aplican la UBA desarrollando un esquema mental reorganizado.

De esta forma, los participantes determinan que la combinación de narrativas es pertinente y eficiente para hacer el cálculo solicitado, determinando intervalos de números con un cardinal mayor y analizando los bloques de aparición de los dígitos. Con esa confianza sobre el razonamiento empleado, deciden ocuparse en un nuevo problema.

4.1.4.3 Actividad 4 – par + par, impar + impar, par + impar e impar + par[73]

El modelo de este problema se halla en la Figura 9. Como uno de los problemas que busca el estudio de la paridad, su cuestionamiento se fundamenta en un contexto familiar para los participantes: el sistema de numeración decimal. Y aunque los participantes reconocen la distinción entre un número par o impar por medio de su correspondencia con una división exacta o inexacta entre dos (narrativa incluida en las acciones de la UBA del problema 1), se revela la ausencia de estrategias para evaluar de forma apropiada el problema. La primera dificultad que se halla al replicar el

[73] Videos de clase https://youtu.be/_NR7uDDuWfs - https://youtu.be/SDYRTy_K9qI

esquema mental formado es el de precisar correctamente la cantidad de números involucrados en la suma total y, por tanto, el poder contabilizar cuántos de estos deben ser impares.

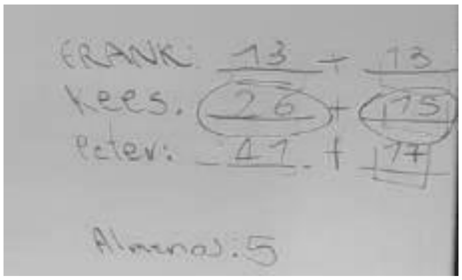


Figura 8. Solución del problema

En la solución de la Figura 8, el participante asimila la suma de Frank como uno de los números proporcionado por parte de Kees y, a su vez, la suma de Kees como uno de los números que propone Peter.

Esto conduce al impedimento de expresar 58 como suma de los seis números que están determinados por las condiciones iniciales del problema.

Lo anterior lleva a los participantes a involucrar acciones propias de una UAA, dividiendo el problema en tres problemas auxiliares más pequeños: *i*) determinar la paridad de los sumandos empleados por Frank (Problema 3.1), *ii*) la de los sumandos de Kees (Problema 3.2), y *iii*) la de los sumandos de Peter (Problema 3.3). Para cada uno de estos se evalúan, además, tres cuestionamientos acerca de si cada pareja de sumandos pueden ser ambos pares, ambos impares, o uno par y el otro impar.

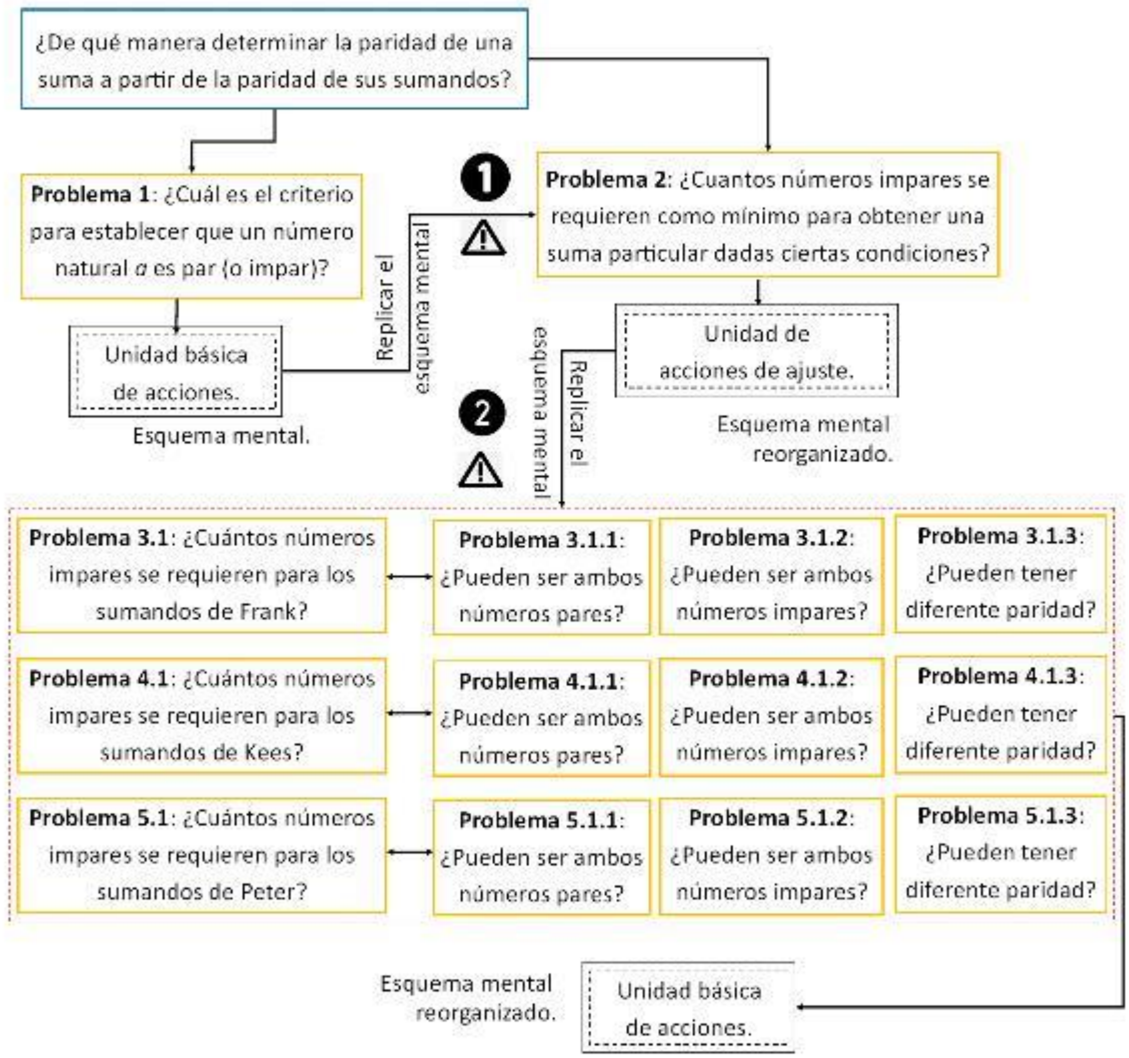


Figura 9. Esquema de razonamiento del Problema 1, Actividad 4

En el caso de los sumandos de Frank, las acciones incluidas en la UAA se basan en mostrar un ejemplo (contraejemplo) de si, en cada caso, es posible hallar números que al sumarse den como resultado 26. Se argumenta la imposibilidad de que los sumandos de Frank tengan distinta paridad por medio del listado de todas las sumas de parejas en las cuales el primer sumando es par. Con esta forma de proceder, se concluye que ambos sumandos deben ser pares o impares a la vez.

Para determinar la naturaleza de los sumandos de Kees, se establece la diferencia entre la suma que se obtiene con los sumandos propuestos por Frank y la suma que se obtiene con aquellos números propuestos por Kees (15, el cual es un número impar). Nuevamente, se aplica a ambos sumandos la narrativa descrita en el párrafo anterior. Luego de esto se concluye, parcialmente, que de los cuatro números involucrados al menos uno es impar sabiendo que la suma de los cuatro debe ser 41, que la suma de una pareja de estos es 26, y la suma de los dos restantes es 15. La suma 24 + 2 + 8 + 3 sirve como ejemplo de lo expuesto anteriormente.

En el análisis de la paridad de los números proporcionados por Peter, se refleja un cambio en la forma de justificación de los participantes. El argumento ofrecido para establecer que en este caso ambos números no pueden ser pares, se expresa en términos de que “siempre falta uno o siempre se pasa en una unidad”, pues se obtiene 16 o 18 al efectuar las sumas posibles entre los números naturales pares involucrados en el problema. La distinción de este argumento se fundamenta en la búsqueda de generalidad acerca del criterio para determinar la paridad de los sumandos involucrados en una operación de adición con resultado específico.

Con lo anterior, logran determinar que se requieren, al menos, dos números impares para que la suma de los seis números sea 58 sabiendo, además, que la suma de una pareja de estos es 26, que la suma de otra pareja diferente entre estos debe ser igual a 15, y que la suma de los dos números restantes debe ser 17.

4.1.4.4 Actividad 4 – Que la suerte nos acompañe[74]

La adaptación que hace distintivo este problema (uso de la representación en base 8 de los valores incluidos), demanda en los estudiantes establecer un algoritmo para la suma de los números naturales inscritos en las balotas. Esta necesidad conduce a la formulación del tercer problema de esta actividad el cual se detalla en el siguiente apartado. De momento, se analiza aquí la evidencia, luego de que los estudiantes establecieran la narrativa de la adición (Ver Figura 10).

Nuevamente, acuden al recurso de dividir el problema en dos preguntas: *i*) ¿cuántas parejas de números se pueden construir con una cantidad particular de números naturales para realizar su suma? (Problema 1.1) y, *ii*) ¿cuántas de esas sumas son pares e impares? (Problema 1.2)

Es claro que, para dar respuesta completa al problema es necesario reflexionar sobre el criterio que permite decidir sobre la paridad de un número natural en el sistema de representación base ocho. Los participantes se aferran a la conocida noción de estudiar la paridad del último dígito: si este es par, entonces el número completo lo es. De lo contrario, es un número impar. Cabe aclarar que no ofrecen un argumento sobre la validez de extender el criterio utilizado en el sistema de numeración base 10; sencillamente lo asumen como cierto y funcional.

[74] Videos de clase https://youtu.be/SDYRTy_K9qI - https://youtu.be/ygYWBValU70 - https://youtu.be/dU9JW1f7eBM

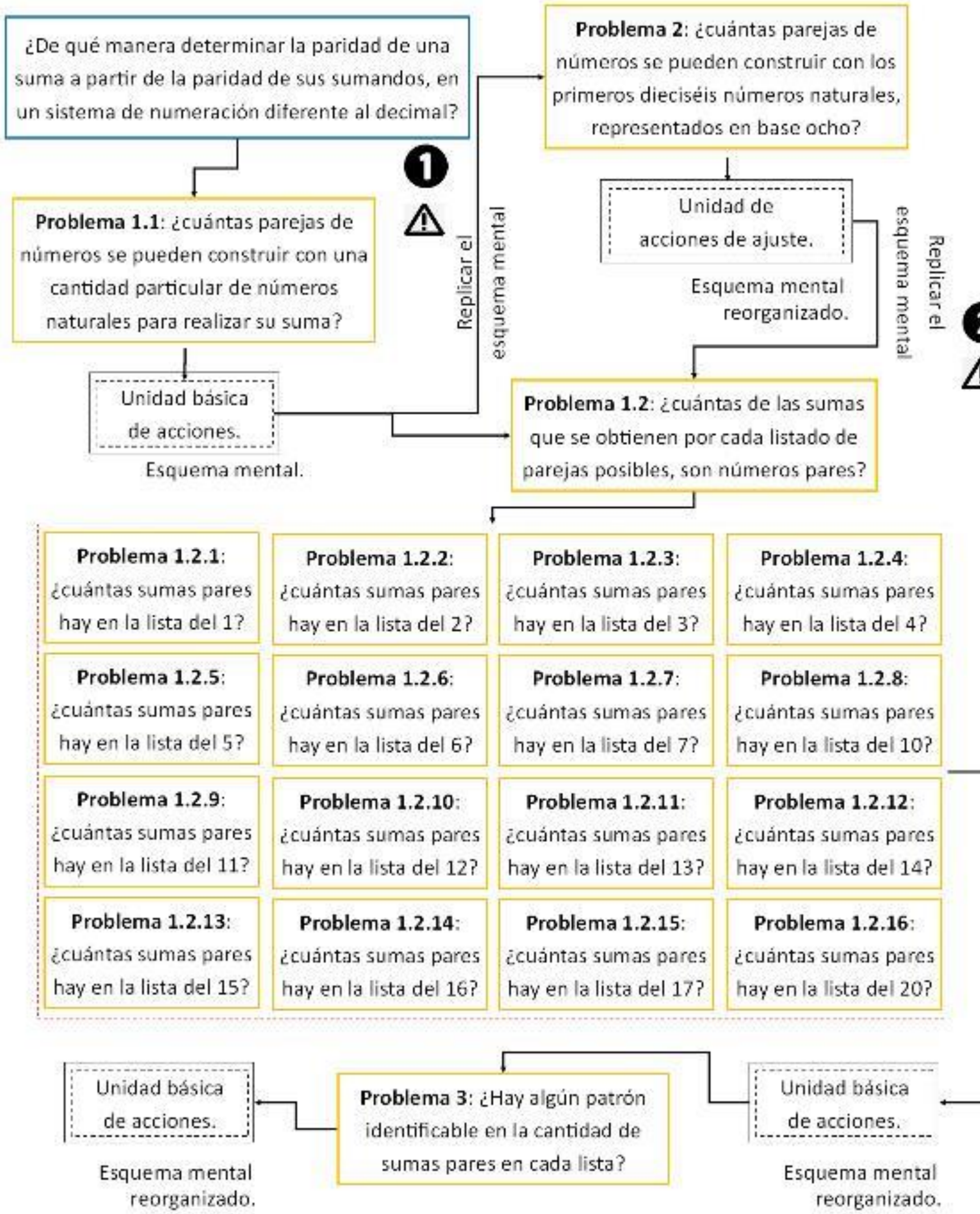


Figura 10. esquema de razonamiento del Problema 2, Actividad 4

Para la pregunta acerca de la contabilización de parejas de números que se pueden formar con una cantidad dada de números naturales, surge la propuesta de usar una narrativa que divida dicha cantidad en dos (por ser parejas), y el resultado de esta operación es la cantidad de parejas solicitada. Al aplicar este esquema mental al problema 2, se halla la dificultad de encontrar parejas de números que no han sido contabilizadas, lo cual conduce a las acciones de una UAA para mostrar un ejemplo (contraejemplo) y, así, ajustar la narrativa.

En la búsqueda de un número preciso de parejas posibles y, basados en la idea de hacer la lista completa, una estudiante propone una forma organizada de hacer la contabilización empleando el principio de multiplicación: al número $1_{(8)}$ se le puede unir cualquiera de los 15 números restantes para conformar algunas parejas (15 en total). De la misma forma, sucede con el número $2_{(8)}$ (15 parejas más), y así se procede con cada uno de los dieciséis números de las balotas. Por tanto, el número total de parejas pedido es el resultado de la multiplicación 15×16.

La aplicación de este esquema mental encuentra contrariedades al ver, por medio de un ejemplo, que existen parejas de números que se están contando dos veces (*v.g.* $1_{(8)}$ y $2_{(8)}$, en la lista de parejas que contienen el número $1_{(8)}$, y $2_{(8)}$ y $1_{(8)}$ en la lista de parejas que contienen el número $2_{(8)}$). Un cuidadoso estudio de sobre la conformación de las parejas, les permite establecer que se deben restar $1 + 2 + 3 + \ldots + 15$ parejas del total calculado. Cada sumando en la adición anterior se corresponde con el número de parejas repetidas en las listas de parejas que contienen al $2_{(8)}$, al $3_{(8)}$, al $4_{(8)}$ y, así sucesivamente hasta el $20_{(8)}$. Así, hay 120 parejas posibles.

Para determinar la respuesta a la segunda pregunta, los participantes recurren a la narrativa de efectuar todas las sumas una a una y comprobar, con base en el criterio de paridad, la naturaleza de las respuestas[75]. Lo anterior conduce a la formulación de problemas auxiliares (del 1.2.1 al 1.2.16) basados en la división del trabajo, de acuerdo con las listas de parejas hechas para el cuestionamiento anterior. Elaboran así el siguiente registro tabular (Ver Figura 11) para consolidar los resultados. La primera fila contiene los números considerados en la conformación de las parejas de números y, para cada uno, se distinguen la cantidad de resultados pares e impares.

¿Cuántas de esas son pares/impares?

	1	2	3	4	5	6	7	10
Pares	8	7	6	6	5	5	4	4
Impares	7	7	7	6	6	5	5	4

	11	12	13	14	15	16	17	20
Pares	3	3	2	2	1	1	0	0
Impares	4	3	3	2	2	1	1	0

Figura 11. consolidado de resultados de sumas pares e impares

Los valores de color blanco son establecidos con base en el proceso de comprobación manual de la paridad de las sumas en un listado específico. Los valores de color amarillo son suposiciones basadas en la identificación de un patrón en el registro de los valores de color blanco. Dicho patrón se sustenta en la paridad del número de la

[75] Cabe resaltar que, aunque en la solución del primer problema de la actividad 4 los estudiantes establecieron una generalidad para determinar la paridad de una suma con base en la paridad de sus sumandos, no fue este el recurso incluido en la narrativa de este problema para evaluar la paridad de los resultados.

primera fila: si este es par, la cantidad de sumas pares (o impares) es igual a la mitad de las parejas posibles en ese listado. De lo contrario, la cantidad de sumas pares es menor y difiere en una unidad de las impares con excepción, hasta ese momento, de la primera columna.

Adicionalmente, se percatan del patrón de aparición de los valores que se muestra en la Figura 12, lo cual reafirma su suposición sobre la forma de completar los espacios con los valores de color amarillo, y los hace dudar sobre los valores contenidos en la columna correspondiente al número 1. Esto último, los lleva a comprobar nuevamente cada resultado en esa lista, evidenciando un error de cálculo y rectificando los resultados.

¿Cuántas de esas son pares/impares?

	1	2	3	4	5	6	7	10
Pares	8	7	6	6	5	5	4	4
Impares	7	7	7	6	6	5	5	4

	11	12	13	14	15	16	17	20
Pares	3	3	2	2	1	1	0	0
Impares	4	3	3	2	2	1	1	0

Figura 12. patrón de comportamiento de la cantidad de sumas pares e impares

4.1.4.5 Actividad 4 – A sumar se dijo[76]

Como se indicó anteriormente, este enunciado surge por la necesidad de dar respuesta al problema 2 de esta misma actividad (Ver Figura 13). El primer cuestionamiento que se hace se basa en determinar con claridad la forma de hacer operaciones de adición con el sistema de numeración decimal. La narrativa conocida por los estudiantes es como sigue: se inicia sumando las unidades, luego las decenas, luego las centenas, y así sucesivamente según sea el caso. Se debe prestar atención cuando la suma en una posición dada exceda de nueve. En dicho caso se debe “llevar” tantos grupos de diez, cien, mil, etc., que sean necesarios.

[76] Videos de clase https://youtu.be/ygYWBValU70 - https://youtu.be/ggElNUpHR8w - https://youtu.be/hw51XMC6T4o

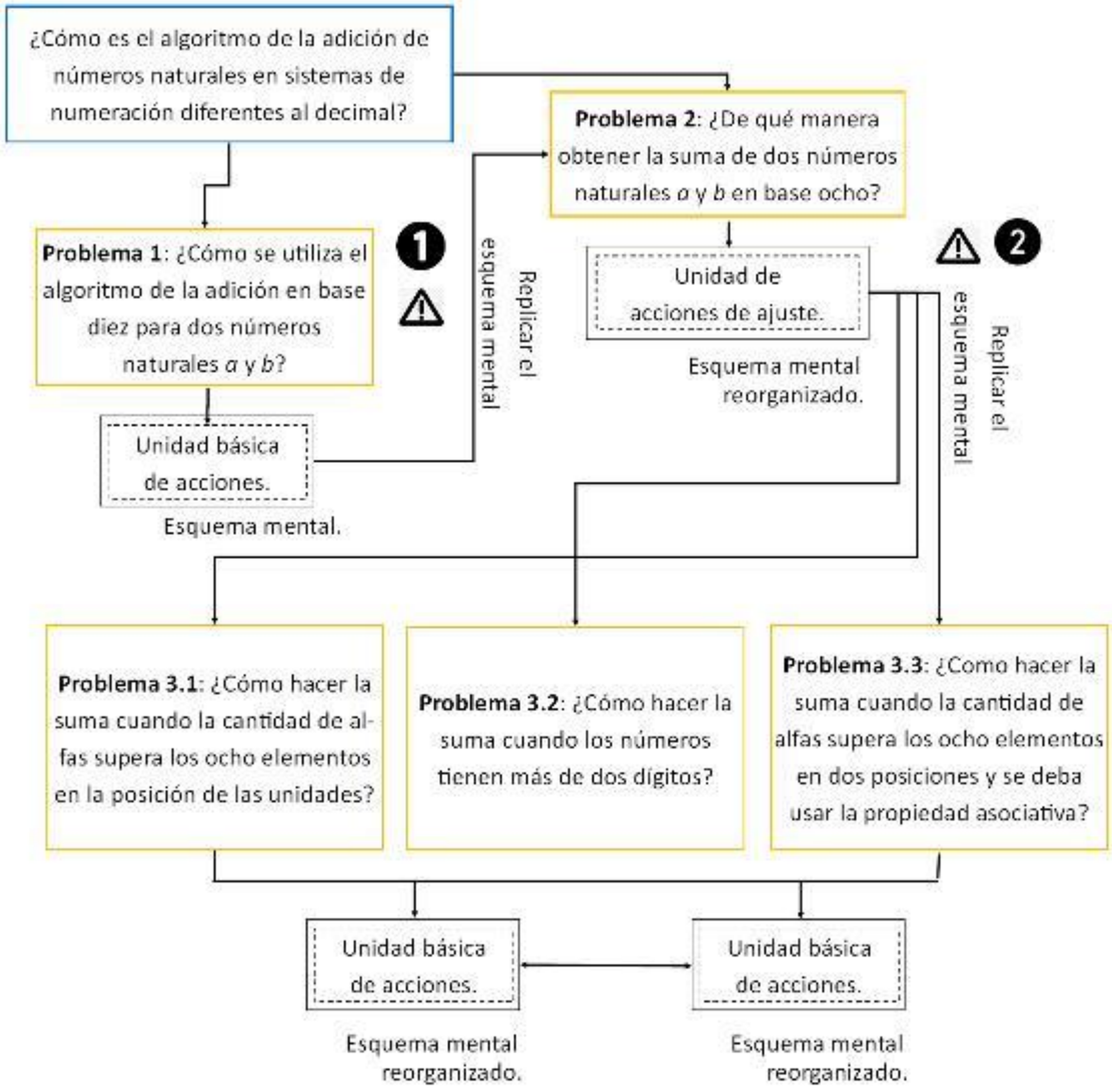


Figura 13. esquema de razonamiento del Problema 3, Actividad 4

Se recurre al problema auxiliar de hacer la operación $14_{(8)} + 12_{(8)}$. La primera respuesta que se ofrece es 26. No es precisa la base de representación de ese resultado, pero se estima que surge de la aplicación de la narrativa antes descrita en un sistema de numeración base ocho, lo cual puede conducir a errores en el cálculo. Los estudiantes dudan acerca de que los dígitos utilizados para expresar el resultado de esa suma sean los mismos que se utilizan en el sistema de numeración decimal pues, por la experiencia con los sistemas de numeración, saben que algunos números naturales cambian su representación de un sistema a otro.

Como consecuencia de lo anterior, los estudiantes acuden al uso de un problema auxiliar ilustrando dos ejemplos en los cuales, al sumar dos números en base ocho, uno de estos arroja como resultado un número que no difiere en su representación en comparación con la utilizada en base diez, y otro en el cual sí lo hace. Así, con la secuencia de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 20 representados en base ocho, se propone ilustrar el resultado de las sumas $2_{(8)} + 3_{(8)}$ y $3_{(8)} + 7_{(8)}$, como se muestra a continuación (Ver Figura 14).

$$2_{(8)} + 3_{(8)} = 5_{(8)} \qquad 1, \overbrace{2, 3, 4, 5}^{+3}, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20$$

$$\mathbf{2+3=5}$$

$$3_{(8)} + 7_{(8)} = 12_{(8)} \qquad 1, 2, \overbrace{3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12}^{+7}, 13, 14, 15, 16, 17, 20$$

$$\mathbf{3+7=12}$$

$$\mathbf{3+7=10}$$

Figura 14. Representación de sumas en base ocho

En la primera suma, la representación en base ocho y diez no difieren (se utiliza el dígito 5 en ambos casos), pero en la segunda sí. En lugar de utilizar los dígitos 1 y 0 del sistema de numeración decimal, el resultado debe ser representado con los dígitos 1 y 2, en ese orden, atendiendo a las reglas del sistema base ocho.

De esta manera, los estudiantes acuerdan en un principio efectuar las sumas en el sistema de numeración decimal haciendo la conversión de representación los sumandos y sus resultados desde y hacia la base del problema (base ocho). Así, la primera suma propuesta en el problema se efectúa de la siguiente forma: $14_{(8)} + 12_{(8)} \approx 12_{(10)} + 10_{(10)} = 22_{(10)} \approx 26_{(8)}$.

Debido a la necesidad de hacer que las acciones de la UBA sean suficientes para resolver este tipo de operaciones, la docente decide proponer las sumas contenidas en el problema de este apartado. No obstante, tales sumas no son cualesquiera sumas; son planteadas con el objetivo de abordar particularidades de la adición. Por ejemplo, la primera operación hace que la suma de las unidades se exceda de ocho para que los estudiantes deban emplear el recurso de “llevar” grupos de ocho a la posición de la izquierda; la segunda, busca involucrar números de tres cifras para consolidar la noción de posición; y la tercera, que el recurso de “llevar” se aplique a la posición de las unidades y a la posición que representa grupos de ocho unidades, además de emplear la propiedad asociativa de la adición.

En el proceso de operar, surge entre los estudiantes una narrativa de adición que no se apoya en el sistema de numeración decimal para obtener las sumas. La narrativa se basa en el método basado en “cajas” que se utilizó para la representación de los números naturales en el sistema de numeración binario (Ver Figura 15).

El proceso para operar es el siguiente: usando alfas, se dispone una cantidad de estas equivalentes a todas las unidades que representan los sumandos involucrados en la posición de las unidades. A partir de allí, se van eliminando grupos de ocho alfas, reemplazándolas por un alfa cada vez en la posición de la izquierda hasta que en la posición de las unidades no se hallen más de siete elementos. De forma similar procede en las demás posiciones, hasta agotarlas todas. Luego, se asignan los dígitos correspondientes a la cantidad de alfas resultante en cada posición y ese es el resultado de la operación. Por ejemplo, para la operación $34_{(8)} + 14_{(8)}$, se ilustra el funcionamiento de la narrativa así:

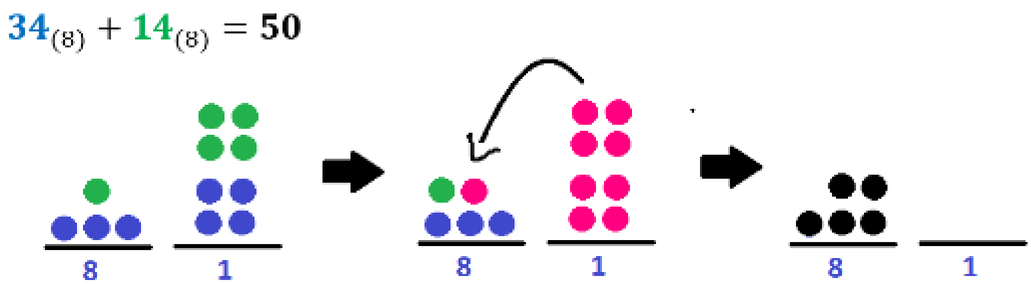


Figura 15. representación algoritmo de la adición

Al comunicar los resultados, los participantes buscan la comprobación de este procedimiento con las operaciones restantes encontrando igualdad en los resultados. De esta forma, emergen dos UBA, cada una caracterizada a partir de la narrativa utilizada para sumar.

4.1.4.6 Actividad 5 – Buscando números impares[77]

Si bien el propósito de la actividad es la búsqueda de un criterio para determinar la paridad de un número natural en un sistema de numeración cuya base sea un número impar, este problema busca sembrar en los participantes la duda sobre la aplicabilidad del criterio de la última cifra que suelen utilizar en el sistema base diez. Además de esto, se consolida la narrativa de adición que hasta el momento habían establecido al abordar problemas anteriores (Ver Figura 16).

[77] Videos de clase https://youtu.be/qtjpVtGE53Q - https://youtu.be/ScE36eKo9Tk

Para iniciar, se hace un listado con las condiciones sobre las cuales se debe iniciar la exploración del problema:

- El número debe ser un número impar.
- El número debe tener dos dígitos.
- El número debe estar representado en base cinco.
- La suma de los dígitos debe ser la mayor posible.

Una de las participantes propone, inicialmente, el número $43_{(5)}$ teniendo en cuenta que 4 y 3 son los mayores dígitos en este sistema y que, al adicionarlos, hacen que se maximice la suma (en este caso, $12_{(5)}$). Otra participante propone el número $44_{(5)}$, sin darse cuenta de que este es un número par y, por tanto, no cumple una de las condiciones establecidas en el punto de partida.

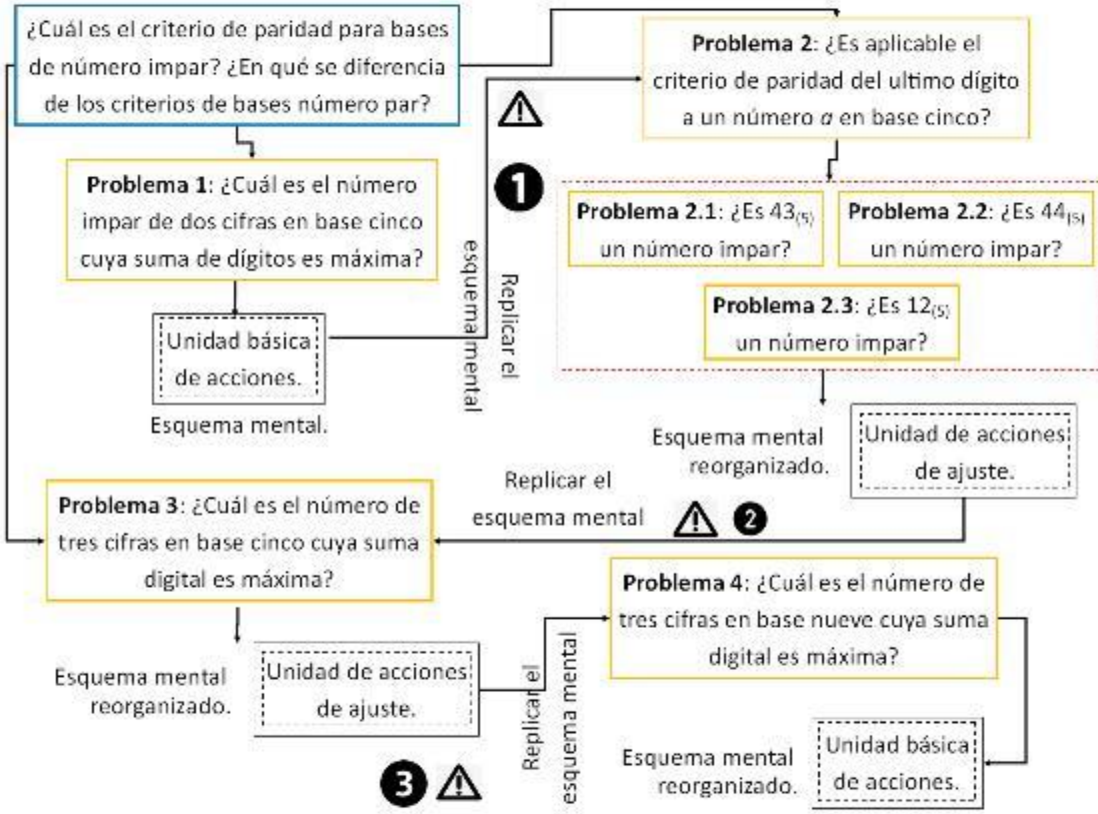


Figura 16. esquema de razonamiento del Problema 1, Actividad 5

Sin embargo, uno de los participantes se da cuenta que el resultado de la suma de los dígitos de la primera propuesta es un número impar aun cuando su representación en base cinco no lo pareciera pues el último dígito (2) es un número par. Al hacer la conversión, se evidencia que $12_{(5)}$ en base diez corresponde con el dígito 7, el cual es un número impar. Al respecto, se establece que un número natural es par o impar, independientemente de la representación. Así, se pone de manifiesto la limitación del criterio del último dígito del sistema decimal, al aplicarlo en números naturales representados en base cinco.

Para resolver el problema, los participantes deciden hacer la transformación a base diez de cada número natural trabajado, con el fin de aplicar el criterio del último dígito sobre el cual tienen amplia confianza, a la hora de determinar la paridad de un número en particular.

Con el fin de consolidar esta narrativa, se hace uso del problema auxiliar que busca determinar ¿cuál es el número impar de tres cifras representado en base cinco cuya suma de dígitos es máxima?

Nuevamente se plantea la necesidad de utilizar los dígitos 3 y 4 y, quizá, pensando en la paridad de un número natural basados en la paridad del último dígito la primera solución propuesta es el número $443_{(5)}$, cuya suma digital es $21_{(5)}$. Por medio de los números $434_{(5)}$ y $344_{(5)}$, se evidencia que la respuesta no es única puesto que estos dos ejemplos, cumplen con la totalidad de las condiciones solicitadas en el problema auxiliar. Para el sistema de numeración base nueve, se determinan los números $887_{(9)}$, $878_{(9)}$ y $788_{(9)}$, como respuestas a lo solicitado.

4.1.4.7 Actividad 5 - ¿Cuántos de cada uno?

La pretensión de este problema es la determinación de un criterio de paridad para los números naturales representados en base cinco, atendiendo a la duda sembrada sobre lo inaplicable del criterio de la última cifra, el cual se utiliza comúnmente en el sistema de numeración base diez. El modelo de razonamiento se presenta en la Figura 17.

Para iniciar la exploración del problema, los estudiantes recurren a la elaboración de la lista completa de los números naturales en el intervalo dado. Para esto, dividen el problema estableciendo intervalos de veinte números cada uno, y comprobando su paridad auxiliándose de la representación en base diez de cada número con el fin de utilizar el criterio conocido por ellos. Así, pueden determinar que la mitad de los elementos en cada lista son números pares y la otra mitad son números impares.

No obstante, para construir un criterio de paridad rápido, eficiente y confiable que fuese independiente del uso de la representación en base diez, se propone la separación de los números del intervalo en dos grupos (números pares y números impares) con el fin de examinar particularidades que sirvieran de indicio para la construcción del buscado criterio.

De lo anterior, se coligen las siguientes consideraciones:

- La lista de los números impares inicia con dos números impares terminados en cifra impar (1 y 3). A estos, le siguen tres números impares cuya última cifra es un número par (0, 2 y 4). Este comportamiento se repite a lo largo del listado.
- En la lista de los números pares sucede algo similar, salvo que se inicia con números pares terminados en una cifra par, y luego los tres números siguientes terminados en cifra impar.
- En la lista de números pares, si alguno de los números tiene un dígito impar, entonces tiene exactamente dos dígitos impares. Es decir que, en este listado, si ha de haber números pares que contengan dígitos impares, estos dígitos impares van en parejas.
- En la lista de los números impares, el número de dígitos impares en la representación es uno o tres.

Atendiendo estas observaciones, se propone un problema auxiliar basado en la construcción de números de cuatro cifras en base cinco que sean pares e impares; tres ejemplos por cada categoría. Para esto se evidencia el empleo de acciones de la UAA en dos direcciones: i) construir los números solicitados utilizando los dígitos del sistema base cinco, para luego verificar la paridad e impuridad haciendo empleo del criterio en base diez, previo cambio de representación y, ii) utilizar cantidades impares de dígitos impares, sabiendo que, para que el número natura construido sea un número impar, debe haber uno o tres dígitos impares en su representación.

La docente construye, por su parte, números impares de cinco cifras en los sistemas base cinco y base nueve, buscando mostrar ejemplos con los cuales validar o refutar las observaciones acerca de la cantidad de dígitos impares requeridos para formar números impares en estas bases. Al reunir los ejemplos propuestos por los participantes y la docente

se valoran las observaciones hechas a las listas de números pares e impares hechas anteriormente. Se confirma que, para que el número sea impar, la cantidad de dígitos impares de la representación debe ser 1 o 3.

La docente llama la atención sobre los ejemplos en los cuales un número de cinco cifras puede ser impar, buscando incentivar la reflexión sobre la posible extensión del criterio que se va estableciendo. Sin embargo, al aducir a dichos ejemplos, los estudiantes mencionan que sería necesario que “todas” los dígitos fuesen impares, en lugar de indicar que deben ser cinco los dígitos impares para garantizar la impuridad completa del número natural. El uso de la palabra “todos” puede conducir a errores pues, en números de seis cifras no se aplicaría tal criterio, por ejemplo.

Sabiendo que el elemento fundamental para determinar que un número natural es impar cuando está representado en base cinco o base nueve es la cantidad de dígitos impares involucrados en su representación, la docente promueve la verificación de este criterio en números de cuatro y seis cifras, representados en tales bases.

Uno de los estudiantes propone la verificación del criterio con base en los ejemplos propuestos, examinando los siguientes casos: *i*) cuando no tienen dígitos impares, *ii*) cuando tienen, exactamente, un dígito impar, *iii*) con, exactamente, dos dígitos impares, *iv*) con, exactamente, tres dígitos impares, *v*) con, exactamente, cuatro dígitos impares y, *vi*) con, exactamente cinco dígitos impares. Se concluye así que, en ausencia de dígitos impares se obtienen números pares; con un dígito impar, los números son pares; con dos dígitos impares, se obtienen números pares, y así sucesivamente. En este punto, se enuncia el criterio para determinar que un número natural representado en base cinco y nueve es impar, como sigue: cuando, en la representación del número natural se halla una cantidad impar de dígitos impares, entonces todo el número es impar. Vale aclarar que solo se enuncia el criterio mas no se ofrece camino alguno para su justificación, excepto la verificación por medio de ejemplos o contraejemplos.

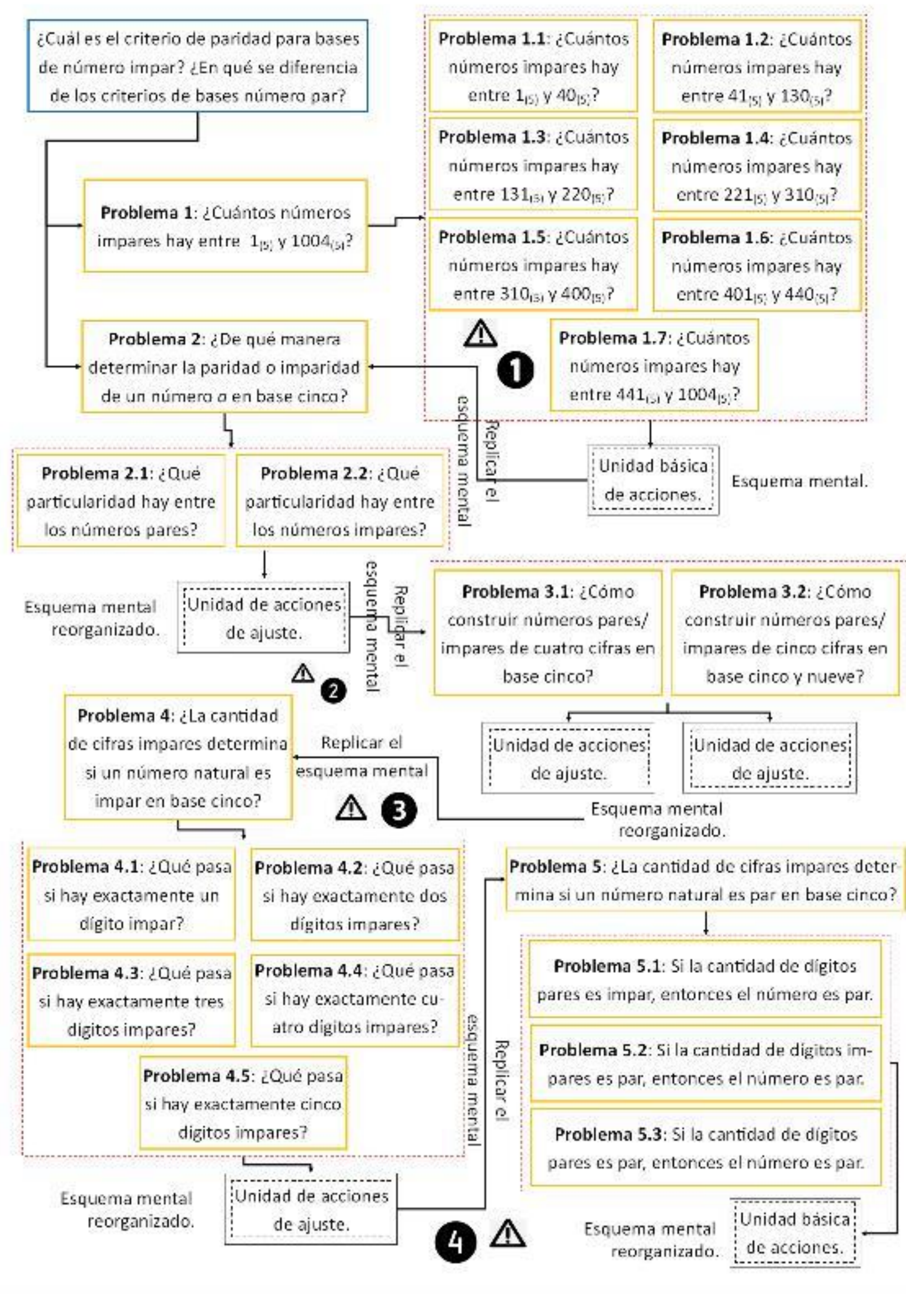


Figura 17. esquema de razonamiento del Problema 2, Actividad 5

Ultimando la reflexión, la docente propone enunciar un criterio para saber si un número natural dado en estos sistemas de numeración es par. Una participante propone sustituir cada palabra “impar” por la palabra “par” en el criterio sobre números impares. Sin embargo, hallan ejemplos en los cuales no se cumplía dicho criterio (v.g. números de cuatro o seis cifras en los cuales hay cantidades pares de dígitos pares y aun así, tales números fuesen impares).

En este punto se determina que la manera de valorar un criterio para la paridad se debe basar en las posibles combinaciones que las palabras “par” e “impar” pueden jugar en el criterio establecido con anterioridad. Así, se examinan las siguientes opciones:

- Si la cantidad de dígitos pares es impar, entonces el número es par.
- Si la cantidad de dígitos impares es par, entonces el número es par.
- Si la cantidad de dígitos pares es par, entonces el número es par.

Validar o refutar cada una de las alternativas se basó en la proposición de ejemplos y contraejemplos de números naturales de cinco cifras, representados en base cinco y base nueve, que cumplieran las condiciones de cada opción. Concluyen que, después de todo, los criterios se basan principalmente en la cantidad de dígitos impares contenidos en la representación.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Aunque el apartado actual busca exponer las conclusiones colegibles a partir de la evidencia expuesta en los resultados, se reconoce que por la naturaleza cualitativa e inicial de la investigación, aún hay variados aspectos que la trascienden y que son suceptibles de ser examinados con posteriores indagaciones. En síntesis: la investigación aquí presentada se configura en un nicho de posibilidade,s más que en un dictamen concluyente sobre el objeto estudiado.

Así las cosas y, luego de detallar el curso del razonamiento en cada uno de los problemas trabajados y los esquemas o modelos de dicho razonamiento evidenciables que proporcionan la saturación teórica necesaria, es posible hacer algunos comentarios sobre el proceso de razonamiento repetido basados en el objetivo de la investigación: describir, explicar y enriquecer el razonamiento repetido por medio de la resolución de problemas retadores con estudiantes de secundaria.

5.1 Describir el razonamiento repetido

Con base en la exposición de los resultados se identifican cuatro elementos fundamentales para describir proceso de razonamiento repetido, a saber: *i*) la categoría general e instancias-problema, *ii*) la Unidad Básica de Acciones - UBA, *iii*) la Unidad de Acciones de Ajuste – UAA, y *iv*) los esquemas mentales organizados y reorganizados.

5.1.1 Sobre la categoría general e instancias-problema

En cada problema, la iniciativa y decisión de los participantes de dividirlos en intancias-problema similares y relacionadas, permite ver la necesidad de diseñar actividades que fomenten el razonamiento repetido partiendo de una categoría general que contenga un concepto, idea, procedimiento, etc., que se pretende sea aprendido a largo plazo para luego, determinar instancias-problemas que reflejen las características de esta categoria. Lo anterior hace eco en lo que en Vitale (1989, citado por Kieren y Pirie, 1990) se define como recursión en el marco de la investigación psico-cognitiva, en la cual una relación A es recursiva al tener dos categorías (categoría 1 y categoría 2) en las cuales:

- Hay auto-referencia: la categoría 1 contiene, de alguna manera, la misma entidad "A" que está presente en la categoría 2;
- hay complejidad: existe un elemento de cambio. "A" está presente en la categoría 2 con algún aspecto diferente en relación con la categoría 1.

Como se comentó anteriormente, la categoría general de la actividad 1 contiene el problema elegir *n* elementos diferentes, de un conjunto de *m* elementos con $n<m$; la categoría de la actividad 2, abarca la representación de números naturales como sumas de potencias de dos; en la actividad 3, la representación de números naturales en bases diferentes a la decimal (*v.g.* base dos, tres, cinco y ocho); y en las actividades 4 y 5, la paridad de números naturales y la adición de estos en sistemas de numeración diferente al decimal.

5.1.2 Sobre la Unidad Básica de Acciones – UBA

La identificación de la UBA como elemento que favorece la exploración inicial y comprensión del problema por parte de los estudiantes debe ser tenida en cuenta en el momento de seleccionar, adaptar o diseñar la primera instancia-problema que surja de las particularidades de la categoría general identificada. Esto implica que dicha instancia-problema deba tener puntos de conexión con los conocimientos, capacidades y habilidades del estudiante para que la UBA pueda ser empleada; de lo contrario, es muy probable que el proceso de razonamiento repetido no inicie. En suma: el problema debe contener un desafío que motive la necesidad de resolverlo, pero no puede ser tan lejano a las bases conceptuales del estudiante como para dejarlo sin margen de acción sobre la exploración matemática inicial.

Otro punto está relacionado con la multiplicidad de contenidos de la UBA en la solución de un problema particular. La evidencia permite ver que, en la parte inicial de un curso de razonamiento, una UBA puede identificarse con condiciones, puntos de partida y narrativas diferentes a las de una UBA en la fase final de ese mismo curso de razonamiento. Esto puede deberse a la construcción y empleo de una narrativa modificada, o a un punto de partida con condiciones adicionales o conjugadas de forma diferente o, incluso, a un cambio en el discurso para comunicar y convencer.

Lo anterior se identifica y corresponde con el concepto de alfabetización heurística propuesta por Koichu, Berman y Moore (2007), entendida como "*…la capacidad de un individuo para usar vocabulario heurístico en el discurso de resolución de problemas y para abordar problemas matemáticos escolares usando una variedad de heurísticas*"[78].

Por último, es necesario resaltar que las acciones contenidas en la UBA son desarrolladas, en algunas ocasiones, de formas casi imperceptibles y naturales. No

[78] Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science, 35*(2), p. 100.

obstante, son base y fundamento para la promoción del razonamiento repetido y, posiblemente, para dar indicaciones sobre lo satisfactorio y eficiente del proceso pretendido por el docente.

5.1.3 Sobre la Unidad de Acciones de Ajuste – UAA

Si bien las acciones contenidas en la UBA son base y fundamento para la promoción del razonamiento repetido y contribuyen sustancialmente con la constitución de un esquema mental inicial, se conjetura la imposibilidad de reestructuración de dicho esquema en ausencia de las acciones que comporta la UAA. Acciones como el uso de un problema auxiliar y el mostrar un ejemplo (contraejemplo), son algunas de las demostraciones de la inestabilidad del esquema mental inicial, al ser aplicado en una nueva instancia-problema.

De esta forma, si el objetivo es la organización y reorganización de un esquema mental, el docente se compromete con la formulación de instancias-problema en las condiciones indicadas en líneas anteriores: que conserven la misma entidad y que, a su vez, contengan aspectos distintivos que impulsen tanto las acciones de la UBA como las acciones de la UAA.

5.1.4 Sobre los esquemas mentales organizados y reorganizados

A este panorama se suma que, desde la teoría de los esquemas mentales, la formación de conceptos en la mente del aprendiz implica la organización de una estructura conceptual, y su posterior reorganización en una red cada vez más rica y compleja, la cual incorpora estados anteriores de comprensión. Con base en las afirmaciones de Kieren & Pirie (1991), se puede inferir que al resolver problemas, sucede algo análogo usando y reutilizando recursos, heurísticas o rutinas que se conjugan en modos de exploración cada vez más potentes y eficientes para ofrecer soluciones a categorías de problemas específicos.

No obstante, y desde la perspectiva de este documento, la concepción de esquemas mentales debe ser ampliada. Como se ha dejado ver, los esquemas mentales se adoptan aquí tanto como conjuntos complejos de redes de conceptos, así como una integración de acciones (que comportan recursos y heurísticas), sus modos de uso y su secuenciación durante la solución de problemas (razonamiento repetido), activando la UBA o la UAA según es requerido. Estos razonamientos soportan la organización y reorganización de un esquema mental que incorpore una red de conceptos determinada, con sendas categorías de acciones y niveles de complejidad que deben ser tenidas en cuenta por cualquier docente al momento de diseñar actividades que busquen desencadenar la necesidad de solucionar el problema.

5.2 Explicar el razonamiento repetido

Con base en el empleo de los métodos de la teoría fundamentada, el modelo planteado como resultado del análisis de la evidencia en la fase preliminar se satura teóricamente con los modelos que representan el curso del razonamiento para las actividades en la posterior fase de investigación. De esta forma, y salvo las particularidades de los cursos de razonamiento, el modelo planteado en la Figura 2 permite explicar la forma en la cual se desarrolla este proceso.

Se refuerza la idea de una mirada recursiva de la solución de problemas (Kieren y Pirie, 1990) y, además, se adopta la misma visión para el razonamiento repetido al resolver problemas matemáticos. En la evidencia recolectada y los resultados expuestos se advierte que el modelo en mención es un fragmento que se repite una y otra vez, con mayor o menor complejidad, a través de la solución de las instancias-problema. Más interesante es ver que, al centrar la atención en un punto particular del proceso, es posible hallar un funcionamiento autosimilar a una escala mayor del mismo.

Ahora algunas consideraciones sobre aspectos específicos que pueden ser considerados y utilizados para el diseño de actividades que busquen provocar el proceso de razonamiento repetido en el aula que se explicó en el modelo mencionado:

1. Fundamental es el conocimiento profundo del contenido inmerso en la categoría general por parte del docente y que se pretende sea aprendido con suficiencia por los estudiantes. Esto contribuye favorablemente a la adaptación y formulación de instancias-problema desafiantes que incentive en los estudiantes su modificación cognitiva y su necesidad de conocimiento.

2. La primera instancia-problema que se propone a los estudiantes debe ser cercana a sus bases conceptuales y procedimentales para que pueda emplear las acciones de la UBA pero, igualmente y en cierta medida, lejano de dichas bases para estimular la configuración de un esquema mental replicable en nuevas instancias-problema.

3. La puesta en marcha de las acciones incluidas en la UBA y la UAA son indicios visibles que, posiblemente, le permiten al docente evaluar el desarrollo de razonamiento repetido y la modificación cognitiva. Seguramente no son las únicas evidencias, pero tienen el potencial de servir como base para la

estructuración de instrumentos de evaluación como rúbricas, listas de cotejo, escalas de valoración, entre otras.

4. El tiempo estimado y requerido para dar consecución a los objetivos de aprendizaje al promover el razonamiento repetido de una categoría general dependerá de la evidencia sobre el retorno al uso de la UBA por parte del estudiante, como hábito para la solución de instancias-problema nuevas. Evidentemente, el tiempo no será igual para todos los estudiantes pero puede estimarse de forma grupal si la situación lo requiere.
5. La secuenciación de nuevas instancias-problema obedece tanto al análisis hecho por el docente acerca del curso de razonamiento colectivo, como en la aspiración de las necesidades intelectuales cambiantes de los estudiantes (Harel, 2010). Por la experiencia que van desarrollando en cada nuevo ciclo de razonamientos, ellos adoptan un rol propositivo en el planteamiento de preguntas y vías para la conducción del trabajo matemático usando, por ejemplo, el esquema de pregunta "¿Y qué pasa si…?". El docente debe prestar atención, discernir sobre factores de relevancia e ir adaptando continuamente su plan de trabajo en el aula con base en estas necesidades.
6. El llamado a reflexionar continuamente sobre las condiciones iniciales del problema, sobre la adopción de puntos de partida específicos para ejecutar planes de solución, y sobre la pertinencia y eficiencia de las soluciones proporcionadas son acciones fundamentales en el trabajo de aula por parte del docente. Le exige preparar con antelación las instancias-problema pero, también, prepararse para la clase. Es decir, anticipar el aprendizaje hipotético

de los estudiantes y las posibles decisiones que se deberán tomar en cada caso. Se reconoce el importante trabajo que demanda la formación de cualidades específicas en el docente para conducir escenarios de aprendizaje como los aquí descritos, por lo cual se invita a la capacitación profesoral permanente.

5.3 Enriquecer el razonamiento repetido

En este trabajo, enriquecer el PRR del modelo de instrucción DNR implica el examen de la conceptualización dada por Harel acerca de este, inspeccionando las tres bases determinadas por él: internalizar; organizar y reorganizar; y retener.

La internalización como uno de los procesos del pensamiento sobre el cual se sustenta el PRR, se describe como aquella capacidad de aplicar de forma autónoma y espontánea el conocimiento sobre una situación específica. Surge la pregunta ¿de qué manera evidenciar en el trabajo de aula y el modelo emergente en esta investigación la expresión “aplicar de forma autónoma y espontánea”? Con la evidencia aquí analizada y presentada se identifica tal expresión en el proceso de réplica del esquema mental. Se hipotetiza que “aplicar de forma autónoma y espontánea” es observable en la réplica de un esquema mental en equilibrio (estructura conceptual y acciones de la UBA) que se constituye debido a la exploración de instancias-problema de la categoría inicial, a problemas de particular naturaleza. Dicho equilibrio es alcanzado gracias a la aplicación sucesiva de UBA y UAA en esas instancia-problema de la categoría general propuesta.

Por lo anterior es fundamental la concepción ampliada de esquema mental que se presentó en el apartado anterior: se requiere pensar en la dualidad conceptos-acciones pues, es esto lo que favorece la evidencia de la aplicación “autónoma y espontánea” del conocimiento, y en lo que el estudiante puede sustentar una exploración matemática particular.

Por otro lado, la capacidad de reestructurar el conocimiento en ricas redes conceptuales jerárquicas (organización y reorganización del conocimiento) se identifica claramente en el modelo, al provocar un desequilibrio en el esquema mental formado por una instancia-problema y las acciones incorporadas en la UBA. Se hipotetiza que dicha reorganización solo sucede en presencia de las acciones de la UAA, como consecuencia de dicho desequilibrio. Así, un docente puede identificar una modificación cognitiva al evidenciar en un estudiante el uso de las acciones de la UAA durante el proceso de solución de algunas instancias-problema, para luego volver a emplear las acciones de la UBA a partir de un momento dado debido a que, desde ahí, le son suficientes.

A este respecto vale mencionar que los hallazgos conducen a considerar la incidencia del razonamiento repetido tanto en la configuración de esquemas mentales iniciales que le permitan al estudiante explorar las instancias-problema de la categoría general, así como para su reestructuración. Esto confirma las hipótesis hechas por Cooper (1991), acerca de la importancia de lo que él establece como experiencia repetida en el aprendizaje de la matemática. En suma, el razonamiento repetido es un proceso fructífero no solo para la consolidación de acciones y actitudes que hacen que el aprendizaje perdure con posterioridad, sino también para la etapa de comprensión de determinados contextos matemáticos.

Por último, la retención del conocimiento como la capacidad de recordar conocimiento por un largo periodo de tiempo implica, posiblemente, sopesar la palabra "conocimiento" como la dualidad que se ha planteado: conceptos-acciones. Si una pieza de conocimiento es la acción de dividir el problema planteado, entonces la evidencia muestra que este es uno de los conocimientos retenidos por los estudiantes pues, acuden a esta acción en cada instancia-problema que les fue planteado. O si el uso de los registros tabulares como mediadores puede catalogarse como conocimiento, entonces la evidencia muestra que este es otro conocimiento retenido por ellos pues es utilizado en, incluso, categorías de problemas diferentes. La operacionalización de la expresión "un largo periodo de tiempo", es una deuda reconocible en el contenido del actual trabajo.

RECOMENDACIONES Y PROSPECTIVAS DE TRABAJO

El trabajo juicioso de análisis del razonamiento repetido que ha sido presentado, favorece el avance en la operacionalización de los procesos de internalizar y organizar y reorganizar, más no sobre el proceso de retener. Es importante reconocer que la naturaleza de la presente investigación limita el estudio de este componente debido a que involucra la capacidad de los estudiantes de recordar el conocimiento durante un largo periodo de tiempo. Al respecto, surgen preguntas como ¿cuánto tiempo representa “un largo periodo de tiempo”? ¿Qué condiciones se requieren durante ese “largo periodo de tiempo” para evaluar la retención? ¿Qué tipos de diseños metodológicos son apropiados para evaluar la retención? ¿Cuáles condiciones contextuales favorecen o no la retención?, entre otros. Se admite la vasta complejidad de estos interrogantes, y la necesidad de orientar proyectos completos de investigación que tomen como derrotero este objeto de estudio para echar a andar la maquinaria de indagación sobre este asunto. Esta es la razón principal por la cual se considera que esta investigación es solo un “rasguño” que permite acercar la mirada de forma limitada a este importante proceso de aula, y que sirve como nicho para dedicar esfuerzos colectivos y mayores a futuro en el campo de la investigación en educación matemática.

Ahora bien y como asunto de interés, se resalta el hecho de la formación de conciencia en los participantes acerca de ver que la solución de un problema involucra establecer una respuesta o resultado, pero también, reconocer los medios para justificar y sustentar dicha respuesta, lo cual ocurre solo al llevar un proceso de organización y reorganización del conocimiento. Así pues, si bien se concibe la obtención de respuesta a un problema como parte fundamental, la evidencia aquí presentada muestra que es solo una parte de la tarea que debe desarrollar el aprendiz.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*(31), 237-257.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., . . . Hiebert, J. (2019). Posing Significant Research Questions. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 114-120.

Cooper, R. (1991). The Role Mathematical Transformations and Practice in Mathematical Development. En P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (págs. 102-123). New York: Springer-Verlag.

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical modeling. Applications with GeoGebra.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education, 40*, 487-500.

Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question.* San Diego, California: Universidad de California.

Harel, G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (págs. 343-367). Berlin: Springer.

Harel, G. (2013). DNR-Based Curricula: The Case of Complex. *Journal of Humanistic Mathematics*, 2-61.

Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual and Their Constituents. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh, *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs.* (págs. 3-27). Cham: Springer.

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM*, 709-721.

Kieren, T., & Pirie, S. (1991). Recursion and the Mathematical Experience. En P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (págs. 78-101). New York: Springer-Verlag.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science, 35*(2), 99-139.

Kontorovich, I. (2019). Why do students not check their solutions to mathematical problems? A field-based hypothesis on epistemological status. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1050-1062.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* Edinburgo: Pearson Education Limited.

Moreno-Armella, L. (2010). Preface to Part XI DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework by Guershon Harel. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education* (págs. 341-342). Londres: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. *Proceedings of NORME05: Relating Practice and Research in Mathematics Education - Fourth Nordic Conference on Mathematics Education Trondheim, Norway, 2-6 September* (págs. 97-110). Trondheim, Norway: Tapir Academic Press.

Niss, M. (2021). Mathematical modelling competency in relation to other mathematical competencies. *XII Simposio de matemática y educación matemática* (págs. 26-26). Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for conneting theoretical approaches – First steps towards a conceptual framework. *ZDM, 40*(2), 165-178.

Schoenfeld, A. . (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, 1163-1175.

Schoenfeld, A. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult? En M. Danesi, *Handbook of Cognitive Mathematics* (págs. 1-32). London: Springer International Publishing.

Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. Trafton, & A. Shulte, *New directions for elementary school mathematics* (págs. 31-42). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: Taylor & Francis.

Sriraman, B., VanSpronsen, H., & Haverhals, N. (2010). Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education* (págs. 369-378). Berlin: Springer, Berlin, Heidelberg.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellin: Editorial Universidad de Antioquia.

Vollstedt, M., & Rezat, S. (2019). An Introduction to grounded theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. En G. Kaiser, & N. Presmeg, *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs.* (págs. 81-100). Switzerland: Springer Cham.

ANEXOS

Anexo 1: Encuesta a docentes de matemáticas

Objetivo: Establecer las formas de desarrollo de formas de entender y de pensar en matemáticas, su evaluación y reflexión docente.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo: Estimado docente, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca avanzar en la caracterización del pensamiento matemático desde un enfoque comunicacional a través de la resolución de problemas de matemática discreta. Lea atentamente la siguiente introducción y proceda a responder las preguntas. Muchas gracias por su colaboración.

Promover y evaluar el pensamiento matemático supone considerar los actos mentales que pone en juego un individuo para realizar una tarea matemática. Estos actos se manifiestan por medio de un producto, pero a su vez, varios productos del mismo acto comparten una característica común. Por ejemplo, si se habla del acto mental de interpretar un símbolo como ¾, un estudiante puede manifestar que este es “la suma de ¼ + ¼ + ¼ “, lo cual es un producto. A su vez, un docente puede inferir, sobre varias interpretaciones como la anterior, que la característica del acto puede ser “la de hacer conexiones con otros objetos y conceptos matemáticos”. La investigación equipara las características de los actos mentales con formas de pensamiento matemático deseables a largo plazo, para los cuales los docentes deben establecer espacios que favorezcan su internalización, organización y retención.

I. Datos generales

1. Licenciado en Matemáticas: Sí _ No _
2. Postgrado: Sí _ No__ ¿Cuál? _____________
3. Años de experiencia orientando cursos de matemáticas: ___

II. Cuestionario

Valore en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes peguntas.

Preguntas	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
¿En sus clases propone problemas matemáticos que favorecen la adopción de formas de pensamiento matemático a largo plazo?					
¿Reconoce y distingue el momento en el cual sus estudiantes han internalizado, organizado y retenido formas de pensamiento matemático deseables?					

¿Utiliza instrumentos de evaluación, criterios, rúbricas, etc., para determinar la internalización, organización y retención de formas de pensamiento matemático deseables a largo plazo?					
¿Utiliza instrumentos de evaluación, criterios, rúbricas, etc., para determinar la internalización, organización y retención de formas de pensamiento matemático deseables a largo plazo?					
¿El desarrollo de formas de pensamiento matemático a largo plazo requiere algo más que la resolución de una actividad o problema específico?					
¿Al emitir la valoración del desempeño de sus estudiantes en el desarrollo de una tarea matemática, tiene en cuenta tanto las acciones de los estudiantes (*v.g*. verbalizaciones, gestos, acciones, etc.), como los productos cognitivos (*v.g*. conjeturas, generalizaciones, aplicación de algoritmos, entre otros)?					

III. Responda las siguientes preguntas

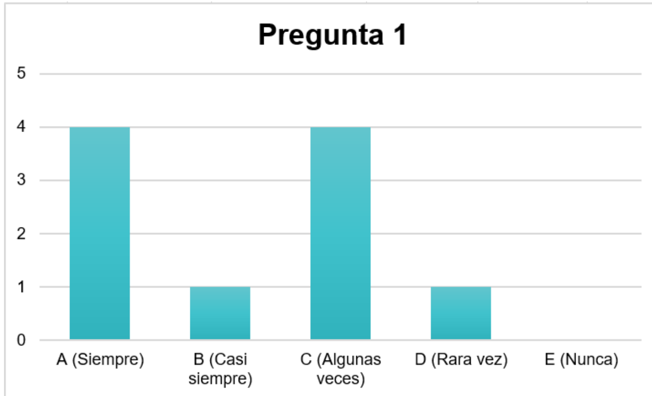
1. Bajo su consideración ¿qué tipo de actividades, tareas, recursos, etc., favorecen el desarrollo de formas de pensamiento matemático a largo plazo?
2. ¿Cuánto tiempo, actividades, problemas, etc., considera que es necesario para el desarrollo de formas de pensamiento matemático a largo plazo?
3. Describa los hechos o situaciones específicas que le permiten reconocer y distinguir en sus estudiantes la internalización, organización y retención de formas de pensamiento matemático deseables
4. ¿Qué instrumentos o criterios utiliza, o utilizaría, para determinar la internalización, organización y retención de formas de pensamiento matemático deseables a largo plazo?

Análisis encuesta por medio de criterio de expertos para fundamentar consenso

A continuación, se presenta el análisis de la encuesta realizada a docentes de matemáticas estableciendo el consenso de las preguntas en escala Likert al consultar a estos expertos. Se inicia con una tabulación de cada una de las cinco preguntas, para luego establecer el valor de consenso de estas.

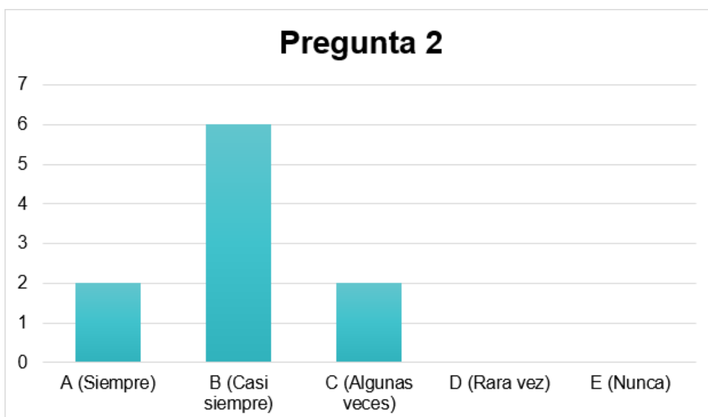
Pregunta 1

¿En sus clases propone problemas matemáticos que favorecen la adopción de formas de pensamiento matemático a largo plazo?



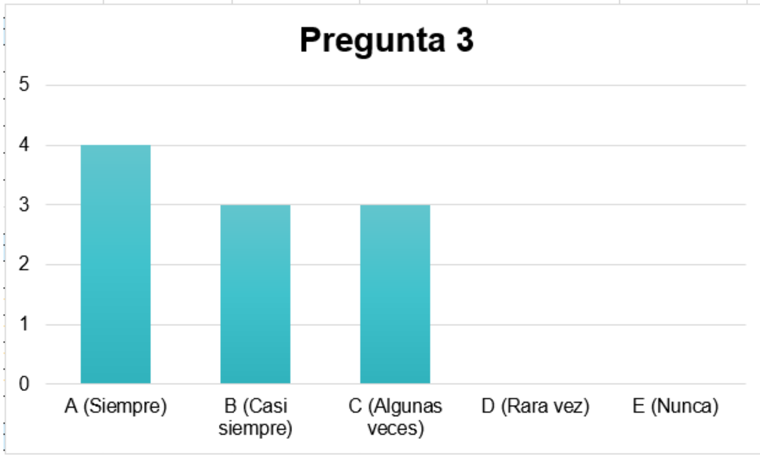
Pregunta 2:

¿Reconoce y distingue el momento en el cual sus estudiantes han internalizado, organizado y retenido formas de pensamiento matemático deseables?



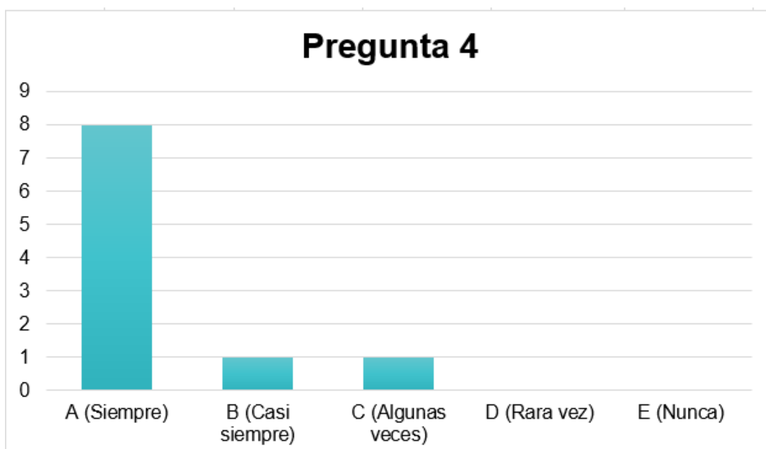
Pregunta 3:

¿Utiliza instrumentos de evaluación, criterios, rúbricas, etc., para determinar la internalización, organización y retención de formas de pensamiento matemático deseables a largo plazo?



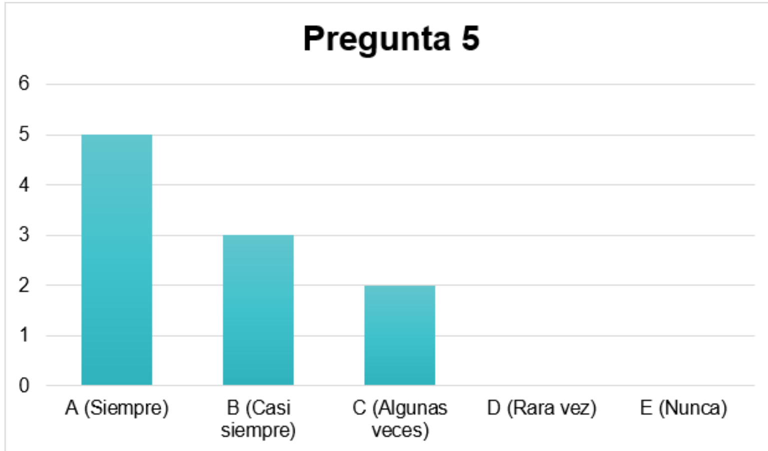
Pregunta 4:

¿El desarrollo de formas de pensamiento matemático a largo plazo requiere algo más que la resolución de una actividad o problema específico?



Pregunta 5:

¿Al emitir la valoración del desempeño de sus estudiantes en el desarrollo de una tarea matemática, tiene en cuenta tanto las acciones de los estudiantes (*v.g.* verbalizaciones, gestos, acciones, etc.), como los productos cognitivos (*v.g.* conjeturas, generalizaciones, aplicación de algoritmos, entre otros)?



Ahora bien, se tabulan los resultados anteriores en un único registro como se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 3: Tabulación de datos inicial para las preguntas en escala Likert

Pregunta	A (Siempre)	B (Casi siempre)	C (Algunas veces)	D (Rara vez)	E (Nunca)
1	4	1	4	1	0
2	2	6	2	0	0
3	4	3	3	0	0
4	8	1	1	0	0
5	5	3	2	0	0

Ahora, se procede a aplicar el tratamiento estadístico requerido a la Tabla 1, de acuerdo con lo estipulado por el método de análisis, obteniendo los valores que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 4: Valores de análisis de la tabulación de datos de acuerdo con método

Pregunta	A (Siempre)	B (Casi siempre)	C (Algunas veces)	D (Rara vez)	E (Nunca)	SUMA	PROMEDIO	N-Prom
1	-0,25	0	1,29	4,09	4,09	9,22	1,84	0,63
2	-0,84	0,95	4,09	4,09	4,09	12,38	2,48	0,00
3	-0,25	0,53	4,09	4,09	4,09	12,55	2,51	-0,03
4	0,95	1,29	4,09	4,09	4,09	14,51	2,90	-0,43
5	0	0,95	4,09	4,09	4,09	13,22	2,64	-0,17
SUMA	-0,39	3,72	17,65	20,45	20,45	61,88	12,38	-9,90
Puntos Corte	-0,078	0,744	3,53	4,09	4,09	12,38	**2,4752**	

Con estos valores, se tienen como puntos de corte -0.078, 0.744, 3.53 y 4.09. Con estos, ubicamos en una recta dichos puntos y se analiza la ubicación del valor de cada pregunta de acuerdo con esto, obteniendo los siguientes resultados (Ver Ilustración 1).

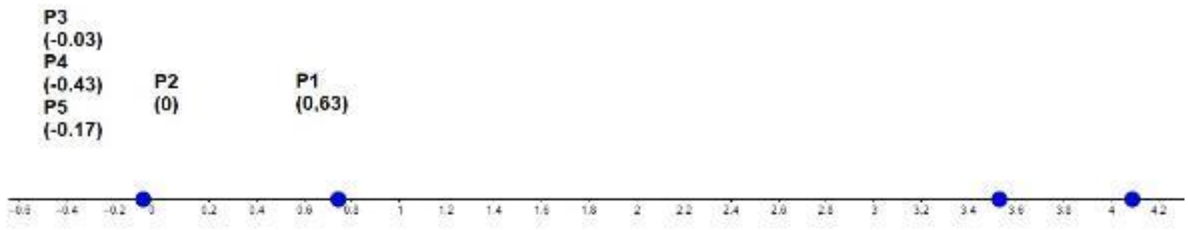


Ilustración 1: Ubicación de preguntas de acuerdo con puntos de corte

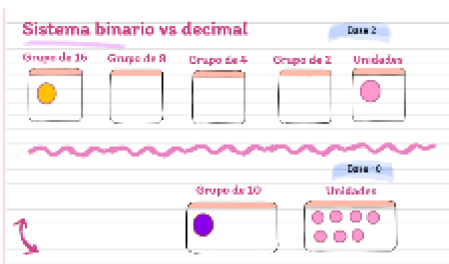
Con base en lo anterior se puede evidenciar un consenso en relación con las cinco preguntas planteadas, pues todas se encuentran entre los dos primeros puntos de corte.

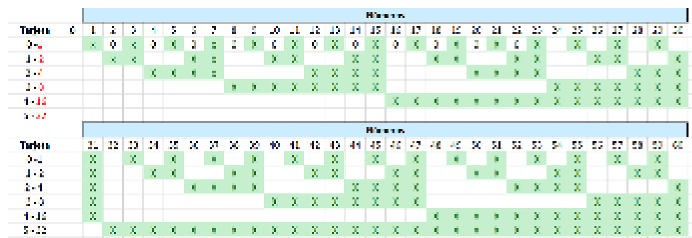
Este consenso evidencia que en la práctica docente es requerido el uso de rúbricas, criterios, instrumentos de evaluación, etc. para el seguimiento del desarrollo de formas de pensamiento matemático, además de la necesidad de una amplia gama de actividades que permitan su consolidación. Por otro lado, los expertos se encuentran en consenso acerca de la integración entre las acciones/prácticas de los estudiantes y los productos cognitivos, con el fin de evaluar y emitir valoraciones sobre el desempeño de los estudiantes al desarrollar formas de pensamiento matemático particulares.

Anexo 2: Evidencia de producciones fase preliminar

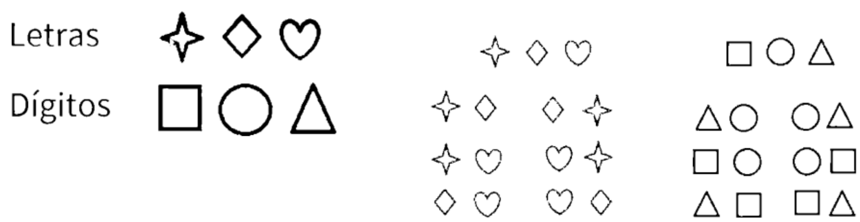
Categoría 1 – recursos que emplea el estudiante







Categoría 2 – estrategias personales o compartidas



Categoría 3 – pautas para la toma de decisiones

Transcripción intervención María en el problema de las tarjetas

#	Tiempo	Participante	Intervención
6	52:26	María	Yo noto que, digamos (.) cada número de la esquina [de cada tarjeta] corresponde como a (.) al valor [que representa una esfera] de cada cajita. Digamos, en la tarjeta 0 [tomamos] el 1, que son las unidades; el 2 [de la tarjeta 1, que coincide con el valor de la segunda posición]; el 4 [de la tarjeta 2, que coincide con el valor de la tercera posición]; el 8, [de la tarjeta 3, que coincide con el valor cuarta posición]; el 16, [de la tarjeta 4, que coincide con el valor quinta posición] y el 32 [de la tarjeta 5, que coincide con el valor sexta posición].

Transcripción intervención Alberto en el problema de la barra de plata

#	Tiempo	Participante	Intervención
10	32:42	Alberto	Este grupo de barras o de partes (…) [representan] el 6, el 7, el 8, el 9, el 10, el 11, el 12, el 13 o el 14. Solo hay que saberlos sumar. Por ejemplo, tenemos (…) [el día] 6. Entonces, tomamos la barra [que mide] 4 [cm] y la barra [que mide] 2 [cm y que, en total suman 6 cm]. Después tomo la barra de 4 [cm] y la barra de 3 [cm para el día 7]. Después la barra de 4 [cm], 3 [cm] y 1 [cm para el día 8], aunque también puede colocar la barra de 5 [cm] y la barra de 2 [cm para el día 7].
11	33:05	Docente	Sí, eso te iba a decir. ¿Qué influye en la selección [de una configuración de barras]? ¿Nada?
12	33:10	Alberto	Puede darle menos, puede darle más. Lo importante es que la suma cumpla con el día.

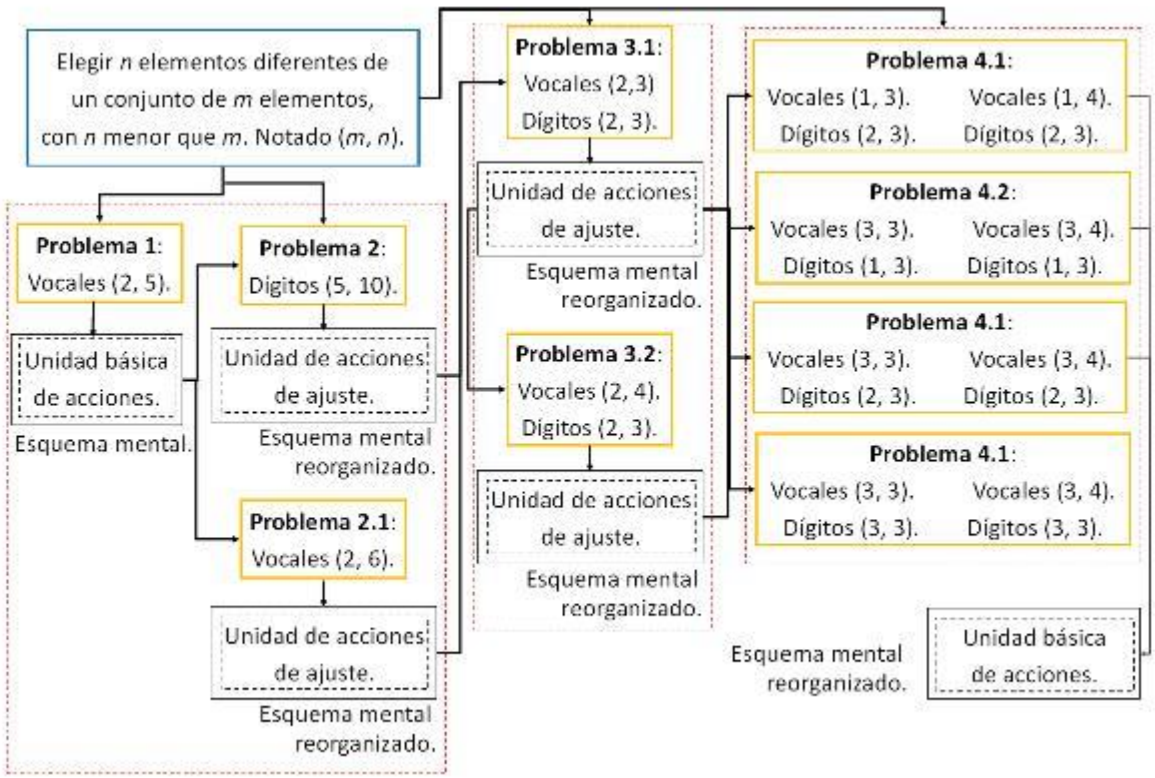
Transcripción intervención Alejandra en el problema de los ceros

#	Tiempo	Participante	Intervención
14	56:55	Alejandra	Cuando comencé en el [número] ocho (2000) comenzaba [la representación binaria] mil [1000 que corresponde a la representación del número 8 en binario], después se le ponía [el número] uno [al dígito de las unidades para representar el número nueve con 1001], después se le corría [el número] diez [1010 en representación binaria del número diez], después se le volvía a repetir el [número] uno [en el

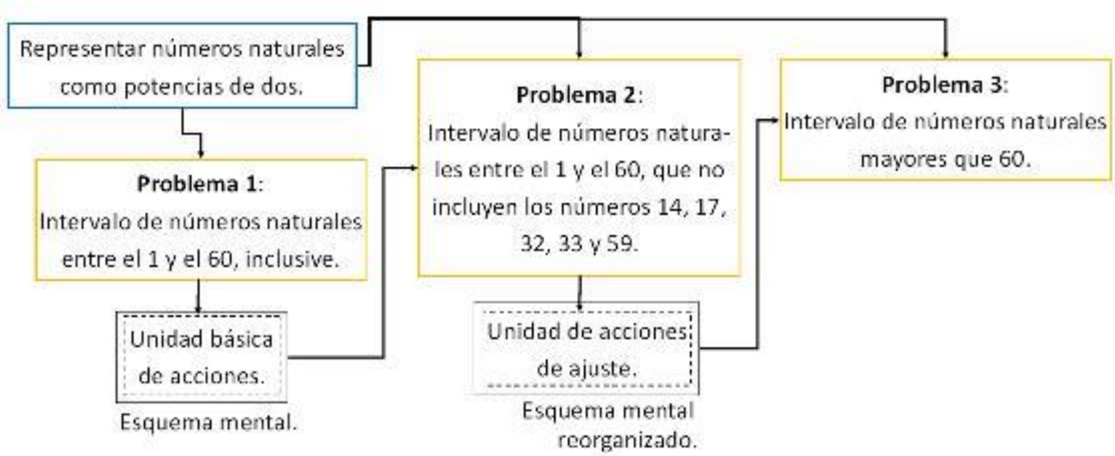
			dígito de las unidades para representar el número once con 1011], y después se corrió a [el número] cien [1100 en representación binaria del número doce], y así sucesivamente.
15	57:40	Docente	Sí.
16	57:41	Alejandra	Entonces, comenzaba en 0 [representación binaria del número cero], luego en 1 [representación binaria del número uno], luego en 10 [representación binaria del número dos], luego en 11 [representación binaria del número tres], luego en 100 [representación binaria del número 4], luego en 101 [representación binaria del número cinco], luego en 110 [representación binaria del número 6], y quedaba en 111 [representación binaria del número siete], y así se repetía (.) iba subiendo.

Anexo 3. Modelos de razonamiento repetido para los problemas de las actividades 1 y 2

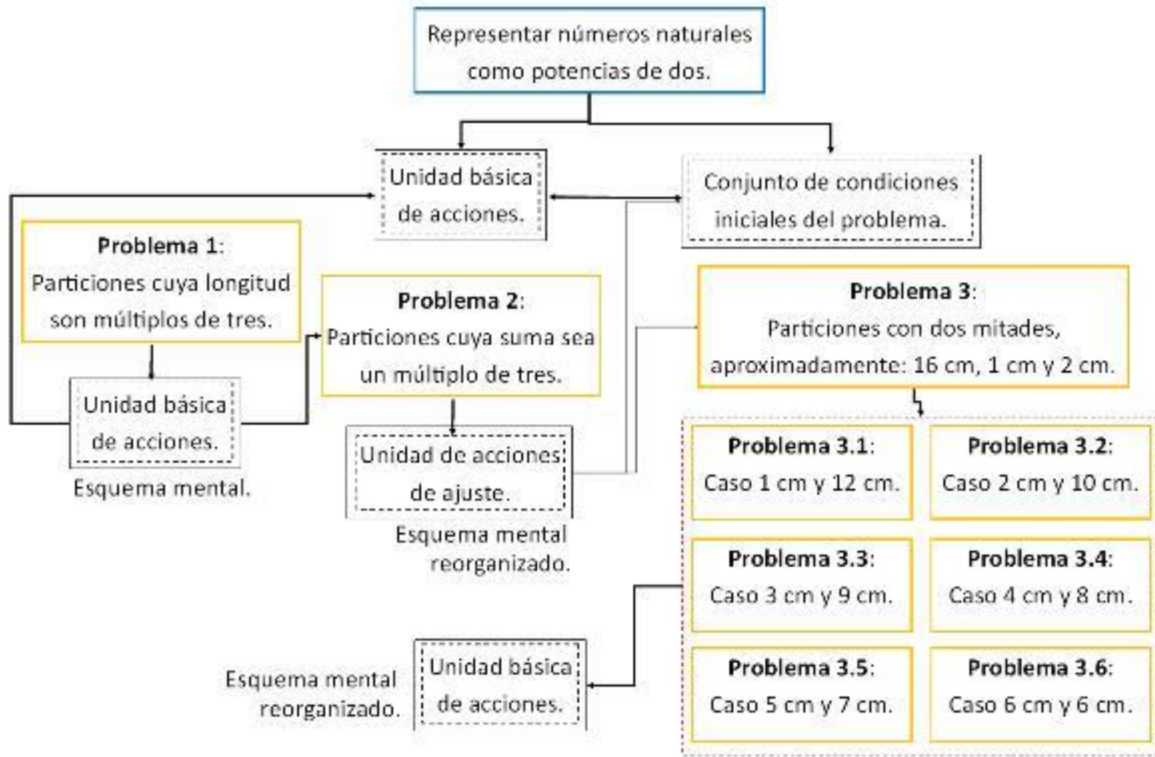
Actividad 1 – ¿cuántas placas/matrículas pueden hacerse?



Actividad 2 - ¡Yo puedo adivinar el número!



Actividad 2 – Pagando el alquiler



Actividad 2 - ¿Cuántos ceros escribirías?