Programa de Doctorado en Educación Matemática

INCLUSIÓN EN EL AULA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA BASADO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD COGNITIVA.

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Diana Patricia Cardenas Cuesta

Bogotá, Colombia

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

INCLUSIÓN EN EL AULA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA BASADO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD COGNITIVA.

Tesis que se presenta como requisito parcial para obtener el título de Doctor en Educación Matemática

Diana Patricia Cardenas Cuesta

Director:

Dr. Gerardo Chacón

Bogotá, Colombia

2023

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá,

SÍNTESIS

Esta investigación tuvo como objetivo precisar cuáles son las necesidades educativas que presentan los estudiantes con DC, para qué a través de la resolución de problemas matemáticos y la teoría de la gamificación, los procesos de inclusión y enseñanza – aprendizaje se dinamicen y fortalezcan en el aula de clase.

Para ello se estableció una metodología de tipo cualitativo a través de estudios de caso, donde se analizaron ocho estudiantes con diferentes tipos de discapacidad. Se realizó una propuesta didáctica denominada mundos matemáticos, basada en la resolución de problemas, en modelo de instrucción matemática DNR, donde se analizan las necesidades que requieren los estudiantes para su proceso de enseñanza – aprendizaje y, para el desarrollo de las actividades se implementaron dos estrategias, la teoría de la gamificación y elementos de inclusión con el fin de que los estudiantes con DC aumenten su motivación y participaran activamente en el desarrollo de las clases de matemáticas.

Como resultado se obtuvo que estas estrategias permitieron integrar a los estudiantes en el desarrollo de las clases de matemáticas, identificar cuáles herramientas utilizan para solucionar problemas matemáticos y cuáles son las necesidades que ellos presentan para ser incluidos de manera efectiva en el aula de clase.

ABSTRACT

This research aimed to specify what are the educational needs presented by students with DC, so that through the resolution of mathematical problems and the theory of gamification, the processes of inclusion and teaching - learning are dynamized and strengthened in the classroom.

To this end, a qualitative methodology was established through case studies, where eight students with different types of disabilities were analyzed. A didactic proposal called mathematical worlds was made, based on problem solving, in a DNR mathematical instruction model, where the needs that students require for their teaching-learning process are analyzed and, for the development of the activities, two strategies were implemented, the theory of gamification and elements of inclusion in order for students with DC to increase their motivation and actively participate in the development of mathematics classes.

As a result, it was obtained that these strategies allowed students to be integrated into the development of math classes, identify which tools they use to solve mathematical problems and what are the needs they present to be effectively included in the classroom.

Dedicatoria

A mi madre, y mi tía Cecilia por su apoyo incondicional
y compañía invaluable.

A mi esposo, mi compañero de vida.

A mis hijos Juan Esteban e Isabella por ser los motores de mi vida
y acompañarme en este largo camino.

Agradecimientos

Mi más profundo y sincero agradecimiento al doctor Gerardo Chacón, director de este trabajo de grado, que me colaboró con el desarrollo de esta investigación, por sus instrucciones, conocimiento y entrega en su labor.

A todos los maestros que hacen parte del equipo del Doctorado en Educación Matemática por su profesionalismo y por sus aportes en esta investigación.

A mis estudiantes de grado once, especialmente los niños que presentan discapacidad, porque me permitieron conocerlos, estudiarlos y aprender de sus diferencias, fueron parte fundamental en esta investigación. Infinitas gracias por su dedicación.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN

En la actualidad diferentes estamentos en Colombia y en el mundo han desarrollado normas y políticas públicas en el sector educativo que mencionan la necesidad de realizar procesos de inclusión a todas las personas en el sistema educativo sin importar su grupo étnico, religión, ubicación geográfica, orientación sexual, discapacidad entre otros.

Han tomado como base a las disposiciones generales establecidas por la Unesco (1994), que instaura como directriz que todas las personas con algún tipo de discapacidad tienen derecho a la educación y por lo tanto es indispensable que en las instituciones educativas se incluyan estos estudiantes y reciban una educación de calidad. En el marco de estas disposiciones destaca *"las personas con necesidades* educativas especiales deben tener acceso a las escuelas ordinarias, que deberán integrarlos en una pedagogía centrada en el niño, capaz de satisfacer esas necesidades*"[1].*(p.VIII). Esto implica que: *"las escuelas ordinarias con esta orientación integradora representan la medida más eficaz para combatir las actitudes discriminatorias, crear comunidades de acogida, construir una sociedad integradora y lograr la educación para todos; además, proporcionan una educación efectiva a la mayoría de los niños y mejoran la eficiencia y, en definitiva, la relación costo-eficacia de todo el sistema educativo".*

La ONU por su parte en el año de 2004 diseñó un módulo de educación inclusiva, con el fin de brindar la información necesaria que contribuya a realizar las adaptaciones curriculares a las instituciones para brindar una educación de calidad a las personas que presentan necesidades educativas especiales (NEE). Frente a estas directrices Colombia realizó un proceso de ajustes curriculares e inclusión para acogerlos, por ello el Ministerio de Educación Nacional (MEN) expidió el decreto 1421 de 2017 "por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad".

Con base en esta política las instituciones educativas públicas y privadas se ven obligadas a admitir estudiantes que presenten diferentes tipos de discapacidad, con el fin de brindar una educación de calidad a todos los niños y niñas sin ningún tipo de diferencia.

---

[1] Unesco (1994). Declaración de Salamanca y marco de acción para las necesidades educativas especiales. Salamanca, España. Junio de 1994.

Sin embargo, al interior de las aulas se evidencia que en muchas ocasiones los estudiantes que presentan Discapacidad Cognitiva (DC) son aislados o se les asignan actividades diferentes de las asignadas en clase a los estudiantes regulares, como lo menciona Young (2000), citada por López (2011) quien la denomina "exclusión interna", porque se tienen creencias de que ellos no poseen las habilidades para enfrentarse a los conceptos del área o porque los maestros no están capacitados para enseñar a estudiantes que presentan Discapacidad Cognitiva (DC).

Así mismo Gervasoni y Lindenskov (2011)[2], argumentan que tanto los estudiantes con discapacidades como los estudiantes de bajo rendimiento merecen "derechos especiales" en matemáticas, ya que estos estudiantes han sido sistemáticamente excluidos del plan de estudios de matemáticas de alta calidad, porque se considera que las matemáticas son un campo inapropiado para ellos o si están en la clase no reciben la calidad de la instrucción apropiada que les permita avanzar en su aprendizaje.

Ellos manifiestan a su vez que "*la educación matemática y los programas de aprendizaje de matemáticas con derechos especiales deben comenzar con dos enfoques importantes 1. colocar a los estudiantes en el centro con los objetivos declarados para desarrollar su conocimiento, motivación y habilidades de comunicación y 2. un enfoque en currículos e instrucción de matemáticas de calidad en respuesta a los desafíos globales".*

Esto no es ajeno en Colombia, al revisar planes de formación de maestros a nivel de pregrado y postgrado encontramos que en las 90 facultades de educación que se encuentran a nivel nacional no presentan programas profesionales o cursos de formación, que capaciten y orienten a los maestros sobre cómo desarrollar clases a estudiantes que presentan discapacidad cognitiva, que se encuentran inmersos en el aula regular.

[2] Gervasoni, A., & Lindenskov, L. (2011). Students with 'Special rights' for mathematics education. In Mapping equity and quality in mathematics education. Springer. p. 307–323.

Frente a la normatividad establecida por el MEN se evidencia que no hay una claridad de cuál es la forma de enseñar y evaluar a los estudiantes con discapacidad cognitiva (DC) y sobre cuáles son los logros mínimos que debe alcanzar un estudiante que presenta algún tipo de discapacidad o qué conceptos básicos en cada área se puede desarrollar de acuerdo con sus habilidades cognitivas o características de sus procesos de pensamiento, pues no existe una caracterización o estudios que lo determinen y más aún en el área de matemáticas.

El sistema integrado de matrículas (SIMAT)[3] presenta que en Colombia al 2016 había 11511 niños matriculados en el sistema educativo colombiano con diferentes tipos de discapacidad, de los cuales 7552 niños tienen DC que representa el 53% del total de estudiantes con discapacidad. Al 2023 en la ciudad de Bogotá se tienen 20036 estudiantes con discapacidad cognitiva matriculados en el Simat, lo que refleja que año tras año hay un aumento considerable.

Con base a lo anterior, se puede afirmar que en las aulas regulares ha aumentado el número de estudiantes por curso con discapacidad cognitiva y al revisar los planes de estudio o programas, vemos que falta información de estrategias metodológicas y didácticas que permitan atender a este tipo de población de manera eficaz y eficiente como lo establece la política de inclusión.

La comunidad académica de investigadores y educadores en el campo de la educación matemática también han iniciado investigaciones en este ámbito, frente a dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática y han sido tema de discusión en diferentes mesas de trabajo como en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), quienes mencionan que son pocas las investigaciones que se han desarrollado hasta el momento.

---

[3] Simat. Sistema integrado de matrícula estudiantil de Educación Básica y media. https://www.sistemamatriculas.gov.co/simat/app

Particularmente en el ICME 13 en la mesa de trabajo 5[4] y en el ICME 14 en la mesa de trabajo 4[5] resaltan la importancia que desde la educación matemática se desarrollen investigaciones frente a cómo se debe caracterizar y realizar intervenciones pedagógicas y didácticas a estudiantes que presentan diferentes tipos de necesidades educativas especiales, discapacidades, problemas o dificultades de aprendizaje o del desarrollo, que pueden llegar a tener los estudiantes en matemáticas, y el papel que juega la práctica centrada en la educación matemática inclusiva.

También socializaron experiencias de aula de diferentes países como Brasil, EE. UU., Alemania, Francia y Australia que se han desarrollado y han sido efectivas para enseñar matemáticas a estudiantes con discapacidad visual, auditiva, con síndrome de Down, entre otras discapacidades. Frente a los estudios realizados a estudiantes que presentan dificultades de aprendizaje en matemáticas, hay diferentes definiciones que se han establecido de discapacidad cognitiva y en el cual se enmarcan los obstáculos y las dificultades que pueden presentar los estudiantes que la presentan.

Una de ellas está dada por el 10th International Classification of Diseases (ICD 10 WHO. 2016)[6], quienes lo definen dentro de la clasificación de las enfermedades como un trastorno específico en la categoría de habilidades aritméticas, que ha recibido fuertes críticas por parte de la comunidad académica, porque utiliza como mecanismo de clasificación el test de coeficiente intelectual (CI) asociado con el rendimiento académico en matemáticas; La American Psychiatry Association (APA), publicó el Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders (DSM V)[7] donde establecen las dificultades en el aprendizaje, como

[4] Kaiser, G. (2017). Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME 13. Springer. p. 397-400.
[5] Theis, L. & Stephan M. (2020). TSG 4 Mathematics education for students with special needs. 1-3
[6] WHO—World Health Organization. (2016). International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems 10th Revision.
[7] DSM V. (2016). Diagnostical and statistical manual of mental disorders. (5th ed.). https://www.psychiatry.org/psychiatrists/practice/dsm

problemas en el razonamiento matemático para aplicar conceptos, hechos o procedimientos para resolver problemas cuantitativos.

Dentro de las investigaciones revisadas para la construcción del estado del arte se ha evidenciado que emplean dos tipos de metodologías basados en la instrucción para trabajar con estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que son la instrucción directa y la instrucción de estrategia cognitiva, como las intervenciones más efectivas para trabajar con este tipo de estudiantes, y que han sido utilizadas para trabajar con estudiantes que presentan discapacidad cognitiva DC.[8]

Sin embargo, otras investigaciones como las desarrolladas por Witzel (2005) y por los investigadores Cass et al. (2003), mencionan que existe otro tipo de instrucción que combina los dos anteriores llamada instrucción concreta, representativa, abstracta, (CRA) donde plantean que estos tres tipos de instrucción permiten al estudiante solucionar problemas usando símbolos numéricos y permite al docente enseñar temas más abstractos.

Frente a las prácticas de educación inclusiva, Faragher et al. (2015), destacan la importancia de la educación matemática inclusiva ya que *"reconoce la diversidad humana e implica apoyar las diversas necesidades de aprendizaje de todos los estudiantes en las aulas de matemáticas generales"* [9]. En ese sentido se hace necesario apoyar la pertinencia y la participación de todos los estudiantes en el aula y también la necesidad de relacionar diferentes disciplinas como la educación especial y la educación matemática para mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

[8] Montague, M. & Jitendra, A. (2012). Research-Based Mathematics Instruction for Students with Learning Disabilities. In: G. Kaiser and B. Sriraman, ed., *Advances in Mathematics Education*, 1st ed. [online] Springer. pp.481- 513.
[9] Faragher, R. (2015). Diversity. In D. Siemon, K. Beswick, K. Brady, J. Clark, R. Faragher, & E. Warren (Eds.), Teaching mathematics: Foundations to middle years (2nd ed., pp. 142–165). South Melbourne, VIC: Oxford University Press.

Por su parte Prediger y Buro (2021) en sus investigaciones proponen un marco conceptual frente a las prácticas de enseñanza inclusivas que usan los maestros al trabajar con estudiantes diversos basado en cuatro habilidades que son la atención selectiva, el preconocimiento matemático, dominio del lenguaje y la regulación metacognitiva, ya que pueden ser adaptadas a contextos particulares donde haya diferentes tipos de necesidades educativas. Esto muestra el amplio campo de investigación en el que se pueden enfocar la educación matemática y cómo puede orientarse para la enseñanza a estudiantes que presentan discapacidad cognitiva, en el cual no existe un modelo definido para intervenir de manera efectiva a estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En la mayoría de las investigaciones consultadas sobre intervenciones a estudiantes con discapacidad mencionadas en el estado del arte del presente trabajo, encontramos que han focalizado su investigación con estudiantes de básica primaria donde mencionan las estrategias metodológicas específicamente basado en la instrucción para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes como: Fernández y Sahuquillo (2015), Göransson et al. (2016), Kevin et al. (2005), y Prendergast et al., (2017).

En Colombia encontramos investigaciones a nivel de maestría como la de Aldana y López (2016), quienes trabajaron su investigación con estudiantes que presentan discapacidad cognitiva y síndrome de Down, para aprender los conceptos de área y perímetro. También hemos encontrado que para implementar este plan en las instituciones se ha sugerido adoptar el diseño universal de aprendizaje (DUA), pero al revisar publicaciones no se han encontrado en Colombia resultados de la implementación de este método.

Con base a lo anterior, se plantean las siguientes **preguntas de investigación** ¿Qué estrategias metodológicas pueden implementarse en el aula de clase para favorecer la inclusión de estudiantes que presentan diferentes tipos de discapacidad en su proceso de enseñanza y aprendizaje en las clases de matemáticas basado en la resolución de problemas?

¿Qué tipo de necesidades y recursos requieren los estudiantes con Discapacidad Cognitiva para ser incluidos en el aula de clase de matemáticas, ser partícipes en su proceso de enseñanza y aprendizaje?

Como **objeto de estudio** se precisa el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de estudiantes con discapacidad cognitiva, en los niveles de educación básica secundaria.

El **objetivo general** de esta investigación es precisar cuáles son las necesidades educativas que presentan los estudiantes con DC, para qué a través de la resolución de problemas matemáticos y la teoría de la gamificación, los procesos de inclusión y enseñanza – aprendizaje se dinamicen y fortalezcan en el aula de clase.

Se plantean como **objetivos específicos**:

1. Analizar las percepciones y prácticas que tienen los profesores hacia los estudiantes que presentan DC, asociada a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

2. Aplicar y evaluar un sistema de actividades basadas en la resolución de problemas matemáticos y la gamificación, que permita la inclusión de los estudiantes con DC en el aula de clase.

3. Categorizar cuales elementos metodológicos conducentes a la inclusión favorecen el aprendizaje y la participación de los estudiantes con DC en el aula.

4. Determinar cuáles son los elementos que emplean los estudiantes con DC en el proceso de solución de problemas matemáticos.

En coherencia con los objetivos propuestos en el trabajo, **el campo de acción de** esta investigación se enmarca en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula de clase, a través de la resolución de problemas a estudiantes que presentan discapacidad cognitiva.

Como posible solución al problema de investigación se plantea la siguiente **hipótesis científica**, el uso de un sistema de actividades sustentado en la inclusión y la gamificación, favorecerá el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a estudiantes con discapacidad cognitiva.

La población con la cual se desarrolló la presente investigación es el colegio San Agustín IED, institución pública ubicada en la ciudad de Bogotá en la localidad Rafael Uribe que tiene alrededor de 2350 estudiantes entre jornada mañana y tarde; en la actualidad cuenta con aproximadamente 135 estudiantes con discapacidad, de los cuales 80 tienen discapacidad cognitiva. La muestra son 8 estudiantes de ciclo V jornada mañana que comprende grado décimo y once, donde hay 3 estudiantes que presentan discapacidad cognitiva, 3 que presentan otros tipos de discapacidades y 2 con dificultades de aprendizaje y no han sido diagnosticados.

Las tareas de investigación que se proponen desarrollar en la presente investigación son:

1. Construir el estado del arte que fundamenta la pertinencia y justificación de la presente investigación.

2. Determinar el marco teórico que sustenta el trabajo de investigación y la metodología que se desarrollará dentro de las implementaciones e intervenciones en el aula.

3. Elaborar actividades basadas en la gamificación sobre problemas en matemáticas para estudiantes de ciclo V.

4. Analizar los resultados obtenidos en las actividades aplicadas a los estudiantes con discapacidad.

5. Establecer cuáles son los apoyos y necesidades que se requieren para la enseñanza de las matemáticas a estudiantes que presentan DC sustentado en la resolución de problemas y en el enfoque de la inclusión matemática y la motivación.

La **importancia de este estudio** son los aportes teórico y práctico que se pueden dar, en el campo de la educación matemática. En el **aporte teórico**, se pretende establecer qué tipo de necesidades educativas y estrategias metodológicas requieren los estudiantes que presentan discapacidad cognitiva DC para tener una participación más activa en clase de matemáticas y ser incluidos como lo propone Boaler (2016). Esto permitirá hacer contribuciones al campo de la educación matemática y de la educación en general, ya que en la actualidad es escasa la información que se encuentra hasta el momento y porque ayudará a los maestros a fortalecer sus prácticas pedagógicas, sobre todo a trabajar con niños que presentan discapacidad cognitiva y comprender algunos elementos de su pensamiento con el fin de aprovechar más sus potencialidades y destrezas que les permita ser incluidos en el aula de clase.

El **aporte práctico** son las actividades que se desarrollaron en esta investigación, estructuradas desde dos tópicos, el primero las matemáticas escolares teniendo en cuenta elementos teóricos como números, combinatoria, álgebra y geometría, el discurso matemático que involucra elementos de la comunicación, que ayudaron a los estudiantes a comprender y justificar sus soluciones, argumentar sus ideas y relacionarse con sus compañeros de clase; adicionalmente las necesidades que se presentan en el aula para desarrollar una mejor conexión entre el espacio, a la hora de la resolución de problemas y la aplicación o uso los objetos matemáticos como lo plantean Kevin et al. (2005), Dobbins et al. (2014), y Aldana & López (2016).

En segundo lugar, la teoría de la gamificación que integran dos momentos, el primero la dinámica y estética del juego con sistema de puntos, personajes, poderes y mundos que permiten desarrollar la motivación e interés de la clase, segundo el trabajo en equipo que permitió a los estudiantes comprender los retos, usar estrategias para llegar a la solución, compartir y exponer las ideas con sus pares, para validar sus soluciones que permiten desarrollar su pensamiento matemático y su actividad matemática en el aula, tomando como directriz los estudios desarrollados desde la educación matemática que resaltan la importancia de avanzar en investigaciones que motiven a los estudiantes de educación básica y media, por medio de actividades que impliquen retos o desafíos en matemáticas como lo establecen Barbeau y Taylor (2009), Stillman et al., (2009).

El presente documento está desarrollado en cuatro capítulos, el primero es el estado del arte que relaciona estudios realizados frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a estudiantes con discapacidad cognitiva, la enseñanza de las matemáticas a población con discapacidad cognitiva a través de la solución de problemas, y por último investigaciones del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, la inclusión y la motivación.

El segundo capítulo es el marco teórico que fundamenta la metodología de esta investigación ligada a las teorías de la educación matemática como la inclusión, la discapacidad cognitiva, la motivación y la equidad, las necesidades planteadas en el modelo DNR, la gamificación, la solución de problemas y los desafíos matemáticos.

En el tercer capítulo se encuentra la metodología, se describe la población objeto de estudio, el enfoque de investigación, la metodología que es la investigación basada en el diseño IBD fases desarrolladas y la descripción de las actividades.

El cuarto capítulo presenta el análisis de resultados donde se describen los ocho casos de estudiantes analizados, del Colegio San Agustín IED, de la ciudad de Bogotá, los resultados obtenidos por cada uno de ellos una vez implementadas las actividades, desde explorando, los números, álgebra y conteo, también frente al aporte teórico y práctico para determinar cuáles son las necesidades y las estrategias de aprendizaje obtenidas, las conclusiones y recomendaciones para dar continuidad a esta investigación.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

Son pocas las publicaciones e investigaciones que se han realizado en torno a la enseñanza de las matemáticas para estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad que sirven como referentes teóricos y prácticos para el desarrollo de esta investigación. Los resultados de la indagación sobre el estado del arte se han categorizado en tres aspectos, el primero, sobre estudios realizados frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática a población con discapacidad, el segundo, enseñanza de la matemática a población con discapacidad a través de la solución de problemas y el tercero, estudios realizados sobre investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, la inclusión y la motivación.

1.1 Estudios realizados en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a estudiantes con discapacidad cognitiva.

1.1.1 Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual.[10]

Howard et al. (2018) presentan en este artículo de investigación un estudio de las oportunidades de aprendizaje (ODA), que se ofrecen a estudiantes que presentan discapacidad intelectual (DC), en escuelas especiales de Chile, analizan cuáles son las creencias y prácticas declaradas por parte de los maestros con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a este tipo de población. Realizaron un diseño de estudio de casos múltiples, empleando entrevistas semiestructuradas, registro de material en el aula y observación de clases, a nueve profesores de educación especial de los cuales

[10] Howard, S., San Martin, C., Salas, N., Blanco, P., y Díaz, C. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. *Revista Colombiana de Educación*, Vol. 74, 197-219.

tres de ellos son directores, tres coordinadores técnico-pedagógicos y tres profesoras de ciclo básico (5 y 7) de tres escuelas de la ciudad de Santiago de Chile.

Emplearon una codificación axial, con cinco categorías 1. La forma en que se concibe la enseñanza de las matemáticas para estos estudiantes en escuelas especiales y la relación con elementos curriculares, 2. La planificación de la enseñanza, 3. las metodologías de enseñanza, 4. los recursos para la enseñanza, y 5. los principales elementos referidos a la evaluación. Los resultados concluyen que la enseñanza de las matemáticas se debe ajustar a las necesidades de los estudiantes, y es necesario diversificar las tareas de lo concreto a lo abstracto. También es posible realizar trabajo cooperativo entre estudiantes, esto permite más integración e interacción entre ellos con el conocimiento matemático.

1.1.2 Developing a Mathematics Module for Students with Intellectual Disability in Higher Education.[11]

La investigación fue realizada por Prendergast et al. (2017) en una Universidad de Irlanda aplicando a dos grupos, uno de cinco y otro de tres estudiantes con discapacidad intelectual ID, un curso de matemáticas para un programa de educación superior, observaron escasa bibliografía y pocos estudios sobre currículos para estudiantes universitarios con ID. Buscaron desarrollar en los estudiantes la capacidad de pensar críticamente sobre las matemáticas, expresar puntos de vista, discutir lógicamente y resolver problemas de manera efectiva. El curso abordó temas como el uso del dinero, medidas, estadística, probabilidad y trigonometría enfocados a problemas prácticos de la vida real y desafiantes y utilizaron como recursos mediadores computadores, calculadoras y desarrollaron videos tutoriales. La metodología empleada para la enseñanza de las matemáticas se enfocó en la resolución de problemas,

[11] Prendergast, M. Spassiani, N. & Roche, J. (2017). Developing a Mathematics Module for Students with Intellectual Disability in Higher Education. Revista International Journal of Higher Education, Vol. 6, N° 3. 166-177.

talleres prácticos, trabajo en equipo y aprendizaje colaborativo para motivar a los estudiantes, debatir o argumentar sus diferentes puntos de vista, con sus pares.

1.1.3 Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual.[12]

Este trabajo de investigación fue realizado por Fernández y Sahuquillo (2015) y un grupo de docentes de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Castilla de la Mancha, donde establecen la importancia de la enseñanza de las matemáticas de manera efectiva y ajustable a estudiantes que presentan necesidades educativas especiales (NEE).

El objetivo de esta investigación es la elaboración de un plan de acción en el área de matemáticas para adaptarlas a las características y necesidades del alumnado con NEE y así favorecer su proceso de aprendizaje, realizan una intervención a un estudiante con metodología investigación-acción donde se busca modificar la instrucción que se le daba al estudiante y las actividades se enmarcaron en a. destrezas pre-numéricas, donde se abordaron procesos de clasificación, asociación de tamaños similares y correspondencia de cantidad símbolo numérico, b. numeración y valor posicional, realizando secuencias numéricas de números menores que la decena, y c. operaciones matemáticas básicas de suma y resta.

Cómo conclusiones establecen que cualquier estudiante con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, puede desarrollar estas competencias básicas, por metodologías específicas adaptadas a su proceso de aprendizaje, algunas pueden ser el uso de materiales manipulables, juegos para poder facilitar la transición y aplicación de los conocimientos en su medio y a su vida cotidiana.

[12] Fernández, R. & Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia. Vol. 4. 11-23.

1.1.4 A Conceptual Approach to Teaching Mathematics to Students with Intellectual Disability[13]

Göransson et al. (2016) presentan un estudio de cómo se puede interpretar y construir un currículo en matemáticas basado en conceptos para estudiantes con discapacidad de cuatro instituciones educativas en Suecia donde es obligatorio, el proceso de escolaridad dentro de las aulas regulares para este tipo de población, y que han empleado como metodología la instrucción directa y cuando se establece un currículo por competencias basado en el NCTM (2000), que busca fortalecer el enfoque conceptual profundo en matemáticas. Para ello realizaron un estudio de seis clases en seis escuelas de Suecia, con 18 lecciones de matemáticas filmadas, y registradas por medio de un protocolo de observación y 21 entrevistas a los maestros de estas escuelas, con el fin de comprender más a fondo lo que estaba sucediendo.

Para el análisis de la información emplearon un análisis de contenido cualitativo, analizaron las actividades realizadas en las clases para comprender cómo se articulan, para mejorar el desarrollo de competencias en matemáticas. En las conclusiones establecen que dentro de la práctica docente es necesario hacer accesibles los planes de estudio, relacionados con las competencias a través de actividades de matemáticas y estrategias que proporcionan el uso de materiales e incentivar la competencia.

1.1.5 Teaching Geometry to Students with Math Difficulties Using Graduated and Peer-Mediated Instruction in a Response-to-Intervention Model[14]

---

[13] Göransson, K. Hellblom, T. & Axdorph, E. (2016). A Conceptual Approach to Teaching Mathematics to Students with Intellectual Disability. Scandinavian Journal of Educational Research, 60(2). p. 182-200.

[14] Dobbins, A. Gagnon, J. & Ulrich, T. (2014) Teaching Geometry to Students with Math Difficulties Using Graduated and Peer-Mediated Instruction in a Response-to-Intervention Model. Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth. Vol.58. N°1. 17-25.

Dobbins et al. (2014), realizaron una investigación basada en las intervenciones de instrucción RTI y Tier II para los estudiantes que presentan dificultades en matemáticas. Para orientar la metodología de las clases de secundaria a esta población, proponen articular dos enfoques de instrucción matemática a estudiantes que presentan discapacidades para el aprendizaje de la geometría, que son el modelo de respuesta de intervención graduada CRA, (Concreta, Representativa y Abstracta) y PALS (estrategias de aprendizajes asistida por pares), complemento a la instrucción matemática que fue aplicado dos a tres días por semanas durante 15 días. Esta estrategia permite a los estudiantes trabajar como tutores y tutoriantes en cada sesión donde cada uno se compromete a enseñar a sus compañeros, a través de la modelación siguiendo los pasos para la resolución de problemas, se realizó con 92 estudiantes de los grados 9 a 12 y su objeto de estudio fue el aprendizaje del área y perímetro del trapecio por medio de la solución de problemas.

Los investigadores mencionan que este tipo de actividades ayuda a desarrollar en los estudiantes estrategias metacognitivas a la hora de resolver problemas rutinarios, como el monitoreo de sus compañeros, el autocontrol para planificar y evaluar a sus pares especialmente en el proceso de aprendizaje de la geometría. Finalmente concluyen que la combinación de estas dos estrategias, van en consonancia con los principios establecidos en el NCTM y brinda a los estudiantes con discapacidades una oportunidad para aprender con éxito la geometría.

1.1.6 Comprensión de la probabilidad de jóvenes con discapacidad intelectual[15]

Este artículo resulta del trabajo de investigación desarrollada por López (2018), que busca caracterizar el pensamiento probabilístico de niños que presentan discapacidad cognitiva. Su objetivo fue establecer un

[15] López J. (2018). Comprensión de la probabilidad de jóvenes con discapacidad intelectual. Revista científica. Vol. 33. N° 3. p. 306-315.

marco de referencia que permita a los docentes de educación especial plantear actividades para el tratamiento de estocásticos ante la heterogeneidad de estudiantes que se encuentran en el aula.

La población de estudio fueron estudiantes de tercer grado de educación básica secundaria, analiza tres casos de estudiantes con discapacidad intelectual seleccionados por su disposición, desempeño respecto a sus compañeros de aula. Trabajo tres ejes rectores, el eje epistemológico donde referencia a Heitele (1975) que referencia al conocimiento del azar, la probabilidad y la estadística; el eje cognitivo donde adopta las ideas de Fischben (1975), donde se muestra los procesos de pensamiento del sujeto en el aula referida al conocimiento estocástico y por último se encuentra el eje social donde se tiene en cuenta al sujeto en el aula y su conocimiento en los procesos estocásticos. Con base a los resultados obtenidos, dos estudiantes lograron comprender los conceptos de espacio muestral, medida de probabilidad y variable aleatoria, a un evento que mostraba un fenómeno aleatorio. El tercer estudiante logró identificar un evento con mayor probabilidad en la tabla de frecuencia donde se registraron los datos obtenidos al sumar 13.

1.2 Enseñanza de las matemáticas a población con discapacidad cognitiva a través de la solución de problemas

1.2.1 Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities[16]

Kevin et al. (2005), realizan una investigación a treinta estudiantes chinos que poseen discapacidades cognitivas leves distribuidos en tres grupos aplicando a cada uno tres enfoques la instrucción convencional (CO), la instrucción trabajada con base a un ejemplo (WE) y la instrucción de estrategia cognitiva (CS) para la solución de problemas matemáticos de suma y resta. Una forma de enseñar la

[16] Kevin K. Chung H. & Tam H. (2005) Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities, Journal of Intellectual and Developmental Disability, Vol. 30. N°4. p. 207-216

solución de problemas es con base al aprendizaje de ejemplos convencional y otro enfoque es el uso de ejemplos con palabras que consta de los siguientes pasos: 1. Dominar las palabras para solucionar los problemas, 2. Desarrollar categorías para clasificar problemas que requieren soluciones similares, y 3. Ser capaz de reconocer las conexiones entre problemas nuevos y problemas familiares que se han resuelto anteriormente.

El estudio se desarrolló en tres fases, la fase de instrucción los estudiantes recibieron una instrucción general inicial en la que se explicaban los términos matemáticos más y menos que los utilizados en un contexto de solución de problemas de palabras, luego en la fase de adquisición realizaron cuatro sesiones en la que los alumnos recibieron un conjunto de cinco problemas de adquisición para cada sesión. Se usaron dos problemas como ejemplos resueltos y luego se presentaron tres problemas en una hoja de trabajo para que los estudiantes los resolvieran. Esta investigación muestra estrategias que pueden ser empleadas con los estudiantes que presentan DC en la clase de matemáticas como la instrucción de estrategia cognitiva y autorregulación a la hora de trabajar problemas en matemáticas.

1.2.2 Use of a Self-Regulated Strategy Intervention to Improve Word Problem-Solving Skills of Students with Mild Disabilities[17]

Cassel y Reid (1996) investigan acerca de los efectos de la instrucción autorregulada de 4 estudiantes de primaria que presentan discapacidades, 2 de tipo leve y 2 con retraso mental, para resolver problemas de palabras que integran operaciones de suma y resta. Aplican una estrategia que no use el enfoque de palabras clave en la solución de problemas y examinar si la instrucción de estrategia sería efectiva para trabajar con este tipo de población. Establecen en su estudio la necesidad de incluir elementos metacognitivos como la autoevaluación, auto instrucción y autorregulación del uso de la estrategia. Para

[17] Cassel J. & Reid R. (1996). Use of a Self-Regulated Strategy Intervention to Improve Word Problem-Solving Skills of Students with Mild Disabilities. Journal of Behavioral Education. Vol. 6. N° 2. 153-172.

la resolución de problemas con palabras emplearon una ficha mnemotécnica que plantea los siguientes pasos: 1. Leer el problema en voz alta; 2. Encuentre y resalte la pregunta para escribirla en la tarjeta; 3. Pregunte cuáles son las partes del problema; 4. Escriba y etiquete los datos del problema; 5. Vuelva a leer el problema y establezca la operación; 6. Descubrir el signo; 7. Lea el problema con los números; 8. Contestar el problema numérico y 9. Escriba la respuesta y verifique que tiene sentido. Los estudiantes repitieron estas estrategias hasta interiorizarse y memorizar todos los pasos. Al finalizar el estudio, concluyen que el rendimiento de los cuatro estudiantes mejoró respecto a los niveles de referencia y se ubicó por encima del 80% al final de la instrucción posterior.

1.2.3 Using Number Lines to Solve Math Word Problems: A Strategy for Students with Learning Disabilities[18]

Gonsalves y Krawec (2014) realizan una investigación que propone a los maestros desarrollar una instrucción complementaria de resolución de problemas que se enfoca en el desarrollo de estrategias de representación usando rectas numéricas. Esta estrategia de representación permite a los estudiantes desarrollar esquemas, hacer selección de términos o palabras clave, la creación de representaciones visuales, y crear modelos matemáticos precisos antes de resolverlos. Proponen como estrategia que la instrucción debe dividirse en dos fases: 1. Traducir el problema a la recta numérica y 2. Interpretar la representación de la recta numérica.

Es importante que mediante la instrucción los maestros integren tres elementos importantes en la representación que son 1. La información relevante que se proporcionó en el problema. 2. Las interrelaciones o conexiones entre esa información y 3. El objetivo o las preguntas que se relacionan con la información dada. El proceso que lleva el estudiante debe ser monitoreado constantemente para que

[18] Gonsalves, N. & Krawec, J. (2014). Using Number Lines to Solve Math Word Problems: A Strategy for Students with Learning Disabilities. Learning Disabilities Research & Practice. Vol. 29. N°4. p. 160–170.

la instrucción se pueda adaptar de acuerdo con las necesidades que presenta. Una recomendación muy importante que hacen es que los estudiantes manejen las cuatro operaciones básicas para que esta estrategia surta efecto y sobre todo puedan representarlas en la recta numérica.

1.2.4 Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área[19]

Aldana y López (2016) desarrollaron este proyecto con el patrocinio de la Universidad del Quindío, su objetivo era identificar los elementos históricos, epistemológicos, didácticos y cognitivos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de perímetro y área a 20 estudiantes que presentan DC y 6 Síndrome de Down de la Fundación Quindiana de Atención Integral de la ciudad de Armenia. La metodología empleada es la ingeniería didáctica y marco teórico las situaciones didácticas; a partir del análisis preliminar, establecen cuatro categorías de análisis relacionadas con el objeto de estudio que son conteo, medición y comparación, reconocimiento espacial y la noción de perímetro y área.

En los resultados obtenidos la mayoría de los estudiantes reconocen la noción de perímetro y área y la asocian con las nociones de frontera o contorno de forma natural, a su vez establecen que el uso de secuencias didácticas y de materiales tecnológicos, facilita a los estudiantes con DC aprender los objetos matemáticos, pues les permite desarrollar la representación de imágenes mentales específicamente de los conceptos de área y perímetro desde la percepción y la visualización.

1.3 Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, la inclusión y la motivación

[19] Aldana E. & López, J. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. Revista investigación desarrollo e innovación. 7. 77-92.

1.3.1 Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, ¿or both?[20]

En este artículo Roos (2019) realiza una revisión teórica con el fin de investigar discursos frente a la inclusión en la educación matemática en aras de conocer su significado y operación. Estableció un periodo de tiempo de consulta del 2010 a 2016, y la búsqueda se realizó en seis bases de datos Eric, Springer, Web of Science, PsycINFO, SwePub y Mathematics Education Database. Al analizar los artículos, empleó el análisis del discurso donde estableció dos categorías de análisis para el concepto de inclusión.

El primero está relacionado frente al concepto o uso del discurso de la inclusión en las matemáticas en la sociedad (DIMS), donde se da un significado ideológico de equidad, valoración a la diversidad etc., y el segundo el discurso de las matemáticas en el aula (DIMC) que se centra en la operacionalización o intervenciones en la enseñanza de las matemáticas en el aula, para favorecer el proceso de enseñanza - aprendizaje y las estrategias de intervención. Como hallazgos menciona que hay una diferencia entre los dos tipos de discursos y que hay muy pocos estudios que abordan la equidad y las acciones para la inclusión.

Una de las características más resaltadas dentro de DIMC, es la participación de los estudiantes. Por otro lado, resalta que, en el DIMS, la diversidad está conectada a temas sociales, y en DIMC, la diversidad está conectada a estudiantes, escuelas y aulas y que la noción de diversidad y la inclusión en relación con la exclusión fueron visibles tanto en el DIMS como en el DIMC.

1.3.2 Hacia una inclusión educativa en la enseñanza de las Matemáticas[21]

[20] Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? Educational Studies in Mathematics. Vol. 100. p.25–41

[21] Carmona J. & Arango C. (2013). Hacia una inclusión educativa en la enseñanza de las Matemáticas. Revista Educación científica y tecnológica. Edición Especial. p. 636- 640.

Carmona y Arango (2013) presentan este artículo producto de una investigación donde desarrollaron una propuesta de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a 20 estudiantes que presentan diferentes tipos de discapacidad como trastorno de déficit de atención e hiperactividad, autismo, retardo cognitivo etc., de una institución educativa de la ciudad de Medellín, con una metodología del aula taller para la enseñanza de las secciones cónicas. Realizaron tres actividades la primera relacionada con el corte del cono, la segunda relacionada con el dibujo de la parábola, elipse e hipérbola, haciendo uso de la regla y compás y la tercera hace mención sobre las ecuaciones que se emplean para representar analíticamente las secciones cónicas.

La metodología prevista de aula taller es concebida como un espacio donde se articula la práctica con la teoría y los docentes y estudiantes tomen una participación más activa; las actividades sean diseñadas de manera progresiva frente a los niveles de complejidad, permite que los estudiantes exploren los conceptos y se apropien de los conocimientos; los investigadores mencionan que esta metodología es pertinente para estudiantes que presentan DC, pues permitió la construcción de los conceptos deseados.

1.3.3 Designing mathematics classes to promote equity and Engagement[22]

Boaler (2016a) realiza un estudio con un grupo de estudiantes universitarios graduados, donde realizan un curso de verano a estudiantes de grado séptimo y octavo denominado álgebra exploratoria, frente a que los estudiantes están fallando en matemáticas especialmente los estudiantes de bajos recursos, y cuando ingresan a la universidad el 75 %de ellos están obligados a tomar cursos de nivelación en matemáticas. El curso se realizó de lunes a jueves y duraron 90 minutos, los estudiantes pertenecían a diferentes grupos étnicos y sociales, de los cuales el 90% tenían una idea negativa de las matemáticas, y la mayoría de ellos habían sido remitidos a la escuela de verano porque sus maestros los consideraban

[22]Boaler J. (2016a). Designing mathematics classes to promote equity and engagement. Journal of Mathematical Behavior, 41, 172–178.

extremadamente débiles en el área. El desarrollo del curso giro en torno a tres principios de enseñanza centrales que fueron: 1. Involucrar a los estudiantes como aprendices activos y capaces, donde se busca la equidad, para que todos los estudiantes pudieran trabajar un alto nivel de matemáticas. 2. Enseñar contenido algebraico a través de prácticas matemáticas, como un tema de equidad, ya que los estudiantes exitosos de alguna manera aprenden esto y otros no, pero cuando se les da oportunidades para aprender de forma práctica, los estudiantes que antes no tuvieron éxito pueden llegar a tenerlo. 3. Fomentar una comunidad colaborativa en aras de fomentar discusiones matemáticas para aumentar la comprensión de los estudiantes y ayudarlos a que se sientan miembros de una comunidad matemática.

Esto permite promover la investigación en educación matemática vinculando de manera inseparable las oportunidades de equidad, con la creación de comunidades de apoyo de estudiantes en matemáticas, en las que los docentes crean que todos los alumnos puedan aprender a un alto nivel. Al final concluyen que muchos de los estudiantes de la escuela de verano transformaron su relación con las matemáticas, pasando de la falta de afecto inicial y el bajo rendimiento al compromiso, la emoción y el alto rendimiento.

Conclusiones del capítulo 1

Este capítulo muestra la importancia de realizar estudios para comprender el proceso de aprendizaje de las matemáticas a estudiantes que presentan DC, pues hay pocas investigaciones en torno a este tema y tipo de población, y las que existen centran su estudio en niños de preescolar y primaria abordando temas como los números, nociones geométricas, representaciones gráficas en la recta y son muy pocas las que centran sus estudios en jóvenes de secundaria y a nivel terciario.

Algunos aportes que se dan están relacionados con estrategias didácticas para el desarrollo de las actividades, como uso de materiales manipulativos, para mejorar la concentración y procesos de seriación y uso de software, para mejorar la visualización y algunas estrategias metodológicas como trabajar en equipo, cambios en instrucción con el fin de mejorar el aprendizaje de los contenidos de matemáticas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hace una descripción de los referentes teóricos y prácticos que permitirán ubicar al lector frente a la fundamentación teórica que fueron base para el desarrollo del aporte teórico y práctico. Consta de cinco partes, la primera se aborda una descripción frente a que es la inclusión vista desde el punto de vista social, y desde el punto de vista de la educación matemática, la segunda parte trata de la discapacidad cognitiva, las características y algunas recomendaciones que se deben tener en cuenta en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

La tercera parte habla sobre que es la motivación, en especial desde la óptica de la educación matemática, como se puede articular con el juego y la teoría de la gamificación, la cuarta parte se aborda la resolución de problemas en matemáticas, se hace énfasis en el modelo de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfeld y el modelo IDEAL y por último que es un desafío o reto matemático y su importancia a la hora de realizar actividad matemática en el aula.

La quinta parte trata sobre el modelo DNR, focalizado en la instrucción por parte del docente para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, con base a las necesidades intelectuales que presentan los estudiantes y determinar si son las mismas para los estudiantes que presentan NEE.

2.1 La inclusión.

Son diversas definiciones que se han dado de inclusión, unas desde una óptica dada por estamentos gubernamentales que presentan un enfoque social de equidad, e igualdad y otras dadas desde la educación matemática que plantea la inclusión como la participación de todos en el aula. A continuación, se muestran estos dos puntos de vista.

2.1.1 Educación inclusiva desde un enfoque social.

Se entiende como educación inclusiva aquella ofrecida por la escuela proporcionando a todos los estudiantes el acceso a una educación que sea común para todos y que ofrezca una formación significativa y básica en todos los diferentes niveles de formación. En Colombia el Ministerio de Educación MEN (2013) en su documento Lineamientos Política de Educación Superior Inclusiva, establece que *la educación inclusiva se define como una estrategia central para luchar contra la exclusión social. Es decir, como una estrategia para afrontar ese proceso multidimensional caracterizado por una serie de factores materiales y objetivos, relacionados con aspectos económicos, culturales y político- jurídicos (ingresos, acceso al mercado de trabajo y a activos, derechos fundamentales), y factores simbólicos y subjetivos asociados a acciones determinadas que atentan la identidad de la persona (rechazo, indiferencia, invisibilidad).*[23]

En ese sentido, la educación inclusiva toma lugar como eje transversal de los sistemas educativos y por tanto no puede ser solamente vista como la provisión de recursos físicos e infraestructura, para que aquellos estudiantes categorizados con Necesidades Educativas Especiales (NEE) accedan a la educación, sino que implica una serie de ajustes a los currículos, planes de estudio y prácticas pedagógicas que se adapten a todos los estudiantes para que obtengan una educación de calidad.

La Unesco (1994) menciona que la educación inclusiva implica que en las escuelas deben acoger a todos los niños y niñas independiente de sus condiciones físicas, intelectuales, emocionales, lingüísticas y las escuelas deben educar con éxito a todos los niños, incluyendo aquellos que presentan discapacidades cognitivas graves.[24]

---

[23] MEN. (2013). Lineamientos Política de Educación Superior Inclusiva. (M. d. Nacional, Ed.) 1-98. Obtenido de http://www.dialogoeducacionsuperior.edu.co/1750/articles-327647_documento_tres.pdf. p.22

[24] Unesco. (1994). Declaración de Salamanca de principios, políticas y práctica para las necesidades educativas especiales. (Unesco, Ed.) 1-49. p. 45

Desde este punto de vista, la educación inclusiva parte del principio de educación para todos, reconoce la educación como un derecho de todos los seres humanos, y se opone a cualquier forma de discriminación o segregación por condiciones personales, culturales o sociales, y a su vez la integración de los alumnos con NEE o por condición de discapacidad. Lo que se busca es fomentar la participación de todos los estudiantes en la escuela sin excepción. López (2011)[25] menciona que *la educación inclusiva es un proceso para aprender a vivir con las diferencias de las personas. Es un proceso, por tanto, de humanización y supone respeto, participación y convivencia; sin embargo, la integración hace alusión a que las diferentes y los colectivos minoritarios se han de adaptar a una cultura hegemónica*.

Parte de unos principios que son a) la integralidad, que a su vez toma en cuenta dos aspectos que son la calidad frente al desarrollo integral de la persona y la pertinencia frente a la relación de las instituciones con el entorno, b) Flexibilidad, que hace referencia a la adaptabilidad para responder a la diversidad cultural y social.

2.1.2 La inclusión desde la educación matemática

Desde el campo de la educación matemática, no se da una definición formal frente a que es la inclusión, pero sin embargo hay dos posturas en las cuales se enmarcan los procesos de inclusión. Uno de ellos es visto como una ideología que hace referencia a la equidad en educación matemática y por otro lado está la visión de una forma de enseñanza que hace referencia a las intervenciones de enseñanza que apuntan a mejorar el compromiso individual o personal en el aprendizaje de las matemáticas.[26]

Los discursos que se manejan frente a la educación matemática inclusiva son el discurso de la inclusión en las matemáticas en la sociedad (DIMS) en el cual encontraron 23 estudios, se centran en el significado

[25] López M. (2011). Barreras que impiden la escuela inclusiva y algunas estrategias para construir una escuela sin exclusiones. Innovación educativa, V. 1(21), 37 -54. p. 41

[26] Roos H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, ¿or both? Educational Studies in Mathematics. N° 100. p. 25–41.

ideológico de la inclusión, temas y asuntos del discurso como la equidad, la valoración de la diversidad, el género, tomando una postura política y de valores fundamentales sobre derechos humanos y equidad. Por otro lado, está el discurso de las matemáticas en el aula (DIMC) que se centra en la operacionalización y las acciones de la inclusión en la educación matemática, en la enseñanza para la inclusión en las aulas y en maximizar las oportunidades de enseñanza y aprendizaje.

Roos (2019) menciona que la inclusión se ve como un proceso social de participación en la práctica matemática, y ser incluido puede ser visto como un proceso de participación.[27]

A su vez Tennant y Foley citado por Roos (2019) describen la inclusión como el hecho que *"Siempre que sea posible, todos los niños deben estar en la misma clase, formando relaciones significativas entre grupos, y encontrando el éxito y el desafío en el currículo".* Esta postura es la que se adoptará en este trabajo, se pretende que todos los niños estén en el aula estableciendo relaciones, comunidades de trabajo y apoyo con sus compañeros desarrollando de manera efectiva su proceso de aprendizaje en matemáticas.

2.1.3 La equidad en matemáticas

Hablar de inclusión implica que en las aulas los maestros deben orientar sus clases basados en valores, principios de respeto y equidad y por eso desde la educación matemática es importante considerar la discapacidad como parte de la equidad. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), establece que frente al acceso y equidad en la enseñanza de las matemáticas es importante: c*rear, apoyar y mantener una cultura de acceso y equidad requiere ser receptivo a los antecedentes, experiencias, perspectivas culturales, tradiciones y conocimientos de los estudiantes al diseñar e*

[27] Roos H. (2013). Inclusive mathematics from a special education perspective: ¿How can it be interpreted? In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), CERME 8: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. p. 2860–2869.

implementar un programa de matemáticas y evaluar su eficacia. Reconocer y abordar los factores que contribuyen a los resultados diferenciales entre los grupos de estudiantes es fundamental para garantizar que todos los estudiantes tengan oportunidades rutinarias de experimentar instrucción matemática de alta calidad, aprender contenido matemático desafiante y recibir el apoyo necesario para tener éxito. (NTCM, 2014)[28]

Así mismo establece que para lograr el acceso y la equidad requiere por parte de todos los interesados garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a un plan de estudios de matemáticas desafiante, impartido por maestros capacitados y efectivos que diferencien la instrucción según sea necesario, monitorear el progreso del estudiante, hacer las adaptaciones necesarias; y ofrecer remediación o desafíos adicionales cuando sea apropiado. Estos requerimientos son tenidos en cuenta para el desarrollo de este trabajo, y para el diseño e implementación de las actividades de aula propuestas para todos los estudiantes, donde prevalezca la igualdad y equidad en el aula de clase.

Boaler (2016b) propone seis estrategias metodológicas y orientadoras que benefician a los estudiantes para que las matemáticas sean más inclusivas, estas son:

1. Ofrecer a todos los alumnos contenidos de alto nivel en matemáticas

2. Trabajar para cambiar las ideas relativas a quienes pueden tener éxito con las matemáticas.

3. Alentar a los estudiantes a pensar profundamente sobre las matemáticas.

4. Enseñar a los estudiantes a trabajar juntos en equipo.

5. Brindar a las niñas y a los estudiantes de color un estímulo adicional para que aprendan matemáticas y ciencias.

---

[28] NTCM.ORG. (18 de abril de 2014). Obtenido de National Council of Teachers of Mathematics: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Access-and-Equity-in-Mathematics-Education/

6. Prescindir de los deberes, o al menos cambiar la orientación de estos.

Estos criterios se tuvieron en cuenta para el desarrollo de las actividades y la inclusión de estudiantes con DC.

2.2 Definición y caracterización de la discapacidad cognitiva (DC)

Son diversas las definiciones que se han dado al concepto de discapacidad cognitiva (DC) o discapacidad intelectual (DI) a lo largo del tiempo. En la revisión de los antecedentes examinados, encontramos que la mayoría de las investigaciones emplean el término discapacidad intelectual. A continuación, se enuncian algunas definiciones de discapacidad cognitiva o intelectual y se establece cuál de ellas se tendrá en cuenta para efectos de esta investigación.

El MEN (2006) en un documento orientador a docentes para estudiantes con DC, se menciona que la discapacidad cognitiva se conoce como "*una disposición funcional específica en los procesos cognitivos, habilidades de procesamiento y estilos de pensamiento, que determinan el desempeño y el aprendizaje de una persona. Es más específica que la discapacidad intelectual y más cercano a las prácticas educativas por su relación directa con los procesos de aprendizaje".*[29]

Por su parte la American Association no Intellectual and Developmental Disabilities,) (AAIDD) (2010) da una definición de discapacidad intelectual y establece que la *"discapacidad intelectual es caracterizada por limitaciones significativas tanto en el funcionamiento intelectual como en el comportamiento adaptativo, que abarca muchas habilidades sociales y prácticas cotidianas. Esta discapacidad se origina antes de los 18 años".*[30]

[29] MEN. (2006). Orientaciones Pedagógicas para la atención a estudiantes con discapacidad cognitiva. 1-80. p. 41.
[30] AAIDD. (2010). Disponible en: https://aaidd.org/intellectual-disability/definition.

Por su parte la American Psychiatric Association (APA) (2017), menciona que la discapacidad intelectual *"implica problemas con las habilidades mentales generales que afectan el funcionamiento en dos áreas: 1. Funcionamiento intelectual (como aprendizaje, resolución de problemas), 2. Funcionamiento adaptativo (actividades de la vida diaria como la comunicación y la vida independiente)".*[31]

Para efectos de este trabajo se tomará la definición de discapacidad cognitiva, establecida por el MEN (2006) ya que hace referencia desde el ámbito educativo a las capacidades que tienen los estudiantes, para procesar diferentes tipos de información que se desarrolla en tres momentos denominados los niveles de entrada, elaboración y salida; y a las dificultades específicas que pueden presentar en la comprensión de una tarea, que están relacionadas con las necesidades educativas individuales.

Frente a los procesos de intervención de los estudiantes que presentan DC, se establece que deben abordarse tres modelos para su intervención que son *el modelo social, el modelo socio–cognitivo y el modelo psicoeducativo*[32].

En el modelo social se establece que es necesario establecer una relación con sus pares de tal manera que tenga una participación con el proceso de construcción histórica de una sociedad, donde se generen las condiciones necesarias para favorecer su desempeño y el logro de las metas de aprendizaje. Este modelo establece diferentes niveles de desarrollo, denominados zonas de desarrollo real (ZDR), que es la base para el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes con DC, y busca relacionar el contexto para establecer los pasos que se deben seguir, para realizar las tareas que se le asignan y a su vez se establecer los apoyos o el acompañamiento que se debe realizar al estudiante.

[31] APA (2017). Disponible en: https://www.psychiatry.org/patients-families/intellectual-disability/what-is-intellectual-disability.
[32] MEN. (2006). Orientaciones Pedagógicas para la atención a estudiantes con discapacidad cognitiva. 1-80. p. 22.

En el modelo socio – cognitivo se presenta una estrecha relación entre la psicología cognitiva, para comprender los factores que inciden en el proceso de aprendizaje y desempeño cognitivo de los estudiantes con DC. Por ello es necesario establecer diferentes ambientes y metodologías de aprendizaje que les permita mejorar su aprendizaje y aplicar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas. Frente al proceso de elaboración las funciones cognitivas que se desarrollan están relacionadas con la estructuración de la información y la solución de problemas, estas son:

La percepción y definición de un problema, que está relacionada con la fase de identificar la información que se da en el problema, y lo que se debe averiguar en él, utilizando los conocimientos previos que tiene y empleando la información necesaria que requiere para su solución. La segunda función es denominada selección de información relevante, y es la información previamente almacenada y relevante para dar la solución al problema y se asocia en la memoria a largo plazo, que permite establecer relaciones entre la información de sucesos ocurridos en diferentes momentos. Las preguntas generadas en esta fase son ¿Qué información te sirve de lo que ha organizado y que no? ¿Debes conseguir más información o es suficiente la información suministrada?

La tercera función es denominada interiorización y representación mental, que consiste en la capacidad de usar símbolos internos de representación.[33] Es importante el desarrollo de esta función ya que si esta no se da los estudiantes presentan un bajo nivel de abstracción, uso erróneo o restringido de símbolos y signos, que afecta la representación mental y se realizan generalizaciones incorrectas. Por último, se encuentra la función de evidencia lógica, que es la capacidad de mostrar las soluciones de los problemas a través del razonamiento lógico, justificando y valorando sus respuestas. Esta función, es posible que los estudiantes con DC la alcancen mediante la demostración de procedimientos simples y la socialización

[33] MEN. (2006). Orientaciones Pedagógicas para la atención a estudiantes con discapacidad cognitiva. 1-80. p. 24.

de los procedimientos empleados para resolver el problema planteado. La aplicación de esta función puede fortalecer los procesos cognitivos de los estudiantes con DC.

2.3 Motivación en matemáticas

Con relación a la motivación, diferentes estudios han mostrado la relación que existe entre la motivación de los estudiantes y el rendimiento en matemáticas. La motivación según Santrock (2002), es *"el conjunto de razones por las que las personas se comportan de las formas en que lo hacen. El comportamiento motivado es vigoroso, dirigido y sostenido."*[34]

Por su parte Bello (1997) opina que la motivación *"designa una construcción teórica para comprender las condiciones que activan una conducta y la dirigen hacia un fin u objetivo determinado".* Sin embargo, frente al eje central de este trabajo, que es la motivación en el aprendizaje Alves (1963) citado por Farías y Pérez (2010) establecen que motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que se exigen.[35]

A su vez, los autores indicados, mencionan que la motivación en el estudiante se desarrolla en tres fases que son 1. la aprehensión de un valor para sus vidas y sus aspiraciones, 2. los alumnos se convencen de que pueden conseguir ese valor y 3. la liberación del esfuerzo personal para conquistar el valor. En la motivación también es importante tener en cuenta las metas que se encuentran cuando el estudiante quiere aprender, esto da origen a cuatro tipos de motivación que son la motivación intrínseca, la motivación de competencia, la motivación de control y la motivación extrínseca.

[34] Santrock. J. (2002). Psicología de la educación. Motivación y Aprendizaje. México D. F: McGraw- Hill/Interamericana. p. 432.
[35] Farias D. & Pérez J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la administración. (U. Simón, Ed.) Formación Universitaria, 3(6), 33-40. p. 35.

La motivación de competencia está relacionada con aquel estudiante que se interesa por aprender lo que está estudiando e incrementa sus conocimientos así no vayan a ser evaluados y calificados. La motivación intrínseca es cuando se atrae la curiosidad del estudiante, ya sea porque le interesa el tema o porque las actividades que se proponen llaman la atención del estudiante, como lo establecen Dweck y Elliot (1983): "*El alumno puede estar incrementando sus conocimientos o sus destrezas, pero aquello que determina su actividad, no es tanto el interés por incrementar su competencia cuanto la propia actividad en la que se siente a gusto, y cuyo fin está básicamente en sí misma"*.[36]

La motivación de control tiene la posibilidad de escoger distintas formas de resolver la tarea de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje. La motivación extrínseca está relacionada con el medio para garantizar los fines y la utilidad, en donde el otorgar recompensas o premios para que los estudiantes realicen las tareas puede ser negativo. En esta motivación el aprendizaje surge como consecuencia de factores externos o personas que participan en el ambiente de estudio.

2.3.1 El juego como herramienta motivante para el aprendizaje de las matemáticas.

Una herramienta poderosa para motivar a los estudiantes en las clases es el juego, como lo muestran los estudios realizados por Groos (1902) quien afirma que *el juego cumple un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento y de la actividad humana y que sirve de preparación para la vida adulta y la supervivencia.*[37]

Piaget (1985) muestra en sus investigaciones que los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad incorporándose para vivirla, dominarla, comprenderla y compensarla.[38] Vygotsky (1924), establece que el juego surge como una necesidad de

---

[36] Dweck, C. & Elliott, E. (1983). Achievement Motivation. Handbook of Child Psychology, 4, 643-691. p. 655.
[37] Groos K. (1902). Les Jeux des animaux. Félix Alcan. Paris.
[38] Piaget J. (1964). Seis estudios de Psicología. Ed. Labor. Primera edición. 1991. Barcelona. España.

reproducir el contacto con los demás, ya que cada niño adopta un rol complementario al propio y puede transformar algunos objetos en otros por medio de su imaginación.

En el aprendizaje de las matemáticas a lo largo de su historia se han dado situaciones en torno al juego, por parte de los trabajos de los pitagóricos, Fibonacci, Cardano, Pascal, Fermat, Euler entre otros, quienes han empleado elementos lúdicos para desarrollar modos de pensar matemáticamente, como lo afirma De Guzmán (1989): *Son muchos los casos en que una pregunta interesante realizada en un plano lúdico, o una observación ingeniosa sobre una situación aparentemente inocente han dado lugar a nuevos modos de pensar en matemáticas. Con la creación de puzles o juegos el hombre puede desplegar con más libertad su imaginación sin necesidad de encasillarse en absoluto en las estructuras conceptuales o metodológicas de una teoría tradicional ya constituida.*[39]

En la actualidad se ha resaltado la importancia del uso del juego en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ya que promueven la participación de los estudiantes, se pueden desafiar por medio de las actividades propuestas, los motiva a desarrollar las tareas les permite investigar y descubrir nuevas formas o alternativas para llegar a la solución, y ampliar sus conocimientos (Kapp et al., 2014).[40]

Actualmente el concepto de juego con relación al proceso de enseñanza aprendizaje se ha cambiado por ludificación o una expresión tomada del inglés gamificación. Kapp citado por Tomislav et al. (2018), la define como *"el uso de la mecánica basada en el juego, la estética y el pensamiento del juego para involucrar a las personas, motivar la acción, promover el aprendizaje y resolver problemas".*[41]

[39] De Guzmán M. (1989). Juegos y Matemáticas. Suma. 4. p. 61-64

[40] Kapp K., Blair L. & Mesch R. (2014). The Gamification of Learning and Instruction Fieldbook: Ideas in to Practice. Principal Leadership. p.56 – 59.

[41] Tomislav J. Ivica B. & Hyo J. (2018) Examining competitive, collaborative, and adaptive gamification in young learners' math learning. Computers & Education. V. 125. p. 444-457.

Como herramienta educativa la gamificación se usa para facilitar el aprendizaje, fomentar la motivación y el compromiso, mejorar la participación del alumno, su interacción con la lección y estimular a los alumnos a ampliar sus conocimientos. A su vez en este proceso de gamificación se pueden presentar cuatro elementos de acuerdo con la intención con la que sean diseñadas para el proceso de aprendizaje de los estudiantes que son:

1. Lecciones sin ludificar que son actividades para que los estudiantes las realicen en un tiempo determinado;

2. Condición competitiva, donde se colocan problemas en la clase de matemáticas a los estudiantes para que ellos puedan realizarlos en un tiempo determinado y a cambio obtienen puntos por los problemas resueltos correctamente.

3. Condición adaptativa, donde se introducen en las actividades formas narrativas y

4. juegos de manera personalizada a cada estudiante donde se puede calcular el tiempo que emplea cada estudiante en la solución del problema, y se basan en la teoría del flujo, que para Shernoff, Csikszentmihalyi, Shneider y Shernoff (2003), citado por Tomislav et al. (2018), es *"un estado mental caracterizado por una concentración focalizada y elevado disfrute durante actividades intrínsecamente interesantes"* [42] Esto implica que cada vez que una persona alcance un estado de flujo debe progresar cada vez a un nivel superior y llevar sus habilidades al límite en la búsqueda de un objetivo desafiante. Las actividades basadas en juegos o en gamificación son una alternativa para engranarse con problemas matemáticos desafiantes, ya que permiten en los estudiantes desarrollar habilidades cognitivas propias del proceso de aprendizaje como el interés, la motivación, el compromiso para desarrollar y cumplir con

[42] Hamari, J., Shernoff, D. J., Rowe, E., Coller, B., Asbell-Clarke, J., & Edwards, T. (2016). Challenging games help students learn: An empirical study on engagement, flow, and immersion in game-based learning. Computers in Human Behavior. 54. p. 170–179.

las tareas, para alcanzar niveles de pensamiento matemático de acuerdo a su proceso de aprendizaje, mejorar su atención y enfrentar nuevos retos o desafíos.

2.3.2 La gamificación y sus elementos

Para Deterding (2011) citado por Stieglitz et al. (2017), la gamificación está definida como el uso de elementos diseñados para un juego en contextos no jugables. El término aparece por primera vez en el 2010 y ha sido mejorado paulatinamente por la industria de los juegos, dado que es un término relativamente nuevo entre los usuarios, se le conoce como experiencia placentera o diversión y a partir de estas dos menciones Deterding (2011) define los cuatro pilares de un juego que son:

1. Debe tener definidos de manera concreta los objetivos que se les brindará a los jugadores.
2. Las reglas que se definan para conseguir los objetivos deben ser consistentes.
3. Un sistema de retroalimentación que sea capaz de garantizar que los jugadores consigan los objetivos, siempre y cuando las reglas sean respetadas.
4. Libre albedrío en la aceptación de la participación del juego y el seguimiento de las reglas para alcanzar los objetivos.

Por otro lado, la gamificación tiene como objetivo brindar un producto o servicio usando elementos de un juego, pero no es uno como tal, la diferencia es que la gamificación requiere un diseño basado en reglas y orientación a un objetivo u objetivos; un juego puede ser más libre en su definición, puede contener o no reglas y no tener un objetivo puntual. En el año 2010 se brindaron los principios de diseño de un juego, que si son aplicados podrían ayudar a que los jugadores mejoren de la mano con el juego y tengan una experiencia de usuario más valiosa, estos son: integración y visualización del progreso, medición de la experiencia y progreso, continua retroalimentación, provisionamiento de objetivos sustanciosos y pequeños objetivos, recompensas y consecución progresiva de logros de las tareas cumplidas, sistema de recompensas y modos en multijugador.

Estos principios son fundamentales para el diseño de juegos y de la gamificación como tal, adicionalmente, es vital tener en consideración el entorno de trabajo MDA (Mechanics, Dynamics, Aesthetics, en español, Mecánicas, Dinámicas y Estética).

Las mecánicas de juego, describe los componentes a un nivel de representación de datos y algoritmos, están envueltas directamente en la motivación y compromiso, es importante tener en cuenta que estas difieren de las reglas de juego. Aquí se determinan los niveles del juego como tal, usualmente suelen utilizarse para subir de nivel en relación con el cumplimiento de un objetivo o bajar de nivel en relación con el no cumplimiento de uno. Algunas mecánicas de juego comunes son:

Puntos: Se define como el valor asignado a cada actividad completada de manera satisfactoria para que el usuario los acumule según las condiciones establecidas.

Tabla de puntuaciones: Se relacionan todos los usuarios de la plataforma organizándose de mayor a menor según la cantidad de puntos acumulados.

Niveles: Área o entorno donde el usuario pueda completar un objetivo específico.

Sistema de logros: Proceso diseñado para el desbloqueo de logros según condiciones predefinidas.

Recompensas: Artículos obtenidos por los usuarios a lo largo del juego.

Según las descripciones de los conceptos relacionados a la gamificación para efectos de este trabajo se pretenden aplicar los puntos, la tabla de puntuaciones por estudiantes y por equipos de trabajo, los niveles, el progreso, el sistema de recompensas y logros que los estudiantes deberán desarrollar en cada mundo y avatares. Las dinámicas de juego se encargan de describir el comportamiento a lo largo del tiempo de juego y la forma en la que un jugador actúa según sus entradas y salidas. Son la razón por la cual el jugador encuentra motivación, es esencial para la gamificación que, mediante las dinámicas y lógica de funcionamiento, satisfaga las metas de los usuarios, entre estas comúnmente se encuentran las recompensas, mejorar el estatus, logros, competencias, y altruismo.

Frente a la estética del juego se encarga de describir las sensaciones emocionales al jugador que está interactuando en la plataforma. De acuerdo con el framework MDA, el hacer que el jugador recuerde emociones mediante el juego, aumenta significativamente su motivación y compromiso con el mismo. Para este aspecto es vital tener en cuenta los siguientes enfoques: sensaciones, fantasía, narrativas, retos, compañerismo, descubrimiento y expresiones.

2.4 La resolución de problemas en matemáticas

Una de las estrategias que permiten el desarrollo del pensamiento matemático es la solución de problemas como lo plantea Pólya, Schoenfeld, De Guzmán, Mason, Bourton y Stacey, entre otros. A continuación, haremos un desglose frente a que es un problema y los principales modelos que se han desarrollado frente a la resolución de problemas en matemáticas.

Para Pólya (1981) citado por Rodríguez (2012) *"tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebida pero no alcanzable de forma inmediata"*[43]. Otros investigadores como Krulik y Rudnik (1987) establecen que *"un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma."*

[43] Pochulu M. & Rodríguez M. (2015). Educación Matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Universidad Nacional de General Sarmiento. Ed. Villa María. p. 288.

Por su parte Schoenfeld (1985) afirma que un problema *"no es inherente a una tarea en matemáticas, es una relación particular entre el individuo y la tarea que requiere una habilidad intelectual, por medio de los cuáles los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente".*

Labarrere (1996) afirma que *un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar. (Labarrere (1996), citado por Rodríguez (2015).* De Guzmán (1991) por su parte *menciona "se tiene un problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar"*.

En ese sentido podemos ver que, frente a las diferentes definiciones dadas por los expertos e investigadores en educación matemática, un problema es una situación en el cual la solución no es vista de manera inmediata, sino que implica emplear diferentes herramientas o conocimientos necesarios para abordarlo, realizar diferentes operaciones o procesos matemáticos para llegar a su solución y comprobar la respuesta.

2.4.1 Modelos para la resolución de problemas matemáticos.

Cabe resaltar que varios investigadores han desarrollado diferentes métodos o modelos para la resolución de problemas. Uno de los principales exponentes frente a la teoría de resolución de problemas es Pólya (1976), quien propone cuatro fases para la solución de problemas y una serie de preguntas que pueden servir de guía para cada una de estas. A continuación, se describe cada una de ellas:

1. Entender el problema, en esta etapa se siguen las siguientes preguntas ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, en esta etapa se determina si las condiciones dadas son suficientes para comprender y entender la información que se suministra en el problema.

2. Concebir un plan, aquí Pólya establece que el problema puede relacionarse con problemas similares, y determinar si pueden usarse sus resultados para la solución del problema; en esta fase se pueden generar las siguientes preguntas: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoce algún problema relacionado? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?

3. Ejecución del plan, es donde se emplean las estrategias o técnicas necesarias y correctas para resolver el problema, y comprobar cada uno de los pasos. Se pueden dar las siguientes preguntas: ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

4. Visión retrospectiva, en esta fase se debe observar el proceso desarrollado, y verificar el resultado obtenido. Aquí se pueden plantear las siguientes preguntas: ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

Cada una de estas fases deben estar acompañadas de unas heurísticas que permiten comprender el método que conduce a la solución de problemas y posteriormente llegar a su respectiva solución.

Con base al trabajo realizado por Pólya, años más tarde Schoenfeld (1985), establece que para trabajar como recurso didáctico la solución de problemas hay que tener en cuenta otros factores que van más allá que heurísticas como lo planteaba Pólya, para ello establece cuatro categorías que son los recursos, heurísticas, control y sistemas de creencias.

Los **recursos** son la primera categoría, hacen relación a los conocimientos previos que tienen los estudiantes, como conceptos, algoritmos, procedimientos de rutina y demás nociones necesarias para enfrentarse a un determinado problema y aplicarlos en su solución.

En esta categoría se pueden evidenciar las siguientes actividades por parte del estudiante: intuiciones y conocimiento informal e intuitivo sobre el tema, hechos, definiciones y similares, procedimientos algorítmicos, procedimientos no rutinarios "rutinarios", competencias relevantes y comprensión (conocimiento proposicional) sobre las reglas acordadas para trabajar en el dominio. También menciona el inventario de recursos donde el maestro debe conocer cómo accede el estudiante a los conocimientos que tiene.

Por otro lado, las **heurísticas** son reglas generales, estrategias y técnicas que permiten la resolución exitosa de problemas, incluyen procedimientos como hacer dibujos, introducir la notación acordada, explorar problemas relacionados, esquemas específicos, trabajándose hacia atrás, procedimientos de prueba y verificación. Una de las heurísticas más empleadas es tomar el problema como resuelto, es decir suponer que tiene la solución hipotética del problema y determinar qué propiedades cumple.

La dimensión de **control** hace relación a cómo los estudiantes usan la información potencialmente a su disposición, controlan su trabajo a la hora de resolver el problema, tomando decisiones con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, y debe saber que es capaz de realizar los pasos, hacer planes, seleccionar objetivos y subtemas, herramientas que necesita, evaluar y monitorear el proceso que lleva a cabo para su solución.

En esta dimensión a nivel de control se toman las acciones que tienen consecuencias globales para el desarrollo de la solución del problema, como qué camino tomar, selección de los recursos, el tiempo y el uso de la intuición haciendo algunos cálculos antes de llegar a la solución completa. Para obtener un control efectivo es necesario emplear un monitoreo periódico y evaluación de las soluciones a medida que evolucionan.

Por último, **el sistema de creencias** sobre la matemática que es la visión matemática del mundo, el conjunto de elementos no necesariamente conscientes del comportamiento del estudiante, y que tienen una influencia en la forma en que los estudiantes y los profesores abordan la resolución de problemas y como es el proceso de argumentación en matemáticas a la hora de su solución. Esta se puede dar en dos circunstancias, para confirmar algo que es obvio, y para verificar algo que no es tan obvio como resolver un ejercicio. Algunas creencias que se pueden presentar son sobre uno mismo, acerca del medio ambiente, sobre el tema, y acerca de las matemáticas. Establece que hay que tener en cuenta las creencias de los profesores, de los estudiantes y las creencias sociales, donde las creencias del profesor y el estudiante determinan lo que pasa en el aula de clase y las creencias sociales frente a cómo las personas adquieren el conocimiento matemático que se agrupan en tres categorías, lo que es posible que los niños pueden aprender de matemáticas en las diferentes edades, lo deseable que los niños deben aprender y la tercera frente a cuál es el mejor método para aprender matemáticas.

Algunas de las creencias que pueden tener los estudiantes a la hora de solucionar problemas son: las matemáticas formales tienen poco o nada que ver con el pensamiento real, los problemas matemáticos siempre se resuelven en menos de 10 minutos, o solo los genios son capaces de descubrir o crear matemáticas. Años más tarde Schoenfeld (2011), simplifica su teoría en tres pasos indicando que *las personas al enfrentarse a un problema toman decisiones en función de los recursos, los objetivos y orientaciones, que pueden explicarse no solo en macro sino también en micro niveles.*[44]

Frente a los **recursos**, hace hincapié a las rutinas que se desarrollan por parte del maestro en el aula de clase y cómo influyen en la toma de decisiones a la hora de cumplir los objetivos en la clase. En ese sentido resalta que el estudiante tiene un conocimiento disponible para aplicar o utilizar a la hora de resolver un problema, algunos de ellos son correctos y otros no.

Los **objetivos** son la meta que se quiere lograr dentro de una actividad específica y en el caso de la resolución de problemas, cada objetivo que se traza genera subtemas, hasta el nivel de acciones muy

[44] Schoenfeld A. (2011). How We Think a Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications. *Routledge.* Taylor & Francis. New York. pp. 367. p. 16.

detalladas que permitan solucionar el problema, que dependen en parte de los recursos disponibles y las orientaciones que tienen.

Las **orientaciones** abarcan varios ámbitos como la disposición, creencias, valores, gustos y preferencias de cómo las personas ven las cosas e influyen en lo que perciben en diversas situaciones y cómo enmarcar esas situaciones por sí mismos, dando prioridad a los objetivos establecidos que permitan tratar dichas situaciones y por ende del conocimiento que se utiliza al servicio de esos objetivos. Por otro lado, menciona la toma de decisiones que incluye el monitoreo, la autorregulación y el rol de las variaciones subjetivas, son habilidades que se pueden aprender y son claves a la hora de resolver problemas.

En torno a la resolución de problemas matemáticos en la escuela, Zayyadi et al. (2019), en su investigación utilizan cinco componentes para la resolución de problemas matemáticos basado en el modelo IDEAL, propuesto por Bransford y Stein (1993) que son identificar, definir, explorar, actuar y mirar hacia atrás. El componente de identificar menciona que, consiste en comprender los problemas en general y dividirlos en varias partes, Definir los objetivos es establecer los objetivos a alcanzar, Explorar las posibilidades y estrategias que consiste en buscar varias Soluciones alternativas a los problemas y llevar a cabo estudios sobre cada alternativa desde diferentes perspectivas. Anticiparse a resultados consiste en elegir una solución y resolver el problema según la estrategia elegida, y mirar hacia atrás que es ver la correspondencia entre los objetivos a alcanzar, los resultados obtenidos y aprender de las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas.

Para efectos de esta investigación se tomaron en cuenta las etapas del modelo de resolución de problemas de IDEAL, con el fin de conocer cuáles son los componentes que usan los estudiantes con DC, de este modelo y cómo los aplican a la hora de enfrentarse y solucionar un problema en matemáticas.

2.4.2 Problemas desafiantes de matemáticas en la escuela.

Una de las estrategias que se menciona dentro del campo de la educación matemática es desafiar a los estudiantes en el proceso de enseñanza de las matemáticas con el fin de generar en ellos un aprendizaje significativo. *El aprendizaje de las matemáticas es una tarea que en gran parte depende de la actividad propuesta por el docente de la clase, ya que él puede propiciar espacios para que los estudiantes tengan la posibilidad de abrir sus mentes, compartir sus ideas, y comprender la situación propuesta de tal manera que puedan alcanzar el objetivo inicial a la hora de solucionar problemas.*[45]

Alcanzar el objetivo propuesto en la clase permite a los estudiantes desarrollar nuevas habilidades, y los desafíos matemáticos permiten despertar la curiosidad, la creatividad y la agilidad mental de los niños de tal forma que los anime a compartir sus ideas y a fortalecer su pensamiento matemático. Para Barbeau (2009) *"un desafío matemático es considerado como una pregunta planteada deliberadamente para atraer a su destinatario a intentar una resolución, al mismo tiempo amplía su comprensión y conocimiento de algún tema".*

Sin embargo, hay desafíos que pueden ser o no apropiados para los estudiantes, un buen desafío es aquel en el que las personas ponen a prueba su conocimiento matemático o ideas lógicas para su solución no de manera estándar sino de manera creativa, que lleva a realizar preguntas, plantear conjeturas, hacer varios intentos y evaluar las soluciones para la efectividad y sobre todo genera una oportunidad de aprendizaje mediada por el compromiso del estudiante. Un desafío no apropiado, es aquel en el que la persona no puede entender lo que debe hacer y no puede emplear herramientas para su solución.

Los maestros en el aula de clase pueden plantear problemas desafiantes a sus estudiantes para hacer las clases más atractivas, despertar en ellos el interés, la motivación y propiciar un entorno para fortalecer

[45] Barbeau E. & Taylor P. (2009). Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study. Springer. p.5

su proceso de aprendizaje. Para ello es importante tener en cuenta tres elementos a la hora de plantear problemas desafiantes a los estudiantes en el aula de clase, que son 1. El nivel cultural y educativo de los estudiantes, 2. Las características psicológicas de los alumnos, y 3. El problema pedagógico que se está abordando.

El uso de problemas desafiantes en el aula de clase tiene varias ventajas frente al aprendizaje de las matemáticas, como lo admite Barbeau (2009) quien afirma: "*en las escuelas, puede ayudar a equipar a los estudiantes para enfrentar desafíos futuros en la vida fomentando atributos deseables tales como paciencia, persistencia y flexibilidad, para aprender contenido más rico y explotar conexiones, para identificar y desarrollar sus capacidades matemáticas, para volverse autorrealizado y seguro, experimentar el placer del compromiso, la alegría del éxito y de participar en una comunidad de aprendizaje".*

Es importante que los maestros integren en las clases de matemáticas problemas desafiantes a sus estudiantes cómo lo menciona Stillman, Cheung, Mason, Sheffield, Sriraman y Ueno (2009) porque: "*cuando los estudiantes participan en la resolución de tareas matemáticas desafiantes, se los ubica en un límite psicológico entre su zona de confort y la toma de riesgos. Los desafíos les enseñan a los estudiantes cómo sostenerse en la incertidumbre, una habilidad relevante para el aprendizaje permanente, y los éxitos con desafíos preparan a los estudiantes para la vida real. Como la vida real a menudo es desordenada y no se puede reducir fácilmente a formas matemáticas simples, los desafíos ayudan a los estudiantes a tomar conciencia de los detalles complicados y la importancia de los roles que estos detalles pueden jugar para resolver los desafíos".*[46]

[46] Barbeau E. & Taylor P. (2009). Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study. Springer. p.246-247.

Para efecto de esta investigación se pretende emplear problemas desafiantes para los estudiantes de acuerdo con su contexto, y su nivel de escolaridad, donde se empleen problemas que no sean convencionales para ellos, como problemas de olimpiadas matemáticas, problemas no rutinarios no conocidos por ellos, que despierten su interés y tengan la posibilidad de aprender matemáticas por medio de la experimentación, la socialización de sus procesos o razonamientos matemáticos y comprender las diferentes heurísticas que emplean ellos a la hora de encontrar su solución.

2.5 Modelo de instrucción matemática DNR[47]

Este modelo basado en la instrucción matemática es considerado como un sistema que consta de tres categorías de constructos que son las *premisas,* supuestos establecidos con base a los conceptos y afirmaciones del DNR, los *conceptos* que son construcciones definidas y orientadas dentro de las premisas y *principios de instrucción* que son declaraciones formuladas en términos de los conceptos, derivados de las premisas de DNR. La sigla DNR representa los tres principios básicos de instrucción en los cuales debe enmarcarse la práctica del docente que son dualidad, necesidad y razonamiento repetido.

2.5.1 Las premisas en el DNR.

Para Harel (2008b), las premisas surgen en el proceso de reflexión y exploración en el DNR, y son la base de la filosofía de las matemáticas y del proceso de enseñanza y aprendizaje, en total son ocho y se agrupan en cuatro categorías que son:

1. Premisas matemáticas: El conocimiento matemático está formado por las formas de entender y formas de pensar que se han institucionalizado a lo largo del tiempo.

[47] Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. ZDM mathematics Education 40, 893–907 https://doi.org/10.1007/s11858-008-0146-4

2. Premisas de aprendizaje: Establece que todos los humanos poseen la capacidad de desarrollar un deseo, ser desconcertado y de aprender a realizar actos mentales para resolver los rompecabezas que lo crean.

3. Premisas de enseñanza: El aprendizaje de las matemáticas no es espontáneo, siempre habrá una diferencia entre lo que uno puede hacer bajo la guía de un experto o en colaboración con compañeros más capaces y lo que puede hacer sin guía. La guía experta (maestro) es indispensable para facilitar el aprendizaje del conocimiento matemático desde un enfoque constructivista.

4. Premisas de Ontología: A su vez se establecen desde dos subcategorías, desde la subjetividad, cualquier observación que los humanos afirman haber hecho se debe a lo que su estructura mental atribuye a su entorno y desde la interdependencia las acciones de los humanos son inducidas y gobernadas por sus puntos de vista del mundo y, por el contrario, sus visiones del mundo se forman por sus acciones.

En el DNR Harel (2008b), define la perturbación en términos de dos tipos de necesidades humanas: la necesidad intelectual y la necesidad psicológica y establece que "*el aprendizaje es un continuo de fases de desequilibrio y equilibrio manifestadas por a. necesidades intelectuales y psicológicas que instigan o resultan de estas fases y b. formas de comprensión o formas de pensar que se utilizan y se construyen de nuevo durante estas fases*".

2.5.1 El principio de dualidad en el DNR.

Los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de entender y, por el contrario, las formas de entender que ellos producen se ven afectadas por las formas de pensar que poseen. (Harel, 2008b).

La primera declaración del principio de dualidad se denota por FE (que indica que las formas de comprensión sirven como base para el desarrollo de formas de pensar), y su inversa por FP (que indica que las formas de pensar sirven como base para la producción de modos de entender). Las formas de pensar de una persona son parte de su visión del mundo, y las formas de comprensión de una persona son manifestaciones de sus acciones.

2.5.2 El principio de necesidad en el DNR.

En el aprendizaje Harel menciona que existe la necesidad, del estudiante por aprender temas específicos de matemáticas que les ayudan a construir una comprensión global de la epistemología de las matemáticas; la divide en dos partes que son la necesidad intelectual, tiene que ver con el conocimiento disciplinar que nace del conocimiento actual de las personas a través de la participación en situaciones problemáticas. La necesidad psicológica se relaciona con la motivación, tiene que ver con el deseo, la voluntad, el interés, para involucrarse inicialmente en un problema y buscar su solución. Frente a la necesidad intelectual, Harel (2013)[48] establece cinco categorías de necesidad intelectual que son:

1. La necesidad de certeza es el deseo humano natural de saber si una conjetura es verdadera, si es un hecho. La certeza de uno se logra cuando se prueba por cualquier medio que considere apropiado que una afirmación es verdadera. Una prueba es una forma de comprensión, es un producto cognitivo del propio acto mental de probar.

2. La necesidad de casualidad es el deseo de explicar, de determinar la causa de un fenómeno, comprender porque el fenómeno es como es. Se relaciona con la causalidad lógica que relaciona dos actos mentales diferentes que son probar y explicar, donde explicar es una forma de comprensión asociada al acto de explicar, es decir dar una razón o causa para su verdad.

[48] Harel, G. (2013) Intellectual Need Vital Direction for Mathematics Education Research, Leatham, K. Ed., Springer.

3. La necesidad de computación es la necesidad de cuantificar, calcular valores de cantidades y relaciones entre ellas, encontrar soluciones más eficientes que permitan realizar cálculos grandes en un tiempo de ejecución razonable.

4. La necesidad de comunicación incluye la necesidad de persuadir a otras personas que una afirmación es verdadera. También la necesidad de establecer definiciones comunes, notaciones, convenciones y describir objetos matemáticos sin ambigüedades.

5. La necesidad de conexión y estructura incluye la necesidad de organizar el conocimiento aprendido en una estructura para identificar similitudes, analogías para extender, generalizar y determinar principios y fundamentos axiomáticos.

2.5.3 El principio de razonamiento repetido

Refuerza las formas deseables de comprensión y formas de pensar. El principio del razonamiento repetitivo: los estudiantes deben practicar el razonamiento con el fin de internalizar formas deseables de conocimiento y formas de pensar. La secuencia de problemas que se les da a los estudiantes debe exigir continuamente que se analicen las situaciones y las soluciones, y los problemas deben responder a las necesidades intelectuales cambiantes de los estudiantes.

Conclusiones del capítulo 2

Este capítulo da una visión global de todos los elementos teóricos en los cuales se fundamenta esta investigación. Uno es el concepto de educación inclusiva en el cual se adopta la definición dada por el MEN (2013), la educación inclusiva se define como una estrategia central para luchar contra la exclusión social, que implica una serie de ajustes a los currículos, planes de estudio y prácticas pedagógicas que se adapten a todos los estudiantes para que obtengan una educación de calidad. Desde la educación matemática esta visión adopta algunas estrategias para desarrollar la inclusión y la equidad en las clases de matemáticas propuestos por Boaler, (2016), con el fin de que todos los niños y niñas tengan una participación activa en la clase de matemáticas, estos son que los estudiantes reciban contenidos de alto nivel en matemáticas, se fortalezca la mentalidad de crecimiento, piensen profundamente sobre las matemáticas, aprendan a trabajar en equipo, y reciban estímulos adicionales para aprender matemáticas.

Para lograrlo es importante incentivar la motivación en los estudiantes y por ello los maestros deben implementar estrategias metodológicas y realizar actividades que permitan a los estudiantes aprender matemáticas, el juego es una de ellas y la gamificación es una herramienta que permite por medio de las dinámicas del juego crear ambientes de aprendizaje que llaman la atención de los estudiantes y los motivan a la consecución de los objetivos propuestos en la clase. Por otro lado, está la solución de problemas que a través de los desafíos o retos matemáticos permiten despertar la curiosidad, la creatividad y la agilidad mental de los niños de tal forma que los anime a compartir sus ideas, a fortalecer su pensamiento matemático y dinamiza el proceso de enseñanza – aprendizaje ante la necesidad de poner en práctica los conocimientos previos y aprender nuevos conceptos en la solución.

Estos elementos deben tenerse en cuenta a la hora de desarrollar prácticas pedagógicas más inclusivas e incluir también a los niños que presentan DC, por ello es necesario tener en cuenta las necesidades intelectuales y psicológicas que propone Harel (2008b), para el diseño instruccional de la enseñanza de las matemáticas y establecer si son las mismas o existen otras para los estudiantes que presentan DC.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo, se hace una descripción sobre el tipo de investigación en el que se enmarca este trabajo, la población, la metodología empleada que es la investigación basada en el diseño, que permite el diseño, la construcción, y desarrollo de la propuesta didáctica, posteriormente realizar el análisis de resultados que se desarrolla en el capítulo cuatro.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

El tipo de investigación que se emplea para este trabajo es de tipo cualitativo ya que se relaciona con el objetivo de este trabajo cuyo propósito como menciona Punch, citado por Sampieri, Fernández y Baptista (2014) *"es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados*."

A su vez es importante mencionar que se utiliza este tipo de investigación, porque se recomienda emplear cuando el tema de investigación ha sido poco explorado y es necesario conocer más a fondo, las características de la población de estudio, estar al tanto de sus puntos de vista, recolectar información por medio de narraciones oral, escrita, visual y de interacción con sus pares.

Las investigaciones cualitativas se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general; el investigador plantea un problema, pero no sigue un proceso definido claramente no se prueban hipótesis, sino que se generan durante el proceso y se perfeccionan conforme se va realizando el análisis de la recolección de datos.

Como enfoque de investigación se utilizó el estudio de caso que como lo menciona Yin, citado por Sandoval (2002), define un estudio de caso como una indagación empírica que: *"investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el* *contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse".*[49]

Para Chetty (1996) citado por Martínez (2002), el método de estudio de casos es una metodología rigurosa, permite investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y porqué ocurren, profundizar en temas de investigación donde las teorías existentes son inadecuadas o pocas, permitiendo la aparición de nuevas ideas que emergen y cumplen un papel importante en la investigación para la generación de nuevo conocimiento.

Esta investigación busca también identificar qué tipo de necesidades requieren los estudiantes con DC y a su vez conocer las habilidades que se pueden desarrollar, tomando en cuenta varios elementos teóricos como el modelo de instrucción matemática DNR, los conceptos de inclusión y equidad en el aula de matemáticas, la teoría de la gamificación como recurso didáctico que permite mejorar la motivación en los estudiantes, la comunicación o el discurso matemático y la solución de problemas matemáticos.

3.2. Población y muestra

Esta investigación se llevó a cabo en el colegio San Agustín IED ubicado en la localidad Rafael Uribe, a estudiantes de ciclo V correspondientes a los grados décimos y once de la jornada mañana. La implementación del proyecto se llevó a cabo en los años 2021 y 2022, a todos los estudiantes de estos niveles, donde se seleccionó una muestra de ocho casos, tres estudiantes diagnosticados con DC, dos con discapacidad física y tres que no han sido diagnosticados, ni reportados por el Simat con discapacidad cognitiva, pero presentaban dificultades de aprendizaje, tomando como referencia sus desempeños académicos a lo largo de los últimos cuatro años y su nivel de repitencia en los diferentes grados. La validación de algunos retos se desarrolló durante el 2019, con estudiantes de grado once de la misma

[49] Sandoval (2002). Investigación cualitativa. Icfes. Módulos de Investigación Social. ARFO Editores 1-313. p. 90.

institución y la aplicación de las actividades durante los años 2021 y 2022, algunas de las actividades desarrolladas por los estudiantes se realizaron durante el periodo aprende en casa, y otras se realizaron de manera presencial en la institución.

3.3. Metodología de investigación basada en el diseño (IBD).

Para el desarrollo de este trabajo se empleó la metodología la investigación basada en el diseño IBD, donde algunos autores como Bell (2004), establecen que *"La IBD se centra, por lo tanto, en el diseño y exploración de todo tipo de innovaciones educativas, a nivel didáctico y organizativo, considerando también posibles artefactos como núcleos de esas innovaciones, y contribuyendo, consecuentemente, a una mejor comprensión de la naturaleza y condiciones del aprendizaje".*[50]

En ese sentido esta investigación se desarrolla en un entorno educativo, donde se busca estudiar los problemas de aprendizaje en el contexto real y natural, para hacer los ajustes necesarios y mejorar el aprendizaje de los niños que presentan DC y problemas de aprendizaje.

Por su parte Burgos (2018) menciona algunos objetivos que presenta la IBD, y son acordes con el desarrollo de esta investigación, estos son: *identificar las variables para caracterizar la situación, no busca replicar las implementaciones realizadas sino mejorar el diseño implementado y generar pautas para la implementación en situaciones similares, no demuestra hipótesis, sino que desarrolla un perfil que caracterice el diseño de la práctica.*[51]

Edelson (2006) citado por Gravemeijer y Cobb, (2006), sostiene que "*el aporte de los estudios de diseño en la investigación educativa no reside en probar hipótesis sino en generar teoría garantizada. Buena parte del esfuerzo teórico en una investigación de diseño consiste en identificar y hacer explícitas las decisiones que se adoptan en el proceso de diseño para transformarlas en teoría generalizable".*

[50] Bell (2004). On the Theoretical Breadth of Design-Based Research in Education. Educational Psychologist. 40-77. p. 67.
[51] Balladares J. (2018). La investigación educativa en el profesorado universitario: hacia una investigación basada en el diseño instruccional. Revista Andina De Educación, 1(1), 30-34.

Con esto, podemos decir que esta investigación hace aportes frente a qué tipo de elementos o estrategias mejoran las prácticas en las clases cuando se tienen estudiantes que tienen discapacidad cognitiva DC y que presentan dificultades de aprendizaje en la clase de matemáticas, y también sobre qué elementos del discurso matemático emplean los estudiantes a la hora solucionar problemas y justificar sus soluciones; esto contribuye a mejorar el proceso de inclusión de todos los estudiantes en las aulas, estimular el aprendizaje, la motivación por aprender y participar activamente en las clases de matemáticas.

Para el desarrollo de la IBD, Rinaudo y Dinolo (2010)[52] se plantean tres fases que son preparación del diseño, implementación del diseño y análisis retrospectivo. La siguiente figura muestra un esquema de las tres fases que se llevan a cabo en la investigación basada en el diseño y su secuencia de actividades para su desarrollo:

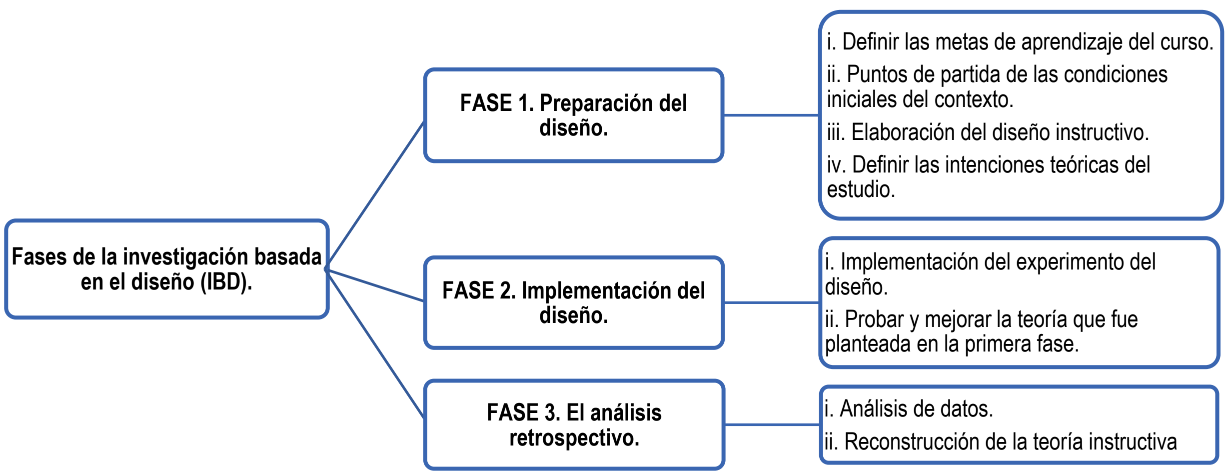


Figura 1. *Fases de la investigación basada en el diseño.*

Fuente: Elaboración propia.

[52] Rinaudo, M., y Dinolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa. Revista de Educación a Distancia, 22, 1-29.

3.4 Desarrollo metodológico de la investigación.

A continuación, se describe cómo se llevó a cabo la primera parte de la investigación, donde se plantearon las tres fases de la investigación basada en el diseño.

3.4.1 Fase 1 Preparación del diseño

En esta fase se plantearon todas las tareas que se describen en el marco de la IBD, y se describen a continuación:

Metas de aprendizaje del curso: Con base al objetivo de este trabajo que es determinar cuáles son las necesidades que presentan los estudiantes con DC, y que tipo de habilidades pueden desarrollar por medio de la resolución de problemas matemáticos y la teoría de la gamificación, para favorecer su proceso de inclusión y enseñanza – aprendizaje en el aula de clase, se ha realizado una propuesta pedagógica basada en la gamificación, la resolución de problemas matemáticos, y los principios de equidad e inclusión establecidos por Boaler (2016).

Puntos de partida de las condiciones iniciales del contexto: La propuesta pedagógica y didáctica se aplicó a los 105 estudiantes de grado once cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años, del Colegio San Agustín IED, de la ciudad de Bogotá. Para determinar los conocimientos previos y habilidades que emplean los estudiantes en la solución de problemas, se aplicó una actividad inicial denominada "explorando", la primera parte se aplicó en el primer semestre del 2021 en el periodo aprende en casa, durante el periodo de aislamiento preventivo una hora a la semana por encuentros sincrónicos por la plataforma Teams, y la segunda parte se desarrolló en el segundo semestre del 2021 en modalidad presencial de manera alternada (cada 15 días), debido a la implementación de la Reapertura Gradual, Progresiva y Segura (RGPS), establecida por el ministerio de educación nacional (MEN).

La muestra por conveniencia, son ocho estudiantes de los cuales tres presentan discapacidad cognitiva (DC), uno con diagnóstico de Discapacidad Física (Síndrome de Golden Had), otra estudiante con hiperlaxitud ligamentosa y tres estudiantes no están diagnosticados, pero por sus bajos desempeños académicos, niveles de repitencia, pérdida de logros en grado décimo y once, dificultades seguimiento de instrucciones y desarrollo de actividades académicas, se decide tomarlos como parte de la muestra de estudio.

Elaboración del diseño instructivo: Para el desarrollo de la propuesta didáctica, se ha tomado como base del diseño instruccional para la enseñanza de las matemáticas el modelo DNR, propuesto por Harel (2008b), la gamificación y la solución de problemas matemáticos expuestos en el capítulo anterior, los principios de inclusión y equidad en matemáticas propuesto por Boaler (2016).

Definir las intenciones teóricas del estudio: Para el desarrollo de esta propuesta didáctica, se han tenido en cuenta tres elementos fundamentales el primero el modelo DNR, donde específicamente se abordarán las necesidades intelectuales y psicológicas que presentan los estudiantes la solución de problemas matemáticos desde lo numérico, lo algebraico, el conteo, y la gamificación con las dinámicas del juego para mejorar la motivación de los estudiantes.

3.4.2 Fase 2 Implementación del experimento de diseño

Para el desarrollo de esta propuesta pedagógica, se diseñaron 4 unidades temáticas, denominadas mundos matemáticos, cada uno con un objetivo específico de acuerdo con el tema que se desarrolló en cada actividad y los resultados de aprendizaje que los estudiantes deben alcanzar, se realizó un primer mundo orientado a explorar los conocimientos que tienen los estudiantes con siete retos que dieron las orientaciones sobre los elementos metodológicos que deben mejorarse a la hora de implementar las actividades de los otros mundos.

Implementación del experimento del diseño: La propuesta se ha desarrollado con base a la teoría de la gamificación propuesta por Deterding (2011) donde se inicia con una parte exploratoria llamada "Explorando", allí se tienen en cuenta elementos de gamificación como el objetivo de la actividad, barra de progreso, puntaje, recurso interactivo con el problema, verificación de la respuesta, y mensaje de felicitación al realizar el reto correctamente, que fueron plasmados en una plataforma denominada In Game. La primera parte de la actividad se desarrolló en el periodo aprende en casa y la otra en el periodo de alternancia. En el desarrollo de esta fase los estudiantes abordaron los problemas en grupos de dos y tres personas, los solucionaron con base a los conocimientos previos que tienen en matemáticas. Los resultados obtenidos se analizan en el capítulo 4.

Probar y mejorar la teoría que fue planteada en la primera fase: Con base a los resultados de la primera implementación, se hacen modificaciones a la estructura de cada mundo y se emplea como recurso didáctico e interactivo la plataforma Classcraft, donde se ensamblan los mundos, el primero es de retos numéricos, el segundo es de retos algebraicos y el tercero son retos de conteo.

Para que cada estudiante desarrollara y cumpliera los retos propuestos de cada mundo, se integraron nuevos elementos metodológicos e instruccionales a la hora de aplicar los mundos de números, álgebra y conteo. Se diseñaron tres momentos para su ejecución que son:

1. **Fase de entrenamiento:** es necesario integrar unas sesiones de activación de conocimientos previos e introducción a cada mundo, explicando elementos conceptuales, propiedades básicas del tema, problemas no rutinarios que sirven de ambientación y preparación a los estudiantes, para que recuerden elementos teóricos y logren más adelante desarrollar satisfactoriamente los retos grupales e individuales de cada mundo. Esta fase estuvo a cargo del docente quien organizó la introducción a los temas y problemas de entrenamiento que se abordaron en cada mundo.

2. **Fase de validación:** La segunda parte consiste en el ingreso a la plataforma inician con una historia de ambientación e introducción al juego, luego se presentan los retos grupales para desarrollar por grupos de dos o tres personas en clase, aquí los estudiantes se enfrentan a problemas matemáticos de diferente grado de dificultad entorno al mundo que se esté desarrollando y ellos deben justificar al docente las soluciones que dan, para validarlas, obtener los puntos que tiene el reto y poder hacer un análisis de las heurísticas y elementos del discurso matemático emplean como el uso de palabras, mediadores visuales, la narrativa, rutinas y qué estrategias emplean ellos a la hora de solucionar problemas matemáticos.

3. **Fase de aplicación:** La tercera parte consiste en los desafíos de líderes y puede hacerse por grupos o de manera individual; esta actividad consta en la solución de problemas matemáticos del tema abordado en cada mundo, se manejan como retos de nivelación para que los estudiantes que han alcanzado puntajes bajos obtengan puntos adicionales para aumentar su nivel y experiencia en el juego. Aquí los estudiantes pueden aplicar lo visto en lo que se ha desarrollado en el mundo y se proponen problemas tipo olimpiadas.

En la plataforma se asignaron los estudiantes a la clase que pertenecen, en 1101 hay 32 estudiantes inscritos, en 1102 hay 33 estudiantes, en 1103 hay 32 estudiantes, a cada estudiante se le asignó su usuario y clave de ingreso a la plataforma, para que visualice su progreso (Figura 2).

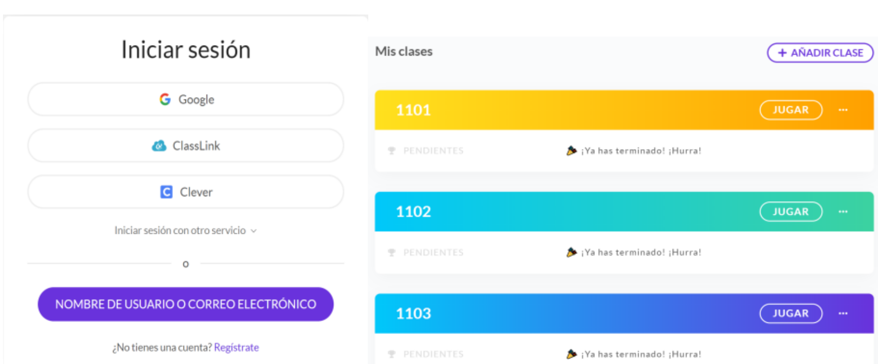


Figura 2. *Vista de ingreso de usuarios y grupos en la plataforma Classcraft.*

Se formaron grupos de 2 o 3 estudiantes al azar, donde crearon grupos con un nombre distintivo y un logo (Figura 3). Cada estudiante seleccionó un personaje, que tiene un rol dentro del juego.

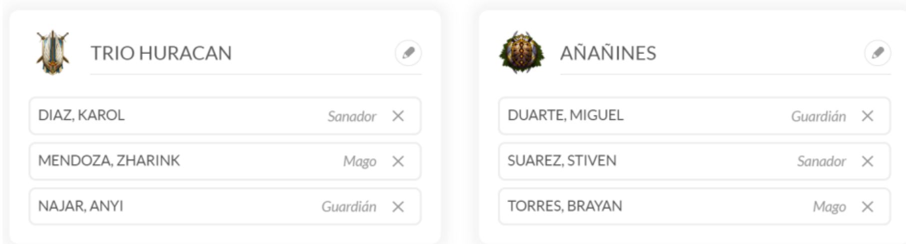


Figura 3. *Vista de grupos en la plataforma Classcraft.*

Estos son el mago, el sanador y el guardián cada uno tiene poderes específicos en la clase para obtener ayudas, intercambiar poderes ayudar en sus compañeros entre otros y también tenían la posibilidad de seleccionar una mascota que también evoluciona de acuerdo con el progreso de cada estudiante a medida que avanza en cada mundo (Figura 4). Cada personaje tiene la posibilidad de visualizar su barra de progreso con los puntos obtenidos, el nivel en que se encuentran, las vidas, los cristales de poder, sus monedas de oro etc.

Figura 4. *Vista de personajes y grupos en la plataforma Classcraft.*

Para estimular el trabajo en grupo y el buen comportamiento en clase, se establecieron comportamientos positivos como puntos adicionales con el fin de incentivar a los estudiantes a proponer soluciones creativas en la solución de problemas, desarrollar las actividades propuestas en la clase, actuar con responsabilidad en el trabajo en grupo, etc. En la figura 5 se observan los comportamientos positivos propuestos, y sus puntos.

Figura 5. *Lista de comportamientos positivos con sus puntajes.*

También se establecen comportamientos negativos con puntos negativos o pérdidas de salud cuando los estudiantes realizan actividades que no son propias de la clase como lo son no trabajar en grupo asertivamente, ver videos o usar el WhatsApp en actividades diferentes de la clase, tomar decisiones que afectan negativamente el trabajo en grupo, etc. En la figura 6 se muestra la lista de los comportamientos negativos y su puntaje.

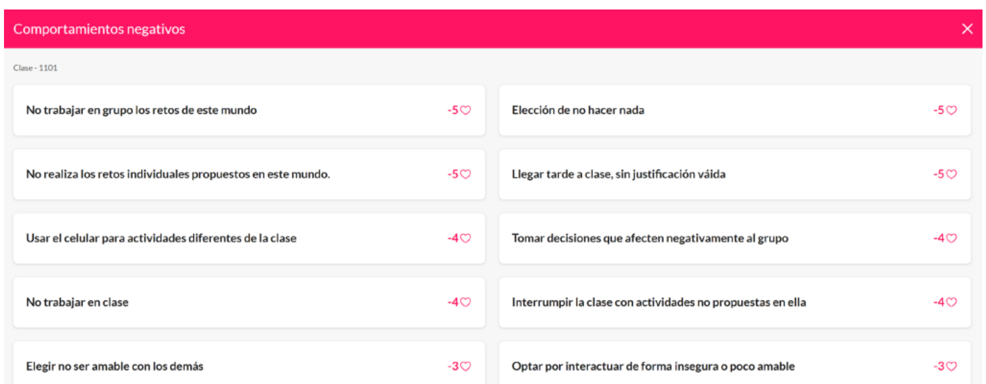


Figura 6. *Lista de comportamientos negativos con sus puntajes.*

En la plataforma se diseñaron 4 mundos matemáticos, como se observa en la figura 7, se desarrollaron en el siguiente orden, primero se llamó retos numéricos, el segundo reto algebraicos, el tercer reto de conteo, el cuarto retos geométricos, el quinto juegos matemáticos, cada uno consta de 4 retos grupales y tres retos individuales que los estudiantes deben realizar, en la fase de validación.

Figura 7. *Vista general de los mundos matemáticos.*

Al inicio de cada mundo hay una historia de introducción para que los estudiantes se motiven al desarrollo de la actividad, y la ruta que sigue en el mundo al resolverlos, como se observa en la figura 8. A medida que van avanzando, los estudiantes tendrán que completar la tarjeta que les permite avanzar al mundo siguiente, esto como premio para poder finalizar con éxito la misión y poder continuar su camino a los retos siguientes.

Figura 8. *Vista de retos numéricos, e introducción al mundo.*

Cada mundo contiene retos o problemas no rutinarios que abordan temas, y subtemas acordes al plan de estudios de educación básica y media, y los estándares básicos establecidos por el MEN (2006) como se muestran a continuación (Figura 9):

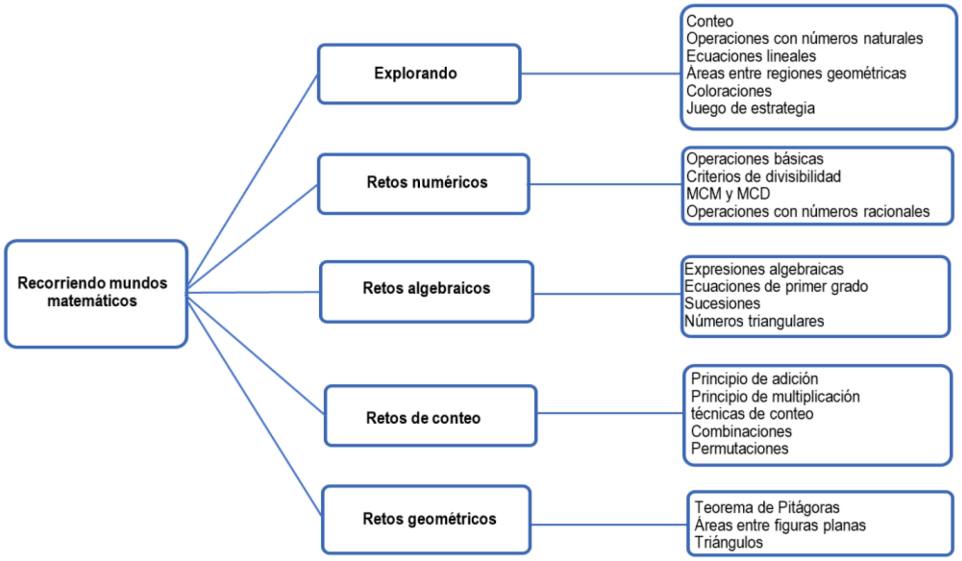


Figura 9. *Ejes temáticos abordados en cada uno de los mundos.*

3.4.3 Fase 3 Preparación del diseño

El análisis de resultados se hace por medio de un proceso de recolección de información, análisis y sistematización de datos con base a las implementaciones desarrolladas en los tres grupos, a los ocho estudiantes que se han tomado como muestra, donde se analiza los elementos utilizados por los estudiantes en la teoría de la resolución de problemas y un análisis del discurso que utilizan los estudiantes a la hora de justificar y validar sus soluciones, por último se evalúa los elementos de inclusión que se desarrollaron en el siguiente trabajo. Para el análisis de cada una de las actividades se diseñó una rúbrica de evaluación, adaptada a las etapas de la solución de problemas y elementos del discurso que emplearon los estudiantes al desarrollar cada una de las actividades.

3.5 Diseño de las actividades

A continuación, se muestra las actividades propuestas para cada uno de los mundos y las fases desarrolladas en cada uno:

3.5.1 Mundo Explorando:

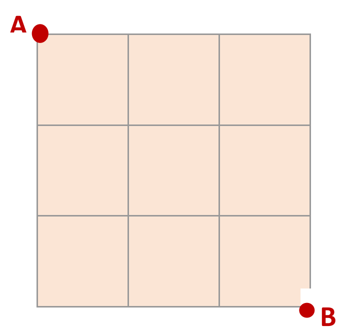
Objetivo: Identificar qué conocimientos tienen los estudiantes de ciclo V sobre la solución de problemas en matemáticas y las estrategias que emplean para su solución.

Apreciados estudiantes:

Esta actividad ha sido diseñada especialmente para ustedes, siendo la primera base para iniciar este recorrido por el mundo de retos matemáticos. La actividad debes realizarla con tu compañero, asignado deben juntos pasar los 7 retos que se plantean, para ganar los 10 puntos mínimos que se necesitan para pasar al mundo de las curiosidades de los números. Si tienes preguntas puedes preguntarle a tu profesor, que te dará ayudas para comenzar o avanzar en tu recorrido.

BIENVENIDOS

Reto 1: CAMINOS SIN REPETIR (10 puntos). Se tiene una cuadrícula de 3x3 como se muestra en la figura, y se ubican dos puntos cada uno en una esquina opuesta. Para desplazarse desde el punto A al punto B solo es posible hacerlo por los bordes de la cuadrícula o por el retículo moviéndose hacia la derecha y hacia abajo. a. Encuentra un camino para llegar del punto A al punto B, sin pasar dos veces por la misma línea.b. Puedes encontrar otro camino para llegar de A a B, diferente al primero que encontraste? c. ¿Cuántos caminos diferentes hay para ir de A hasta B sin pasar dos veces por la misma línea?



d. Si se rompe uno de los segmentos y no es posible pasar por ahí, ¿cuántos caminos habría ahora para llegar de A hasta B?

Reto 2: ¿CUÁNTOS HAY? (10 puntos). Cada uno de ustedes tiene una cierta cantidad de objetos, se saca la mitad más uno, de lo que queda se saca la mitad más dos y de lo que queda se saca la mitad más tres y sobra uno.

a. ¿Cuántos objetos había en el último paso?

b. ¿Cuál es la cantidad inicial de objetos que tiene cada uno?

c. ¿Si la cantidad inicial de objetos se duplica, al final cuántos objetos le sobrarían a cada uno? ¿Es la misma cantidad?

d. ¿Existe otra cantidad que pueda distribuirse de la misma forma? ¿Cuál es?

Reto 3: JUGANDO CON NÚMEROS (10 puntos). Tienen cuatro números 4,5,6 y 7, con los cuales es posible formar diferentes cifras como 6475.

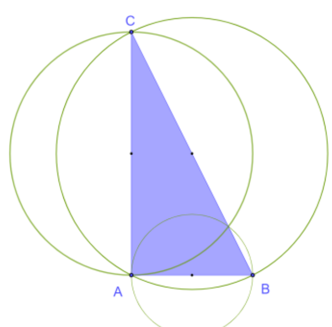
a. ¿Cuál es la diferencia entre el número más grande y el número más pequeño que se pueden escribir con estas cifras?

b. ¿Cuántos números pueden escribirse con estas cifras que sean múltiplos de 5? ¿Cuáles son?

c. ¿Cuántos números impares pueden formar? ¿Cuáles son?

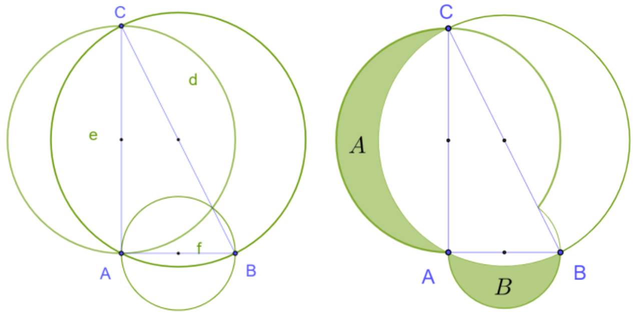
Reto 4: LAS LÚNULAS (30 puntos). Realicen la construcción con base a las instrucciones dadas y después respondan las preguntas:

1. Dibuja un triángulo rectángulo cuya base sea de 5 cm y altura sea el doble de la base.
2. Encuentra el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.
3. Haciendo centro en cada uno de ellos, dibuja un círculo cuyo diámetro sea la medida de cada lado del triángulo.



4. Con base a la figura obtenida, responde las siguientes preguntas, puedes redondear las cifras a un decimal:

a. ¿Cuál es el área del triángulo ABC obtenido en el numeral 1? b. ¿Cuál es el área de cada uno de los círculos verdes d,e,f?

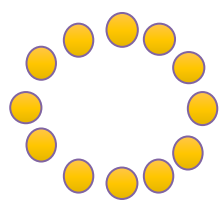


c. ¿Cuál es el área total de las regiones A y B, correspondientes a las lúnulas de color verde obtenidas en la figura?

Reto 5: SUMANDO 15 (10 puntos). En las fichas dadas se encuentran los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Por turnos, cada uno de los jugadores elige un número de la lista, y se queda con él (el número se retira de la lista de disponibles). El primero que consiga sumar 15 usando tres de los números que eligió, será el ganador del juego.

a. ¿Quién ganó la primera partida? ¿Quién ganó la segunda partida? b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego?

Reto 6: CÍRCULO DE MONEDAS: (10 puntos). Con tu compañero deben colocar en círculo las 12 monedas las dadas como se muestra en la figura:

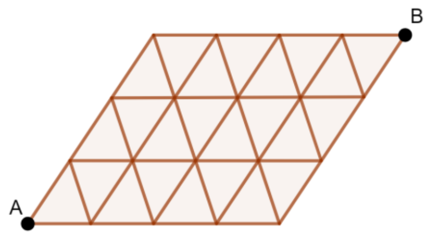


Con tu compañero se deben turnar para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. El último que saque la/s última/s moneda/s es el ganador.

a. ¿Quién ganó la primera partida? ¿Quién ganó la segunda partida? b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego? c.Si aumentaras a 14 el número de fichas, ¿podrías aplicar la misma estrategia ganadora? ¿Y si fueran 15?

Explica una forma general para que siempre puedas ganar este juego tus compañeros
y cuál es la relación con el número total de las fichas en el juego.

Reto 7: TRIÁNGULOS VECINOS (10 puntos). Cada uno debe ubicarse en los puntos A y B de la figura con una ficha de color diferente. Para desplazarse por el tablero pueden moverse a una casilla vecina. Gana el juego quien logre quitarle la ficha a su oponente cuando llegue a la casilla donde tiene la ficha su compañero, o el que llegue primero a la salida de su oponente.



a. ¿Quién ganó la primera partida?
b. ¿Cuál es la estrategia que debes llevar a cabo para ganar la partida? Explica

3.5.2 Mundo de los retos numéricos:

Objetivo: Identificar propiedades o patrones que presentan algunas cantidades numéricas y las estrategias que emplean los estudiantes en la solución de problemas numéricos.

Temas para desarrollar:

- Conjuntos numéricos, Operaciones básicas, Propiedades de los números naturales, Criterios de divisibilidad, MCM y MCD

Resultados de aprendizaje para el mundo de los números (RAN):

RAN1: Emplear las operaciones entre números naturales para estimar una cantidad numérica de acuerdo con la información y soluciona correctamente el problema.

RAN2: Interpretar por medio de operaciones simples las diferencias entre el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre dos o más números y lo aplica en la solución de problemas.

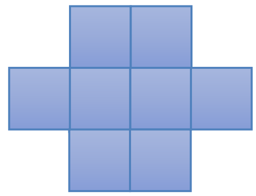
RAN3: Aplicar las propiedades de las operaciones para realizar repartos proporcionales de acuerdo con la información descrita en el problema.

RAN4: Identificar números cuadrados, generar equivalencias entre expresiones numéricas aplicando las operaciones de los conjuntos numéricos.

Tiempo estimado: 7 sesiones de 50 minutos cada una.

Fase 1 de entrenamiento:

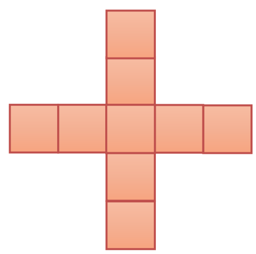
Reto 1: **Situar los ocho primeros números.** Coloque los números del 1 al 8 en las 8 casillas de un tablero de manera que las casillas vecinas (aquellas que tienen un lado o vértice en común) no contengan números consecutivos.



Reto 2: Una cruz de números. Situé los números del 1 al 9 en las nueve casillas de la figura de manera que las cinco casillas que están en la columna sumen igual que las casillas que están en la fila.

a. ¿Cuál es el mayor valor posible de la suma de los cinco números de la columna o de la fila?

b. ¿Cuál es el menor?



Reto 3: El curioso 1089 y sus parientes. Elija un número de 3 cifras, la primera mayor que la última, por ejemplo 723; invierta las cifras de los extremos 327 y reste los dos números: $723 - 327 = 396$. Este resultado, inviértalo de nuevo y sume los dos números obtenidos: $396 + 693 = 1089$.

a. Pruebe con otro número distinto. ¿Qué sucederá? ¿Este resultado aparece siempre?

b. ¿Ocurre lo mismo con números de 4 cifras? ¿Cuál es el número obtenido?

Reto 4: Cuatro cuatros. Usando cuatro veces el número 4 y todas las operaciones que necesite obtenga los números dígitos. ¿Es posible expresar el número 100?

Reto 5: El hotel de las 100 puertas. Un hotel dispone de 100 habitaciones y 100 camareros. Los camareros tienen la costumbre siguiente, más bien simple:

Un primer camarero cierra las puertas de todas las habitaciones. Un segundo abre las puertas de las habitaciones pares. Un tercero cambia de posición todas las puertas que son múltiplos de 3. Un cuarto cambia la posición de las puertas que son múltiplos de 4…Así sucesivamente hasta que ha pasado el último camarero. ¿Qué puertas quedarán CERRADAS al final?

Fase 2 de validación:

Introducción: **Cuatro paredes y una sola puerta...**

Cuatro paredes, una sola puerta…, es un lugar oscuro, sin ventanas, es el cuarto donde se encuentran hoy, no saben por qué están allí sólo saben y sienten el desespero por salir pronto, el aire escasea se miran y piensan

- *¿Qué hacemos acá?, ¿Quién nos ha encerrado en este lugar?, ¿Por qué nosotros?*

Mientras se preguntan, de una de las paredes de la habitación sale una luz brillante, se prende lentamente

-Bienvenidos- se escucha una voz al interior que sale del rayo de luz. -Les prometo que pronto saldrán de acá si siguen mis instrucciones.

Continúa la voz…

-La puerta que tienes al frente sólo podrá abrirse si obtienen las cuatro partes de una tarjeta. Pero, atentos, ella sólo permite salir a cuatro de ustedes por cada tarjeta, así que deben pensar en grupo para poder salir… Ahora te preguntas, ¿cómo hacemos para conseguir las tarjetas? Al tiempo que la voz sale del rayo de luz y continúa

- yo les daré un reto relacionado con el mundo de los números y en la medida que vayan resolviendo cada problema yo les daré partes de una tarjeta. Tarjeta que al unir en su totalidad podrán salir de este lugar.

Figura 10. *Introducción al mundo de los retos numéricos.*
Fuente: Elaboración propia.

El primer reto es llamado completar un siglo, para ello deben seguir las instrucciones que se muestran en el siguiente reto... recuerden que deben trabajar en equipo para completarlo, y todos aportar para su solución.

Reto 1: **COMPLETA UN SIGLO** (150 puntos) (Tomado de Mathematical activities 1982)

Coloca entre las nueve cifras siguientes signos de las 4 operaciones aritméticas en los lugares adecuados no necesariamente debe ser en todos, para que la expresión obtenida sea igual a 100.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

a. Escribe tu solución aquí:

b. Existen más Soluciones ¿Cuántas? c. Escribe dos Soluciones diferentes a la primera dada en el numeral b que involucren operaciones diferentes a las anteriores.

Reto 2: LA CARRERA (150 puntos) Diego y Daniela corren alrededor de una pista con rapidez constante. Diego corre seis vueltas en 14 minutos, mientras que Daniela da tres vueltas en ocho minutos. Después de iniciar al mismo tiempo una carrera, cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Diego observó que había pasado una cantidad entera de minutos. a. ¿Cuántas vueltas dio Diego? b. ¿Cuántas vueltas dio Daniela? c. ¿Cuál es el total de vueltas que dieron entre los dos?

Reto 3: REPARTO JUSTO DE PIQUIS (150 puntos) (Adaptado de El hombre que calculaba) Un grupo de 3 amigos ganaron 47 bolas de piquis en el descanso en el colegio. Al primero le corresponde la mitad, al segundo le corresponde la cuarta parte y al tercero le corresponde la sexta parte. Sin embargo, al realizar el reparto la división no es exacta y ellos entraron en discusión. La monitora de la clase les dijo que les prestaba una piquis para que realizaran su reparto y no siguieran discutiendo. Al ver que su reparto fue claro ellos devuelven la esfera prestada a la monitora, junto con las que sobraban. a.¿Cuántas esferas de piquis le corresponde a cada amigo? b. ¿Cuántas esferas sobraron?

Reto 4: CUADRADOS PERFECTOS (150 puntos) Ciertos pares de números tienen una propiedad interesante y es que, dan un cuadrado perfecto cuando se suman o cuando se restan entre sí. Por ejemplo 4 y 5, ya que $4 + 5 = 9$ y $5 - 4 = 1$,

a. En este reto, deben encontrar otros dos pares de números que cumplan esta propiedad.

x	y	$x + y$	$y - x$
4	5	9	1

b. ¿Hay más? Encuentra otro cuadrado perfecto diferentes a los anteriores

¿FIN DE LA MISIÓN?

¡Muy bien!... han finalizado los retos grupales, ahora debe cada uno mostrar sus poderes y sabiduría en los retos individuales, recuerda que al resolverlos completamente obtendrán 300 puntos de experiencia. y podrán obtener la última parte de la tarjeta que les permitirá salir de este cuarto.

Una vez entregue la tarea obtendrás la última parte de la tarjeta…

Retos individuales

Apreciados estudiantes:

Bienvenido los retos individuales de los retos numéricos, aquí encontrarás 3 retos individuales sobre pensamiento numérico. Al desarrollarlo obtendrás 200 puntos de experiencia y aumentarás tu nivel.

Si tienes preguntas puedes preguntarle a tu profesor, que te dará ayudas para comenzar o avanzar en tu recorrido. **COMENCEMOS**

Reto 1I: EL NÚMERO MÁS PEQUEÑO.

a. ¿Cuál es el número más pequeño que es divisible por 1, 2, 3, 4 y 5? b. ¿Cuál es el número más pequeño que es divisible por cada uno de los nueve dígitos en nuestro sistema numérico de base 10? c. ¿cuál es el menor número divisible por 1,2,3,4,5, 6,...,13,14 y 15?

Reto 2I: NÚMEROS CON RESTO

a. ¿Cuál es el menor número que al dividir por 2,3,4,5, deja como resto a 1?b. ¿Cuál es el menor número entero positivo tal que al dividirlo entre 2 deja resto 1, al dividirlo entre 3 deja resto 2, al dividirlo entre 4 deja resto 2, al dividirlo entre 5 deja resto 4? c. ¿Cuál es el menor número que al dividir por 2,3,4,5,6,7,8,9 deja como resto a 1? d. ¿Cuál es el menor número entero positivo tal que al dividirlo entre 2 deja resto 1, al dividirlo entre 3 deja resto 2, al dividirlo entre 4 deja resto 2, al dividirlo entre 5 deja resto 4, al dividirlo entre 6 deja resto 5, al dividirlo entre 7 deja resto 6, al dividirlo entre 8 deja resto 7 y al dividirlo entre 9 deja resto 8?

Reto 3I: DULCES DE MASCOTAS: En una tienda de mascotas se compran 3 tipos de golosinas para perro que son: galletas, huesos, y cávanos, en cada bulto vienen las siguientes cantidades, galletas 2184 unidades, huesos 1872 unidades y cávanos vienen 2730 unidades. Las golosinas deben repartirse en cierto número de cajas que contengan todas las golosinas, sin que sobre ninguna y a su vez cada caja en su interior tiene bolsas que contienen cierto número de galletas para la venta. a. ¿En cuántas cajas pueden repartirse todas las golosinas de las mascotas? b. ¿Cuántas galletas hay en cada caja? c. ¿Cuántos huesos hay en cada caja? d. ¿Cuántos cávanos hay en cada caja?

Fase 3 de aplicación: **Batalla de jefes.**

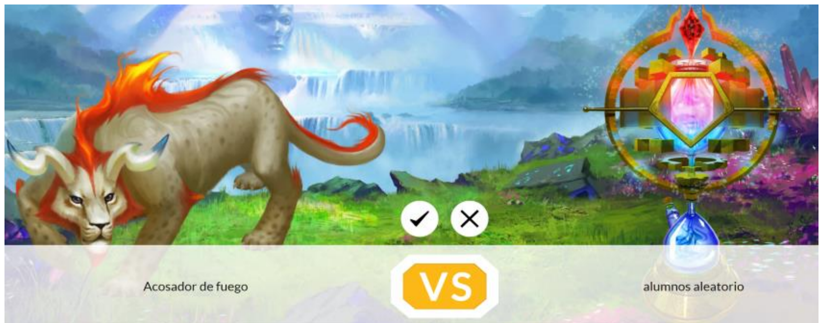


Figura 11. *Vista de los retos numéricos individuales en classcraft.*

A continuación, se muestran algunos de los retos propuestos en la batalla de líderes, estos son problemas de olimpiadas en matemáticas de pruebas para primaria y secundaria:

Figura 12. *Problemas de retos numéricos de líderes.*

Una vez finalizados los retos numéricos obtendrán como premio la tarjeta pitagórica, que les permitirá a los estudiantes continuar con el siguiente mundo de los retos algebraicos.

3.5.3 Mundo de los retos algebraicos:

Objetivo: Identificar propiedades o patrones que presentan algunas cantidades numéricas y las estrategias que emplean en la solución de problemas.

Temas para desarrollar:

- Expresiones algebraicas, Ecuaciones de primer grado, Sucesiones, Números triangulares

Resultados de aprendizaje para el mundo algebraico (RAA):

RAA1: Proponer conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y expresarlas de manera verbal o simbólicamente.

RAA2: Establecer la relación entre los valores de una secuencia presentada en una tabla, y predecir los valores de las cantidades desconocidas para solucionar correctamente el problema.

RAA3: Utilizar propiedades de las operaciones de números reales para resolver ecuaciones de primer grado.

RAA4: Identificar las expresiones algebraicas que se necesitan para solucionar problemas algebraicos y las aplica correctamente.

Tiempo estimado: 10 sesiones de 50 minutos cada una.

Fase 1 de entrenamiento:

Reto 1. ¿CUAL ES? Encontrar el número que cumple que la suma de su doble y de su triple es igual a 100.

Reto 2. LA EDAD: Si dentro de 10 años Adriana tiene el triple de la edad que tiene ahora, ¿qué edad tendrá entonces?

Reto 3. LA ABUELA: La abuela de Lucía tiene 5 veces su edad y su madre tiene la mitad de edad que su abuela. Dentro de 6 años, la edad de Lucía es la mitad que la de su madre, ¿qué edad tiene cada una?

Reto 4. ACERTIJOS: Resuelve los siguientes acertijos:

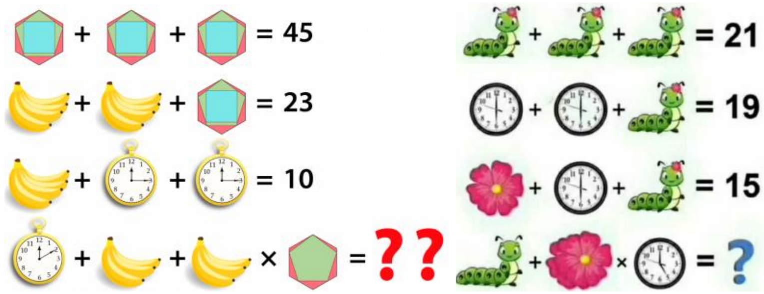


Figura 13. *Acertijos matemáticos.*
Tomado de: https://www.acertijosweb.com/acertijos-matematicos/

Reto 5. CUADRADOS MAGICOS: Resolver el siguiente cuadrado mágico, donde la suma de 15.

Reto 6. CALENDARIO: Selecciona del calendario un mes del año, por ejemplo, este es el calendario del mes de septiembre del 2021, y realiza los siguientes pasos:

Septiembre 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	1	2	3

1. En un calendario escoge tres números en columna, de cualquier mes. Dime la suma de los tres. Los números son……………………

2. En un calendario escoge tres números en fila, de cualquier mes. Dime la suma de los tres. Los números

Reto 7. SUMA EN EL CALENDARIO: Forma un cuadrado de tamaño 4 x 4. Se muestra un ejemplo en la siguiente figura.

Septiembre 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	1	2	3

2. Encierra en un círculo cualquier número del cuadrado elegido y tacha todos los números de su misma fila y columna.

3. Encierra en un nuevo círculo cualquier número no tachado y tacha todos los que se encuentren en su misma fila y columna.

4. Repite el proceso hasta que queden seleccionados cuatro números.

5. Suma los cuatro números seleccionados.

Ahora responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el resultado de la suma de esos cuatro números?

b. El primer número es: _________ ¿cómo crees que lo hizo?

c. Indica la posición de los 4 números sumados, por filas y columnas, el profesor adivinará los valores de los 4 números sumados. ¿Cómo crees que lo hizo?

Fase 2 de validación: ***El jardín y el muro.***

Has salido del cuarto, ahora estás en un jardín, hay pocos árboles y un inmenso muro que es imposible de escalar, es liso y sin grietas, te subes a los árboles, pero no alcanzas a observar que hay más allá del muro. Dentro de los arbustos aparece una mujer no muy joven pero tampoco muy vieja, aproximadamente una edad de 42 años, con vestimenta de hechicera

- *¡hola queridos niños!... - dice la mujer*

no saben qué contestar y alguien se atreve a preguntar ¿Quién eres?

¿yo? ... Yo soy madre o por lo menos así me llaman los que han pasado por acá

Y te preguntas ¿han pasado más por acá?

-Por supuesto, algunos han logrado pasar el muro otros..., mejor no les cuento.

¿Qué debemos hacer acá?

-pues bien, debes ir y buscar en los árboles, cada uno tiene una parte para armar un instrumento que te servirá para superar el muro, pero ten cuidado cada árbol tiene un misterio… que no debes insultar y cada uno de ellos es muy celoso.

¿Madre nos ayudarás?

-No puedo hacer mucho por ustedes, pero he visto a varios pasar y tengo algunas cosas que les pueden servir… Te das cuenta de que hay pocos árboles, en realidad son sólo cinco y lo demás son arbustos. Madre parece adormecida porque se la pasa arreglando los arbustos las flores y las sobresalientes raíces de los árboles. -El árbol de allá – dice madre – es un sauce llorón, apuntando hacia donde sale el sol, el de al lado es un Drago, el que le sigue es un Fresno, luego está el más alto y el más celoso de todos, el Larix y terminado el jardín el más misterioso el Abedul.

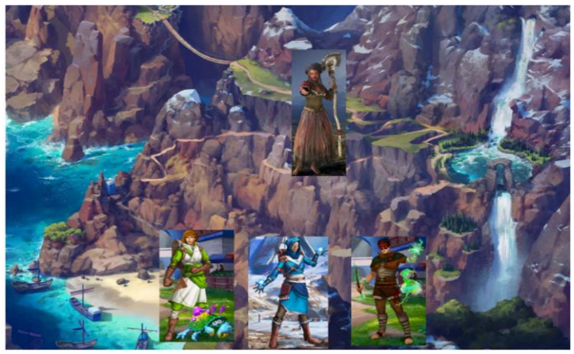


Figura 14. *Introducción al mundo de los retos algebraicos.*
Fuente: Elaboración propia.

Para obtener la primera parte del artefacto, deberás averiguar con tus compañeros cuál es el algoritmo.... sí lo logran obtendrán la primera parte para construir su artefacto que será...

Retos grupales

Reto 1: DESCUBRIENDO CUAL ES: (150 puntos) (Adaptado de Actividades matemáticas, 1994). Una persona A actúa Cómo un computador que está programado para computar un nuevo número a partir de cualquier número que le den. Los demás le dan a A un número x que él procesa, usando el programa que haya escogido, y anotando tanto el número x Cómo el número y que halla obtenido a partir de x. i. Un programa que le dan a A es el siguiente:

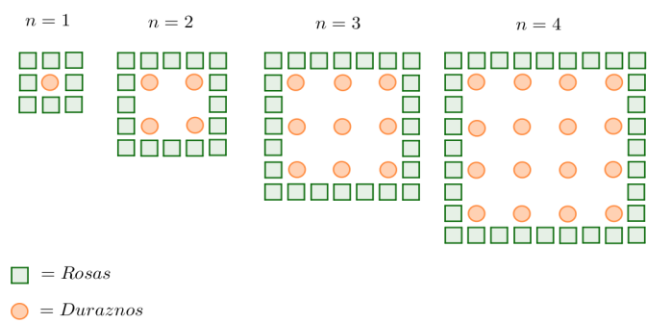
1. Piensa en un número x, 2. Duplica el número, 3. Suma 3 al número, 4. Al resultado obtenido réstale 5.

a. ¿Cuál es el número obtenido? b. El número x es:

ii. Otro programa genera un número de 7 cifras, Cómo se describe a continuación:

1. La primera cifra es un número menor que 9, que es igual a la suma de sus divisores. 2. La segunda cifra es la diferencia del sucesor de su cuadrado y su cuadrado.3. La tercera cifra es igual a su tercera parte.4. La cuarta cifra es igual a la suma de las dos primeras.5. Es el orden inverso de los tres primeros.c. ¿Cuál es el número obtenido?

Reto 2: LA HUERTA (150 puntos) Cecilia desea sembrar en su finca duraznos, en un terreno cuadrado. Para protegerlos de los pájaros en el proceso de crecimiento planta rosas en todo el terreno. A continuación, se presenta un esquema en el que se puede ver el patrón de duraznos y de rosas para los primeros 4 casos:



a. Completa la siguiente tabla donde registran el número de árboles de duraznos y el número de rosas:

n	Arboles de duraznos	Arboles de rosas
1	1	8
2	4	
3		
4		

b. Si se siembran 100 árboles de duraznos, ¿habrá más cantidad de rosales para cubrirlos? ¿Cuántos rosales se necesitan?

c. Supongamos que Cecilia quiere hacer un huerto mucho más grande con muchas hileras de árboles. A medida que ella agrande el huerto, lo que aumentará más rápidamente es: ¿la cantidad de duraznos o la cantidad de rosas? Justifica tu respuesta.

Reto 3: EL TRUEQUE (150 puntos) (Adaptado de los caminos del saber 8) Dos aldeas practican el trueque para comercializar sus animales, donde 4 vacas equivalen a 6 caballos, 4 caballos equivalen a 20 ovejas y 6 ovejas se pueden intercambiar por dos cerdos.

a. ¿Cuántos cerdos se necesitan para cambiarlos por 6 vacas? b. ¿Cuántos caballos se necesitan para cambiarlos por 25 cerdos?

Reto 4: ¿CUÁNTO SUMAN? (150 puntos) a. ¿Cuál es el valor de la suma de los múltiplos del 3 del 1 al 10? b. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 1 al 20? c. ¿Cómo podrías hallar la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 3 y 50? d. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 20 al 100?

Hasta el momento van muy bien, pero ha llegado la hora de mostrar tu valor y resolver los retos individuales, recuerden que al resolverlos completamente obtendrán 300 puntos de experiencia, y podrán obtener la última parte de la tarjeta que les permitirá terminar de escalar este muro.

Una vez entregue la tarea obtendrás la última parte de la tarjeta…

Retos individuales

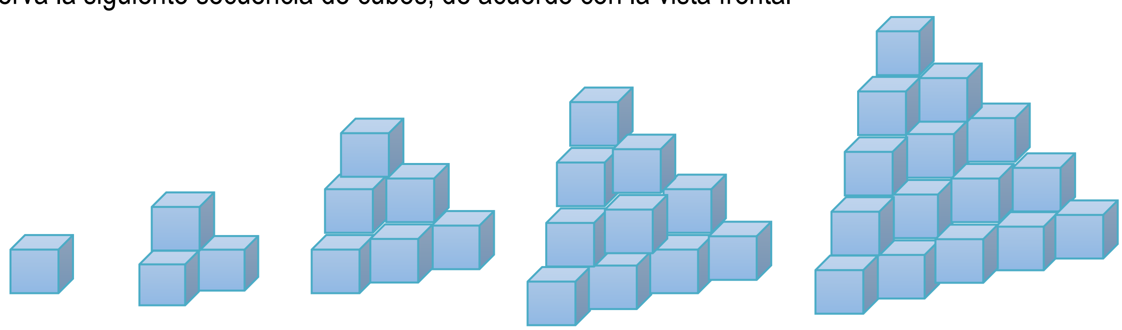
Apreciados estudiantes:

Bienvenido los retos individuales algebraicos, aquí encontrarás 3 retos individuales sobre pensamiento algebraico Al desarrollarlo obtendrás 200 puntos de experiencia y aumentarás tu nivel.

Si tienes preguntas puedes preguntarle a tu profesor, que te dará ayudas para comenzar o avanzar en escalar el muro. COMENCEMOS

Reto 1I: TORRES DE CUBOS

Observa la siguiente secuencia de cubos, de acuerdo con la vista frontal



a. ¿Cómo sería la siguiente secuencia de cubos? ¿Cuántos cubos habrá? b. ¿Cómo sería el noveno caso? ¿Cuántos cubos habrá? c. ¿Si n fuera igual a 50, ¿cuántos cubos habría? ¿Cómo podrías calcularlos? e. ¿Podrías establecer una relación matemática para determinar el número de cubos, para cualquier valor de n?

Reto 2I: LA FECHA DE NACIMIENTO

Dígale a su amigo que escriba el día de nacimiento, que lo multiplique por 100, que le sume el número del mes en que nació y que lo vuelva a multiplicar por 100. Ahora que sume los dos últimos dígitos del año de su nacimiento; que lo multiplique por 10; que le sume el año del descubrimiento de América (1942) y que lo divida entre 2. Pídale el resultado. A este resultado usted réstale 746 y luego divídelo entre 5. Si el resultado es impar en dígitos el primero será el día de nacimiento; los dos siguientes el mes del año y los dos últimos en que nació.

Reto 3I: PROBLEMA DE HERMANOS

Dice Camilo: Tengo tantas hermanas como hermanos. Su hermana al oírlo comenta: es cierto y, sin embargo, yo tengo el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas tiene dicha familia?

Fase 3 de aplicación: Batalla de jefes.

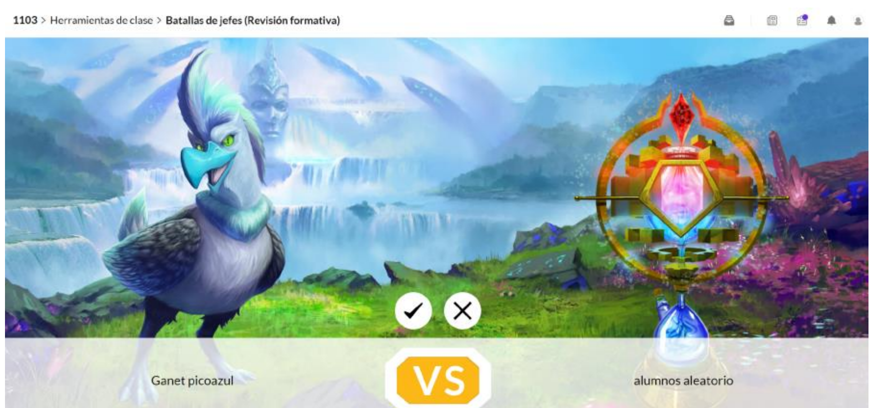
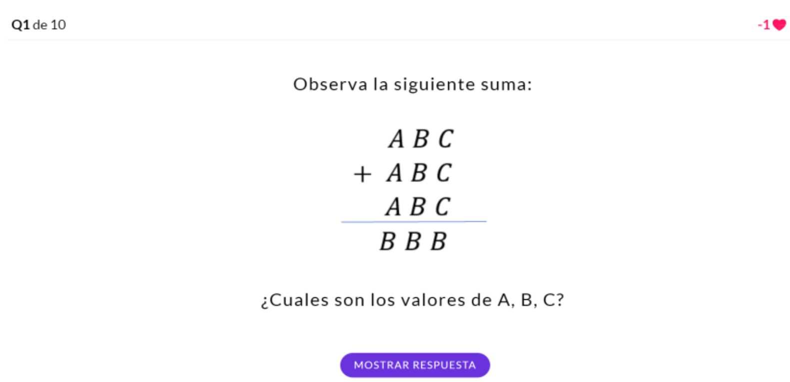


Figura 15. *Vista de la batalla de líderes de los retos algebraicos individuales en classcraft.*

A continuación, se muestran algunos de los retos propuestos en la batalla de líderes, estos son problemas de olimpiadas en matemáticas de pruebas para primaria y secundaria:



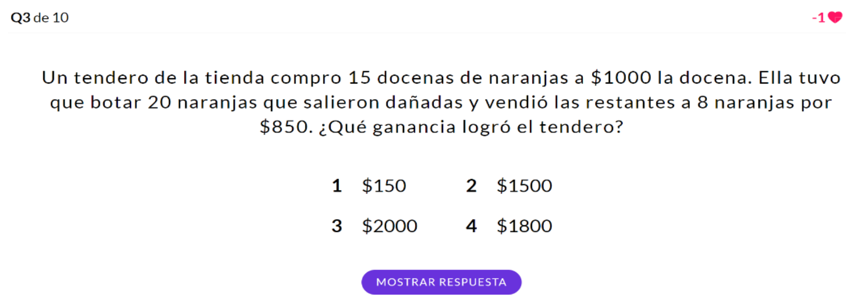


Figura 16. *Vista de los retos algebraicos individuales en classcraft.*

Una vez finalizados los retos numéricos obtendrán como premio la tarjeta de Descartes, que les permitirá a los estudiantes continuar con el siguiente mundo de los retos de conteo.

3.5.4 Mundo de los retos de conteo:

Objetivo: Comprender y aplicar las diferentes técnicas de conteo a la solución de problemas combinatorios.

Temas para desarrollar:

- Principio de adición, Principio de multiplicación, técnicas de conteo, Combinaciones, Permutaciones**.**

Resultados de aprendizaje para el mundo del conteo (RAC):

RAC1: Establece mediante técnicas de conteo sencillas el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio.

RAC2: Identifica la técnica de conteo apropiada para realizar permutaciones circulares y las utiliza para solucionar problemas.

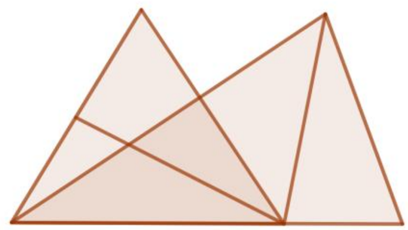
RAC3: Construye permutaciones con los elementos de un conjunto y determina la cantidad de subconjuntos totales que se pueden construir.

RAC4: Utiliza argumentos combinatorios (principio de multiplicación y combinaciones sencillas) como herramienta para la interpretación de situaciones diversas de conteo.

Tiempo estimado: 7 sesiones de 50 minutos cada una.

Fase 1 de entrenamiento:

Reto 1: ¿Cuántos triángulos hay?



Reto 2: ¿Cuántos números de 2 cifras se pueden formar con los dígitos 1 y 6?

Reto 3: Cuatro chicos son enviados al director del colegio por alborotar en la clase. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego! Supongamos que los niños se llaman Laura, Andrés, Juan y María (los llamaremos L, A, J y M). Queremos escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse. Por ejemplo: para el orden L A J M, escribiremos ABCD, ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

Reto 4: Supongamos que se tienen contenido en una caja 3 pelotas de diferentes colores (rojo, azul y verde). ¿Cuántas son las combinaciones que existen al sacar las 3 pelotas?

Reto 5: ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}?

Reto 6: Si quiero comprar un automóvil, puedo elegir entre distintas marcas y modelos. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De cuántas maneras posibles puede elegir un automóvil?

Reto 7: En un grupo de 12 personas a 6 les gusta fumar, a 7 les gusta tomar y a 4 les gusta ambas cosas. ¿A cuántos del grupo no les gusta ninguna de las 2 cosas?

$A =$ personas que les gusta fumar, $B =$ personas que les gusta tomar

Reto 8: En un semestre de ingeniería de sistemas de 50 estudiantes 30 estudian Programación, 25 algoritmos y 10 están estudiando ambos lenguajes. ¿Cuántos estudiantes de primer ingreso estudian algún lenguaje de programación?

Reto 9: Un restaurante ofrece 4 entradas, 5 platos principales y 2 postres. ¿De cuántas formas un cliente puede ordenar una comida?

Reto 10: ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar y la segunda sea diferente de la primera?

Reto 11: Si tengo tres camisas, cinco pantalones y cuatro corbatas. ¿De cuántas maneras distintas puedo combinar una camisa, un pantalón y una corbata?

Fase 2 de validación: **El Acantilado**

Estas por fin en la cima del muro, y respiras con más ganas, como si el aire acá arriba fuera más puro más sano; una brisa seca y algo húmeda te pega en la cara y luego miras al frente y observas un hermoso bosque, y a lo lejos una gran torre, no es muy clara la imagen, pero la reconoces… de pronto miras hacia abajo para poder bajar el muro y entrar en el bosque.

- *¡Alto¡¡ gritó uno de tus compañeros Te das cuenta de que el muro termina y continúa en un acantilado.*
- *¿Y ahora? ¿Qué vamos a hacer? Es muy profundo y no hay forma de bajar sin salir mal librados.*

Recuerdas a Madre y piensas.

- *¿Nos devolvemos? Pero ya sabes que madre no podrá ayudarte más, ahora estás sólo, y recuerdas el bolso que madre entregó a uno de tus compañeros.*
- *Abre pronto el bolso*

Miras y hay una ballesta con cuatro garras de escala y cuatro cuerdas. Ya sabes lo que debes hacer, amarrar apuntar y tratar de dar en el blanco.

Figura 17. *Herramientas para descender en el acantilado.*

Retos grupales

Reto 1: LA HELADERÍA (150 puntos) El fin de semana Camila va con sus padres a la heladería donde venden conos de una, dos y tres bolas de helados. En total hay 7 sabores para escoger, por lo que ella siempre elige un cono de 2 sabores distintos.

a. Si ella cada vez que va a la heladería pide un helado de dos sabores, ¿Durante cuántos fines de semana podrá comer helados de diferentes combinaciones de bolas de helado?

b. ¿Cuántas combinaciones de sabores puede hacer de sus sabores si siempre pide tres sabores distintos?

Reto 2: LA CENA (150 puntos) Una familia compuesta por 6 integrantes que son papá, mamá, abuelo, abuela y 2 hijos, quieren sentarse para la cena de nochebuena en una mesa circular.

a. ¿De cuántas maneras podrían ubicarse si no hay ningún tipo de restricción?

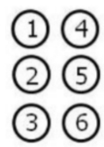
b. Si el abuelo y la abuela siempre se sientan juntos, ¿de cuántas formas podrían sentarse?

c. Si los dos hijos no pueden sentarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden ubicarse en la mesa?

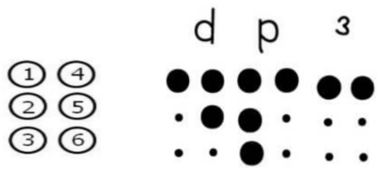
Reto 3: LENGUAJE EXTRAÑO: (150 puntos) (Adaptado de (OJM Regional 2011, 1°) Un lenguaje tiene alfabeto **ABDEFGIJLMNOPRSTU** (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con cuatro letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PASO, TINA, LULO y ROTO son palabras, pero TRIA, AAPS, MIAS y LUIS no lo son.

a. ¿Cuántas palabras pueden formarse que inicien con la vocal A, seguida de la letra M? Escribe 3 ejemplos. b. ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje? c. Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contiene la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Reto 4: LENGUAJE BRAILE (150 puntos) El lenguaje Braille es un lenguaje usado por las personas invidentes que consta de 6 puntos numerados del 1 al 6 como se muestra en la figura:



Al resaltar ciertos puntos se forman letras, números o signos, por ejemplo, al resaltar el 1,4 y 5 se forma la letra d, o al resaltar los números 1,2,3, 4 se forma la letra p, o al resaltar los números 1 y 4 se forma el número 3, como se observa en la figura:



a. ¿Cuántos símbolos diferentes pueden representarse con el sistema braille? b. ¿Cuántos símbolos tienen exactamente 3 puntos en relieve? c. ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve? d. ¿Cuántos símbolos tienen al menos 4 puntos en relieve?

Su descenso fue exitoso, pero ha llegado la hora de mostrar tu valor al resolver los retos individuales, recuerden que al resolverlos completamente obtendrán 300 puntos de experiencia, y podrán obtener la última parte de la tarjeta que les permitirá llegar al mundo de los retos geométricos.

Retos individuales

Reto 1I: ORDENANDO FILAS (150 puntos) En un salón de clase hay 36 estudiantes que se quieren organizar en 6 filas, 4 de a 6 estudiantes, una de 5 y otra de 7. En la primera fila se ubican los 6 primeros de la lista.

a. ¿De cuántas maneras puede ubicar a estos 6 estudiantes si no hay ningún tipo de restricción?

b. En la segunda fila se quiere ubicar otros 6 estudiantes, pero uno de ellos debe ir en la primera silla porque tiene problemas de visión. ¿De cuántas maneras puede ubicar a los estudiantes de la segunda fila?

c. En la tercera fila debe ubicar otros 6 estudiantes, 3 niñas y 3 niños, las niñas hablan con mucha frecuencia por lo que debe dejarlas separadas en la fila o intercaladas con los niños. ¿De cuántas maneras puede ubicar a los 6 estudiantes?

Reto 2I: LA RECUPERACIÓN: (100 puntos) Un estudiante está presentando su examen de recuperación de física que contiene 10 preguntas, de las cuales solo debe contestar 7 para recuperar. a. ¿De cuántas maneras puede contestar su examen? b. Si obligatoriamente debe contestarlas 3 primeras preguntas del examen ¿de cuántas maneras puede solucionarlo?

Reto 3I: LA CLAVE SECRETA (200 puntos) Para la creación de una clave virtual de 8 caracteres, se proponen las siguientes condiciones:

a. Con las letras de la palabra mario, los números 1,2 y 3, donde la primera letra debe ir en mayúscula, seguida de 4 letras minúsculas y que finalice con los 3 números. ¿Cuántas claves secretas pueden formarse de tal manera que ningún carácter se repita?, b. Utilizando las 26 letras del alfabeto en y los números dígitos, iniciando con 5 letras minúsculas, seguido de 3 dígitos ¿Cuántas claves secretas pueden formarse de tal manera que ningún carácter se repita?

Fase 3 de aplicación: **Batalla de jefes.**

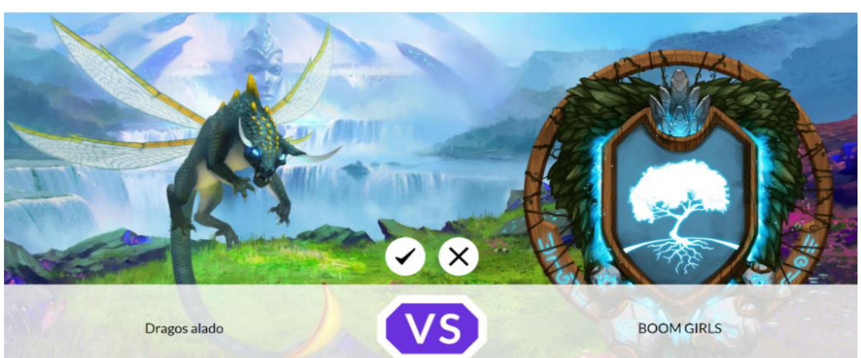


Figura 18. *Vista de la batalla de líderes en los retos de conteo individuales en classcraft.*

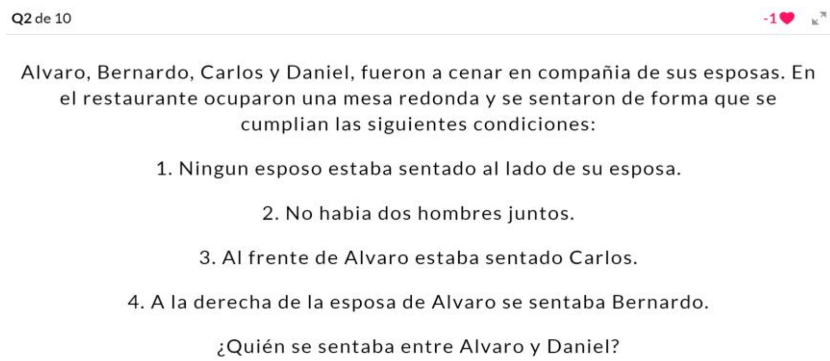


Figura 19. *Vista de los retos de conteo individuales en classcraft.*

Una vez finalizados los retos de conteo obtendrán como premio la tarjeta de Pascal, que les permitirá a los estudiantes continuar con el siguiente mundo de los retos geométricos.

Conclusiones del capítulo 3

Para el desarrollo de esta investigación se empleó un enfoque cualitativo a través de estudios de casos de ocho estudiantes con discapacidad cognitiva. Como metodología se empleó la investigación basada en el diseño con las tres fases para su desarrollo, que son la fase 1 preparación del diseño, donde se plantea el mundo explorando, con sus objetivos y resultados de aprendizaje, la fase 2 de implementación del diseño donde se hacen adaptaciones a los otros mundos integrando más elementos de la gamificación, que se articularon con el diseño instruccional para el desarrollo de los mundos de números, álgebra y conteo, y la fase 3 de análisis retrospectivo, donde se describe como se estructuró el análisis de resultados que se desarrolla en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se hace un análisis de los resultados obtenidos en la implementación de propuesta didáctica denominada Mundos Matemáticos, descrita en el capítulo anterior donde se analizan ocho casos de estudiantes, tres con discapacidad cognitiva, dos con discapacidad física y tres que no han sido diagnosticados, ni reportados por el Simat con discapacidad cognitiva, pero con base a sus desempeños académicos, dificultades cognitivas en el seguimiento e instrucciones en el aula, y desarrollo de actividades en el aula tienen dificultades para obtener un buen desempeño académico.

En la primera parte se realiza un análisis de la encuesta realizada a docentes en ejercicio de diferentes instituciones educativas de la ciudad de Bogotá para conocer cuál es su percepción frente a la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con discapacidad DC, y las prácticas que ellos desarrollan en su ejercicio docente. La segunda parte es la descripción del perfil de cada estudiante donde se han utilizado seudónimos para proteger sus identidades, allí se hace una descripción de los datos básicos e información sobre su diagnóstico inicial y sus características de aprendizaje, realizado por la profesional de apoyo del colegio San Agustín. En la tercera parte se hace un análisis procedimental y cognitivo de los desempeños obtenidos en los retos grupales e individuales propuestos en cada mundo, teniendo en cuenta las categorías de análisis que se mencionaron en el capítulo anterior.

4.1 Encuesta a docentes de educación básica y media

Esta encuesta fue realizada por medio de la plataforma docs.google.com/forms, Consta de 16 preguntas las tres primeras eran de información básica de los participantes y los 13 restantes, buscaba conocer la percepción y prácticas pedagógicas que desarrollan los docentes a estudiantes que presentan CD.

Participaron 29 docentes 14 mujeres y 15 hombres, su nivel de formación es el 44,8%, con maestría, el 6,9% con la especialización y el 41,4% con pregrado, los años de experiencia profesional que tienen enseñando el área de matemáticas, vemos que el 26,6% tiene más de 14 años de experiencia, el 24,1% cuenta entre 11 y 13 años, el 10,3% y de 7 a 10 años un 10,3%.

Una de las preguntas que se encontraban en la encuesta es si en el colegio donde laboran tienen estudiantes con discapacidad cognitiva, el 82,2% indicó que sí, y frente al tipo de discapacidad que tienen los maestros en el aula de clase, vemos que con discapacidad cognitiva el 86,4%, y con un 7,7% tienen estudiantes con discapacidad visual, siendo estos dos los tipos de discapacidad que hay en los colegios de educación básica y media.

Ahora dentro de la atención a estudiantes con discapacidad es necesario realizar algún tipo de flexibilización curricular para que los estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad puedan lograr alcanzar los mínimos de aprendizaje en cada asignatura, los maestros dicen que el 31,03% que siempre, 34,48% indica que casi siempre y el 34, 48%, manifiesta que nunca o casi nunca lo realiza.

Otro elemento que se desarrolla frente al seguimiento del proceso de flexibilización es los PIAR (Planes de adaptación y ajustes razonables), que son requeridos por la secretaría de educación para tener el reporte de cuáles son las estrategias y temas que se desarrollan en cada curso a los estudiantes con DC, y hacer seguimiento, el 27,6% lo realizan siempre, el 20,68% casi siempre, el 27,6% algunas veces, y el 24,13% no lo realizan.

Es relevante para conocer y apoyar esta investigación es saber las ideas o percepciones que tienen los maestros frente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a los niños con discapacidad cognitiva, a continuación, se presentan los resultados obtenidos en las preguntas 8, 9 y 10 que indagan estos aspectos. En torno a si los maestros consideran que los estudiantes con algún tipo de discapacidad cognitiva pueden aprender matemáticas, el 69% de los encuestados concuerdan que siempre y casi siempre, mientras que el 31% considera que a veces, casi nunca puede darse en este tipo de población, esto apoya la idea que se plasma en esta investigación frente a que los estudiantes pueden aprender las matemáticas escolares. Otro elemento importante que se aborda en esta investigación es con relación a si consideran que los estudiantes con DC pueden solucionar problemas matemáticos, el 55,2% manifiestan que siempre y casi siempre, mientras que el 44,8% indica que algunas veces o casi nunca pueden hacerlo.

Con relación a si ellos consideran que los estudiantes con DC pueden recibir las mismas clases que los estudiantes del aula regular, vemos que el 27,6% considera que casi siempre, el 48,3% a veces y el 24,1 % considera que nunca o casi nunca ven viable que se puedan hacer clases con los mismos contenidos, pueden recibir las mismas clases, esto se debe a que la instrucción no puede ser la misma para este tipo de población y debe hacer un tratamiento diferente y direccionado para ellos.Ya con relación a la práctica pedagógica que realizan los docentes al trabajar con este tipo de población, encontramos que frente a sí emplean metodologías didácticas para la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con discapacidad, encontramos que el 48,4% siempre o casi siempre lo realizan, el 17,3% a veces, y el 31,3% manifiesta que casi nunca o nunca lo hacen.

Algunas estrategias que han empleado los maestros encuestados en su clase de matemáticas para la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad son el tangram, origami y plegado, uso de material concreto, uso de software, trabajo personalizado, actividades individuales, uso de regla y compás. Dentro de las estrategias, también es importante conocer si ellos han realizado algún tipo de práctica se les solicitó dar un ejemplo concreto de las adaptaciones curriculares que haya realizado a sus estudiantes con discapacidad cognitiva en la clase de matemáticas algunas que mencionan son:

1. Los tipos de representación: En este tipo de población se enfatiza en representaciones concretas y pictóricas, sólo en algunos casos es posible llegar a los niveles simbólico o abstracto.
2. Manejo del dinero, dimensiones principales para aprender a comparar, manejo de tecnología para poder ser lo más autosuficientemente posible.

3. Estudiante con discapacidad cognitiva: se detecta en grado décimo dificultad en la comprensión de operaciones con ángulos. Se inició valoración del proceso que realiza el estudiante con las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) y se observa que el estudiante no tiene realiza adecuadamente ejercicios que impliquen el uso de estas operaciones. Partiendo de las dificultades que tiene el joven, se comenzó una instrucción personalizada para ayudar a que este chico pudiera comprender y realizar como mínimo tres de las operaciones y desarrollar algunos problemas elementales.

Por último, se pregunta ¿Qué temas de matemáticas y de geometría deben tener adaptación curricular para que puedan enseñarse a estudiantes de ciclo V que presentan discapacidad cognitiva? Casi el 60% de los docentes encuestados manifiestan que todos, un 30% temas de trigonometría, construcción de figuras geométricas, fracciones decimales, álgebra y solución de problemas. Esta encuesta sirvió como referencia para identificar las posturas y prácticas que tienen los maestros a la hora de enseñar matemáticas a estudiantes con DC, y a partir de los resultados obtenidos se concretan elementos metodológicos, prácticos e incluso se delinean elementos metodológicos para el desarrollo de la investigación.

4.2 Descripción de los casos

4.2.1 Caso de Emma:

Emma tenía 17 años en el 2021 y estaba en grado 1002, presenta discapacidad cognitiva leve, su CI está en 59/70. Dentro de sus habilidades presenta una actitud de trabajo activa, es cordial con sus pares y profesores, ejecuta tareas sencillas y muestra interés en su proceso de formación. Presenta algunas dificultades en la comprensión de instrucciones, identificación en el procesamiento de la información y en ocasiones olvida las indicaciones dadas, por lo es necesario repetir la instrucción y estar pendiente de que comprenda la instrucción para que desarrolle la actividad propuesta.

En el periodo de cuarentena Emma, tuvo problemas frente a su proceso de aprendizaje, no comprendía las actividades que se asignaban en las guías de aprendizaje en las diferentes materias, y no desarrolló los logros propuestos en cada una de las asignaturas, por lo que en el 2020 perdió grado décimo debido a su bajo desempeño académico.

4.2.2 Caso de Lia:

Lia tenía 18 años en el 2021 y se encontraba en grado 1002, presenta discapacidad cognitiva leve cuyo CI es de 66/70. Es sociable, presenta buenas relaciones con sus pares, ejecuta tareas sencillas y tiene notorias habilidades artísticas específicamente en el dibujo. Al darle instrucciones para el desarrollo de una actividad, es necesario repetirlas en varias ocasiones para que las ejecute debido a la atención dispersa que presenta, y menciona tener fallas en la memoria por lo cual no retiene información a largo plazo. También presenta dificultades en procesos aritméticos como la suma y resta y dificultades para la resolución de problemas matemáticos sencillos.

En el periodo de cuarentena Lia se desconectó completamente de su proceso académico, en el 2020 presentó una pérdida de año, y en el 2021 se conectaba a las clases sincrónicas, pero al preguntarle qué dudas tenía o qué debía hacer en una tarea específica, siempre contestaba que no sabía, que no entendía y por ello no podía hacer nada. Al volver al colegio en el mes de agosto ella retoma las actividades de manera presencial lo cual la motiva y se produce un cambio sustancial en su desempeño académico, logrando recuperar las materias pendientes en el primer semestre y aprobar sin materias pendientes su año escolar.

4.2.3 Caso de Pablo:

Pablo tenía 16 años es el menor de 3 hermanos, en el 2021 se encontraba en grado 1001, no está diagnosticado por el aula de apoyo por lo cual no se tiene claridad de qué tipo de discapacidad presenta, dentro de sus habilidades posee muy buena memoria, realiza las actividades de manera rápida cuando las comprende, no le da miedo preguntar en clase cuando tiene dudas, y cuando realiza evaluaciones orales o escritas son aprobadas en su mayoría de manera satisfactoria. Sin embargo, es un joven que a lo largo de su proceso de formación ha presentado dificultades para relacionarse con sus compañeros, no tiene amigos, en el descanso permanece solo, habla solo y cuando se le pregunta algo, no mira fijamente a la persona desvía su mirada, en sus cuadernos o notas de clase se puede ver que no tiene orden y no toma apuntes.

En el periodo de cuarentena Pablo se desconectó y desmejoró su rendimiento académico, en el primer trimestre llegó a perder 10 asignaturas, manifestaba tener problemas de conectividad, sin embargo, en los encuentros sincrónicos de matemáticas y sociales se conectaba y trabajaba en las horas de clase, pero en el desarrollo de las guías de aprendizaje que debían elaborar de manera autónoma, no realizaba nada. Al volver de manera presencial al colegio Pablo mejoró su rendimiento académico logrando ser promovido a grado once.

4.2.4 Caso de Luis:

Tenía 15 años, se encontraba en el curso 1002 en el 2021, presenta un diagnóstico de Discapacidad Física (Síndrome de Golden Had). El estudiante hasta grado noveno presento buenas relaciones interpersonales, un desempeño académico normal, realizaba las actividades sin dificultad, no requirió ni ajustes, ni flexibilización curricular, y se estableció desde el aula de apoyo que el estudiante puede cumplir con las metas de aprendizaje propuestas para su grado, ya que no presenta problemas a nivel cognitivo.

En grado décimo en el área de matemáticas y ciencias sus desempeños académicos fueron muy bajos, algunas dificultades que se identificaron fueron despejar y resolver ecuaciones, balancear ecuaciones, identificar razones trigonométricas para solucionar problemas, etc. Sin embargo, se preocupa por pasar y hacer las cosas que se le asignan, pero debe repetirse más de una vez la tarea que debe realizar y recibir explicaciones adicionales para comprender y recuperar los logros pendientes.

4.2.5 Caso de Bryan:

Bryan tenía 16 años, en el 2021 se encontraba en el curso 1003, no está diagnosticado con discapacidad cognitiva, pero sí frente al desarrollo de tareas específicas se evidencia que presenta dificultad para solucionar algunas actividades en el aula de manera individual, se distrae en clase con facilidad, y se le debe repetir en varias ocasiones las indicaciones o tareas a realizar para que las desarrolle de manera satisfactoria. En el periodo de cuarentena desarrolló las actividades propuestas y cumplió completamente con las guías de aprendizaje, ya que en casa recibía acompañamiento por parte de sus padres y hermanos mayores.

4.2.6 Caso de Molly:

Molly tenía 18 años y se encontraba en el curso 1001 en el 2021, no está diagnosticada por el aula de apoyo con discapacidad cognitiva, realiza las tareas que se le asignan, es receptiva y afirma que quiere terminar sus estudios de bachiller, para poder trabajar y ayudar a su familia con los gastos de la casa, pero presenta dificultades de aprendizaje, retención de la información, se le dificulta ejecutar tareas con solo una indicación de forma exitosa, tiene un estrabismo divergente, no tratado, su rendimiento académico ha sido muy bajo, no participa en clase es muy callada, y a lo largo de su vida escolar ha presentado repitencia en 7 y 9 grado.

4.2.7 Caso de Any:

Any tenía 16 años, se encontraba en el curso 1001 en el 2021, tiene problemas de esquizofrenia y episodios de ansiedad determinados y diagnosticado por la EPS, ella no pertenece como tal al aula de apoyo, pero sus antecedentes y resultados académicos muestran que posee dificultades de aprendizaje, ha perdido 2 años, grado 8 y 9. En el periodo aprende en casa no se conectaba a clases, su participación en clase es mínima, es tímida y en muchas ocasiones no comprende las instrucciones que se dan en clase. Sin embargo, muestra interés y a pesar de que en ocasiones le cuesta comprender los temas vistos en clase, se esfuerza por realizar sus tareas y cumplir con sus deberes académicos.

4.2.8 Caso de Samy:

Ella tenía 17 años, y se encontraba en el curso 1002 en el 2021, tiene una discapacidad física denominada hiperlaxitud ligamentosa, que afecta la movilidad articular como agarres, presiones finas generando fatiga muscular en sus miembros superiores. No puede permanecer escribiendo durante intervalos de tiempo muy largos, pues puede producir dolor en sus manos, y tampoco puede durar muchos intervalos de tiempo de pie, o sentarse de manera incorrecta ya que esto puede generarle dolor. No presenta discapacidad cognitiva, pero se hace necesario hacer ajustes razonables por su discapacidad física.

4.3 Análisis de la actividad 0 Explorando.

Las actividades del primer mundo “explorando,” (E) se desarrollaron en dos momentos la primera parte fueron tres retos, que se realizaron de manera virtual en la modalidad aprende en casa, en grupos de trabajo de tres estudiantes, cuyo canal de comunicación e interacción fue por WhatsApp, debido a que estábamos en cuarentena estricta (2021-I-). Los otros cuatro retos los desarrollaron en modalidad presencial de manera alternada (cada 15 días), debido a la implementación de la Reapertura Gradual, Progresiva y Segura (RGPS).

El objetivo de este primer mundo es identificar qué conocimientos tienen los estudiantes de ciclo V sobre la solución de problemas en matemáticas y las estrategias que emplean para su solución. Cada reto propone alcanzar un resultado de aprendizaje, que permite evaluar y evidenciar el trabajo desarrollado por el estudiante a la hora de solucionar problemas, unas preguntas que le permiten explorar, desarrollar y llegar a la solución de cada reto y obtener los puntos indicados.

Para analizar los resultados, se elaboró una rúbrica de evaluación que permite determinar qué etapas emplean los estudiantes en la solución de problemas matemáticos, acompañados de unos indicadores de desempeño donde 0 indica que no fue desarrollado por el estudiante y 1 que fue desarrollada la etapa por el estudiante en la solución del reto.

Tabla 1.

Rúbrica de evaluación de las etapas seguidas en la solución de problemas con base al modelo IDEAL.

Etapas de la solución de problemas		Indicador	Descriptores del indicador
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (MODELO IDEAL)	**I**	**1**	Identifica la información suministrada en el problema.
		0	No identifica la información suministrada en el problema.
	D	**1**	Define las metas que debe alcanzar.
		0	No define las metas que debe alcanzar.
	E	**1**	Explora una o varias soluciones alternativas al problema.
		0	No explora una o varias soluciones alternativas al problema
	A	**1**	Alcanza una solución del problema y lo resuelve de acuerdo con la estrategia elegida.
		0	No alcanza una solución del problema y no lo resuelve de acuerdo con la estrategia elegida.
	L	**1**	Logra la solución del problema y comprueba los resultados obtenidos.
		0	No logra la solución del problema y no comprueba los resultados obtenidos.

Fuente: Elaboración propia adaptada por la autora de la investigación desarrollada por Zayyadi, et al. (2019).

Para el proceso de justificación y validación de la solución de cada reto, por parte de los estudiantes se realiza un análisis del discurso propuesto por Sfard (2012), que se adapta de acuerdo con el trabajo desarrollado por los estudiantes en clase, estos elementos para analizar son Uso del Lenguaje Matemático (UL), Recursos de Apoyo (RA), Justificación Matemática (JM), y Soluciones Creativas (SC). En cada uno de ellos se establecieron tres criterios de evaluación para determinar en qué grado usan los estudiantes estos elementos donde 1, para indicar si utiliza correctamente el elemento del discurso en la solución del problema, 2 si se evidencia algunos elementos del discurso en la solución del problema y 3 donde no se evidencia ningún elemento que se está evaluando en la solución del reto.

Tabla 2.

Rúbrica de evaluación del discurso matemático desarrollado por los estudiantes en la justificación de la solución dada en el problema.

	Elemento	Indicador	Descriptores del indicador
ELEMENTOS EMPLEADOS EN EL DISCURSO MATEMÁTICO	**Uso del lenguaje matemático (UL)**	**3**	Utiliza el lenguaje matemático para justificar o refutar la interpretación dada en la solución del problema
		2	Emplea algunos elementos del lenguaje matemático que justifican o refutan la interpretación dada en la solución del problema
		1	No se evidencia el uso del lenguaje matemático que justifique o refute la interpretación dada en la solución del problema.
	Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utiliza correctamente objetos como calculadoras, gráficos, imágenes, diagramas, en la interpretación y solución del problema matemático.
		2	Emplea algunos objetos como calculadoras, gráficos, imágenes, diagramas en la interpretación, pero no logra la solución del problema matemático.
		1	No se evidencia el uso de objetos como calculadoras, gráficos, imágenes, diagramas en la interpretación y solución del problema matemático.
	Justificación matemática (JM)	**3**	Describe y utiliza correctamente elementos matemáticos como axiomas, definiciones y teoremas logrando solucionar el problema.
		2	Emplea algunos elementos matemáticos como axiomas, definiciones y teoremas, pero no logra solucionar el problema.
		1	No se evidencia el uso correcto de elementos matemáticos como axiomas, definiciones, y teoremas a la hora de solucionar el problema.
	Soluciones creativas (SC)	**3**	Realiza procedimientos para abordar el problema y los usa para predecir o estimar la solución.
		2	Emplea algunos procedimientos para abordar el problema, pero no logra predecir o estimar la solución.
		1	No se evidencia el desarrollo de procedimientos para abordar el problema y no logra predecir o estimar la solución.

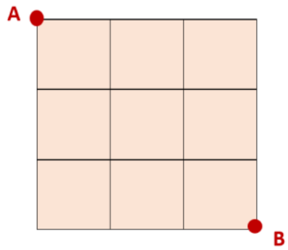
Fuente: Elaboración propia adaptada por la autora de la investigación desarrollada por Zayyadi, et al. (2019).

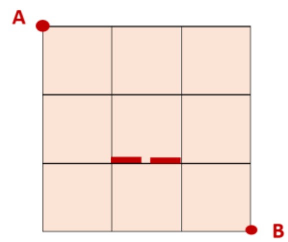
Estos indicadores se tuvieron en cuenta en el desarrollo de las clases, y en la revisión de las actividades, observaciones de los videos y grabaciones de audio, con el fin de establecer cómo es el proceso de solución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes que presentan DC.

4.3.1 Análisis de las soluciones presentadas por los estudiantes en Explorando.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes en cada reto, donde se analiza cuáles etapas emplearon al momento de solucionar los retos y que elementos del discurso matemático utilizan al justificar o validar sus respuestas obtenidas en cada reto.

Reto 1: Se tiene una cuadrícula de 3x3 como se muestra en la figura, y se ubican dos puntos cada uno en una esquina opuesta. Para desplazarse desde el punto A al punto B solo es posible hacerlo por los bordes de la cuadrícula o por el retículo moviéndose hacia la derecha y hacia abajo.





a. Encuentra un camino para llegar del punto A al punto B, sin pasar dos veces por la misma línea. b. Puedes encontrar otro camino para llegar de A a B, diferente al primero que encontraste? c. ¿Cuántos caminos diferentes hay para ir de A hasta B sin pasar dos veces por la misma línea? d. Si se rompe uno de los segmentos y no es posible pasar por ahí, ¿cuántos caminos habría ahora para llegar de A hasta B?

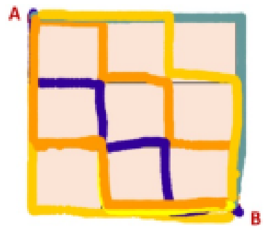
Resultado de aprendizaje ER1: Haciendo uso de las técnicas de conteo encuentra el número de caminos que se pueden recorrer de un extremo a otro en una cuadrícula de 3x3.

Tabla 3. *Resultados de la actividad exploratoria ER1 por Emma.*

<table>
<tr><th>Evidencia</th><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Docente: ¿Cómo vas?
Emma: - “Voy, estoy dibujando y contando, los caminos. He hecho 18.
Docente: ¿Hay más?
Ema: -Encontré 20 caminos en total, no hay más”</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación: Ema comprende el problema y opta por solucionarlo dibujando cada uno de los caminos que se pueden hacer sobre el cuadro, pero no logra encontrar el total de caminos usando su estrategia.</td></tr>
<tr><th colspan="7">Elementos del discurso matemático</th></tr>
<tr><th>Elementos</th><th>Indicador obtenido</th><th colspan="5">Observaciones</th></tr>
<tr><td>Uso del lenguaje matemático (UL)</td><td>1</td><td colspan="5">Realizó la actividad con base a la orientación dada pero no usa un lenguaje matemático que argumente su desarrollo.</td></tr>
<tr><td>Recursos de apoyo (RA)</td><td>1</td><td colspan="5">Emplea correctamente el gráfico y realiza los trazos correctamente para encontrar la solución del problema.</td></tr>
<tr><td>Justificación matemática (JM)</td><td>2</td><td colspan="5">No identifica técnicas de conteo a la hora de solucionar el problema.</td></tr>
<tr><td>Soluciones creativas (SC)</td><td>2</td><td colspan="5">Usa correctamente las rutinas iniciales para abordar el problema, pero no llega a la solución</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

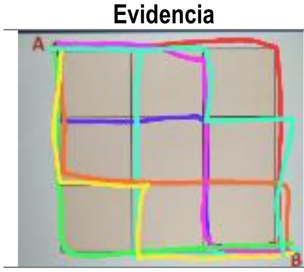
Tabla 4. *Resultados de la actividad exploratoria ER1 por Pablo.*

Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	D	E	A	L
	***Docente:*** *¿Cómo vas?* ***Pablo:*** *"A mí me dan 6 líneas…* ***Docente:*** *¿Encontraste más caminos?* ***Pablo:*** *Entonces, en resumen, la cantidad de líneas que hay es la cantidad de caminos que se pueden recorrer. En este caso son 23"*	1	1	1	1	0
		Observación: Pablo realiza todos los caminos gráficamente para buscar la solución del problema, pero no logra encontrar el total de caminos usando su estrategia.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**1**	Realizó la actividad con base a la orientación dada pero no usa un lenguaje matemático que argumente su desarrollo.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Emplea correctamente el gráfico y realiza los trazos correctamente para encontrar la solución del problema.
Justificación matemática (JM)	**2**	No identifica técnicas de conteo a la hora de solucionar el problema.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Usa correctamente las rutinas iniciales para abordar el problema, pero no llega a la solución correcta.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. *Resultados de la actividad exploratoria ER1 por Luis.*

Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	D	E	A	L
	***Docente:*** *¿Cómo vas?* ***Luis:*** *"Profe… son 8 caminos.* *En la segunda pregunta dan en total 15."*	1	1	1	1	0
		Observación: Luis realiza el trazo de todos los caminos para buscar la solución del problema, pero no logra encontrar el total de caminos usando su estrategia propuesta, se equivoca al contar y no visualiza todos los caminos posibles.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**1**	Traza los caminos para hallar la solución del problema, pero no lo justifica usando el lenguaje matemático.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Utiliza el gráfico para solucionar el problema, pero no encuentra todos los caminos.
Justificación matemática (JM)	**1**	No emplea las técnicas de conteo para hallar el número total de caminos en el problema.
Soluciones creativas (SC)	**1**	Usa las rutinas iniciales para dar una solución del problema, pero no es correcta.

Fuente: Elaboración propia.

Este reto se realizó durante el periodo aprende en casa, al observar las soluciones de los seis estudiantes, ellos no presentan dificultad a la hora de solucionar las dos primeras preguntas, y les sirve de rutina para comprender el problema, desarrollarlo por partes, comprender el objetivo; su estrategia su solución es contando uno a uno los caminos que se pueden trazar para llegar del extremo A al B. No todos logran solucionar el problema completamente, ya que no logran visualizar todos los caminos posibles que se piden en los numerales c y d de este reto.

Frente a las etapas del modelo IDEAL, ellos desarrollaron sin dificultad las cuatro primeras etapas, porque encuentran una estrategia para solucionar el problema, pero no logran desarrollar la última etapa, que es encontrar la solución correcta del problema y comprobar los resultados obtenidos.

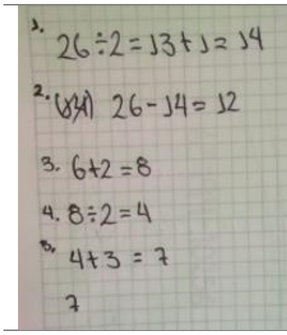
Frente al uso del lenguaje matemático (LM) ellos no identificaron una técnica de conteo y no la aplicaron en la solución. Frente a los recursos de apoyo (RA) todos usan la cuadrícula y líneas de colores, como herramientas para hallar el número total de caminos, a pesar de que no todos logran resolverlo correctamente en su totalidad. En la justificación matemática (JM), ellos cuentan uno a uno los caminos, se aproximan al número total haciendo los trazos posibles, pero ninguno logra relacionar una expresión matemática o una técnica de conteo para solucionar el reto. Por último, en la solución creativa (SC), dos de ellos usan el trazo de caminos uno a uno para hallar la solución del problema, y visualizan caminos que los otros no percibieron, pero al final solo una estudiante Any, logra obtener el número total de caminos de manera correcta realizando una resta entre el total de trazos y restando los caminos que hay por el sendero que está roto.

Reto 2: Cada uno de ustedes tiene una cierta cantidad de objetos, se saca la mitad más uno, de lo que queda se saca la mitad más dos y de lo que queda se saca la mitad más tres y sobra uno.

a. ¿Cuántos objetos había en el último paso?, b. ¿Cuál es la cantidad inicial de objetos que tiene cada uno?, c. ¿Si la cantidad inicial de objetos se duplica, al final cuántos objetos le sobrarían a cada uno? ¿Es la misma cantidad?, d. ¿Existe otra cantidad que pueda distribuirse de la misma forma? ¿Cuál es?

Resultado de aprendizaje ER2: Plantea y soluciona ecuaciones de primer grado para encontrar el número de objetos que hay en cada reparto de acuerdo con la información suministrada en el problema.

Tabla 6. *Resultados de la actividad exploratoria ER2 por Lia.*

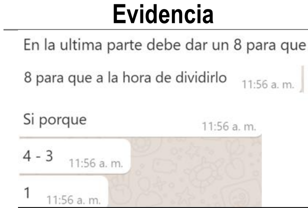
Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	D	E	A	L
	***Docente:*** *¿Encontraron los números?* ***Lia:*** *"Profe, mira intente con el 26 y me dio este resultado."* *Los números son 26, 12 y 7.* ***Docente***: *Están seguros, verifiquen, no quedan 12 quedan 13 y este no tiene mitad, deben revisar* ***Lia:*** *Mmm, no sé más…*	1	1	0	0	0
		Observación: Lia no busca una estrategia que le permita solucionar el problema, realiza un único intento con 26 y siguió el proceso, al validar su respuesta e indicarle que no es correcta no busca otras estrategias para resolver el problema, y no continúa desarrollando el reto.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	1	Usa diferentes números, que cumplan las condiciones del problema, pero no utiliza el lenguaje algebraico.
Recursos de apoyo (RA)	2	Realiza operaciones con un número par, por ensayo y error, pero no usa algún tipo de representación en la solución obtenida.
Justificación matemática (JM)	1	Usa números y comprueba por ensayo y error si son correctos y cumplen las condiciones que se buscan en el reto.
Soluciones creativas (SC)	2	La estrategia de ensayo y error es la que usa para realizar las operaciones indicadas, sin embargo, no soluciona correctamente el reto.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. *Resultados de la actividad exploratoria ER2 por Pablo.*

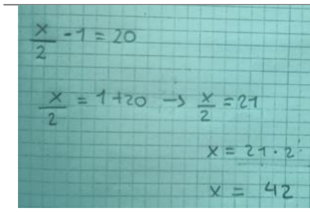
Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	D	E	A	L
	***Docente:*** *¿Cómo vas?* ***Pablo:*** *"Esto está difícil, intente con varios números y nada. Lo único que me da una pista es que en la última ecuación es de 8 para que a la hora de dividirlo….* *Si porque 4-3 es 1."*	1	1	0	0	0
		Observación: Pablo aborda el problema de atrás hacia adelante y establece una conjetura 8 es el único número que cumple la última parte de la solución del problema, pero no logra solucionar completamente el problema.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	1	Usa ensayo y error, pero no hace uso del lenguaje algebraico para resolver el problema.
Recursos de apoyo (RA)	2	Identifica como estrategia empezar por la inversa el problema y obtiene el tercer número únicamente.
Justificación matemática (JM)	2	Identifica que son ecuaciones, pero no las plantea para solucionar completamente el problema.
Soluciones creativas (SC)	2	Por ensayo y error y empezando a la inversa el problema halla el último número.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. *Resultados de la actividad exploratoria ER2 por Samy.*

<table>
<tr><th>Evidencia</th><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">Samy: Todos los números deben ser pares, el primer número es 42 y el segundo es 20 el tercero es 8 que es el que encontramos de primeras, porque leímos y es más fácil resolverlo de atrás hacia adelante...”</td><th>I</th><th>D</th><th>E</th><th>A</th><th>L</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación: Su estrategia para solucionar el problema es resolverlo de atrás hacia adelante, esto le permite plantear las ecuaciones para encontrar los tres números solicitados en el problema.</td></tr>
<tr><th colspan="7">Elementos del discurso matemático</th></tr>
<tr><th>Elementos</th><th>Indicador obtenido</th><th colspan="5">Observaciones</th></tr>
<tr><td>Uso del lenguaje matemático (UL)</td><td>3</td><td colspan="5">Plantea y soluciona ecuaciones lineales se evidencia uso del lenguaje matemático en la solución del reto.</td></tr>
<tr><td>Recursos de apoyo (RA)</td><td>3</td><td colspan="5">Plantea ecuaciones que le permiten encontrar la solución de los dos primeros números, el tercero lo encontró por ensayo y error.</td></tr>
<tr><td>Justificación matemática (JM)</td><td>3</td><td colspan="5">Hace uso correcto de las propiedades de las ecuaciones lineales para encontrar los números pedidos en el problema.</td></tr>
<tr><td>Soluciones creativas (SC)</td><td>2</td><td colspan="5">Se soluciona con ecuaciones lineales de primer grado, y las resuelve de manera correcta para estimar las Soluciones del reto, y comprueba la solución.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

En este reto los estudiantes emplearon más tiempo en su desarrollo y en buscar una estrategia para solucionarlo, usaron como estrategia ensayo y error. Frente a las etapas de solución del problema ellos, logran identificar la información, definir la meta que es hallar el número de objetos de cada reparto, comenzando con números pares mayores a 10 y haciendo las operaciones correspondientes hasta obtener 1 al final. Algunos estudiantes como Pablo, Brayan y Samy abordan el problema a la inversa empezando con la parte final del problema hacia atrás obteniendo 8 en el tercer reparto, pero Samy logra hacer uso del lenguaje algebraico para obtener la solución correcta de cada reparto.

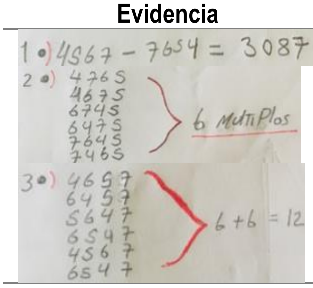
Al hacer el análisis del discurso que emplearon en la justificación de la solución del reto, en el uso del lenguaje matemático todos los estudiantes tienen dificultad en expresar los tres repartos de manera algebraica, y buscan números pares que cumplan con los repartos que se dan en el enunciado. Como recurso de apoyo vemos que usan la división entre dos y solo un estudiante hace un planteamiento de una ecuación para solucionar el reto, los otros no hacen uso de ningún tipo de gráfico o representación que les ayude en su solución.

Frente a la justificación matemática, ellos relacionan los conceptos algebraicos para argumentar la solución del problema; ensayan con un número, realizan las operaciones aritméticas dadas en el enunciado, si no da uno al final intentan con otro y así sucesivamente; en torno a las soluciones creativas ellos siempre usan números pares y empiezan hacer las operaciones para obtener los valores de los repartos, sin embargo algunos hacen los dos primeros repartos y al hallar el tercero se dan cuenta que esos números con cumplen con las condiciones dadas.

Reto 3: Tienen cuatro números 4,5,6 y 7, con los cuales es posible formar diferentes cifras como 6475. a. ¿Cuál es la diferencia entre el número más grande y el número más pequeño que se pueden escribir con estas cifras?, b. ¿Cuántos números pueden escribirse con estas cifras que sean múltiplos de 5? ¿Cuáles son?, c. ¿Cuántos números impares pueden formar? ¿Cuáles son?

Resultado de aprendizaje ER3: Realiza combinaciones de números, operaciones entre ellos y aplica los conceptos múltiplos, divisores y criterios de divisibilidad en la solución de problemas.

Tabla 9. *Resultados de la actividad exploratoria ER3 por Emma.*

Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	**D**	**E**	**A**	**L**
	***Emma:*** *"El número mayor es 7654 y el menor es 4567, por lo tanto, la resta es 3087"* *Los múltiplos de 5 son 6 porque todos deben terminar en 5.*	1	1	1	1	1
		Observación: No presentó dificultades en la interpretación y solución del problema, desarrolló las operaciones correctamente.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Aplica los criterios de múltiplos de un número, y números pares e impares para solucionar el problema.
Recursos de apoyo (RA)	2	Realiza todas las combinaciones con las cifras y las escribe para dar solución al problema. Sin embargo, invierte el minuendo y sustraendo en la diferencia.
Justificación matemática (JM)	3	Reconoce los múltiplos de 5 y cuáles son los números impares, y realiza todas las combinaciones de las cifras para encontrar los valores solicitados.
Soluciones creativas (SC)	2	Soluciona el problema completamente y de manera correcta.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. *Resultados de la actividad exploratoria ER3 por Pablo.*

Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	**D**	**E**	**A**	**L**
Es 3,087 Ya que el número mas grande (7,654) restado al mas menor (4,567) da eso 9:53 a. m. Son 4765 4675 6475 6745 7645 7465 Son 6 las cifras con ese múltiplo 10:04 a. m.	***Pablo:*** *"El número menor es 3087 y el menor es 4567, el mayor es 7654. Hay 6 múltiplos de 5 y 12 números impares son los que terminan en 5 y en 7"*	1	1	1	1	1
		Observación: No presentó dificultades en la interpretación y solución del problema, desarrolló las operaciones correctamente, combinó los números adecuadamente para obtener las Soluciones correctamente del problema.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Maneja y aplica correctamente los conceptos de múltiplos, números pares e impares y los usa en la solución del problema.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Realiza la construcción de todos los números conservando los conceptos de múltiplos de 5 y números impares.
Justificación matemática (JM)	**3**	Justifica correctamente la solución dada, de acuerdo con las definiciones y propiedades de los números.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Una vez realizada todas las combinaciones cuenta los resultados obtenidos para dar la respuesta del problema.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11. *Resultados de la actividad exploratoria ER3 por Luis.*

Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	**D**	**E**	**A**	**L**
7654 -4567=3087 4675 - 6475 - 7465 6745 - 7645 - 4765 4657 - 6457 - 5467 6547 -5647-4567	***Luis:*** *"Esos son todos los números, los hice cambiando el lugar de las cifras hasta que ya no se podía más."*	1	1	1	1	1
		Observación: Desarrollo las combinaciones de manera correcta y soluciono el reto. No justifico cómo abordar y desarrollar el problema, pero aplico todas las etapas durante el proceso.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Solicita aclaración sobre qué es la diferencia entre números, y reconoce los criterios de múltiplos de 5 y números impares.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Aplica los criterios de múltiplos y números impares, y realiza todas las combinaciones de ellos, hasta encontrarlos todos.
Justificación matemática (JM)	**2**	Desarrolla completamente el problema encontrando la solución, pero no reconoce todos los criterios de multiplicidad en los números.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Realiza la combinación de las 4 cifras dadas, halla primero los múltiplos de 5 y luego opta por construir todos los que terminan en 7 ya que 5 y 7 son impares.

Fuente: Elaboración propia.

Este reto fue tal vez el más fácil para solucionar, en general los estudiantes solucionan correctamente el problema, todos realizan las combinaciones de las cuatro cifras para determinar las cantidades pares e impares, y aplican las etapas de solución del problema del modelo IDEAL. Con relación al análisis del discurso, en el uso de la palabra, todos conocen la diferencia como la resta entre números, identifican cuales son los múltiplos de 5 y cuáles son los números pares e impares. En torno a los recursos de apoyo, realizan todas las combinaciones de las cifras para encontrar los números solicitados ya teniendo los terminados en 5, se centran en combinar las cifras ubicando al 7 en la posición de las unidades para escribir los valores que corresponden.

Al justificar sus soluciones, observamos que los estudiantes tienen claro el valor posicional de los números, reconocen relaciones de orden entre números, identifican números pares e impares.Frente a soluciones creativas, todos deciden escribir las cifras, combinar los números y al final contarlos, esto ayuda a que ellos visualicen y determinen el número de cifras que se pueden formar con los cuatro dígitos.

Reto 4: Realicen la construcción con base a las instrucciones dadas y después respondan las preguntas:

1. Dibuja un triángulo rectángulo cuya base sea de 5 cm y la altura sea el doble de la base. 2. Encuentra el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.

3. Haciendo centro en cada uno de ellos, dibuja un círculo cuyo diámetro sea la medida de cada lado del triángulo. 4. Con base a la figura obtenida, responde las siguientes preguntas, puedes redondear las cifras a un decimal. a. ¿Cuál es el área del triángulo ABC obtenido en el numeral 1?, b. ¿Cuál es el área de cada uno de los círculos verdes d, e, f?

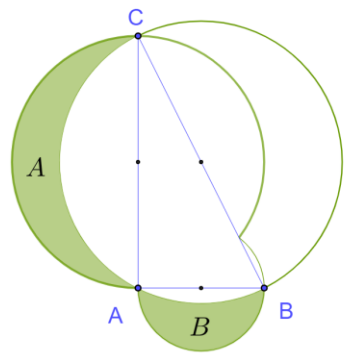
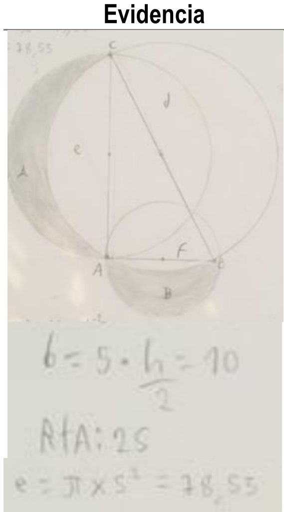


Figura 12. *Lúnulas obtenidas en la figura.*

c. ¿Cuál es el área total de las regiones A y B, correspondientes a las lúnulas de color verde obtenidas en la figura?

Resultado de aprendizaje ER4: Elabora construcciones con regla y compás de figuras planas y aplicando el concepto de área, encuentra el área de las lúnulas formadas en la figura dada.

Tabla 12. *Resultados de la actividad exploratoria ER4 por Brayan.*

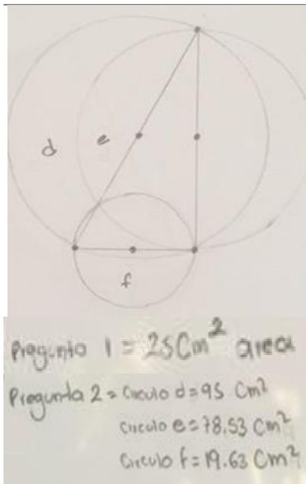
Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	**D**	**E**	**A**	**L**
	***Brayan:*** *¿Profe cómo se halla el área del círculo?* ***Profesora:*** *es* πr^2*…* ***Brayan:*** *Mira ya encontré las áreas del círculo. Pero no sé cómo son las unidades.*	1	1	1	0	0
		Observación: *No logra finalizar completamente el problema solo logra encontrar las áreas del triángulo y de los tres círculos con las medidas dadas.* *No identifica las unidades del área, usa las mismas de las unidades de longitud.*				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Identifica el área de las figuras, comprende que es una lúnula, pero no logra visualizar cómo encontrar su área.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Realiza la construcción de las figuras, con regla y compás, identifica las regiones de las lúnulas y las colorea, pero no logra visualizar como puede hallar el área de cada una.
Justificación matemática (JM)	**2**	Reconoce y encuentra las áreas de las figuras construidas, pero no sus unidades.

Soluciones creativas (SC)	**1**	No sabe cómo encontrar las áreas de las lúnulas, asegura que es el área de los medios círculos sin completar la solución del reto correctamente.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 13. *Resultados de la actividad exploratoria ER4 por Molly.*

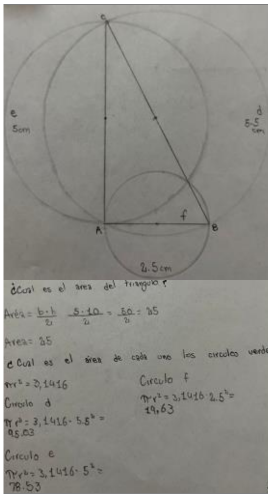
<table>
<tr><th>Evidencia</th><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">Molly: ¿Profe el punto medio es la mitad de cada lado del triángulo cierto? y ¿el área del círculo es πr^2?
Profesora: Sí Molly así es.</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación:
No presenta dificultad en la construcción de la figura, reconoce los elementos geométricos y realiza los gráficos y halla el área de las figuras correctamente.
Al momento de encontrar el área de las lúnulas, propone como alternativa sacar la mitad de la mitad de cada círculo para encontrarlas.</td></tr>
</table>

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Reconoce los elementos geométricos, halla el área de cada figura, las calcula sin dificultad, con sus respectivas unidades, pero establece una expresión para hallar las regiones de las lúnulas.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Realiza la construcción, identifica las lúnulas, pero plantea una forma en la intersección para hallar el área entre las regiones.
Justificación matemática (JM)	**1**	Calcula las áreas que tiene cada figura, pero con sus respectivas unidades, propone que el área de lúnula es la mitad de la mitad del círculo e y del f.
Soluciones creativas (SC)	**1**	No hay Soluciones creativas, solo hay una propuesta de cómo encontrar las áreas de las lúnulas, pero no la ejecuta.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 64. *Resultados de la actividad exploratoria ER4 por Samy.*

<table>
<tr><th>Evidencia</th><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Sammy: Profe con base a lo que nos dio,</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

	*hallamos el área de cada figura, pero no sabemos cómo encontrar el área de las lúnulas, parecen medios círculos, pero se ve más grande el de abajo, no parece la mitad.*	***Observación:*** Realiza correctamente la construcción del problema siguiendo paso a paso su desarrollo, también encuentra las áreas de las figuras obtenidas en la gráfica, pero no logra comprender cómo se puede hallar el área de las lúnulas de las regiones A y B.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Reconoce los conceptos de áreas y perímetros de figuras planas e identifica las expresiones algebraicas para calcularlas, pero no identifica como encontrar las de las lúnulas generadas entre las regiones interceptadas.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realiza la construcción de las figuras con base a las indicaciones dadas, y reconoce los elementos de cada figura, pero no reconoce las lúnulas que hay en la figura.
Justificación matemática (JM)	**1**	No sabe cómo relacionar las nociones de las áreas de las figuras para obtener el área comprendida de las lúnulas A y B. No utiliza las unidades adecuadas de las áreas.
Soluciones creativas (SC)	**1**	No propone soluciones creativas para solucionar el reto completamente.

Fuente: Elaboración propia.

Este reto se desarrolló de manera presencial en el colegio una vez se implementó el sistema RGPS (Reapertura Gradual y Progresiva). Al desarrollarlo, los estudiantes tardaron más tiempo, para tratar de solucionar el reto, ellos dividen el problema en dos partes, la primera es realizar la construcción de la figura, donde se evidencia dificultad a la hora de realizar las circunferencias con el compás, pero todos realizaron la construcción completamente. La segunda fue contestar las preguntas, algunos no recordaban cómo hallar el área de las figuras planas, lo que llevó a dar una ayuda a todos retomando una explicación del concepto de área y brindando las expresiones para calcular el área del círculo y del triángulo.

Frente a la resolución de problemas matemáticos, ellos desarrollan en su mayoría las dos primeras etapas, que son identificar la información suministrada en el problema, e identifican las metas que se deben alcanzar, encuentran el área de las figuras básicas, pero no logran encontrar la solución completa debido a que varios de ellos no reconocen que es una lúnula y como se puede encontrar su área.

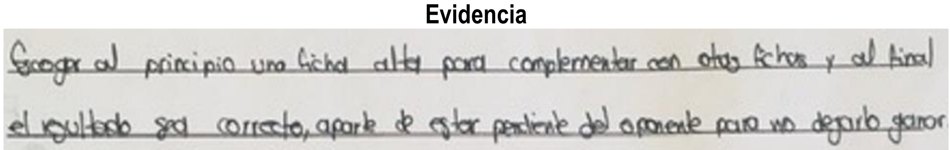
Entorno al uso del lenguaje matemático, ellos reconocen los objetos geométricos como triángulo, círculos, radio, puntos medios de los lados, para luego con los instrumentos y recursos necesarios realizar la construcción con sus elementos y hallar las áreas de las figuras geométricas básicas, sin embargo, no reconocen que es una lúnula, las regiones que las conforman y cómo pueden encontrar su área.

En la justificación matemática, se evidencia que ellos no manejan el uso de unidades de superficie, y falta comprensión del concepto de sector circular, y diferencias entre áreas de figuras. No se evidencian soluciones creativas para encontrar el área de las regiones sombreadas.

Reto 5: (10 puntos). En las fichas dadas se encuentran los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Por turnos, cada uno de los jugadores elige un número de la lista, y se queda con él (el número se retira de la lista de disponibles). El primero que consiga sumar 15 usando tres de los números que eligió, será el ganador del juego. a. ¿Quién ganó la primera partida? ¿Quién ganó la segunda partida?, b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego?

Resultado de aprendizaje ER5: Desarrolla cálculos mentales y emplea estrategias ganadoras para obtener 15 en la suma de tres números naturales.

Tabla 15. *Resultados de la actividad exploratoria ER5 por Emma.*

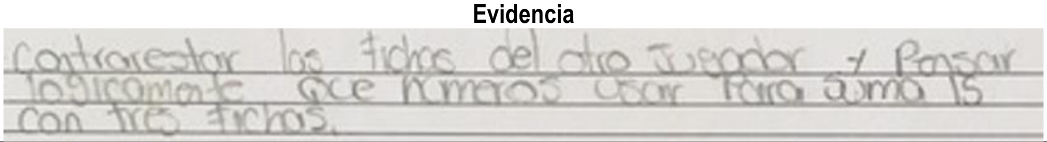
<table>
<tr><th colspan="6">Evidencia</th></tr>
<tr><td colspan="6">
Escoger al principio una ficha alta para complementar con otras fichas y al final el resultado sea correcto, aparte de estar pendiente del oponente para no dejarlo ganar</td></tr>
<tr><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Emma: "Para ganar debes escoger de primeras la ficha de mayo valor que en este caso es 9, para completar luego con las fichas que vayan quedando que el resultado sea correcto. Aparte se debe estar pendiente del oponente para no dejarlo ganar."</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación:
Emma logra establecer cuál es el objetivo del reto, y juega varias veces con sus compañeros, pero no logra visualizar una estrategia que le permita ganar siempre la partida con su oponente.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Elementos del discurso matemático</th></tr>
</table>

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Logró comprender el objetivo del problema, pero no pudo obtener la suma de tres números que dieran 15.
Recursos de apoyo (RA)	**1**	No logra obtener 15 en la suma, pero observa los números que selecciona su oponente y ella los coge antes, para evitar que el otro gane y bloquearlo para obtener un empate.
Justificación matemática (JM)	**1**	No justifica correctamente una estrategia ganadora, solo decide contrarrestar a su oponente para evitar que gane
Soluciones creativas (SC)	**1**	No establece una rutina para aplicarla y ganar o solucionar el reto.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 16. *Resultados de la actividad exploratoria ER5 por Lia.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Para ganar hay que contrarrestar las fichas del otro jugador y cuando te toque ir buscando los números que siempre den 15 al sumarlos.	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
	Observación: Ella solo observa las fichas que su oponente va seleccionando, pero cuando su oponente selecciona la segunda ficha, ella busca quitarle la que él necesita para ganar. Su estrategia es bloquear al oponente.				

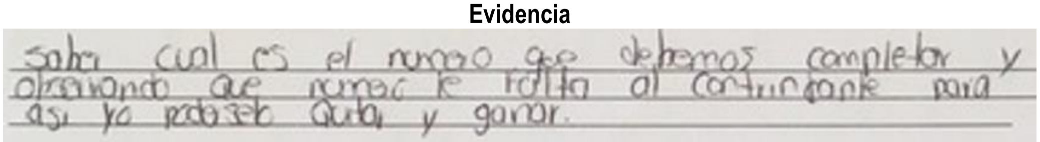
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**1**	Después de varios intentos logra ganar unas partidas a su compañera, pero cuando cogían la ficha 5 no ganaba la partida.
Recursos de apoyo (RA)	**1**	Logra obtener la suma de 15 cuando selecciona los tres números, usa los dedos de la mano para hacer las cuentas a medida que va seleccionando las fichas.
Justificación matemática (JM)	**1**	Logra establecer que seleccionar 5 de primeras le permitirá de forma más fácil obtener 10 al seleccionar las otras fichas restantes.
Soluciones creativas (SC)	**1**	Para contrarrestar a su oponente busca cómo bloquear su jugada sumando con los dedos y seleccionando la ficha que ella debe coger para evitar que gane la partida

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 17. *Resultados de la actividad exploratoria ER5 por Luis.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *¿Cómo vas Luis?, ¿cuál crees que es la estrategia ganadora?*	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
	Observación:				

Pablo: *Profesora este reto está muy difícil, pero yo siempre veo las fichas que coge mi compañera y no la dejo ganar a ella.*	Luis no identifica una estrategia, pero juega a bloquear a su compañera para evitar que ella gane, es decir juega a la defensiva.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	No tiene una estrategia ganadora, solo busca a partir del segundo número que seleccione su compañero quitarle la ficha para que ella no pueda ganar.
Recursos de apoyo (RA)	**1**	Solo se fija en los números que selecciona el compañero, para quitar el que necesita y bloquear su victoria
Justificación matemática (JM)	**1**	No reconoce propiedades de los números que le permitan establecer una estrategia ganadora.
Soluciones creativas (SC)	**1**	No tiene una solución creativa ni propone una estrategia para ganar la partida. Busca siempre quedar en empate.

Fuente: Elaboración propia.

Este reto fue difícil para ellos, ya que tenían dificultad para calcular mentalmente el resultado haciendo la suma de quince con tres números, hacían mal los cálculos pasándose de la suma u obteniendo un resultado menor. Al final sus conjeturas fueron diversas frente a cuál era la estrategia ganadora, pero solo Pablo logró establecer que tomando el 5 al iniciar la partida, tenían más posibilidades para ganar el juego a su oponente.

En torno a la resolución de problemas ellos desarrollan las dos primeras etapas que son comprender el problema y definir las metas a alcanzar, algunos establecen una solución, pero no todos identifican una estrategia ganadora y no logran establecer una conexión entre las metas a alcanzar y los resultados obtenidos, pues al final la mayoría de ellos busca es contrarrestar la jugada de su oponente y obtener el empate.

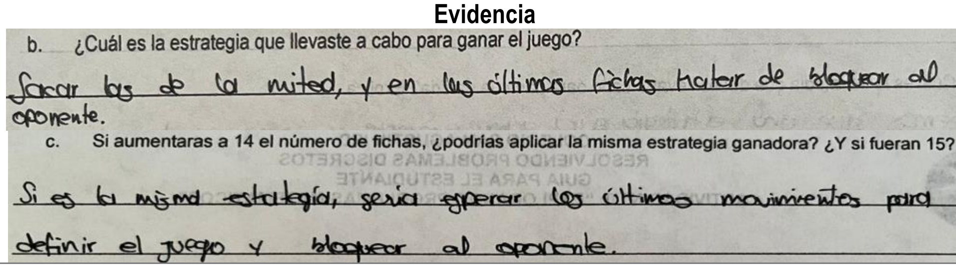
Frente a la justificación dada al momento de solucionar el problema, vemos que ellos usan un lenguaje muy básico a la hora de argumentar como jugaron o qué estrategia utilizaron para ganar el juego, no manejan un lenguaje matemático propio frente a qué características o propiedades deben tener la suma de los tres números, usan como recurso de apoyo sumar con los dedos de la mano, o usaban la calculadora para no equivocarse, por otro lado ellos buscaban neutralizar a su oponente seleccionando en el tercer movimiento el número que falta para que el otro complete 15. No hay una justificación matemática clara en la que identifiquen estrategias ganadoras que les permita ganar las partidas y no se evidencia soluciones creativas o estrategias que apliquen para ganar el juego.

Reto 6: Con tu compañero deben colocar en círculo las 12 monedas. Con tu compañero se deben turnar para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. El último que saque la/s última/s moneda/s es el ganador. a. ¿Quién ganó la primera partida? ¿Quién ganó la segunda partida? b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego? c. Si aumentaras a 14 el número de fichas, ¿podrías aplicar la misma estrategia ganadora? ¿Y si fueran 15?

Resultado de aprendizaje ER6: Identifica qué estrategias utilizan los estudiantes para solucionar problemas relacionados con juegos de estrategia y como los justifican a la hora de su ejecución.

Tabla 18. *Resultados de la actividad exploratoria ER6 por Emma.*

Evidencia


b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego?

Sacar las de la mitad, y en las últimas fichas tratar de bloquear al oponente.

c. Si aumentaras a 14 el número de fichas, ¿podrías aplicar la misma estrategia ganadora? ¿Y si fueran 15?

Si es la misma estrategia, sería esperar los últimos movimientos para definir el juego y bloquear al oponente.

Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *¿Ya identificaron la estrategia ganadora?* ***Emma:*** *Profe, la estrategia es iniciar sacando don fichas del centro y en los últimos movimientos hay que dejar las fichas separadas para ganarle al oponente, hay que dejar tres al final para que yo pueda ganar.* ***Profesora:*** *¿Y si se aumenta el número de fichas?* ***Emma:*** *La estrategia sigue siendo la misma, pero al final hay que separarlas bien para que el otro compañero no pueda ganar.*	**I** 1 · **D** 1 · **E** 1 · **A** 1 · **L** 1. **Observación:** Emma logra realizar conteo de los movimientos que realiza su compañera cuando toma las monedas del círculo y ella separa dejando monedas sueltas para que su compañera no gane.

I	D	E	A	L
1	1	1	1	1

Elementos del discurso matemático

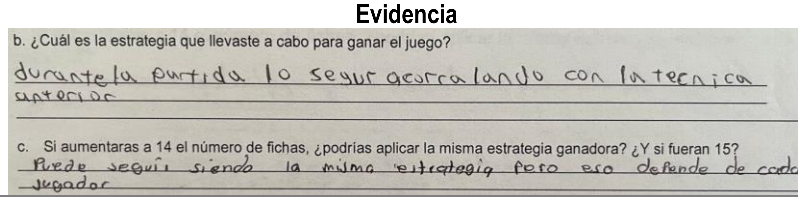
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	2	Identifica el objetivo del problema y usa estrategias de conteo para determinar cuáles monedas debe tomar para ganar.
Recursos de apoyo (RA)	3	Ella observa las fichas restantes en cada movimiento y va contando las que van sobrando para al final bloquear al oponente, con las fichas que quedan restantes.

Justificación matemática (JM)	**2**	No relaciona algún concepto o propiedad matemática en el desarrollo del juego.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Indica que al iniciar sacando las fichas centrales y contar las fichas que van quedando hay más opciones para ganar el juego, dejando 3 para el final.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 19. *Resultados de la actividad exploratoria ER6 por Pablo.*

Evidencia


b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego?
durante la partida lo segui acorralando con la tecnica anterior
c. Si aumentaras a 14 el número de fichas, ¿podrías aplicar la misma estrategia ganadora? ¿Y si fueran 15?
Puede segui siendo la misma estrategia pero eso depende de cada jugador

Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *¿Ya identificaron la estrategia ganadora?* ***Pablo:*** *Profe, el que inicia la partida es quien gana, en los dos primeros turnos hay que coger de a 2, luego en cada movimiento hay que dejar separadas las fichas de a una.* ***Profesora:*** *¿Y si se aumenta el número de fichas?* ***Pablo:*** *Sigue siendo la misma, dependiendo la estrategia que cada uno siga para ganar.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Pablo inicia perdiendo las primeras jugadas, identifica como estrategia ganadora coger dos fichas al inicio y después separar las fichas dejando una sola.				

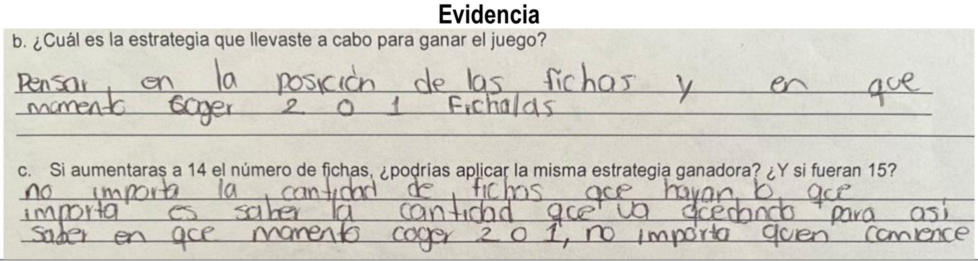
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	No utiliza un lenguaje matemático para plantear y resolver el problema, establece una estrategia para ganar el juego, pero no siempre lo logra.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Observa los movimientos de su oponente y plantea como estrategia que quien inicia la partida es quien gana.
Justificación matemática (JM)	**2**	No tiene una estrategia ganadora definida, no hay evidencia de algún concepto matemático que use para ganar el juego.
Soluciones creativas (SC)	**1**	No establece algún tipo de estrategia o solución creativa que pueda aplicar para ganar el juego a su oponente, solo busca bloquearlo.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 70. *Resultados de la actividad exploratoria ER6 por Luis.*

Evidencia


b. ¿Cuál es la estrategia que llevaste a cabo para ganar el juego?
Pensar en la posición de las fichas y en qce momento coger 2 o 1 Fichalas
c. Si aumentaras a 14 el número de fichas, ¿podrías aplicar la misma estrategia ganadora? ¿Y si fueran 15?
no importa la cantidad de fichas qce hayan lo qce importa es saber la cantidad qce va qcedando para así saber en qce momento coger 2 o 1, no importa qcien comience

Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *¿Ya identificaron la estrategia ganadora?* ***Luis:*** *La clave es contar y separar las fichas, es decir dejar de a una para que en la última ronda queden dos, o tres dependiendo los turnos que tenga para poder ganar al oponente.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Describe como estrategia que siempre van contando las fichas que quedan para que su oponente no gane el				

Profesora: *¿Y si se aumenta el número de fichas?* ***Luis:*** *No importa la cantidad de fichas, que hallan lo importante es ir contando las que van quedando para saber cuántas se deben coger si dos o una.*	juego, y bloquear su partida, pero no planea una estrategia que le permita ganar el juego.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Justifica que la base para ganar el juego es ir contando los movimientos finales para saber cuántas fichas deben quedar para ganar.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realiza conteo de las fichas sobrantes y busca separarlas para ganar
Justificación matemática (JM)	**2**	Propone que ir contando las que van quedando va a permitir ganar la partida.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Contar lo que va quedando y bloquear al oponente con las fichas restantes se convierte en la estrategia ganadora.

Fuente: Elaboración propia.

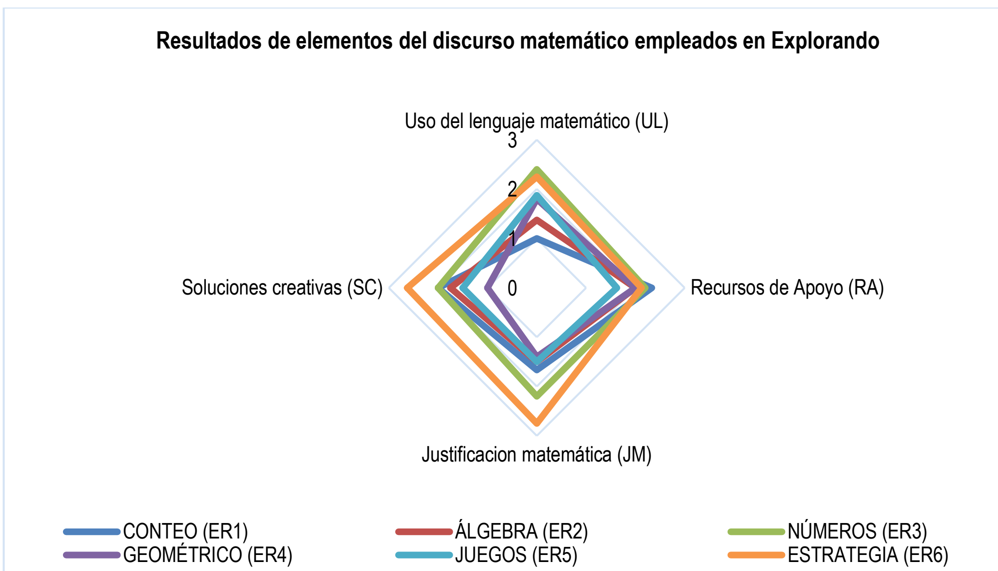
Este reto fue uno de los más agradables para ellos, identificaron como estrategia ganadora dejar espacios entre las monedas para dejar al final dos separadas y obtener en su turno la última ficha para ganar a su compañero. Los ocho estudiantes ganaron en más de una ocasión la partida, lo cual los motivó a seguir jugando, ellos usaron como recurso de apoyo ir contando el número de fichas que iban quedando, analizaron los movimientos de sus compañeros y a medida que iban avanzando trataban de neutralizar la posición de su oponente para ganar, y funcionó porque lograron obtener la victoria en varias partidas. Al analizar el desarrollo de este reto y cómo fue su proceso frente a las etapas de la resolución de problemas, ellos desarrollaron las cuatro primeras etapas del modelo Ideal, comprendiendo la estrategia que debían emplear, encuentran una o varias estrategias con sus compañeros que les permiten ganar el reto, alcanzan una solución y lo aplican con varias fichas en aras de validar si siempre esta estrategia funciona, incluso prueban varias veces la estrategia para ver si es la ganadora.

Frente a elementos que emplean al justificar sus estrategias vemos que, en este reto no hay un lenguaje propio de las matemáticas en las justificaciones o respuestas dadas por los estudiantes, sin embargo, ellos establecen dos elementos de manera repetida que son contar y separar las fichas. Los recursos de apoyo visualizan los movimientos de cada jugador en sus turnos y usan el conteo mental para que su oponente, que no tenga la oportunidad de tener dos fichas juntas, sino que estén separadas para poder ganar. Frente a la justificación matemática, ellos no usan un lenguaje propio de las matemáticas, conceptos o propiedades que les permitan justificar sus estrategias, ellos usan un lenguaje muy propio donde dan una solución al reto y lo aplican a la hora de jugarlo con sus compañeros.

4.3.2 Conclusiones generales del mundo exploratorio.

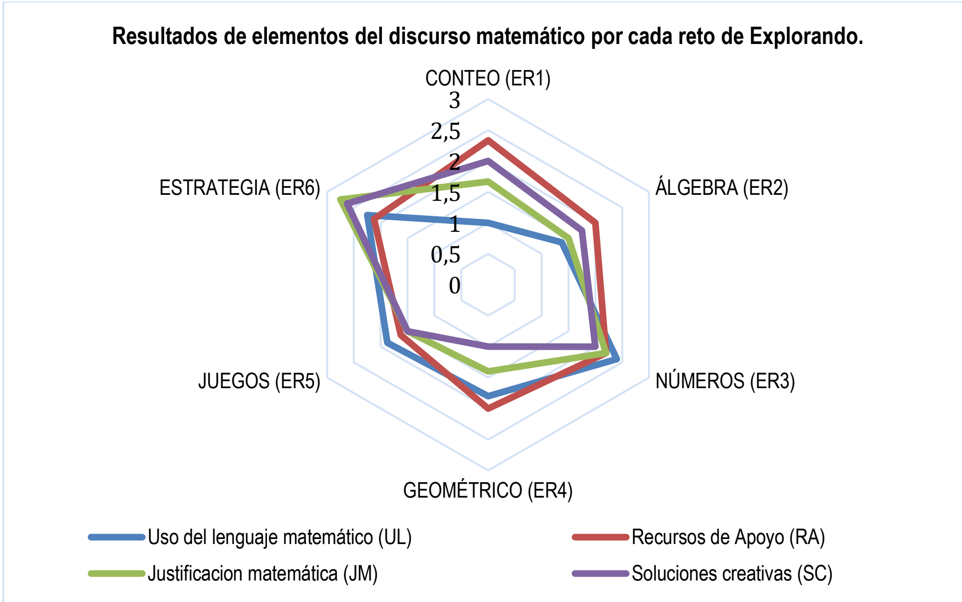
Con los resultados obtenidos por los estudiantes en el mundo explorando, se ha hecho un análisis de los elementos que emplean en el discurso matemático cuando justifican sus respuestas y por cada problema que desarrollaron en este mundo. A continuación, mostramos los resultados obtenidos en cada uno:

Gráfica 1. Resultados de elementos del discurso empleados por los estudiantes en el mundo explorando.



A nivel general se observa que el elemento del discurso más utilizado por los estudiantes con DC en la solución de retos matemáticos son los recursos de apoyo (RA), donde se evidencia el uso de elementos gráficos, números, signos matemáticos, calculadora e incluso sus dedos para llevar cuentas a la hora de solucionar los retos, y el menos empleado o que no usan con frecuencia es el uso de la palabra (UP), porque en algunos casos ellos no relacionan los conceptos matemáticos a la hora de solucionar el reto.

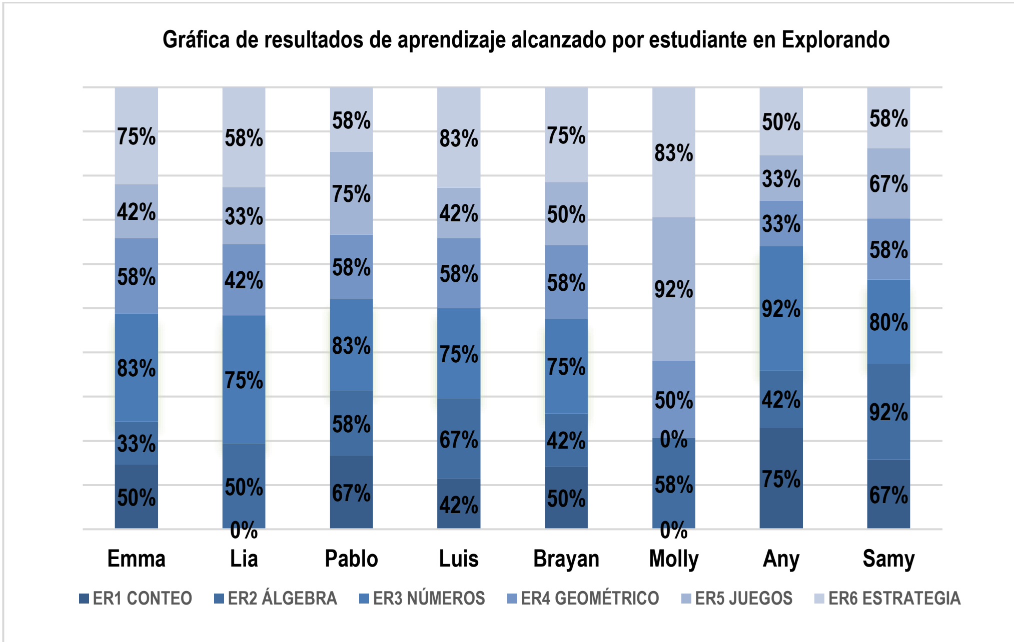
Gráfica 2. Resultados obtenidos en el mundo explorando por tipo de problemas.



Con relación a los retos que desarrollaron en este mundo, vemos que en el reto de estrategia (círculo de monedas), los estudiantes tuvieron un mejor desempeño en la solución y en el proceso de argumentación de sus soluciones, pues aplicaron conteo, estrategias de juego para ganar la partida, y sobre todo la dinámica del juego, permitió mejorar la concentración y la motivación de los estudiantes. Por otro lado, el reto que más generó dificultad para ellos fue el algebraico, se evidencia dificultad a la hora de plantear y solucionar ecuaciones o expresiones algebraicas para solucionar el problema, ellos usan cantidades concretas usando ensayo y error con números como estrategia para solucionar el reto, pero en la mayoría de los casos no obtienen las cantidades pedidas lo cual evidencia que no realizan una justificación matemática que sustenta los planteamientos y soluciones de los retos realizados.

Una estrategia metodológica que funcionó para que los estudiantes puedan abordar y solucionar problemas es dividirlos en tareas más pequeñas, como preguntas, realizar un trazo, encuentra una solución, hay otra etc.; esto ayuda para que ellos puedan comprenderlos, tengan la posibilidad de abordarlos, desarrollarlos y no se bloqueen en la primera lectura del problema, el uso de las preguntas ayuda a mejorar la comprensión y resolución de los retos.

Gráfica 3. *Resultados de aprendizaje alcanzado por estudiante en explorando.*



En torno a los resultados de aprendizaje propuestos en cada reto, vemos que los estudiantes tuvieron un mejor desempeño en el reto de los números (ER3), donde obtuvieron desempeños superiores al 75%, seguido del círculo de monedas (ER6), donde obtuvieron un desempeño mayor al 50%, en el reto algebraico (ER2), sus desempeños fueron bajos, obteniendo un nivel de desempeño inferior al 67%.

En varios retos (1,2,5 y 6) el recurso más utilizado por los estudiantes fue el conteo, usaban los dedos o contaban mentalmente los pasos para desarrollar las actividades propuestas, siendo este el recurso de apoyo más empleado por ellos a la hora de resolver retos matemáticos.

Como elementos para tener en cuenta en el desarrollo de los otros mundos, se hace necesario profundizar en la solución de problemas numéricos, geométricos, uso de expresiones algebraicas, solución de ecuaciones lineales, y técnicas de conteo, esto permitirá identificar qué tipo de habilidades pueden desarrollar los estudiantes y que herramientas usan con frecuencia para resolver retos matemáticos, con el fin de estudiar como es el proceso de justificación y argumentación a la hora de solucionar de problemas y brindar una participación más activa en el aula de clase.

4.4 Análisis del mundo retos numéricos (RN)

Para el desarrollo de este mundo, se utiliza como recurso la plataforma Classcraft, con el fin de crear un ambiente en el aula de clase, para aumentar la atención, el interés, la motivación de competencia, intrínseca, de control y extrínseca de los estudiantes; también para que ellos puedan tener un personaje, vean sus poderes, su nivel de progreso y obtener puntos adicionales con estrategias que emplean en la justificación y solución de los retos. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en cada una de las fases.

4.4.1 Resultados obtenidos en la fase de entrenamiento de retos numéricos.

Esta fase de entrenamiento se desarrolló durante 2 semanas, cada una con una intensidad de 3 horas de 45 minutos, el objetivo es describir e interpretar propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. En la fase de entrenamiento se abordaron los siguientes temas: conjuntos numéricos, criterios de divisibilidad, números primos y compuestos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y números cuadrados, se plantean en clase 5 retos para trabajar durante las explicaciones, con el fin de que los estudiantes pudieran recordar, experimentar, familiarizarse con la solución de los retos, y reforzar algunos elementos matemáticos que se requieren en la fase de validación.

Los cuatro primeros retos los niños los desarrollaron sin problema, a diferencia del reto 5 el hotel de 100 puertas, que al leerlo para ellos su primera reacción fue decir “eso está muy difícil profe”. Para buscar que los chicos lo trabajaran y se dieran la oportunidad de solucionarlo, este se dividió primero solo con 10 puertas. Fue desarrollado por cuatro estudiantes quienes plantearon diferentes estrategias para solucionar el problema. A continuación, se exponen tres de las soluciones dadas por los estudiantes:

El hotel de las 100 puertas. Un hotel dispone de 100 habitaciones y 100 camareros. Los camareros tienen la siguiente costumbre: “Un primer camarero cierra las puertas de todas las habitaciones. Un segundo abre las puertas de las habitaciones pares. Un tercero cambia de posición todas las puertas que son múltiplos de 3. Un cuarto cambia la posición de las puertas que son múltiplos de 4…Así sucesivamente hasta que ha pasado el último camarero". ¿Qué puertas quedarán CERRADAS al final?

Tabla 81. *Solución del reto 100 puertas propuesto por Pablo.*

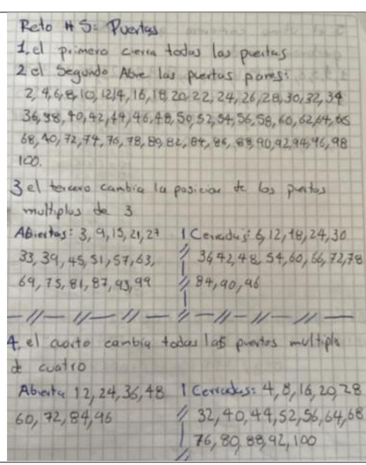
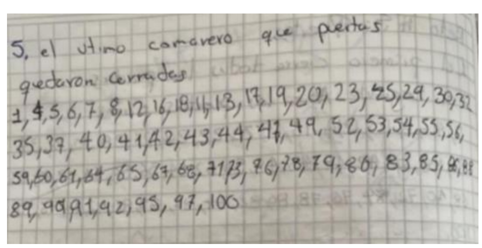
Evidencia	Justificación	Etapas de solución de problemas				
		I	D	E	A	L
	***Profesora:*** *¿Cómo vas?* ***Pablo:*** *Profe la primera fila corresponde a las habitaciones del 1 al 10. Hacia abajo coloco a los camareros y la X es la puerta que cada uno va cerrando a medida que le toca el turno. El primero las cierra todas, y a medida que se van repitiendo en la columna de cada puerta es cerrada, abierta y cerrada y así sucesivamente. Yo cuento hacia abajo cuales están quedando cerradas, y las únicas que quedan cerradas del 1 al 10 son la 1 la 4 y la 9.* ***Profesora:*** ¿Ok, y ves alguna característica de estos números que obtuviste? ***Pablo:*** *4 y 9 son cuadrados.*	1	1	1	1	0
		Observación: Pablo presentó un bloqueo inicial cuando leyó el problema, pero al dividir el problema con cantidades más pequeñas del 1 al 10, vemos que ya se anima a resolverlo y plantea una matriz cuadrada y lo soluciona rápidamente. No lo termina ya se acaba la clase y a pesar de que se deja completar en casa él no lo termina completamente.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Desarrolla una estrategia de conteo para solucionar correctamente la primera parte del problema y justifica correctamente su respuesta
Recursos de apoyo (RA)	3	Usa una matriz cuadrada para ubicar las puertas del 1 al 10 en las filas y los meseros
Justificación matemática (JM)	2	Identifica los números que representan las puertas cerradas del 1 al 10, pero no termina el reto completamente.
Soluciones creativas (SC)	3	Su arreglo gráfico le permite experimentar las soluciones aplicando conteo y un arreglo matricial de 10x10.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 92. *Solución del reto 100 puertas propuesto por Any.*

Evidencia	
	
Justificación	**Etapas de solución de problemas**

Profesora: *¿Cómo lo estás desarrollando?* ***Any:*** *Profe pues yo voy escribiendo Cómo va diciendo el problema, el primero cierra todos, entonces el segundo abre las pares del 1 al 100. El tercero va cambiando la posición de las puertas múltiplos de 3, entonces quedan abiertas los múltiplos de 3 impares y quedan cerradas las que son múltiplos pares de 3. Y así sucesivamente va pasando cada uno.* ***Profesora:*** Ok, ¿ves alguna característica de estos números que obtuviste? ***Any:*** *No profe, quedan varias puertas cerradas algunas pares y otras son impares.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: Any intento hacer el problema completo con los 100 números al hacer con los 3 primeros camareros logra desarrollarlos correctamente, pero cuando comienza con los múltiplos de 4 en adelante ya se equivoca con la secuencia de los números y no puede visualizar todas las puertas, por lo que comete errores y no identifica cuales estuvieron abiertas para cerrarlas y viceversa.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	2	Reconoce el concepto de múltiplos de números, y busca a través del conteo relacionar las puertas con los múltiplos de cada uno, pero se equivoca al abordar por completo el problema.
Recursos de apoyo (RA)	2	Usa como recurso listar los múltiplos de cada uno de los números, pero se confunde a la hora de llevar el orden del número de puertas abiertas y cerradas.
Justificación matemática (JM)	2	Justifica su respuesta de manera correcta, su proceso de solucionar el problema, pero al momento de llevar la secuencia, se equivoca al contar el número de puertas.
Soluciones creativas (SC)	2	El enlistar los múltiplos de cada número no le permitió desarrollar de manera correcta el reto y al final cuenta más puertas cerradas de las que son.

Fuente: Elaboración propia

4.4.2 Resultados obtenidos en la fase de validación de retos numéricos.

Esta fase tiene cuatro retos que desarrollaron los estudiantes, relacionados con el pensamiento numérico. Se conformaron grupos colaborativos de 2 o 3 estudiantes, cada uno con un rol específico en el grupo, como se describe en cada tabla de resultados por equipos, una vez finalizaron el reto, ellos debían validar sus respuestas con la docente justificando las soluciones dadas para obtener los puntos y continuar con el siguiente reto.

Cada estudiante inicia el juego con tres poderes que puede emplear para obtener pistas o ayudas por parte del docente para lograr la solución del reto, también pueden usar herramientas como la calculadora, para realizar las operaciones requeridas.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos por los ocho estudiantes en el desarrollo de esta fase, con su respectivo resultado de aprendizaje:

Reto 1: **COMPLETA UN SIGLO** (150 puntos) (Tomado de Mathematical activities 1982)

Coloca entre las nueve cifras siguientes signos de las 4 operaciones aritméticas en los lugares adecuados no necesariamente debe ser en todos, para que la expresión obtenida sea igual a 100.

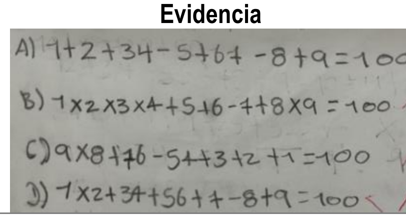
12 3 4 5 6 7 8 9 = 100

a. Escribe tu solución aquí: b. Existen más soluciones ¿Cuántas? c. Escribe dos soluciones diferentes a la primera dada en el numeral b que involucren operaciones diferentes a las anteriores.

Resultado de aprendizaje RAN1: Emplea las operaciones entre números naturales para estimar una cantidad numérica de acuerdo con la información dada en el problema.

Tabla 23. *Resultados del reto numérico RAN1 por JNXS.*

Evidencia



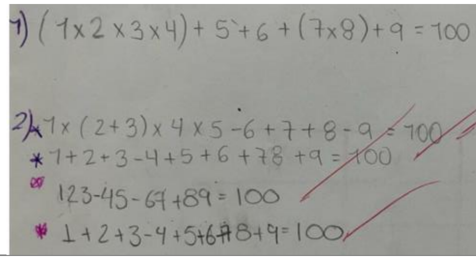
Justificación	Etapas de solución de problemas				
Profesora: *¿Cómo les fue en este reto chicas del equipo JNXS?* ***Emma:*** *En el primero agrupando números y sumándolos entre ellos y restando otros se obtuvo el 100.* ***Profesora:*** *Encontraron otra solución* ***Emma:*** *Si. Multiplicándolos entre ellos, del 1 al 4 y luego restando 7 y 72 que es 9*8.* *Otra respuesta es ordenándolos al revés como en el c. multiplicamos los más grandes que son 9*8, luego unimos los siguientes que son 76, y le restamos 54 y luego sumamos 6.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Se evidencia el trabajo colaborativo y al pedir a Emma la justificación de como solucionaron el reto ella lo puede hacer de una manera muy tranquila y segura, le da un poco de pena cuando habla, pero muestra mucha seguridad a la hora de expresar sus soluciones y validar su respuesta. Al principio tuvieron dificultad para completar el reto, pero una vez lo realizaron mostraron mucha satisfacción por el reto cumplido, por obtener los 150 puntos y por pasar al siguiente reto.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Justifica correctamente la solución del reto y se apoya en el valor posicional de los números para obtener la solución del reto.
Recursos de apoyo (RA)	3	Usa la calculadora como recurso de apoyo para hacer las cuentas correctamente ya que le cuesta mucho realizarlas mentalmente.
Justificación matemática (JM)	3	Identifica el valor posicional de los números y combina las cifras correctamente para encontrar la solución del reto.
Soluciones creativas (SC)	3	Con su equipo de trabajo encuentra una forma de solucionar el reto yla usan para encontrar otras soluciones válidas.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 24. *Resultados del reto numérico RAN1 por Only girls.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	D	E	A	L
Profesora: *¿Listo cómo les fue Only girls?* ***Lia:*** *Profe mire ya solucion**amos** todo el reto.* ***Profesora:*** *Cuéntame como lo hicieron.* ***Lia:*** *en la primera lo que empezamos fue a multiplicar los números para obtener valores grandes y luego íbamos sumando otros en la calculadora hasta que nos diera el 100. En el segundo hicimos lo mismo multiplicando los primeros números, pero llegamos en un momento y nos pasamos de 100 entonces comenzamos a restar los números sueltos hasta que nos dio el 100.Otra forma puede ser agrupando de a 2 o 3 números juntos para obtener valores grandes y luego se van restando entre ellos hasta obtener el 100.*	1	1	1	1	1
	Observación: Para el desarrollo de este reto, su principal herramienta de apoyo es la calculadora con ella iban realizando las operaciones hasta obtener 100 con los números dados. Buscaron varias veces soluciones diferentes y una vez identificaron una forma para encontrar la solución la aplicaron agrupando otros números hasta obtener la respuesta correcta, sin darse cuenta repitieron una solución dos veces ya que agruparon las mismas cantidades.				

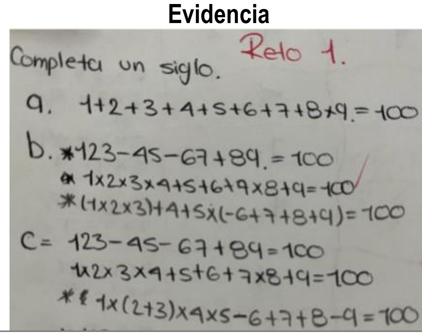
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Usan signos de agrupación y orden en las operaciones para realizar los cálculos correspondientes.
Recursos de apoyo (RA)	3	Utilizan como apoyo en la calculadora ya que mentalmente les cuesta realizar las operaciones y se equivocan, en la calculadora cambian signos y ven cómo va dando la suma.
Justificación matemática (JM)	3	Justifica correctamente la solución del problema y realiza otras soluciones diferentes para validar sus procedimientos.
Soluciones creativas (SC)	2	Realizan varias operaciones, pero al final no se dan cuenta que repiten una solución que ya habían obtenido previamente.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 25. *Resultados del reto numérico RAN1 por Alfa Deltha y Omega.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	D	E	A	L
Profesora: *¿Cómo les fue Alfa Deltha y Omega?* ***Pablo:*** *Ya terminamos profe.*	1	1	1	1	1

Profesora: *Explícame cómo solucion**aron** el reto.* ***Pablo:*** *100 es un número grande si los sumamos todos nos da 50, entonces no sirve, multiplicamos los dos números más grandes 9*8=72 y sumamos del 1 al 7 que da 28. Para la otra solución diferente María lo que hizo fue agruparlos y con la calculadora iba sumando y restando hasta que le dio el 100.* *Y ya por último empezamos a multiplicar los números entre sí, siguiendo el orden de las cifras hasta que fuimos obteniendo el 100.*	**Observación:** En la solución del reto buscaron diferentes alternativas para que la suma les diera el 100. Su herramienta de apoyo fue la calculadora, a medida que van avanzando en la solución del reto, exploran formas diferentes de agrupar los números para obtener la solución correcta, y al final retoman todas las soluciones que van llevando y adicionan otras diferentes. Concluyen que existen muchas maneras de obtener 100.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Expresa correctamente las soluciones obtenidas y usa correctamente las operaciones básicas para solucionarlos.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utilizan la calculadora como material de apoyo para obtener la solución correcta del problema.
Justificación matemática (JM)	**3**	Realizan las operaciones y usan signos de agrupación y el orden de las operaciones correctamente
Soluciones creativas (SC)	**2**	Tiene soluciones creativas, pero en la formulación repite algunas soluciones dadas.

Fuente: Elaboración propia.

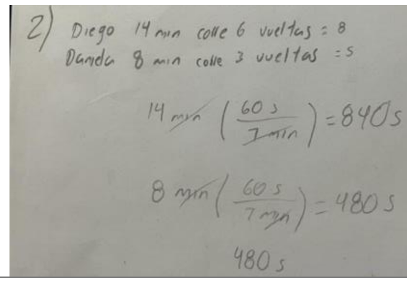
Este reto fue realizado en grupos de trabajo de 3 estudiantes, cada grupo al solucionarlo debían encontrar una solución inicial al reto, validarla con el docente para verificar que lo hubieran comprendido y lo realizaran correctamente. En este reto los estudiantes aplicaron las etapas en la solución del modelo ideal en su totalidad, se evidencia porque una vez encontraban una solución verificaban agrupando los números de formas diferentes para comprobar los resultados obtenidos. Frente al discurso matemático, ellos emplean correctamente las operaciones básicas, justificaron correctamente sus soluciones y la mayoría emplearon la calculadora como recurso para desarrollar las operaciones correctamente, esto aumentó su confianza y seguridad para la solución del reto.

Reto 2: LA CARRERA (150 puntos) Diego y Daniela corren alrededor de una pista con rapidez constante. Diego corre seis vueltas en 14 minutos, mientras que Daniela da tres vueltas en ocho minutos. Después de iniciar al mismo tiempo una carrera, cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Diego observó que había pasado una cantidad entera de minutos. a. ¿Cuántas vueltas dio Diego? b. ¿Cuántas vueltas dio Daniela? c. ¿Cuál es el total de vueltas que dieron entre los dos?

Resultado de aprendizaje RAN2: Interpreta por medio de operaciones simples las diferencias entre el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre dos o más números y lo aplica en la solución de problemas.

Tabla 26. *Resultados del reto numérico RAN2 por JNXS.*

Evidencia

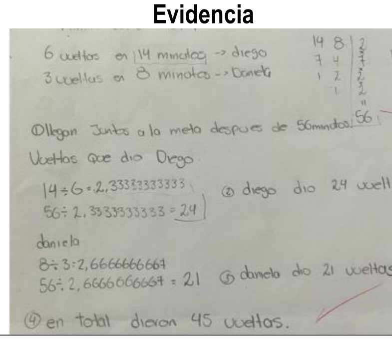


Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**0**	**0**	**0**	**0**
Profesora: *¿Cómo van las chicas del equipo JNXS?* ***Emma:*** *Profe pasamos los minutos a segundos, pero no sabemos qué más hacer.* ***Profesora:*** *y cómo pueden relacionar el número de vueltas con los segundos.* ***Emma:*** *Si. Multiplicándolos entre ellos, del 1 al 4 y luego Profe cambiamos el poder de invisibilidad, porque no sabemos qué más hacer.*	**Observación:** El grupo se encuentra enfrascado y no sabe interpretar la información del problema. Al final deciden cambiar uno de los poderes del mago de invisibilidad para que puedan pasar al siguiente reto.				

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 27. *Resultados del reto numérico RAN2 por Only girls.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
Profesora: *¿Listo, ¿cómo les fue Only girls?* ***Lia:*** *Profe te cambiamos un poder por una ayuda.* ***Profesora:*** *Ok, cambian el poder de caza, deben hallar el mínimo común múltiplo de los minutos que gasta cada chico en dar las vueltas.* *Tiempo después….* ***Lia:*** *Profe, ya creemos que lo resolvimos. Lo que hicimos fue sacar el m.c.m., de 14 y 8, es 56. Luego tenemos que saber el tiempo tarda cada uno en dar las vueltas, Diego sería 14/6=2,3333. Luego dividimos 56 entre 2,333 y eso nos da 24 que sería el número de vueltas que dio.*	**Observación:** Al iniciar con el desarrollo del problema el grupo no tenía claridad en que lo que debían hacer, por ello solicitaron una ayuda, o pista para poderlo resolver. Una vez se da la pista ellas ya terminan de solucionarlo, usan la división obteniendo números decimales para encontrar el número de vueltas que da cada niño en el tiempo empleado. Finalmente logran ver la solución del problema y lo desarrollan correctamente.				

Hacemos lo mismo para Daniela, dividimos 8/3 y eso nos da 2,66666. Luego dividimos 56 entre 2,6666 y nos da 21, que serían las vueltas que dio ella.
Entre los dos dieron 45 vueltas.

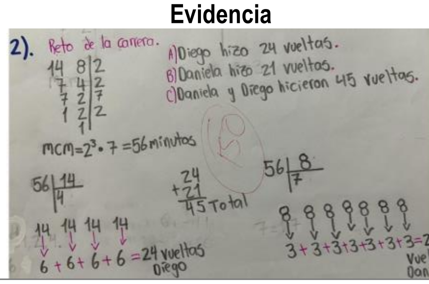
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Identifican el m.c.m de dos números y lo emplean en la solución del problema.
Recursos de apoyo (RA)	2	Utilizan la calculadora y la división como recurso para realizar las operaciones correctamente y un poder para solucionar el reto.
Justificación matemática (JM)	3	Explican su solución a partir de las operaciones básicas, como el cociente entre el número de vueltas y el tiempo empleado.
Soluciones creativas (SC)	3	La solución propuesta por el equipo se esperaba con números enteros, pero ellos usaron el cociente entre el número de vueltas y el tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 28. *Resultados del reto numérico RAN2 por Boom Girls.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora *¿Cómo vamos Boom Girls?* ***Any:*** *Profesora hallamos el tiempo en el cual ellos se vuelven a encontrar que fue a los 56 minutos. Luego analizamos cuantas veces está 14 en 56 y está 4 veces eso quiere decir que, si cada 14 minutos da 6 vueltas, entonces en total sumamos 6 vueltas a 4 veces y eso da 24 que es el número de vueltas que da Diego. Lo mismo hacemos con Daniela, cada 8 minutos da 3 vueltas y al dividir 56 entre 8 nos da 7 eso quiere decir que sumamos 3, siete veces y eso da 21 que son las vueltas que da ella. Entre los dos dan 45 vueltas.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Ellas para solucionar el reto, determinaron el m.c.m. y luego, por medio de sumas, miraron cada cuanto se repetía 14 y 8 hasta llegar a 56. Luego establecieron cuántas vueltas representaban cada número y obtuvieron el número de vueltas que se repetía para cada uno.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Utilizan el m.c.m y realizan sumas para encontrar la solución del problema
Recursos de apoyo (RA)	3	Utilizan lápiz y papel diagramas de relación entre números para solucionar el problema.
Justificación matemática (JM)	3	Argumentan correctamente las operaciones y procedimientos empleados en la solución del reto.
Soluciones creativas (SC)	3	Desarrollan el problema de una forma diferente a los otros grupos y comprueban sus resultados.

Fuente: Elaboración propia.

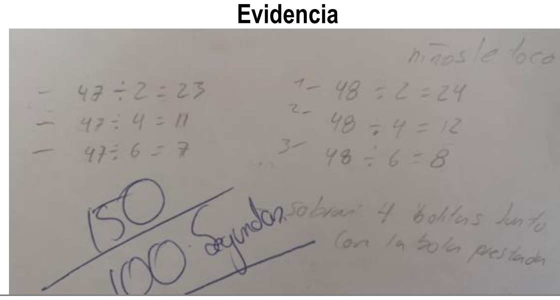
La solución más común dada por los grupos fue dividir el tiempo empleado entre el número de vueltas que dio cada corredor, como lo planteó Luis, esa misma estrategia la emplearon Brayan, Molly y Sammy, por ello se realizó el análisis de aquellas soluciones diferentes propuestas por los grupos. Se evidencia la aplicación de los pasos en la solución del problema de acuerdo con el modelo IDEAL, y también usan elementos del discurso en la validación de sus soluciones.

Reto 3: REPARTO JUSTO DE PIQUIS (150 puntos) (Adaptado de El hombre que calculaba) Un grupo de 3 amigos ganaron 47 bolas de piquis en el descanso en el colegio. Al primero le corresponde la mitad, al segundo le corresponde la cuarta parte y al tercero le corresponde la sexta parte. Sin embargo, al realizar el reparto la división no es exacta y ellos entraron en discusión. La monitora de la clase les dijo que les prestaba una piquis para que realizaran su reparto y no siguieran discutiendo. Al ver que su reparto fue claro ellos devuelven la esfera prestada a la monitora, junto con las que sobraban. a. ¿Cuántas esferas de piquis le corresponde a cada amigo? b. ¿Cuántas esferas sobraron?

Resultado de aprendizaje RAN3: Aplica las propiedades de las operaciones para realizar repartos proporcionales de acuerdo con la información descrita en el problema.

Tabla 29. *Resultados del reto numérico RAN3 por JNXS.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *¿Cómo van las chicas del equipo JNXS?* ***Emma:*** *Profe ya lo hicimos. Dividimos 47 entre 2, da 23,5 47/4=11,5 47/6=7,5 pero como no se pueden partir las esferas entonces da 23, 11 y 7.* ***Profesora:*** *Ojo lean nuevamente el problema, para que hallen la solución. Tiempo más tarde…* ***Emma:*** *Profesora, ya lo solucion**amos** las esferas son 48 porque reciben una para que sean pares, entonces quedaría 48/2=24, 48/4=12 y 48/6=8. Eso al sumar 44, sobran 4 bolas junto con la bola prestada.*	**I** 1 · **D** 1 · **E** 1 · **A** 1 · **L** 0 **Observación:** El grupo solo lee la parte inicial del problema, al pedir la justificación se evidencia que no habían leído completamente el problema y por eso es necesario indicarles que leyeran nuevamente y rectificaran su solución. Son el segundo equipo en terminar más rápido.

Elementos del discurso matemático

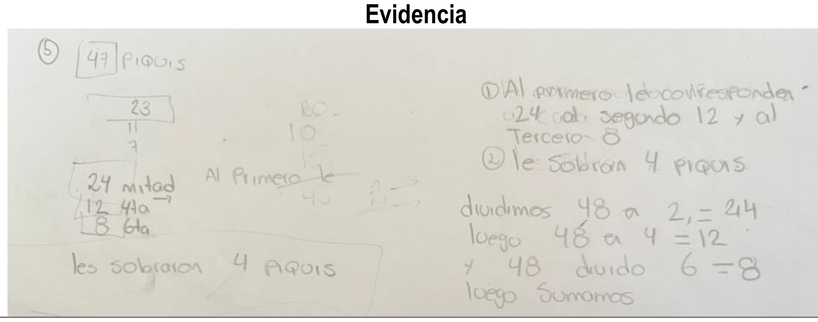
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones

Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Plantean una solución inicial, pero se evidencia que no analizaron el enunciado completo.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utilizan la calculadora para realizar las operaciones y no equivocarse
Justificación matemática (JM)	**3**	Realizan correctamente las operaciones y procedimientos empleados en la solución del reto.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Llegan a la solución del problema de acuerdo con la información suministrada.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 100. *Resultados del reto numérico RAN3 por Only girls.*

Evidencia



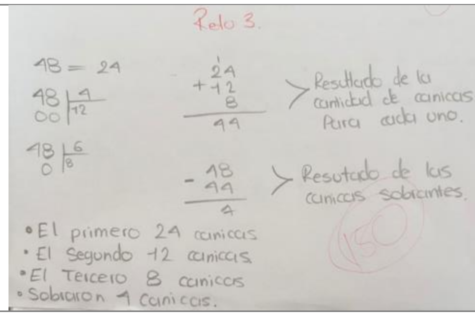
Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *¿Cómo van chicas del equipo Only girls?* ***Lia:*** *Tenemos 47 después decía que la monitora presentaba una bola para hacer el reparto entonces quedaron 48, lo cual implica que al primero le corresponden 24, al segundo 12 y al tercero 8. Al final sobran 4 bolas de piquis.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: Al inicio intentan dividir 47/2=23, luego 47/4, 47/6 como se evidencia en la solución, pero luego leen nuevamente el problema y rectifican su solución, sin dificultades.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Realizan una solución inicial, pero se evidencia que no analizaron el enunciado completamente
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utilizan la calculadora para realizar las operaciones y no equivocarse
Justificación matemática (JM)	**3**	Realizan correctamente las operaciones y procedimientos empleados en la solución del reto.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Llegan a la solución del problema de acuerdo con la información suministrada.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 31. *Resultados del reto numérico RAN3 por Alfa Deltha y Gamma.*

Evidencia



<table>
<tr><th rowspan="2">Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><th>I</th><th>D</th><th>E</th><th>A</th><th>L</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Profesora: ¿Cómo van las chicas del equipo Alfa?
Todos: Ya terminamos
Pablo: Mira profesora, son 48 bolas en total, la mitad es 24, 48/4 da 12 y 48/6= 8, las sumamos y eso nos da 44, luego restamos 48 que son las iniciales de 44 que se repartieron, entonces sobraron 4 canicas y hay esta la que prestaron entonces quedan 3 más para la monitora,</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación:
Resuelven correctamente el problema y realizan correctamente las operaciones. Al final son el único grupo que dice que sobran 3 canicas, porque devuelven la que les habían prestado.</td></tr>
</table>

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Usan las operaciones adecuadas para solucionar el problema, no presentan dificultades.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realizan las operaciones sin problemas, realizando manualmente las divisiones.
Justificación matemática (JM)	3	Su solución y justificación es correcta, e infieren el número de canicas que sobran y hacen la reflexión completa del problema.
Soluciones creativas (SC)	3	Al final del reto, explican correctamente las esferas que sobran después de la solución

Fuente: Elaboración propia.

Este reto, fue resuelto por los estudiantes sin mayor dificultad, al principio algunos de los grupos iniciaron las divisiones con 47 bolas, pero después de leer nuevamente el problema identifican que la cantidad para el reparto es 48 y así continúan la solución del reto, al final del reto solo un grupo afirma que debe devolverse la bola prestada y que quedan 3 para la monitora. Ellos realizan una comprensión apropiada del problema y todos los resuelven de la misma manera, aplicando de manera natural los pasos de la solución de problemas y hacen uso correcto del lenguaje matemático en su solución.

Reto 4: CUADRADOS PERFECTOS (150 puntos) Ciertos pares de números tienen una propiedad interesante y es que, dan un cuadrado perfecto cuando se suman o cuando se restan entre sí. Por ejemplo 4 y 5, ya que $4 + 5 = 9$ y $5 - 4 = 1$. a. En este reto, deben encontrar otros dos pares de números que cumplan esta propiedad.

x	y	$x + y$	$y - x$

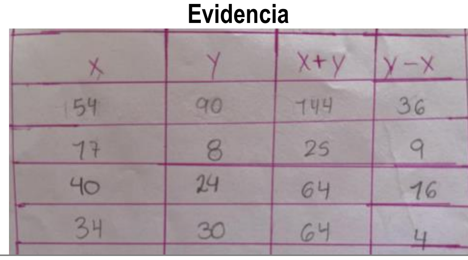
4	5	9	1

b. ¿Hay más? Encuentra otro cuadrado perfecto diferentes a los anteriores

Resultado de aprendizaje RAN4: Justifica y genera equivalencias entre expresiones numéricas

Tabla 32. *Resultados del reto numérico RAN4 por el equipo Only girls.*

Evidencia



x	y	x+y	y−x
54	90	144	36
17	8	25	9
40	24	64	16
34	30	64	4

Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *¿Cómo van Only girls?* ***Lia:*** *Profesora ya hemos encontrado 4 diferentes, y creemos que pueden ser muchos, buscamos números sumando y restando entre sí hasta que nos daban las soluciones. Lo comprobamos con la calculadora.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Ellas solucionaron el reto, encontrando soluciones diferentes al primer grupo, pero no se percataron que en la última columna de la tabla es $y - x$ es decir primero va el valor de y y luego el de x, y por lo tanto la diferencia les da negativa.				

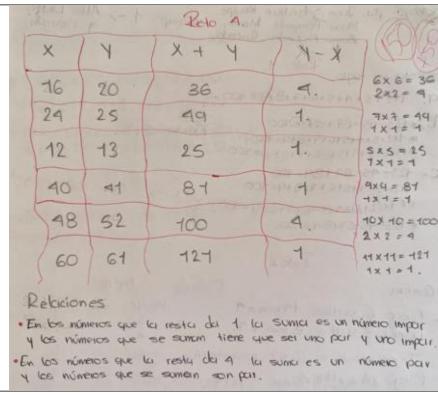
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Identifican los números, realizan las operaciones, pero no identifican que las últimas soluciones dan negativas.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realizan las operaciones sin problemas, pero no tiene en cuenta el orden de los números y la diferencia da negativa.
Justificación matemática (JM)	**3**	Reconocen las propiedades de los números y los números cuadrados.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Plantean soluciones, pero no se percatan que algunas dan negativas.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11. *Resultados del reto numérico RAN4 por el equipo Alfa Deltha y Omega*

Evidencia



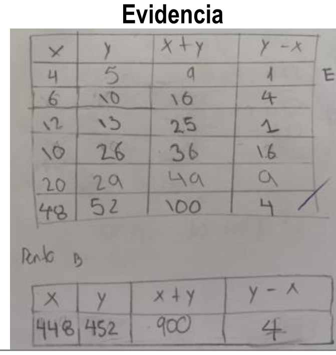
Justificación	Etapas de solución de problemas				
Profesora: *¿Cómo van Alfa Deltha y Omega?*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
Pablo: *Profesora tenemos una idea y es que cuando los números se resten deben dar 1 y 1 es un número cuadrado, ósea que un número debe ser par y el otro impar para que al restarlos nos de 1. Por otro lado, si queremos que la resta nos dé un cuadrado par como 4, entonces los números deben ser pares.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: El grupo usa la calculadora para establecer los números, pero usan su hipótesis de que la diferencia debe dar uno y sobre eso logran conseguir cuatro combinaciones de números, también aplican su idea de los números pares y encuentran un par de números que cumplan esta condición en el cual la diferencia da 4. Son los primeros en terminar el reto correctamente.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Establecen soluciones diferentes dadas por los otros grupos y buscan un patrón con base a la hipótesis planteada para obtener números cuadrados en la diferencia.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realizan las operaciones sin problemas, usando la calculadora para verificar que sean correctas.
Justificación matemática (JM)	3	Plantean una conjetura que aplican para encontrar la solución a su problema y comprobar sus soluciones.
Soluciones creativas (SC)	3	Tiene soluciones diferentes propuestas a los otros grupos, que se proponen en el reto.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 34. *Resultados del reto numérico RAN4 por el equipo SLL.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
Profesora: *¿Listo SLL cómo lo resolvieron, tienen alguna estrategia?*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**

Pablo: *Encontramos 5 soluciones diferentes, lo que hicimos fue pensar en números que al sumarlos den un número que tenga raíz exacta y que cuando se resten también, pero pensamos que al restar de 1, 4 9 o 16 que son los que sabemos. Para hallar el de 900 es porque 30*30=900, entonces la mitad es 450, a uno de los números le sumamos 2 y da 452 y al otro le restamos 2 que da 448.*	**Observación:** Al realizar la validación de la actividad, vemos que ellos buscan números que tengan raíz cuadrada exacta y luego van sumando o restando números entre sí para obtener la raíz cuadrada de los números al hacer la resta entre ellos.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Reconocen propiedades aditivas en los números, para encontrar la solución del reto.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utilizan la calculadora y conceptos matemáticos de la raíz y cuadrados, para buscar expresiones equivalentes a las dadas.
Justificación matemática (JM)	**3**	Justifican su solución aplicando propiedades aditivas y raíces entre cantidades numéricas.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Buscan una solución empleando cantidades de tres cifras, diferentes a las expuestas por los otros grupos.

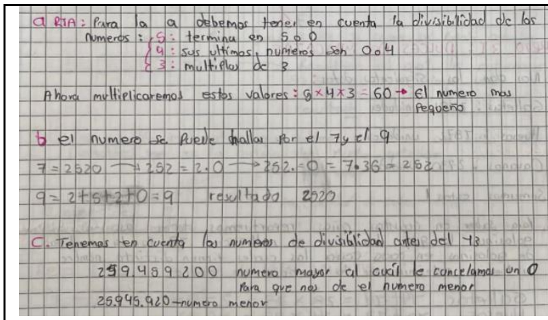
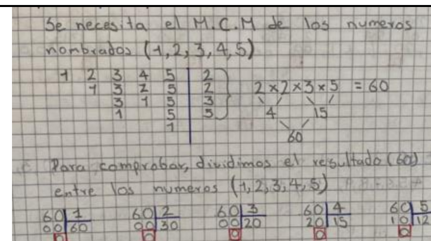
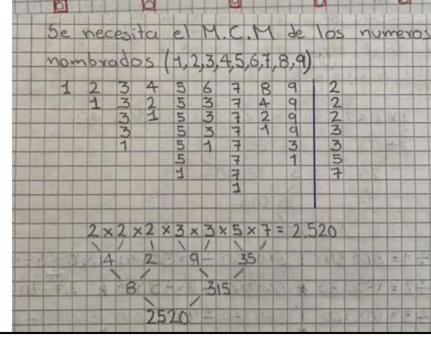
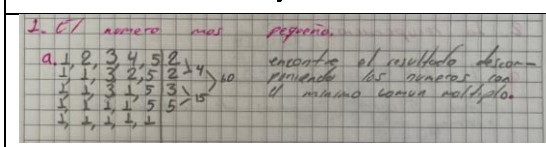
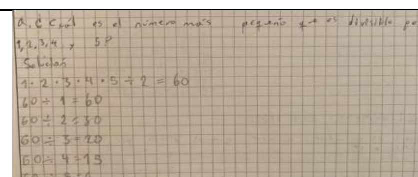
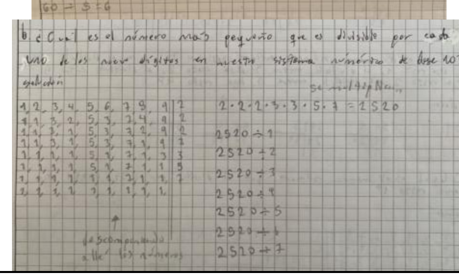
Fuente: Elaboración propia.

Este reto fue desarrollado por todos los estudiantes, varios buscaban números diferentes y la mayoría encontró las soluciones por ensayo y error, sumando y restando números entre sí para obtener la respuesta correcta. Varios limitaron su tarea a encontrar dos soluciones, otros encontraron más números que cumplieran las condiciones del reto. Frente a las etapas de la solución del problema, se pudo observar que fueron desarrolladas a la hora de abordar y solucionar el problema, incluso algunos grupos plantearon unas soluciones diferentes o unas hipótesis que comprobaron al dar respuesta al numeral b, siendo para ellos motivante obtener puntos extras por las soluciones y justificaciones dadas. En el análisis de las categorías de análisis del discurso, ellos usan un lenguaje acorde a los conceptos abordados en la fase de entrenamiento, como lo son las operaciones básicas, sus propiedades, números cuadrados, raíces, logrando justificar y validar sus respuestas correctamente obteniendo los puntos necesarios para terminar la fase de los retos grupales.

La segunda parte de la fase de validación fueron los retos individuales, que se dejó como actividad para la casa para que los estudiantes reforzarán con problemas rutinarios los temas vistos en el mundo. En un primer momento ningún estudiante de grado once, los realizó y manifestaron no comprender los problemas. En una sesión aparte se tuvo que indicar que perderían 200 puntos a quienes no realizaran la actividad individual, y se decidió dejarlas como actividad de nivelación para que fueran resueltas y sustentadas en clase de manera oral. De los 8 casos 6 estudiantes (75%), los presentaron para tener los puntos adicionales y pasar al siguiente nivel. En la sustentación oral el reto más utilizado fue el de dulces de mascotas y los estudiantes demostraron un dominio de los conceptos de múltiplos y divisores de un número, las operaciones básicas y repartos proporcionales, llegando a la solución correcta del reto.

En la siguiente figura se muestran algunas de las soluciones propuestas por los estudiantes de su trabajo individual.

Reto numérico individual 1: El número más pequeño.

	 
Any	**Luis**
	 

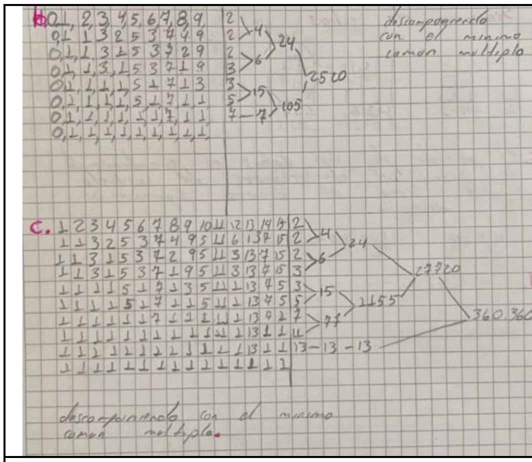
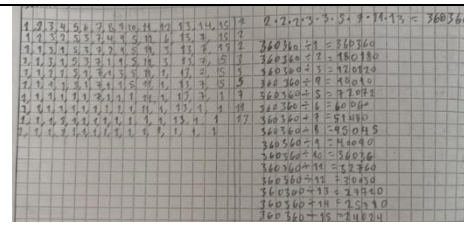
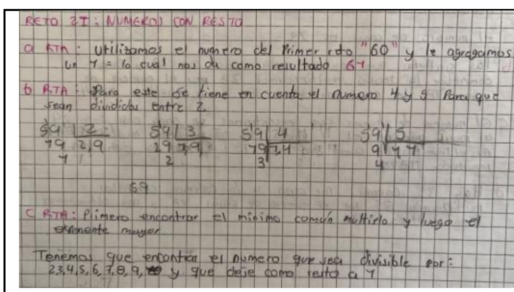
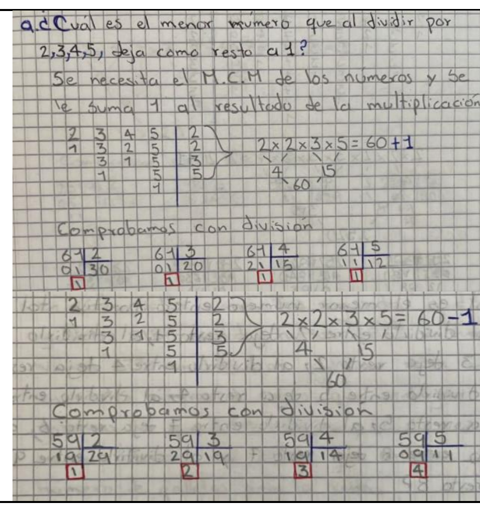
	
Molly	**Brian**

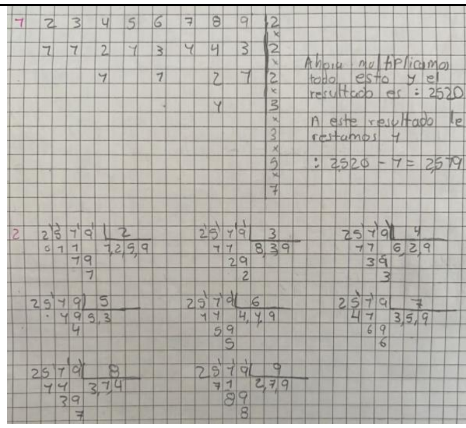
Figura 20. *Soluciones propuestas al reto numérico del número más pequeño.*

Como podemos observar la mayoría 62,5% de los estudiantes realizaron los dos primeros numerales encontrando el m.c.m de los números que indican en cada uno, siendo el número más pequeño, sin embargo, vemos que no todos lograron encontrar correctamente el m.c.m de los números del 1 al 15, y que al realizar los productos de equivocaron, fueron los casos de Any, y Lia. El 37,5% de los estudiantes como Luis, Pablo y Brian, para comprobar sus soluciones realizaron una por una las divisiones del m.cm encontrado, por cada uno de los divisores y verificando que estas fueran exactas.

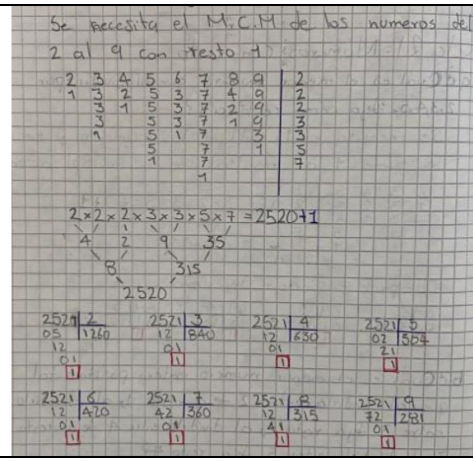
Reto numérico individual 2: Números con resto.



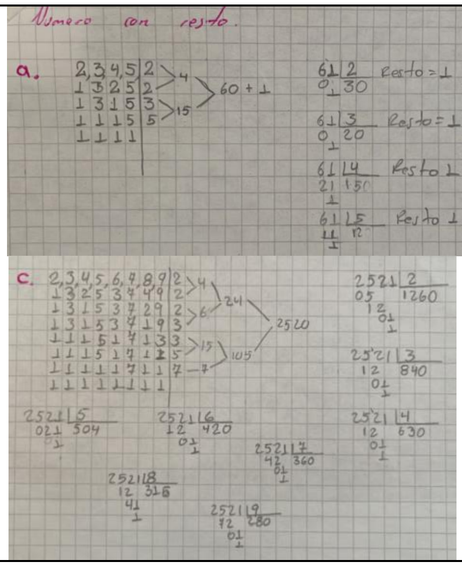




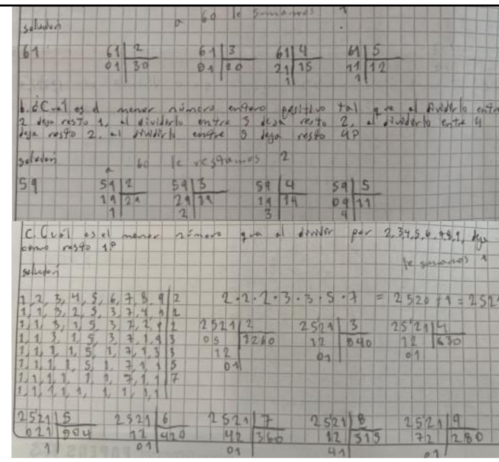
Any



Luis



Molly

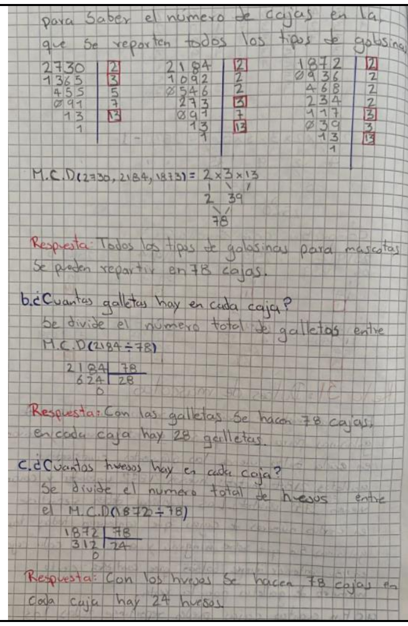


Brian

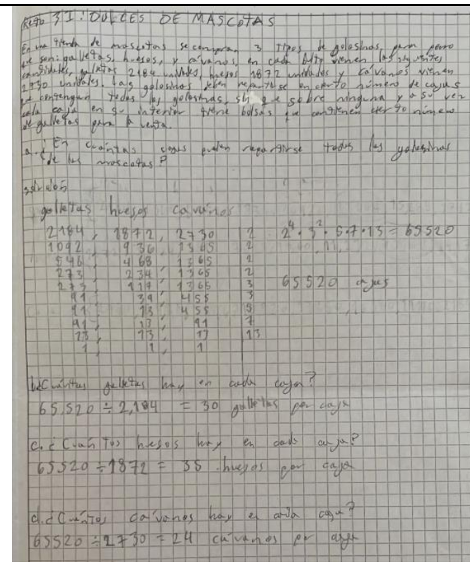
Figura 21. *Soluciones propuestas al reto numérico números con resto.*

Ellos relacionaron la solución de este reto con el anterior, y encontraron el m.c.m de los números del 1 al 9 que es 60, le sumaron 1 para que el resto siempre fuera 1 y luego a 60 le restaron 1 para que al dividirlo entre cada uno se lograra obtener los restos correspondientes. El 87,5% realizaron el reto completamente, solo Molly realizó parte del reto en el cual los restos fueran 1, mientras que los otros estudiantes realizaron las pruebas haciendo las divisiones de cada uno de los números. Es importante mencionar que ellos realizan la descomposición de números y las divisiones para validar la solución correcta de su reto.

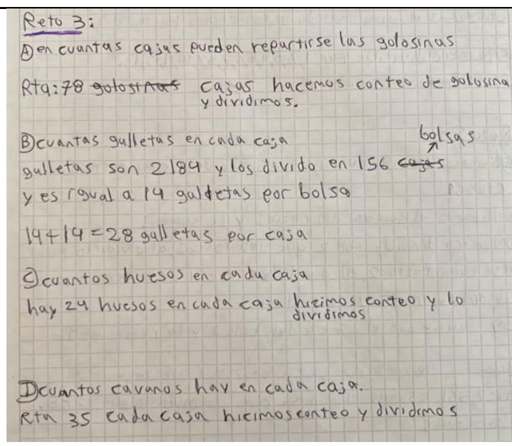
Reto numérico individual 3: Dulce de mascotas.



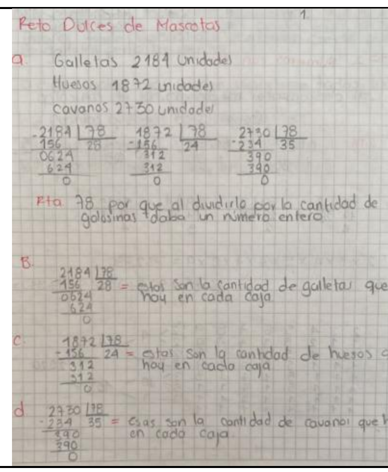
Luis



Brian



Pablo



Samy

Figura 22. *Soluciones propuestas al reto numérico dulce de mascotas.*

El reto fue desarrollado por los estudiantes de manera individual, y el 87,5% lo realizó correctamente, cada uno estableció una forma para solucionarlo, sin embargo, la más usada por ellos fue hallar el m.c.d que era 78, y corresponde al número de cajas en que debe repartirse el número de galletas, huesos y cávanos. Brian por su parte halló fue el m.c.m de todas las golosinas, obteniendo 65520, que luego dividió entre el número de galletas, huesos y cávanos, pero su interpretación no es correcta. Pablo por su parte indica que por medio de conteo encontró que se necesitarán 78 cajas y que así determina cuántas golosinas debe ir en cada caja.

4.4.3 Resultados obtenidos en la fase de aplicación de retos numéricos.

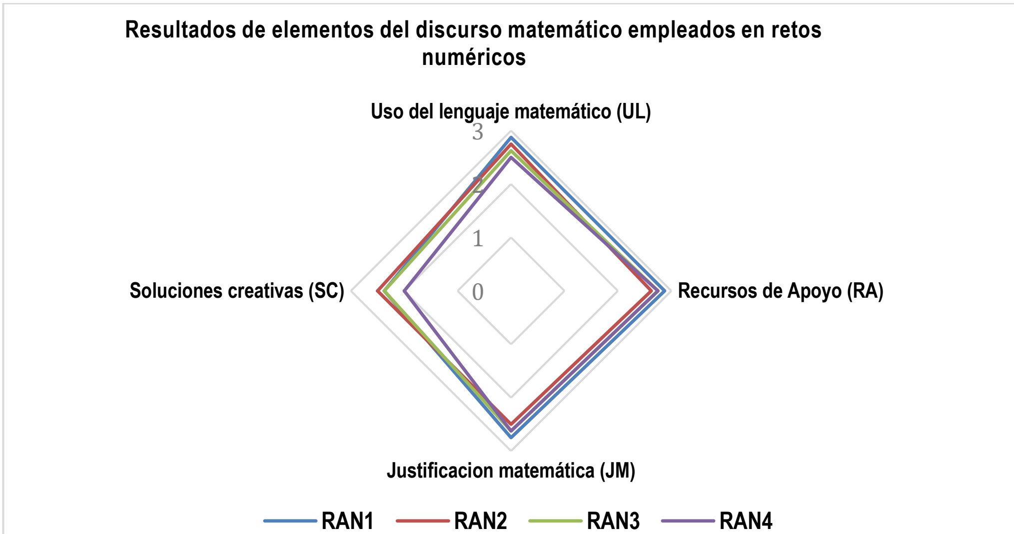
Esta fase denominada batalla de líderes se realizó de manera individual y aleatoria los estudiantes debían derrotar al acosador de fuego, para ello debían de manera individual resolver 10 retos de olimpiadas matemáticas sobre pensamiento numérico. Los estudiantes iban pasando de manera individual al frente leían el problema y contaban con tiempo límite para su solución, en la plataforma estaban las respuestas en forma de selección múltiple o abiertas que debían digitarse para establecer si era correcta o incorrecta.

Al finalizar la actividad los estudiantes lograron vencer al acosador de fuego, donde tuvieron 8 soluciones correctas de los 10 problemas, obteniendo la victoria para todo el grupo y ganando la tarjeta que sirve de pase para avanzar al mundo de los retos algebraicos. Esta actividad les gustó mucho a todos los estudiantes, porque su meta era vencer al personaje y con esfuerzos sumados de los chicos llamados aleatoriamente a participar en la actividad lo lograron. Algunos usaron sus poderes, pidiendo ayuda a un amigo o en algunos casos varios solucionaban el reto propuesto en la plataforma y entre todos se ayudaban para dar la solución correcta, mostrando un trabajo colectivo y de apoyo entre ellos para no perder vidas, esta actividad fue muy agradable y en sesiones posteriores ellos preguntaban si se iba a continuar la batalla de líderes.

4.4.4 Conclusiones generales del mundo retos numéricos.

En el desarrollo de las actividades participaron los ocho estudiantes, y con base a los resultados obtenidos en el mundo de los retos numéricos, se hace un análisis de los elementos que más emplearon en el discurso matemático cuando se realiza el proceso de validación y asignación de puntos, y de los elementos de inclusión que se tuvieron en cuenta para integrar en las clases a los estudiantes con discapacidad y DC. A continuación, se presenta los resultados obtenidos:

Gráfica 4*.* Resultados de elementos del discurso empleados por los estudiantes en el mundo retos numéricos.

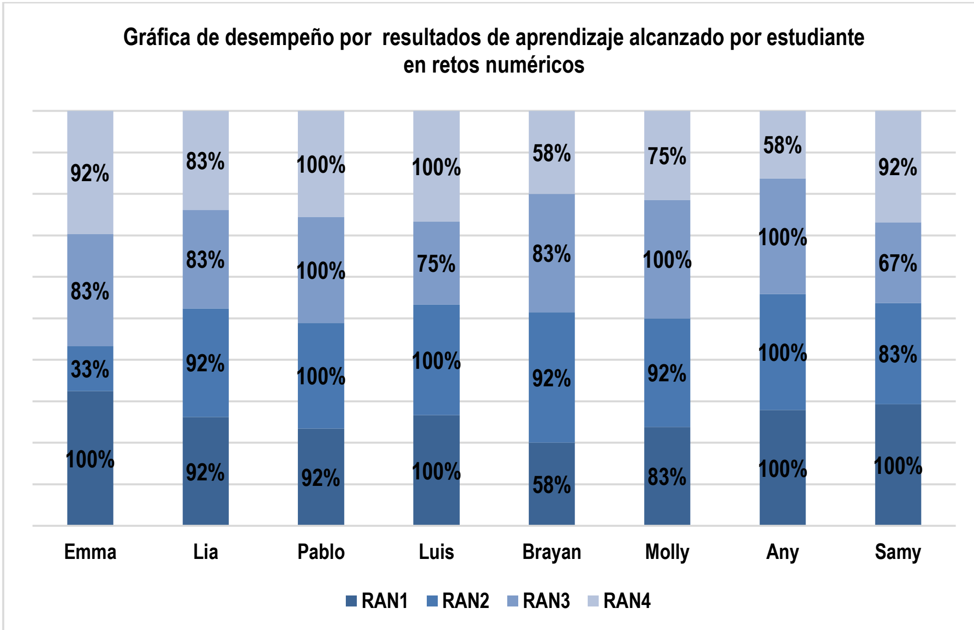


En el desarrollo de esta actividad encontramos que los elementos del discurso matemático empleados por los estudiantes son el uso del lenguaje matemático y los recursos de apoyo comparando con el mundo explorando vemos que en general ellos en el proceso de validación y justificación logran apropiarse y mostrar un uso del lenguaje matemático y expresar las soluciones obtenidas en el mundo.

También es importante mencionar que en los otros componentes a pesar de no obtener el resultado esperado si hay uso de los componentes de justificación matemática y soluciones creativas, lo cual nos permite ver que en algunos problemas desde lo numérico ellos si logran hacer soluciones diferentes, y pensar en otras formas para solucionar el reto. Esto permite comprobar que el trabajo en equipo y el proceso de validación permite que ellos tengan una participación más activa en la clase de matemáticas.

Al revisar los resultados de aprendizaje que alcanzaron los estudiantes en la solución de los retos, vemos que cada uno tiene desempeños diferentes teniendo en cuenta que la escala valorativa se da entre 1 y 3 como se muestra en la rúbrica de evaluación del discurso matemático (Tabla 6).

Gráfica 5. Resultados de aprendizaje alcanzado por estudiante en retos numéricos



Emma tuvo 1 en el reto 2 porque hizo uso de uno de sus poderes de invisibilidad, para no realizar el reto, esto hace parte de las mecánicas del juego que se establecieron y es válido que un estudiante pueda tomar esa decisión. El reto donde el desempeño de los estudiantes fue más bajo es en el de números cuadrados, ya que ellos solo se limitaron a encontrar una solución y no buscaron otras soluciones diferentes.

Resultados desde la inclusión

Es importante mencionar que, en el desarrollo de la actividad, participaron todos los estudiantes que presentaban discapacidad, y se adaptaron los elementos de inclusión propuestos por Boaler (2016b).

Los elementos de inclusión implementados y analizados son:

1. Se ofrecieron a todos los estudiantes de grado once, contenidos de alto nivel en matemáticas. Se evidencia en: 1. Mundo de los retos numéricos basados en retos (RN) y 2. El uso de las etapas de la solución de problemas (IDEAL) en la resolución de cada reto.

2. Se logró fortalecer una mentalidad de crecimiento y motivación en matemáticas. Se evidencia por 1. El uso de la gamificación, (plataforma Classcraft), sus herramientas en las actividades (GM) y también por los elementos del discurso matemático utilizados por los estudiantes al justificar las soluciones de los retos (DM).

3. Enseñar a los estudiantes a trabajar juntos. Se ve reflejado en el rol asumido por cada estudiante en su equipo de trabajo, los poderes que tienen para defender el grupo (RP), y por el trabajo colectivo y colaborativo con sus pares al desarrollar los retos del mundo, aumentar su nivel y progreso para pasar al siguiente mundo (TC).

4. Todos los niños con o sin discapacidades, que se encontraron en el aula de clase accedieron al mundo de los retos numéricos, y recibieron una instrucción clara para poder tener elementos teóricos que les sirviera para realizar los retos sin ser excluidos. Se evidencia con la asistencia y participación en el desarrollo de las actividades (AP), y desarrollo de los retos en cada fase del diseño instruccional (DI).

5. Tener en cuenta las necesidades que presentan los estudiantes con DC, aquí es importante mencionar que con base a las necesidades propuestas por Harel (2008), ellos inicialmente necesitan ser motivados. Se evidencia el desarrollo del mundo en la plataforma, con su mecánica del juego para generar un ambiente de aprendizaje adecuado para introducir el tema; desarrollar las fases del diseño instruccional en aras de aumentar la motivación, la participación y el aprendizaje de los estudiantes en el aula de clase (NM). También la necesidad de fortalecer la autorregulación, que es monitoreada por el docente a cada equipo para verificar el trabajo desarrollado por cada uno de los estudiantes y verificar cómo ellos entienden y piensan la solución de cada reto (NA).

En la siguiente tabla se muestran los códigos utilizados para analizar cada elemento de la inclusión.

Tabla 12. *Elementos de inclusión y códigos de las evidencias por elemento de inclusión.*

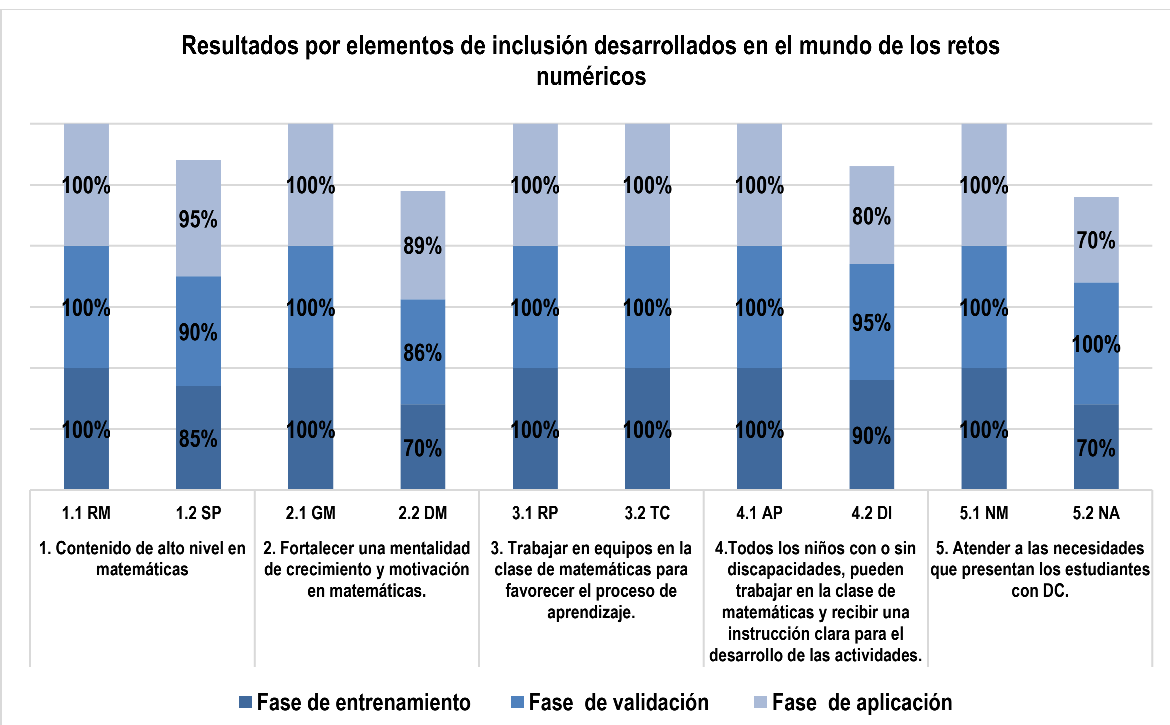
Elementos de inclusión	Códigos de las evidencias por elemento de inclusión

1. Contenido de alto nivel en matemáticas.	**1.1 RM:** Actividades basadas en retos matemáticos (problemas).
	1.2 SP: Aplicación de las etapas de la solución de problemas en el desarrollo de cada reto.
2. Fortalecer una mentalidad de crecimiento y motivación en matemáticas.	**2.1 GM:** Uso estrategias de gamificación, (plataforma Classcraft), sus herramientas del juego en las actividades.
	2.2 DM: Elementos del discurso matemático empleados al justificar las soluciones de los retos.
3. Trabajar en equipos en la clase de matemáticas para favorecer el proceso de aprendizaje.	**3.1 RP:** Juego de roles asumido por cada estudiante en su equipo de trabajo, con sus habilidades y poderes que tienen y pueden usar para defender el grupo.
	3.2 TC: Trabajo colectivo y colaborativo con sus pares al desarrollar los retos del mundo, obtener puntos, aumentar el nivel y pasar al siguiente mundo.
4.Todos los niños con o sin discapacidades, pueden trabajar en la clase de matemáticas y reciben una instrucción clara para el desarrollo de las actividades.	**4.1 AP:** Asistencia y participación en el desarrollo de las actividades.
	4.2 DI: Desarrollo de los retos en cada fase con base al diseño instruccional.
5. Atender a las necesidades que presentan los estudiantes con DC.	**5.1 NM:** Necesidad de motivación.
	5.2 NA: Necesidad fortalecer la autorregulación.

Fuente: Elaboración propia.

En la siguiente gráfica se muestran los resultados obtenidos en cada uno de los elementos de inclusión que se implementaron en este mundo de acuerdo con los desempeños obtenidos por los estudiantes, y por el desarrollo de cada reto.

Gráfica 6. *Resultados por elementos de inclusión desarrollados en los retos numéricos.*



Resultados desde las necesidades

Los retos matemáticos, la formulación de preguntas y tareas pequeñas en los retos como elemento instruccional, hace que los estudiantes no tengan un bloqueo cognitivo al iniciar la lectura y desarrollo del reto, lo cual aumenta su motivación por culminar la tarea asignada.

Frente a las necesidades intelectuales propuestas por Harel en el desarrollo de cada reto, se ve la necesidad de certeza cuando se validan las soluciones de los retos, la necesidad de casualidad donde debe verificarse si realmente comprendió la tarea que está en ejecución, monitoreando el trabajo que va realizando cada uno por medio de las preguntas desarrolladas. La necesidad de cuantificar donde se relaciona estrechamente con los recursos empleados por los estudiantes al solucionar problemas como el uso de gráficos, de la calculadora, que les da mucha seguridad para realizar los procedimientos, y la necesidad de comunicación cuando en el proceso de verificación usan elementos discursivos para justificar y validar sus respuestas.

Es importante mencionar que frente a la necesidad de estructura ellos relacionaron la solución de los retos con los temas desarrollados en la fase de entrenamiento, y explicaban o argumentaban las respuestas haciendo uso de los conceptos abordados.

Cabe resaltar, que dentro de las herramientas que se emplearon en retos numéricos, se hace necesario implementar comportamientos positivos y negativos en los siguientes mundos para fortalecer la autorregulación en el desarrollo de los retos y reconocer las actitudes positivas y creativas que tienen los estudiantes en la solución de problemas.

4.5 Análisis del mundo retos algebraicos (RA)

Para el desarrollo de este mundo se han integrado en la plataforma comportamientos positivos como se muestran en la figura 6 y negativos como se muestran en la figura 7, para regular la disciplina, el orden y el uso del celular en clase ya que la implementación del mundo de los números se evidencio el uso del celular en actividades diferentes a la clase, lo cual ocasiona que algunos tardarán más tiempo en realizar los retos o que se distrajeran y no se concentrará en el desarrollo de la actividad. También una herramienta que se adecuo a este mundo es el uso del sonómetro, para controlar el nivel de ruido que en ocasiones se presenta en el aula de clase, con el fin de que no se generara tanto ruido y el espacio de la clase está más presto para que ellos logren concentrarse y desarrollar sus retos.

Figura 23. *Vista del sonómetro y su configuración en la plataforma.*

El desarrollo de este mundo se planeó desarrollar en dos semanas, pero de acuerdo con el desarrollo de la fase de entrenamiento y la fase de validación, se empleó más tiempo y se realizó durante cinco semanas. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en cada una de las fases descritas en el capítulo tres en el diseño metodológico:

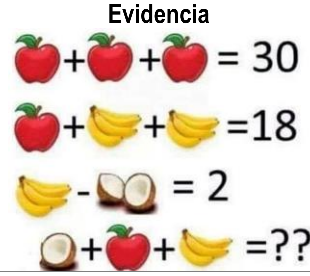
4.5.1 Resultados obtenidos en la fase de entrenamiento de retos algebraicos.

Para realizar la fase de entrenamiento, se emplearon dos semanas cada una con una intensidad horaria de 3 horas semanales de 45 minutos, se planearon retos sobre problemas de ecuaciones de primer grado, acertijos, cuadrados mágicos y problemas de calendario que implican planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado.

Los tres primeros retos implican plantear y solucionar ecuaciones de primer grado, ellos presentaron muchas dificultades en hacerlo y la estrategia que empleaban era plantear números aleatorios hasta que se cumpliera lo que decía el enunciado del problema, luego comprobaban si el número obtenido si era la solución o no. Uno de los retos que se colocó en la fase de entrenamiento y se dejó planteado como ecuación era el del epitafio de Diofanto y se dejó como tarea con puntos extras para quien lo solucionara. Ninguno lo realizó. La actividad que más les gusto y participaron activamente fueron los retos de los acertijos y la suma en el calendario. A continuación, se muestran algunos de los resultados obtenidos en estos retos:

Tabla 35. *Solución de acertijo 1 propuesto por Emma.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
La respuesta es 14, porque cada manzana vale 10, cada gajo de 4 bananos vale 4, es decir cada uno vale uno y los dos medios cocos valen 2, por lo que medio coco es uno, entonces al final sería medio coco más una manzana, más 3 bananos 1+10+3=14, al final la suma es 14.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: Este tipo de acertijos son muy llamativos para ellos y logran establecer el valor de cada una de las imágenes, y relacionarlas con la última fila para encontrar el valor de la igualdad				

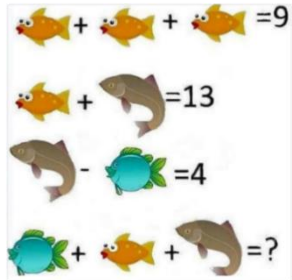
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Determina la equivalencia de cada imagen y por medio de operaciones básicas busca establecer el valor de la igualdad.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realiza una lista de lo que significa cada figura y luego las reemplaza en la fila final para establecer el valor de la igualdad.
Justificación matemática (JM)	2	Inicialmente establece una solución general, sin detallar el número de frutas, pero luego logra visualizar y relacionar el valor correcto de cada imagen.
Soluciones creativas (SC)	3	Establece el valor de cada elemento haciendo uso de la visualización y de las operaciones básicas.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 36. *Solución de acertijo 2 propuesto por Lia.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
La respuesta es 19, porque cada pez naranja vale 3, el pez gris vale 10 y el pez azul vale 6. Por lo tanto 6+3+10=19.	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: Lia logra por sí sola resolver el reto, dando un valor a cada pez que cumpla la igualdad, y luego en la última expresión reemplaza el valor de cada uno completando la igualdad correctamente.				

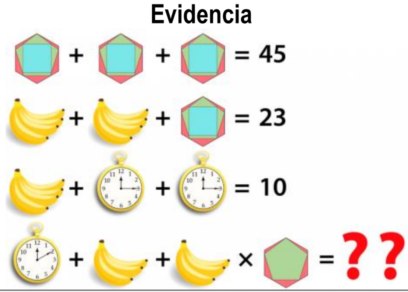
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Reconoce el valor de cada imagen y logra establecer el valor de la igualdad.
Recursos de apoyo (RA)	3	Desarrolla mentalmente el valor de cada equivalencia y luego encuentra el valor de la igualdad.
Justificación matemática (JM)	3	Justifica correctamente la solución aplicando propiedades de las igualdades.
Soluciones creativas (SC)	3	Establece el valor de cada figura haciendo uso de la visualización y de las operaciones básicas.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 37. *Solución de acertijo 3 propuesto por Pablo.*

Evidencia



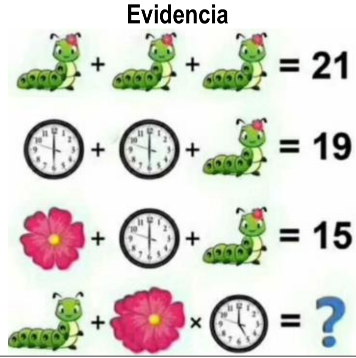
Justificación	Etapas de solución de problemas				
Mira… en el primero cada figura vale 15, que es el número de lados de cada polígono, en el segundo cada banano vale 1, en el tercero cada reloj nos muestra con el minutero el 3, por lo tanto, cada reloj nos muestra el 3 y 3 nos da 6 más 4 bananos nos da 10, en la última línea mira que el reloj nos señala el 2, más 3 bananos, la última parte es una multiplicación eso hay que hacerlo primero que seria 3 bananos más 11 lados de los polígonos, serían 33 más 5 eso nos da 38.	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: En el grupo, Pablo fue el único que se dio cuenta de los lados del polígono y el número que mostraba cada reloj, paso al frente del salón y le explicó a sus compañeros de clase como lo había resuelto, de manera ordenada y teniendo muy en cuenta el orden de las operaciones y los valores que se registraban en cada imagen.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Explica correctamente la secuencia de cada figura, y reconoce los patrones de la secuencia.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Visualiza correctamente las imágenes y los patrones que acompañan a cada una de ellas.
Justificación matemática (JM)	**3**	Justifica correctamente la solución aplicando propiedades de las equivalencias.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Desarrolla correctamente el reto y justifica de forma diferente a la propuesta por sus compañeros

Fuente: Elaboración propia

Tabla 38. *Solución de acertijo 2 propuesto por Sammy.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
*Bueno, en la primera línea cada gusanito vale 7, en la segunda cada reloj vale 6, más 6 serían 12 más 7 da 19. En la tercera serie 2 de la flor, 6 del reloj y 7 del gusanito, en total da 15. Al final al gusano sin la flor da 6 porque tiene 6 puntos, hay dos flores una y debajo se ve parte de la otra seria 4 y el reloj marca 5 entonces hay ya vemos que eso da 6 +4*5=26.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: La primera impresión de los estudiantes es contar el gusano completo, e infirieron que valía 7 luego ella veía una sola flor en la última línea de la igualdad, y en el reloj creían que siempre valía 6, ya después de cierto tiempo empezaron a identificar en las imágenes los detalles que dan valores diferentes a las igualdades hasta que lograron identificar el valor de la igualdad.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Al principio solo identificaron el valor de cada imagen y dieron una respuesta rápida. Al validar se dieron cuenta que debían ver mejor los detalles para encontrar la solución correcta.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Identifican los valores iniciales de las imágenes y luego resuelven el valor de la igualdad.
Justificación matemática (JM)	**3**	Justifica correctamente la solución aplicando propiedades de las equivalencias.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Después de validar varias veces las Soluciones hechas, identifican cual es la solución del reto.

Fuente: Elaboración propia

4.5.2 Resultados obtenidos en la fase de validación de retos algebraicos.

Se han propuesto cuatro retos relacionados con problemas algebraicos, donde los estudiantes mantuvieron sus equipos de trabajo y desarrollaron los retos propuestos. A continuación, se muestran los resultados por los equipos en cada uno con su respectivo resultado de aprendizaje:

Reto 1: DESCUBRIENDO CUAL ES: (150 puntos) (Adaptado de Actividades matemáticas, 1994). Una persona A actúa como un computador que está programado para computar un nuevo número a partir de cualquier número que le den. Los demás le dan a A un número x que él procesa, usando el programa que haya escogido, y anotando tanto el número x como el número y que haya obtenido a partir de x. i. Un programa que le dan a A es el siguiente:

1. Piensa en un número x. 2. Duplica el número. 3. Suma 3 al número. 4. Al resultado obtenido réstale 5.a. ¿Cuál es el número obtenido? b. El número x es:

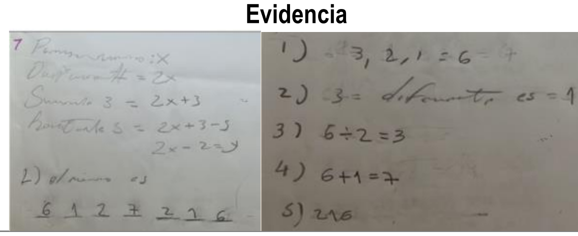
ii. Otro programa genera un número de 7 cifras, como se describe a continuación:

1. La primera cifra es un número menor que 9, que es igual a la suma de sus divisores. 2. La segunda cifra es la diferencia del sucesor de su cuadrado y su cuadrado. 3. La tercera cifra es igual a su tercera parte. 4. La cuarta cifra es igual a la suma de las dos primeras. 5. Es el orden inverso de los tres primeros. c. ¿Cuál es el número obtenido?

Resultado de aprendizaje RAA1: Proponer conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y expresarlas de manera verbal o simbólicamente.

Tabla 39. *Resultados del reto algebraico RAA1 por JNXS*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas		
	I	D	E	A	L
Profesora: *¿Cómo les fue con la solución chicas?* ***Emma:*** *El número que hace el programa es* $2x-2=y$. *Esa fue la fórmula que nos dio. En el segundo siguiendo la orden del programa creemos que los números son 6127216, porque buscamos y los divisores de 6 son 1,2,3 y seguimos haciendo lo que decía el programa, pero eso sí estuvo muy difícil.*	1	1	1	1	0
	Observación: En el desarrollo del reto, ellas tuvieron mucha dificultad al expresarlas cantidades haciendo uso de la variable, ellos siempre buscaban números aleatorios para realizar las operaciones y encontrar la solución del reto.				

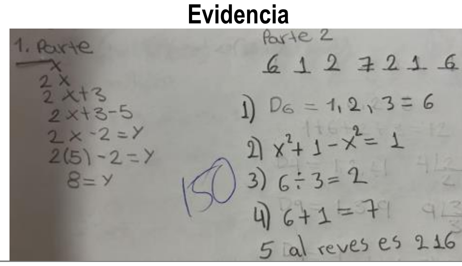
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Usan parcialmente el lenguaje algebraico para expresar la solución del reto.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Utilizan números aleatorios y por ensayo y error buscando cual cumple las condiciones del programa.
Justificación matemática (JM)	**2**	Realizan una única solución que cumple con las condiciones del enunciado.
Soluciones creativas (SC)	**2**	No establecen otras soluciones diferentes, pero encuentran una solución correcta al reto.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 40. *Resultados del reto algebraico RAA1 por SLL.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *Vamos con el equipo SLL.* ***Luis:*** *Profe planteamos en cada paso las ecuaciones que iban diciendo para poder ir encontrando las Soluciones del problema, nos dio* $2x - 2 = y$ *Luego vamos a comprobar si sirve para algún número, y encontramos que, si servía para 5, que era el número que pensamos.* ***Profesora:*** *¿ok y sirve para cualquier número?* ***Luis:*** *Sí señora*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Este grupo después de varios intentos logró encontrar la solución del reto, plantean ecuaciones lineales, y hacen una prueba con un número, y luego desarrollan la solución del otro reto sin mayor dificultad siguiendo la secuencia descrita en el reto.				

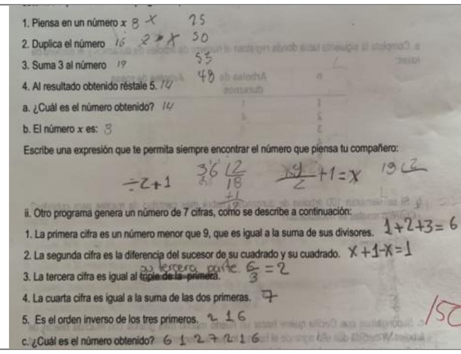
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Desarrollan la actividad y usan el lenguaje algebraico correcto para encontrar el valor solicitado.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Aplican las propiedades de las ecuaciones, y de las expresiones algebraicas para solucionar el reto.
Justificación matemática (JM)	**3**	Utilizan correctamente las propiedades de los números y de las igualdades para solucionar el problema.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Encuentran la solución del problema y buscan un número para solucionar el problema.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 41. *Resultados del reto algebraico RAA1 por Kingdooms.*

Evidencia


1. Piensa en un número x 8 x 25
2. Duplica el número 16 $2*x$ 50
3. Suma 3 al número 19 53
4. Al resultado obtenido réstale 5. 14 48

a. ¿Cuál es el número obtenido? 14
b. El número x es: 8

Escribe una expresión que te permita siempre encontrar el número que piensa tu compañero:

ii. Otro programa genera un número de 7 cifras, como se describe a continuación:
1. La primera cifra es un número menor que 9, que es igual a la suma de sus divisores. 1+2+3= 6
2. La segunda cifra es la diferencia del sucesor de su cuadrado y su cuadrado. X+1-X=1
3. La tercera cifra es igual al ~~triple de la primera~~. su tercera parte $\frac{6}{3}=2$
4. La cuarta cifra es igual a la suma de las dos primeras. 7
5. Es el orden inverso de los tres primeros. 2 1 6
c. ¿Cuál es el número obtenido? 6 1 2 7 2 1 6

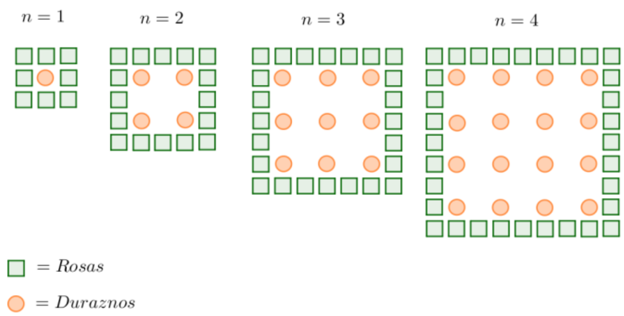
<table>
<tr><th rowspan="3">Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><th>I</th><th>D</th><th>E</th><th>A</th><th>L</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Profesora: Chicos Kingdooms ¿cómo van con la solución del reto?
Brian: Lo que hicimos primero fue pensar un número que fue 8, su doble es 16, luego le sumamos 3 dio 19, después al restarle 5 dio 14. Luego mi compañero hizo lo mismo con 25 el doble es 50, luego le sumamos 3 dio 53, le restamos 5 da 48.
Profesora: Ok y ¿lograron establecer una ecuación general para solucionar el reto?
Brian: No profe eso si no logramos hacerlo, pero podemos cambiar un poder de invisibilidad para este reto.</td><td colspan="5">Observación:
Este equipo no logra encontrar una expresión algebraica para lograr aplicarla a cualquier número y encontrar los números que inician y finalizan, su forma de comprender el problema los lleva a pensar en cantidades concretas para realizar las operaciones indicadas y encontrar el valor obtenido.</td></tr>
</table>

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Encuentran números y realizan las operaciones indicadas, pero no logran plantear una expresión algebraica.
Recursos de apoyo (RA)	**2**	Usan números enteros y las operaciones básicas para encontrar su solución, pero no hacen uso del lenguaje algebraico.
Justificación matemática (JM)	**2**	Justifican su solución con números concretos, pero no logran llevarlo a cabo con expresiones algebraicas generales.
Soluciones creativas (SC)	**2**	No encuentran la solución general del problema, pero explican dos soluciones alternas con cantidades numéricas concretas.

Fuente: Elaboración propia

En la solución de este reto implicó un grado de dificultad ya que al inicio no todos logran establecer una solución con expresiones algebraicas, algunos de ellos realizan la primera parte del reto con una cantidad específica y realizan las operaciones indicadas para llegar a la respuesta correcta, después de cierto tiempo logran identificar que la primera fase indica que el número es x y desde allí deben plantear la ecuación pero solo 4 de los 6 grupos logran establecer la relación y comprobación de las expresiones algebraicas obtenidas. Usan las etapas de la solución del problema y algunos llegan a la última etapa, realizando comprobaciones para cualquier número. Encontrar la expresión algebraica para obtener a x a partir de la expresión algebraica obtenida fue muy difícil para ellos y muy pocos lo lograron.

Reto 2: LA HUERTA (150 puntos). Cecilia desea sembrar en su finca duraznos, en un terreno cuadrado. Para protegerlos de los pájaros en el proceso de crecimiento planta rosas en todo el terreno. A continuación, se presenta un esquema en el que se puede ver el patrón de duraznos y de rosas para los primeros 4 casos:



a. Completa la siguiente tabla donde registran el número de árboles de duraznos y el número de rosas:

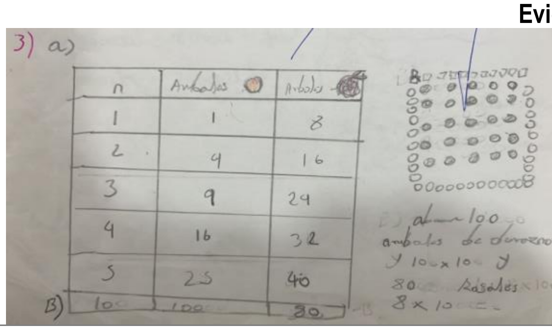
b. Si se siembran 100 árboles de duraznos, ¿habrá más cantidad de rosales para cubrirlos? ¿Cuántos rosales se necesitan?

c. Supongamos que Cecilia quiere hacer un huerto mucho más grande con muchas hileras de árboles. A medida que ella agrande el huerto, lo que aumentará más rápidamente es: ¿la cantidad de duraznos o la cantidad de rosas? Justifica tu respuesta.

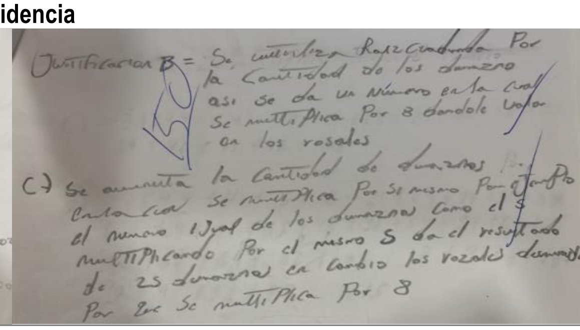
Resultado de aprendizaje RAA2: Establecer la relación entre los valores de una secuencia presentada en una tabla, y predecir los valores de las cantidades desconocidas para solucionar correctamente el problema.

Tabla 42. Resultados del reto algebraico RAA2 por JNXS.

Evidencia



n	Arboles	Arboles
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40
B) 100	100	800



Justificación	Etapas de solución de problemas

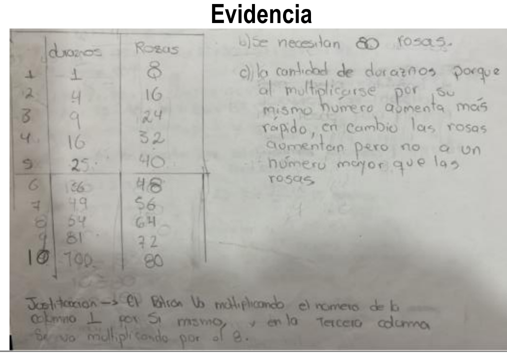
Profesora: *¿Como les fue con la solución chicas?* ***Emma:*** *Encontramos la secuencia para cada árbol, en el caso de los duraznos ellos van aumentando al cuadrado, en el caso de los rosales van aumentando de 8 en 8.* *Por lo tanto, al aumentar el número de duraznos a 100 tendríamos 80 rosales rodeándolos.* *Esto muestra que aumentarán más rápidamente los duraznos que los rosales.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Completan de manera correcta la tabla donde se puede determinar el número de rosales y de duraznos, incluso hacen una estimación con un n=10 y se apoyan en un gráfico para tratar de establecer y comprobar las estimaciones hechas.				

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Identifican la función con la que crecen el número de duraznos y de rosales, pero no establecen una expresión general para calcularlos.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realizan gráficos para determinar el número de árboles que habrá en cada caso, y poder solucionar el reto.
Justificación matemática (JM)	**2**	Explican la solución dada, de acuerdo con los valores obtenidos, pero no logran emplear una expresión algebraica para cualquier valor de n.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Desarrollan el reto y encuentran los patrones que determinan el crecimiento de cada árbol.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 43. *Resultados del reto algebraico RAA2 por Only Girls.*

Evidencia



Justificación	**Etapas de solución de problemas**				
Profesora: *Las escucho chicas Only Girls ¿cómo solucion**aron** el reto?* ***Lia:*** *Lo primero fue completar la tabla, hay vimos que aumentaba más rápido el número de rosas que de duraznos, pero como luego decía que cuántas rosas habría si hay 100 duraznos, entonces continuamos la tabla hasta 10, que da 100 duraznos y 80 rosales, porque en la primera columna va el numero en la segunda se multiplica el número por sí mismo y en la tercera se multiplica por 8.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Ellas deciden completar la tabla hasta 10, para ir verificando el número de árboles que hay de cada especie y poder determinar cuál es la cantidad que habrá de duraznos y de rosales y cuál de las dos aumenta más rápidamente. En su representación tabular logran solucionar el reto y dar respuesta a cada pregunta.				

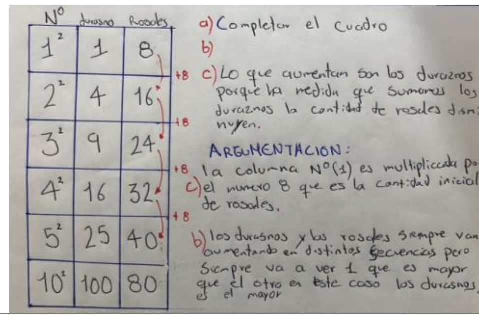
Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Explican la relación que determina el número de duraznos y de rosales en el problema, pero no lo expresan de forma algebraica.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Usan como apoyo la representación tabular para determinar el número de árboles de cada especie de acuerdo con el valor de n.

Justificación matemática (JM)	2	Solucionan el problema, pero no logran establecer una expresión algebraica para determinar el número de árboles de acuerdo con el valor de n.
Soluciones creativas (SC)	3	Usan una representación diferente para comprender el problema y dar la solución correcta de este.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 44. *Resultados del reto algebraico RAA2 por SLL.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
Profesora: *¿Chicos cómo van?* ***Luis:*** *Profe, completamos la tabla e identificamos que en los 5 primeros, aumentan más rápido los rosales que los duraznos, y luego al ver que uno aumenta al elevarlo al cuadrado, y otro al multiplicar por 8.* *Pero luego al aumentar a 10 el número de la primera columna, vimos que cambió porque había 100 duraznos que corresponde a 10^2 y luego aumentamos de 8 en 8 cada rosal y al final da 80.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Logran establecer la relación entre el número de rosas y de duraznos, completando la tabla y estableciendo el parámetro de cómo aumentan cada uno de los números. Ellos argumentan correctamente cada una de las preguntas y determinan el valor de cada secuencia correctamente de forma numérica.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	2	Determinan el patrón de aumento en cada columna y justifican correctamente la secuencia en cada árbol, numéricamente.
Recursos de apoyo (RA)	3	Usan la representación tabular para solucionar el reto, y determinar los valores para cada árbol.
Justificación matemática (JM)	2	Justifican correctamente la secuencia numéricamente, pero no simbólicamente.
Soluciones creativas (SC)	3	Expresan correctamente la solución del problema, y determinan los parámetros de crecimiento correctamente del problema.

Fuente: Elaboración propia

Este reto permitió identificar si los estudiantes logran identificar patrones de cómo aumentan cada uno de los árboles, determinar la relación numérica y luego simbólica para expresar cada cantidad correctamente. De los ocho casos, seis equipos resolvieron el reto haciendo uso de operaciones básicas, pero dos lo logran resolver estableciendo una relación algebraica correcta para cualquier valor de n. Esto evidencia que tienen más dominio en torno a lo concreto, que pueden manipular o calcular y que les cuesta mucho relacionar estas expresiones de forma simbólica o algebraica.

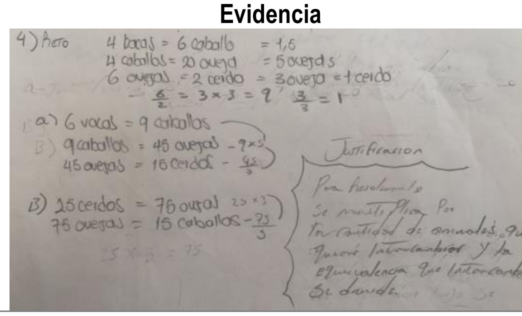
Reto 3: EL TRUEQUE (150 puntos) (Adaptado de los caminos del saber 8) Dos aldeas practican el trueque para comercializar sus animales, donde 4 vacas equivalen a 6 caballos, 4 caballos equivalen a 20 ovejas y 6 ovejas se pueden intercambiar por dos cerdos.

a. ¿Cuántos cerdos se necesitan para cambiarlos por 6 vacas? b. ¿Cuántos caballos se necesitan para cambiarlos por 25 cerdos?

Resultado de aprendizaje RAA3: Utilizar propiedades de las operaciones de números reales para resolver ecuaciones de primer grado.

Tabla 45. *Resultados del reto algebraico RAA3 por JNXS.*

Evidencia



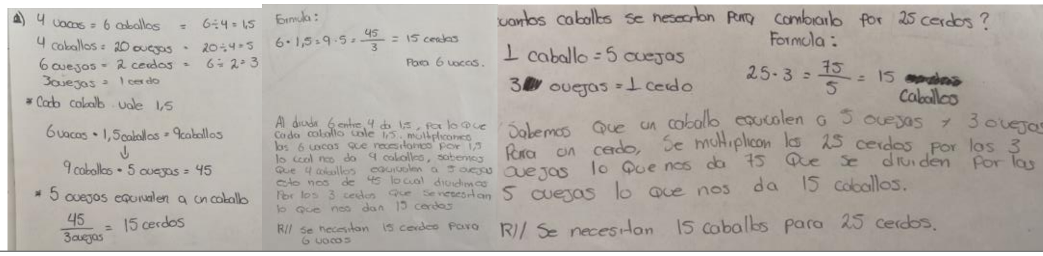
Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *¿Cómo les fue con el trueque?* ***Emma:*** *Lo primero que hicimos fue establecer la equivalencia de cada animal, donde 1 vaca es 1,5 caballos, 1 caballo son 5 ovejas, 3 ovejas un cerdo, entonces 6 vacas equivalen a 9 caballos, que son 45 ovejas y 15 cerdos. Por lo tanto 6 vacas equivalen a 15 cerdos.* *Ahora por la equivalencia se tiene que 25 cerdos son 75 ovejas estas equivalen a 15 caballos.*	**I** / **D** / **E** / **A** / **L** **1** / **1** / **1** / **1** / **1** **Observación:** En la solución vemos que ellos logran establecer equivalencias entre los animales, para solucionar correctamente el reto, pero no plantean una ecuación algebraica para encontrar la solución de este.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Lograron establecer las equivalencias de los animales para solucionar el reto, pero no usan el lenguaje algebraico.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Utilizan equivalencias, y razones entre los números para luego por medio de operaciones básicas encontrar la solución del reto.
Justificación matemática (JM)	**2**	Explican correctamente las equivalencias planteadas que usaron para solucionar el reto.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Usan el lenguaje natural de ellos para solucionar el problema, sin plantear ecuaciones lineales.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 46. *Resultados del reto algebraico RAA3 por Only Girls.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *¿Ya terminaron?* ***Lia:*** *Si profe. Mira lo que hicimos fue establecer la equivalencia de cada animal, luego lo que hicimos que establecer las equivalencias entre cada uno, por ello 6 caballos lo dividimos entre 4 vacas, dio 1,5, 20 ovejas ÷ 4 caballos que son 5, y 3 ovejas son un cerdo. Entonces 6 vacas lo multiplicamos por 1,5, de 9 caballos, lo multiplicamos por 5 eso dio 45 ovejas y como 5 ovejas son un caballo, entonces 45÷3 da 15 cerdos. Por lo tanto 6 vacas son 15 cerdos.* *Para la parte b sabemos que 1 caballo son 5 ovejas y que 3 ovejas son un cerdo, entonces multiplicamos 25 cerdos por 3 ovejas eso da 75 y lo dividimos por 5 ovejas, lo que nos da 15 caballos, por lo tanto 25 cerdos son 15 caballos.*	**I**: 1 · **D**: 1 · **E**: 1 · **A**: 1 · **L**: 0 **Observación:** Este reto fue muy bien justificado por el equipo, estableciendo equivalencias numéricas entre los animales, razones en cómo aumentan cada una de las variables, pero no plantearon ecuaciones lineales para llegar a la solución.

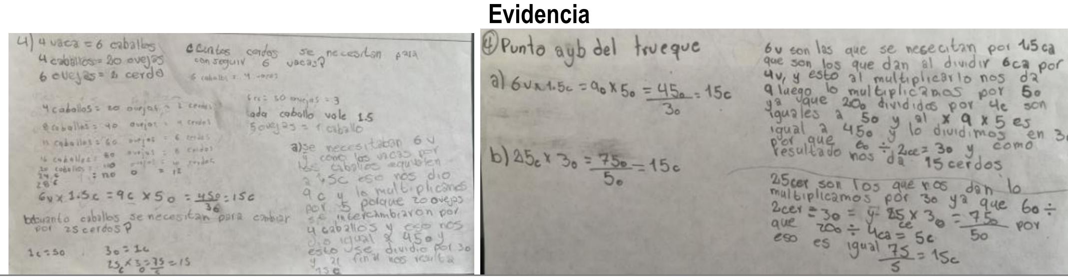
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	2	Establecieron equivalencias entre los animales para determinar la proporcionalidad entre ellos, pero no se evidencia el uso de ecuaciones lineales.
Recursos de apoyo (RA)	3	Por medio de equivalencias, y razones entre los números encuentran la relación de los animales y solucionan el reto.
Justificación matemática (JM)	2	Justifican correctamente las equivalencias y desarrollan correctamente el reto.
Soluciones creativas (SC)	3	Haciendo uso de las equivalencias y el lenguaje natural resuelven el reto sin mayor dificultad.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 47. *Resultados del reto algebraico RAA3 por LYL.*

Evidencia



Justificación	I	D	E	A	L
Profesora: *¿Cómo les fue equipo LYL?*	1	1	1	1	1

Sammy: *Bien profe, primero hicimos equivalencias de acuerdo con el número de animales, luego planteamos una ecuación para encontrar el número de caballos, donde* $\boldsymbol{6v * 1,5c = 9c}$*, luego* $\boldsymbol{9c * 5o = 45c\cancel{o} \div 3\cancel{o} = 15c}$. *Para la segunda parte la equivalencia que tuvimos en cuenta es que 5 ovejas son un caballo, y 3 ovejas son un cerdo entonces:* $\boldsymbol{25c * 3o = 75co \div 5o = 15}$ *caballos.*	**Observación:** El reto se soluciona correctamente y fue el único grupo que trató de plantear ecuaciones lineales al justificar su respuesta. Su justificación es correcta y usan un sistema de ecuaciones lineales para solucionarlo teniendo en cuenta las equivalencias dadas al inicio del reto.

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Proponen un sistema de ecuaciones para solucionar el reto de acuerdo con las equivalencias dadas.
Recursos de apoyo (RA)	3	Utilizan equivalencias entre los animales para encontrar la solución del reto y luego establecen un sistema de ecuaciones lineales que argumenten su solución.
Justificación matemática (JM)	3	Justifican por medio de ecuaciones lineales la solución al reto teniendo en cuenta la información suministrada.
Soluciones creativas (SC)	3	Solucionan el reto y justifican correctamente la solución del problema.

Fuente: Elaboración propia

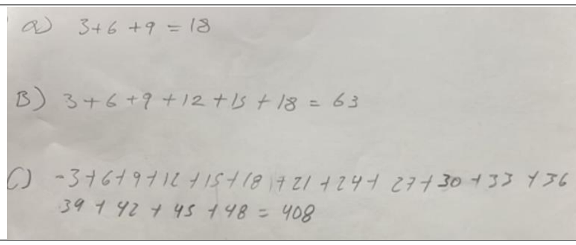
Todos los estudiantes plantearon equivalencias para solucionar el reto acorde con la información suministrada y la mayoría haciendo uso de operaciones básicas llegan a la solución del reto, pero no plantean un sistema de ecuaciones lineales para solucionarlo. En la justificación se evidencia dominio de las operaciones básicas, relaciones entre las equivalencias de los animales, y algunos plantean razones entre ellos para llegar a la solución. Al encontrar la solución del reto ninguno trató de hacer una prueba para establecer si era cierta o no la igualdad.

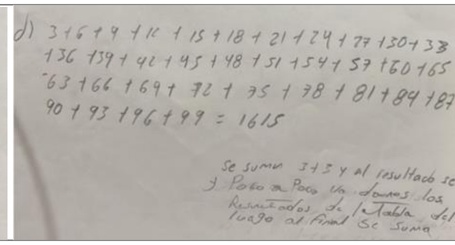
Reto 4: ¿CUÁNTO SUMAN? (150 puntos) a. ¿Cuál es el valor de la suma de los múltiplos del 3 del 1 al 10? b. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 1 al 20? c. ¿Cómo podrías hallar la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 3 y 50? d. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 20 al 100?

Resultado de aprendizaje RAA4: Identificar las expresiones algebraicas que se necesitan para solucionar problemas algebraicos y las aplica correctamente.

Tabla 48. *Resultados del reto algebraico RAA4 por JNXS.*

Evidencia





Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *¿Cómo les fue equipo JNXS?* ***Sammy:*** *Lo que hicimos fue sumar los números que son múltiplos de 3 de acuerdo como lo iban indicando en cada enunciado.* *En el primero la suma es 3+6+9=18.* *En el segundo son 3+6+9+12+15+18=63* *En el tercero lo mismo sumamos los múltiplos de 3 en 3 hasta 48 y eso dio 408. En el cuarto lo mismo hasta 99, eso dio 1615.* ***Profesora:*** *¿Pueden encontrar una expresión general para encontrar la suma sin necesidad de escribir todos los números?* ***Sammy:*** *No profe, eso si no sabemos cómo hacerlo.*	**I** | **D** | **E** | **A** | **L** 1 | 1 | 1 | 1 | 0 **Observación:** Para solucionar el reto ellas sumaron los números de acuerdo con lo que se indicaba en cada numeral, pero no relacionaron una expresión general para encontrar el valor de la suma de los números sin necesidad de realizar todas las operaciones. Los tres primeros numerales los realizan sin dificultad, en el numeral 4 cometen errores en el intervalo de números solicitados pues inician desde 3.

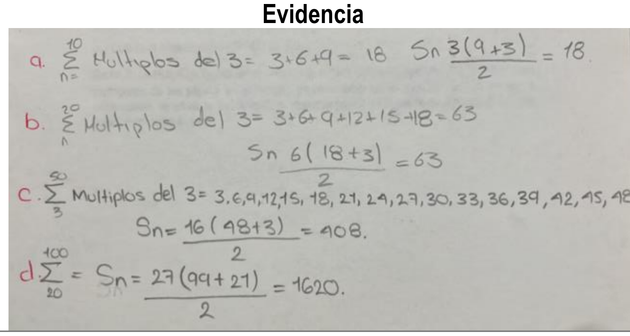
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	2	Solucionan el problema, pero sumando los números que se indican, no establecen una expresión para encontrar la suma de los múltiplos de 3.
Recursos de apoyo (RA)	3	Utilizan la calculadora para realizar la suma de los múltiplos de 3, de acuerdo con la información dada.
Justificación matemática (JM)	2	Justifican la solución dada y realizan las operaciones indicadas, enlistando los números, pero no emplean una expresión algebraica para solucionar el reto.
Soluciones creativas (SC)	2	Solucionan el reto haciendo uso de operaciones básicas, y criterios de multiplicidad de 3.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 49. *Resultados del reto algebraico RAA4 por Alfa Deltha y Omega.*

Evidencia



Justificación	I	D	E	A	L
Profesora: *¿Equipo Alfa, como les fue con la solución del reto?*	1	1	1	1	1

Pablo: *Identificamos primero los múltiplos de 3. Luego con la ayuda del video de Gauss, nos dimos cuenta de* ***que*** *también se podía aplicar en este caso:* *En el primero para la suma de 3+6+9=18, sería* $S_n = \frac{3(9+3)}{2} = 18$ *En el segundo es 3+6+9+12+15+18=63, sería* $S_n = \frac{6(18+3)}{2} = 63$ *Y así hicimos con los otros y nos dio en el c la suma es 408 y en el d. 1620.*	**Observación:** En este curso se da una ayuda al grupo para que puedan encontrar una solución al reto y fue un segmento de un video de la suma de los números del 1 al 100 que realizó Gauss. Ellos lo aplicaron y comprobaron que la expresión para encontrar la suma también funcionaba para los múltiplos de 3 en cada numeral y lo comprobaron primero haciendo la suma de los términos indicados y luego aplicando la expresión algebraica.

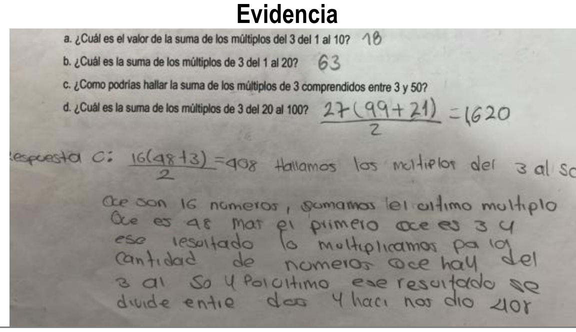
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Establecen una expresión algebraica para realizar la suma de los múltiplos de 3 y comprueban su respuesta.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realizan las sumas indicadas en cada numeral y utilizan la calculadora para comprobar sus respuestas.
Justificación matemática (JM)	3	Explican correctamente la solución del reto y la prueba que emplearon para comprobar su respuesta.
Soluciones creativas (SC)	3	Desarrollan correctamente el reto y comprueban algebraicamente la solución dada.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 50. *Resultados del reto algebraico RAA4 por Mystical*

Evidencia


a. ¿Cuál es el valor de la suma de los múltiplos del 3 del 1 al 10? 18
b. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 1 al 20? 63
c. ¿Como podrías hallar la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 3 y 50?
d. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 del 20 al 100? $\frac{27(99+21)}{2} = 1620$

espuesta C: $\frac{16(48+3)}{2} = 408$ Hallamos los multiplos del 3 al 50 que son 16 numeros, sumamos el ultimo multiplo que es 48 mas el primero que es 3 y ese resultado lo multiplicamos por la cantidad de numeros que hay del 3 al 50 y por ultimo ese resultado se divide entre dos y haci nos dio 408

Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: *Chicas Mystical, ¿cómo les fue con la solución del reto?* ***Molly:*** *Profe utilizamos la ayuda del reto del video de Gauss donde* $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *y encontramos que son en el a, 18. en el b. 63, en el c. 408 y en el último tenemos que es 1620.* *Lo que hicimos fue escribir en cada caso el número de múltiplos que hay luego multiplicarlo por la suma del último múltiplo con el primero, y el resultado dividirlo entre 2.*	1	1	1	1	1
	Observación: El grupo pidió cambiar un cristal por la ayuda para solucionar el reto, y la aplicaron en cada uno de los numerales del reto. Una vez aplicaron la expresión algebraica, corroboraron con los dos primeros numerales que la solución era la correcta.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Usan correctamente la expresión algebraica para encontrar la suma de los múltiplos, en cada tarea del reto.
Recursos de apoyo (RA)	3	Desarrollan las sumas indicadas en los dos primeros numerales y utilizan la calculadora para efectuar las operaciones correctamente.

Justificación matemática (JM)	**3**	Justifican correctamente la solución del reto y validan sus soluciones correctamente.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Encuentran las sumas en cada caso y justifican las operaciones realizadas.

Fuente: Elaboración propia

En el desarrollo de este reto todos los equipos, lograron realizar los numerales 1 y 2, sin dificultad, pero en el momento de realizar la suma para números más grandes, y algunos realizan la suma incorrectamente u omiten alguno de los múltiplos lo cual afecta el resultado de la suma. El establecer la solución aplicando expresiones algebraicas solo pudo ser realizada por dos equipos, Alfa, Deltha y Omega y Mystical, quienes cambiaron cristales para completar el reto correctamente aplicando expresiones algebraicas en su solución. Los equipos como SLL, Boom girls, y Kingdooms, no lo realizaron.

Con relación a las etapas de la solución del problema se pudo observar que fueron desarrolladas a la hora de abordar y solucionar el problema, y lo argumentan en el momento de la validación de las soluciones de cada reto, sin embargo, algunos grupos no finalizaron en su totalidad el reto por cuestiones de tiempo y porque en algunos cursos se debía salir a una formación en el patio.La segunda parte de la fase de validación fueron los retos individuales, que se dejó como actividad extra-clase para que los estudiantes reforzaran con problemas rutinarios lo temas vistos en el mundo. Esta fase fue desarrollada por todos los estudiantes, en su presentación se les indicó justificar sus procedimientos y respuestas, para obtener puntos adicionales y terminar con la fase de validación. A continuación, se muestran algunos de las soluciones realizadas por ellos:

Reto algebraico individual 1: Torres de cubos.

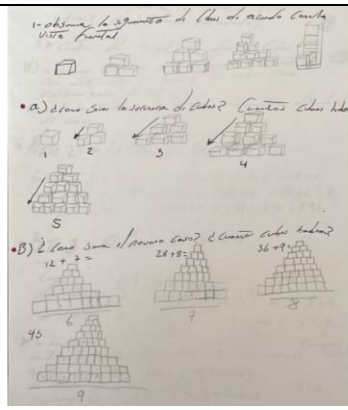
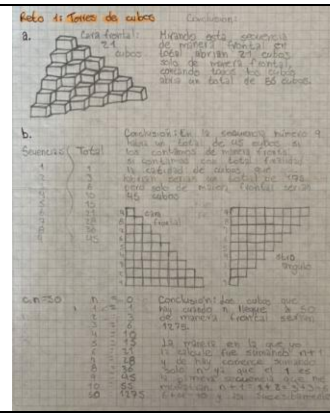
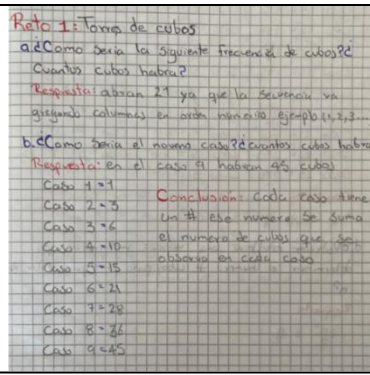
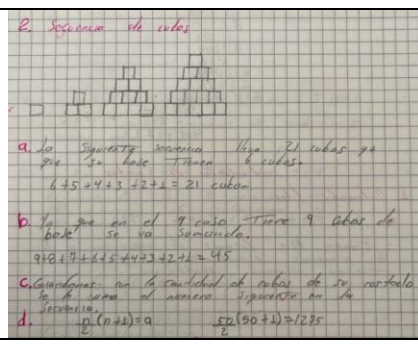
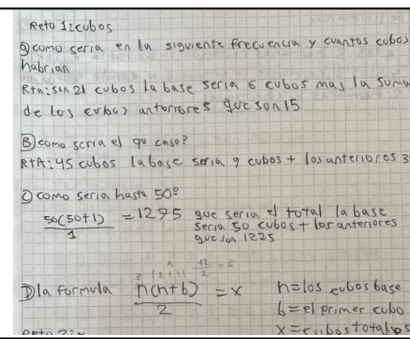
	
Emma	**Sammy**
	
Luis	
	
Molly	**Pablo**

Figura 24. *Soluciones propuestas al reto Torre de cubos.*

Este reto fue realizado por todos los estudiantes de manera individual, en su desarrollo vemos como algunos de ellos usan como recurso realizar los gráficos como es el caso de Emma y Sammy, quienes para comprender el problema, realizan la representación gráfica que muestra la secuencia de cubos para comprender el reto y darle la solución; otros como Luis realizan la suma del número de cubos que se ve en cada imagen y hace la lista de todas las secuencia de cubos hasta obtener su solución. Brian realiza una representación tabular para comprender el problema y poder determinar el número de cubos que continúa en la secuencia. Por último, tenemos el uso de una expresión algebraica como lo hacen Pablo y Any quienes usan la expresión empleada en el reto grupal 4 para encontrar la cantidad de cubos en cada caso.

Reto algebraico individual 2: Fecha de nacimiento.

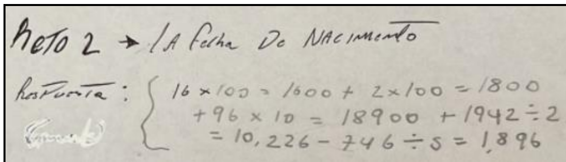
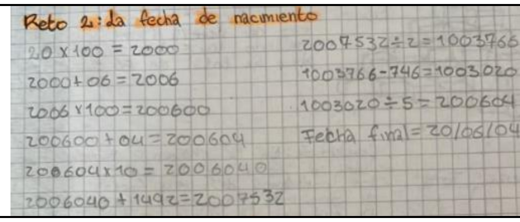
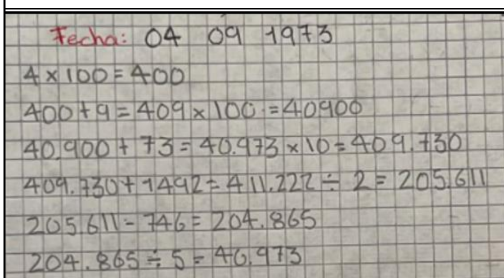
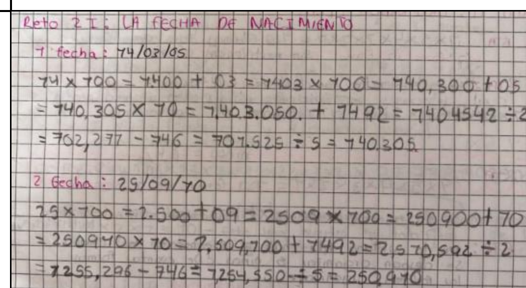
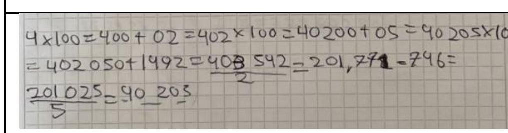
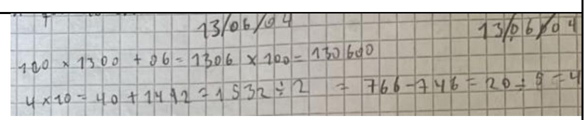
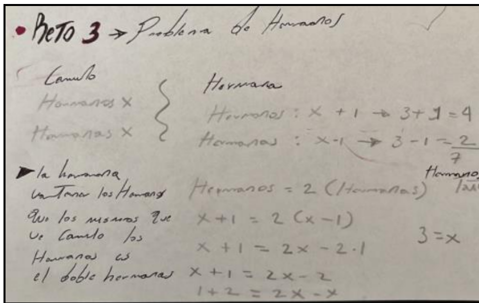
	
Emma	**Sammy**
	
Luis	**Any**
	
Pablo	**Brian**

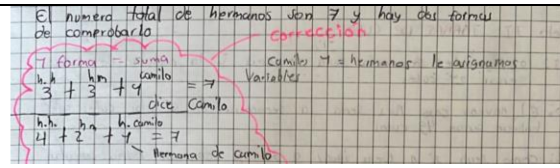
Figura 25. *Soluciones propuestas al reto Fecha de nacimiento.*

En el desarrollo de este reto, se hizo necesario explicarlo en clase ya que ellos no tenían claridad sobre lo que debían hacer, más aún cuando se dejó como actividad extra clase, algunos de ellos como Emma y Brian lo realizaron pero no lograron encontrar la fecha de nacimiento de la persona a la cual le iban averiguar la edad, porque realizaron mal las operaciones que se indican en el enunciado, los otros lo realizaron correctamente e incluso algunos como Any lo hizo a dos personas distintas para comprobar si era posible hacerlo a cualquier persona.

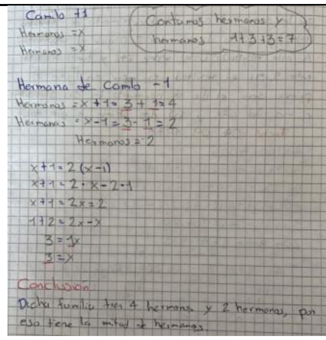
Reto algebraico individual 3: Problema de hermanos



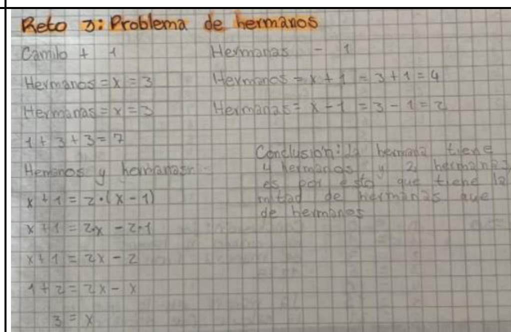
Emma



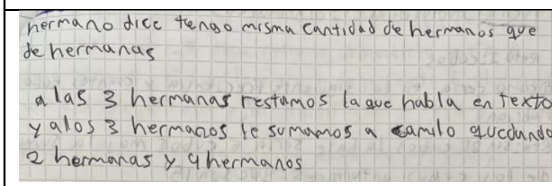
Any



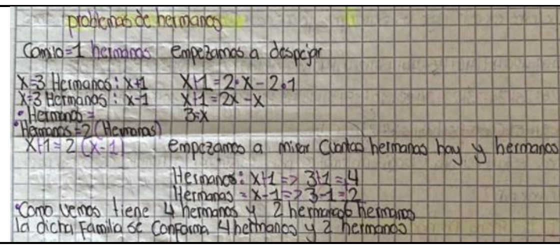
Luis



Sammy



Pablo



Molly

Figura 26. *Soluciones propuestas al reto problemas de hermanos.*

En la solución de este reto vemos que lo estudiantes plantean y solucionan una ecuación lineal de primer grado para encontrar la solución del reto, y luego realizaron su respectiva comprobación, analizando el número de hermanos que tiene camilo y el número de hermanos que tiene la hermana. Otros estudiantes como Any y Pablo resuelven el reto y justifican sus soluciones haciendo uso de palabras o números que expresan la cantidad de hermanos y hermanas que tiene cada uno. Por su parte Emma, Any y Luis indican al final que en la familia son 7 hermanos incluyendo al personaje que está en el diálogo del problema.

4.5.3 Resultados obtenidos en la fase de aplicación de retos algebraicos.

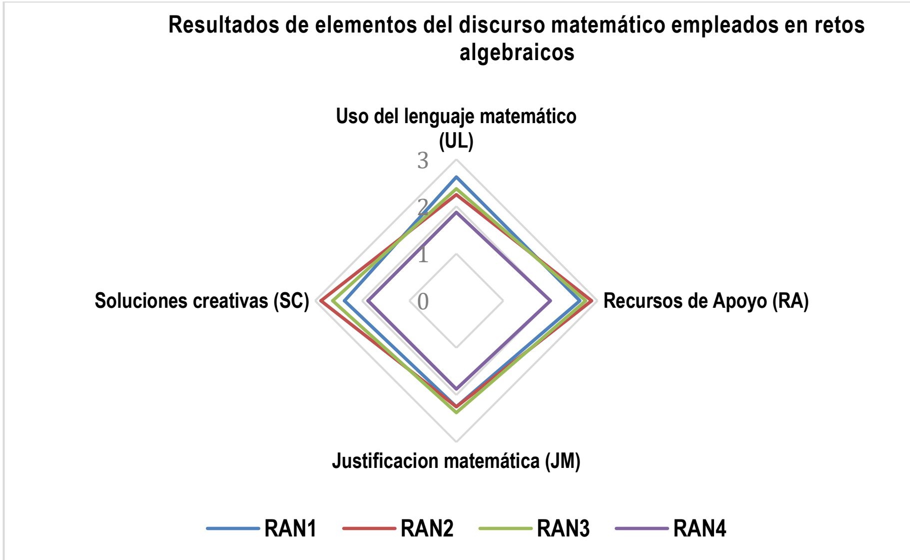
En esta oportunidad los estudiantes debían derrotar al Ganet pico azul, para ello debían de manera individual resolver 10 retos de olimpiadas matemáticas sobre pensamiento algebraico. Se mantiene la misma dinámica del juego que en los retos numéricos, solo que en esta parte se hace uso del sonómetro para controlar el nivel de indisciplina y ruidos en la clase. Al finalizar la actividad los estudiantes lograron superar la prueba y ganarle al Ganet pico azul, donde tuvieron 7 soluciones correctas de los 10 problemas, e hicieron uso de 3 cristales para cambiar la pregunta o en el caso de dos estudiantes de 1102 y 1103, usaron el poder de invisibilidad para quedar eximidos que contestar la pregunta del reto.

4.5.4 Conclusiones generales del mundo retos algebraicos.

En el desarrollo del mundo algebraico participaron los ocho estudiantes, cabe resaltar que, en el desarrollo de las actividades, no todos hacen el uso del lenguaje o expresiones algebraicas para solucionar los retos, pero si hacen uso de las etapas de la solución de problemas del modelo Ideal y emplearon elementos del discurso matemático cuando se realiza el proceso de validación y asignación de puntos, de forma individual o grupal. También se hace un análisis de los elementos de inclusión que se tuvieron en cuenta para integrar en las clases a los estudiantes con discapacidad y DC. A continuación, se presenta los resultados obtenidos.

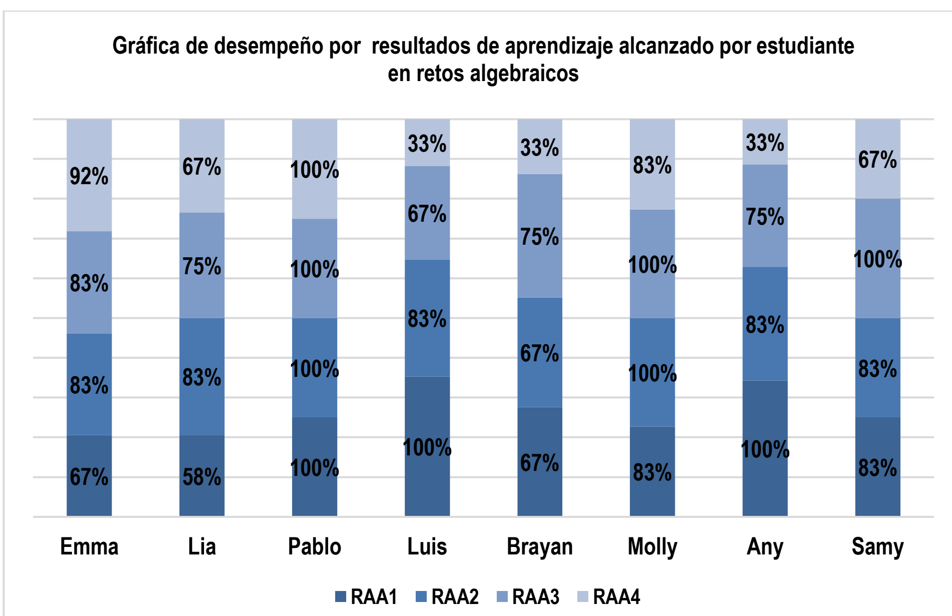
Los elementos del discurso matemático empleados por los estudiantes son los recursos de apoyo, pues los estudiantes usan representaciones gráficas, y operaciones básicas para comprender y dar la solución a los retos.

Gráfica 7. *Resultados de elementos del discurso empleados por los estudiantes en el mundo de los retos algebraicos.*



Sin embargo, es importante mencionar que ellos no plantean ni utilizan expresiones algebraicas a la hora de solucionar los retos, por ello el uso del lenguaje matemático que se esperaba fuera desde lo algebraico y la justificación matemática, son los elementos del discurso con menor valoración en el desarrollo de los retos algebraicos. El reto algebraico 4 varios grupos no lo realizaron, porque no lo alcanzaron a desarrollar en la clase y por ende sus ponderaciones son tan bajas, esto se debe a que el reto 3 empleó más tiempo del esperado para su solución lo cual impidió que el 37,5% de los grupos no lo desarrollaran.

Gráfica 8. *Resultados de aprendizaje alcanzado por estudiante en retos algebraicos*

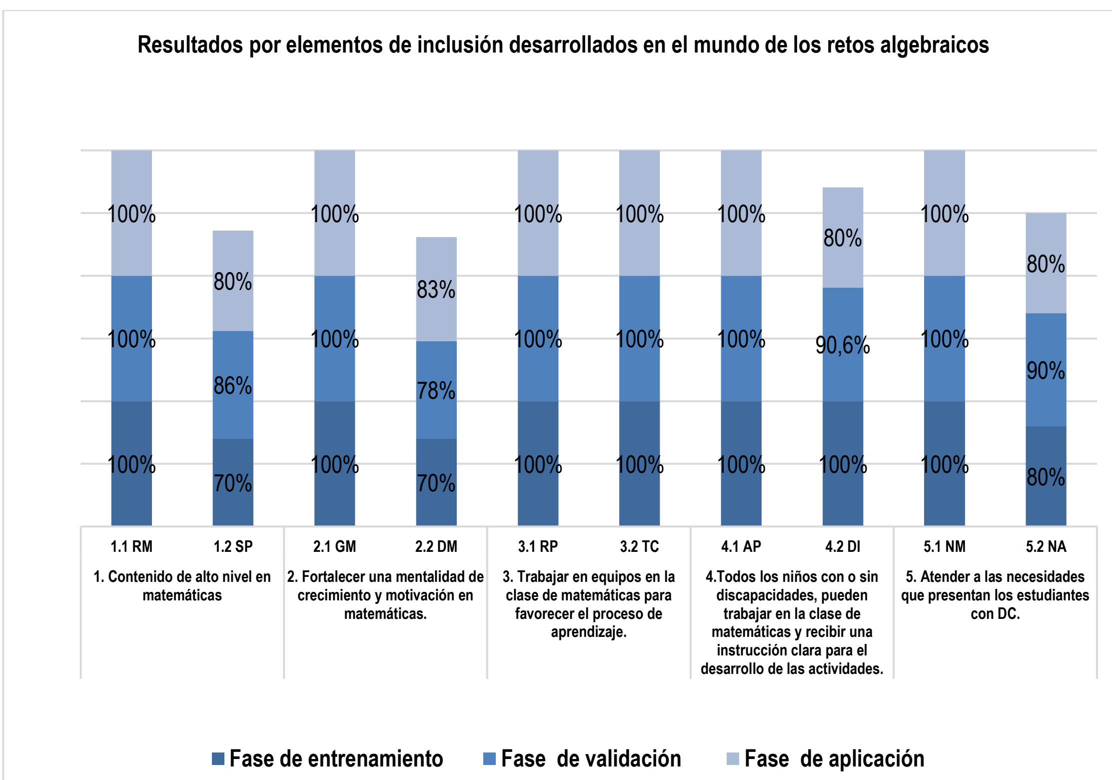


Al revisar los resultados de aprendizaje que alcanzaron los estudiantes en la solución de los retos, vemos que el reto 4 hay un desempeño más bajo, pues no lo realizaron completamente; también es importante mencionar que ellos en varios de los retos no alcanzan el 100% en el resultado de aprendizaje, pues a pesar de que resuelven el problema correctamente, no hay uso del lenguaje algebraico en la solución del reto que se esperaba, ellos afianzaran y aplicaran en el desarrollo de este mundo.

Resultados desde la inclusión

Con base a los elementos de inclusión es importante mencionar que para el desarrollo de este mundo se tuvieron en cuenta los mismos indicadores, pero hay diferencias tomando en cuenta que no todos los estudiantes plantearon y solucionaron los retos haciendo uso de expresiones algebraicas, sino que realizaron los cálculos haciendo uso de las operaciones básicas y en otros casos contando el número de situaciones que se daban.

Gráfica 9. *Resultados por elementos de inclusión desarrollados en los retos algebraicos.*



Esto se ve reflejado en los indicadores 1.2 SP de solución de problemas, y en el indicador 2.2 DM de elementos del discurso matemático, pues no en todos los casos desarrollaron la fase 3 y en los retos grupales no todos alcanzaron a realizar los 4 retos.

Resultados desde las necesidades

En este mundo se continúa con la formulación de preguntas en los retos, para que los estudiantes puedan abordar los problemas y solucionarlos, esto contribuye a mejorar su atención e interés por el desarrollar las actividades propuestas en los retos asignados.

Frente a las necesidades intelectuales en el desarrollo de cada reto, se sigue evidenciando la necesidad de certeza cuando se validan las soluciones de los retos, la necesidad de casualidad donde debe verificarse si realmente comprendió la tarea que se está desarrollando, la necesidad de cuantificar donde se relaciona estrechamente con los recursos empleados por los estudiantes al solucionar problemas como el uso de gráficos, para continuar las secuencias, el uso de la calculadora para realizar las operaciones correctamente, y la necesidad de comunicación cuando en el proceso de verificación usan elementos discursivos para justificar y validar sus respuestas.

Es importante mencionar que frente a la necesidad de estructura la fase de entrenamiento les brinda a los estudiantes, elementos teóricos que pueden aplicar en el resto de las fases, pero esta no logró que todos afianzaran el lenguaje algebraico, en la solución de problemas, porque ellos tienen dificultan a la hora de plantear y solucionar ecuaciones lineales, o así se evidenció con la solución propuesta por ellos en las fases del diseño instruccional de los retos algebraicos.

4.6 Análisis del mundo de los retos de conteo (RC)

Para el desarrollo del mundo del conteo se han integrado dos elementos importantes, en la fase de entrenamiento se realizaron más ejemplos de problemas rutinarios y no rutinarios (12 ejemplos) ya que los estudiantes manifestaron no tener conocimiento de técnicas de conteo. También se integran dos herramientas para el desarrollo de cada fase que son el cronómetro, y el temporizador para el desarrollo de cada reto grupal e individual, porque en el mundo algebraico vimos que los estudiantes emplearon en algunos retos mucho más tiempo del planeado y no alcanzaron a terminar o completar el último reto propuesto en la fase de validación.

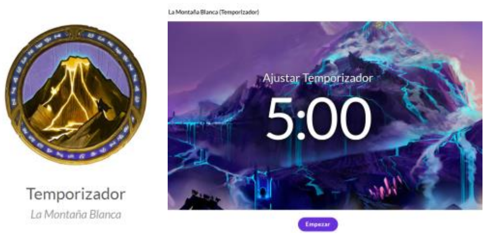


Figura 27. *Vista del temporizador en la plataforma classcraft.*

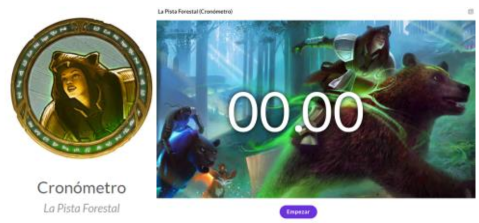


Figura 28. *Vista del cronómetro en la plataforma classcraft.*

El desarrollo de este mundo se planeó desarrollar en tres semanas, pero con el desarrollo de la fase de entrenamiento y la fase de validación, se empleó más tiempo y se realizó durante cuatro semanas. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en cada fase descrita en el diseño metodológico:

4.6.1 Resultados obtenidos en la fase de entrenamiento de retos de conteo.

Para realizar la fase de entrenamiento, se emplearon dos semanas cada una con una intensidad horaria de tres horas semanales de 45 minutos, en cada curso, se plantearon retos sobre principio de adición, principio de multiplicación, técnicas de conteo como factorial, combinaciones, permutaciones y problemas de cardinalidad de conjuntos. Los retos fueron desarrollados por los estudiantes sin dificultad, su estrategia inicial de solución fue realizar todas las combinaciones y contar las soluciones obtenidas, para saber cuántos elementos daban en cada reto. A continuación, se muestran algunas de las soluciones dadas por los estudiantes en esta fase.

Tabla 51. *Solución del problema 3 de entrenamiento de retos de conteo propuesto por Emma.*

Evidencia

Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	D	E	A	L
Emma: *Para saber cuántas formas hay para que ellos estén en la fila esperando, colocamos cada inicial de los nombres de los estudiantes y los vamos intercalando para ver todas las filas que se puedan realizar y las contamos al final. Cada letra se puede combinar 6 veces y como son 4 niños en total son 6*4=24 formas.*	1	1	1	1	1
	Observación: Ella realiza todas las combinaciones de las iniciales de los nombres, para saber cuántas filas se pueden realizar, no presenta dificultad a la hora de realizarlo.				

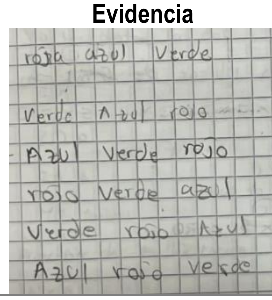
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Establece una relación entre el número de veces que se puede combinar cada letra y el número de elementos del conjunto.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realiza de manera práctica las combinaciones de cada una de las iniciales de los nombres.
Justificación matemática (JM)	3	Usan técnicas de conteo realizando cada una de las combinaciones y contando al final los resultados obtenidos.
Soluciones creativas (SC)	3	Resuelve el reto y al final se da cuenta del número de conjuntos que puede formar con cada letra y los multiplica por el número de elementos del conjunto.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 52. *Solución del problema 6 de entrenamiento de conteo propuesto por Any.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	D	E	A	L
Any: *Para este reto, lo que hice fue mezclar cada una de las esferas, de acuerdo con las posibilidades como pueden ir saliendo, en total encontramos 6 maneras*	1	1	1	1	1
	Observación: Su técnica de solución del problema es enlistando todas las combinaciones de colores de las tres esferas.				

Elementos del discurso matemático

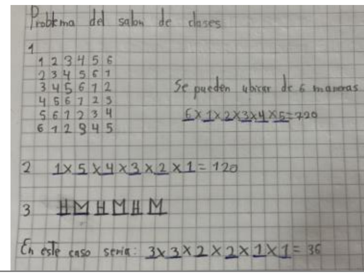
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Aplica como técnica de conteo realizar la lista de todos los elementos posibles que pueden formarse en el conjunto.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realiza una lista de las combinaciones de todos los elementos.

Justificación matemática (JM)	**3**	Desarrolla la lista de todos los elementos posibles que puede formarse en el conjunto.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Encuentra la solución del reto y justifica su respuesta.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 53. *Solución del reto del salón de clases propuesto por Luis.*

Evidencia



Justificación	**Etapas de solución de problemas**				
Luis: *Profe yo iba hacer como en los otros y empecé haciendo todas las combinaciones de los números para saber cómo se ordenan los estudiantes, pero eso está muy demorado, entonces lo que hice fue aplicar el principio de multiplicación teniendo en cuenta el lugar que cada uno ocupa ya queda sentado, entonces los otros van quedando libres.*	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Inicialmente su estrategia es iniciar haciendo una combinación de los números, pero ve que es tedioso, entonces lo que hace es aplicar el principio de multiplicación e ir ubicando en cada lugar la posición que ocupa cada uno.				

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**3**	Aplica como técnica de conteo el principio multiplicativo, de acuerdo con el lugar ocupado por cada estudiante.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realiza una representación gráfica de cada situación del problema y luego multiplica los resultados obtenidos.
Justificación matemática (JM)	**3**	Justifica y desarrolla los procedimientos correctos al encontrar la solución del reto, aplicando las técnicas de conteo apropiadas.
Soluciones creativas (SC)	**3**	Soluciona correctamente el reto, y busca estrategias correctas para llegar a su solución.

Fuente: Elaboración propia

4.6.2 Resultados obtenidos en la fase de validación de retos de conteo.

Se han propuesto cuatro retos relacionados con retos de técnicas de conteo, los estudiantes continuaron con sus equipos de trabajo y desarrollaron los retos propuestos. En esta parte del curso solo se tuvo a siete de los casos porque Molly salió a licencia de maternidad. A continuación, se muestran los resultados por los equipos en cada reto con su respectivo resultado de aprendizaje:

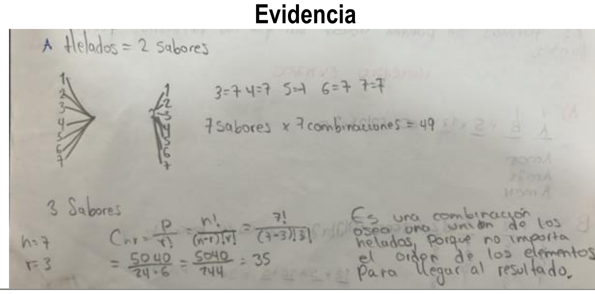
Reto 3: LA HELADERÍA (150 puntos) El fin de semana Camila va con sus padres a la heladería donde venden conos de una, dos y tres bolas de helados. En total hay 7 sabores para escoger, por lo que ella siempre elige un cono de 2 sabores distintos.

a. Si ella cada vez que va a la heladería pide un helado de dos sabores, ¿Durante cuántos fines de semana podrá comer helados de diferentes combinaciones de bolas de helado? b. ¿Cuántas combinaciones de sabores puede hacer de sus sabores si siempre pide tres sabores distintos?

RAC1: Establece mediante técnicas de conteo sencillas el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio.

Tabla 54. *Resultados del reto de conteo RAC1 por el equipo JNXS*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
	I	D	E	A	L
Profesora: Hola chicas ¿cómo van? ***Emma:*** *Profe, nosotras creemos que es una combinación. Uno puede pedir helados del mismo sabor, entonces en total puede pedir 7 sabores de cada sabor en cada fin de semana, y 7*7 sabores, es decir que ella puede pedir helados de diferentes sabores durante 49 fines de semana.* Por otro lado, en el segundo punto dice que es una combinación entonces aplicamos la técnica de conteo de la combinatoria, que vimos en la clase, entonces $\boldsymbol{n = 7}$ y $\boldsymbol{r = 3}$, porque no importa el orden de los sabores, y eso nos dio 35.	1	1	1	1	1
	Observación: Al iniciar el problema vemos que ellas deciden hacer un diagrama de árbol, y cada número representa los sabores, ellas van mirando cómo los pueden combinar y establecen al final que deben aplicar el principio de multiplicación. En el segundo numeral, al estar la palabra combinación ellas aplican la técnica de conteo de la combinación y establecen que a la hora de pedir un helado el orden de los sabores no importa, por lo tanto, hay 35 formas de pedirlo.				

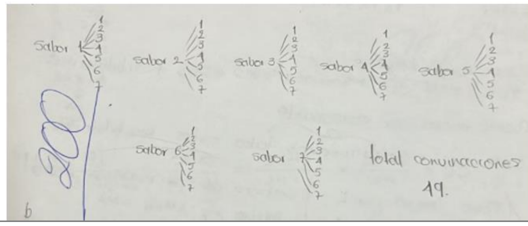
Elementos del discurso matemático

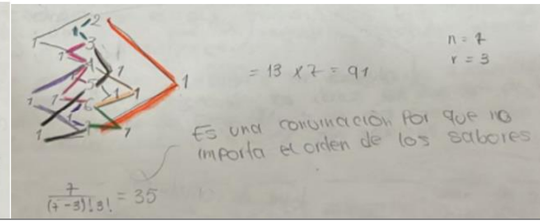
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Establece las técnicas de conteo que debe emplear para solucionar el reto y las aplica correctamente.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realiza un diagrama de árbol para dos elementos del conjunto y al final identifica la técnica de conteo adecuada para su solución.
Justificación matemática (JM)	3	Justifica y desarrolla los procedimientos correctos al encontrar la solución del reto, aplicando las técnicas de conteo vistas en clase.
Soluciones creativas (SC)	2	Aplica correctamente las técnicas de conteo necesarias para la solución del problema.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 55. *Resultados del reto de conteo RAC1 por el equipo Only Girls.*

Evidencia





Justificación	**Etapas de solución de problemas**				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora: Hola chicas Only girls ¿cómo van con el reto? ***Lia:*** *Profe nosotros hicimos las combinaciones que se pueden hacer de cada sabor y cada uno da 7 y al final los sumamos, eso nos da 49.* *Luego intentamos hacer lo mismo para el de tres sabores, pero nos confundimos, entonces lo que hicimos fue aplicar la fórmula de la combinación y eso nos dio 35, porque no importa el orden de los sabores.*	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Observación: Vemos que para ellas comprender el reto realizan un diagrama de árbol para cada sabor y al final aplican el principio de la suma para saber cuántos fines de semana gastarán para comerlos. En el segundo problema tratan de hacer el mismo arreglo, con colores, pero se confunden y al final deciden realizar la combinación para solucionar el reto.				

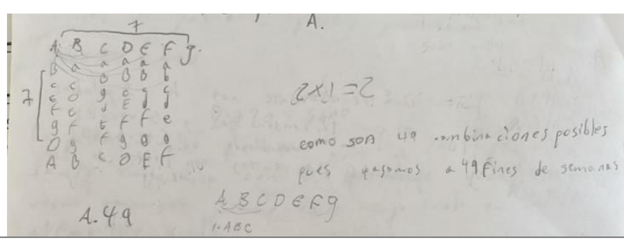
Elementos del discurso matemático

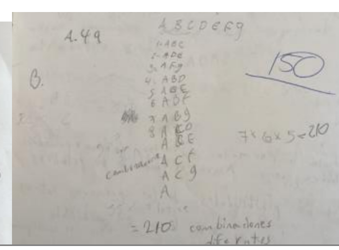
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Utilizan las técnicas de conteo que debe emplear para solucionar el reto y las aplican correctamente.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realiza un diagrama de árbol para cada elemento del conjunto y aplica el principio de la suma para encontrar todos los subconjuntos.
Justificación matemática (JM)	3	Sus argumentos empleados son válidos para la solución del problema y establece las técnicas de conteo necesarias para su solución.
Soluciones creativas (SC)	3	Utiliza diferentes técnicas de representación para comprender el reto y solucionarlo correctamente.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 56. *Resultados del reto de conteo RAC1 por el equipo Kingdooms.*

Evidencia





Justificación	**Etapas de solución de problemas**				
	I	**D**	**E**	**A**	**L**
Profesora ¿cómo solucionaron el reto? ***Brian:*** *Nosotros colocamos en filas y en columnas los sabores y empezamos a combinar los sabores de cada fila con cada columna, si son sabores diferentes nos da 42, pero si se pueden repetir, ubicamos nuevamente la primera fila al final y nos dio 49.* Al final en el momento de ordenar de a tres comenzamos a ver que era muy largo, entonces para seleccionar el sabor 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: En la primera parte del reto realizan un arreglo de matriz cuadrada de 7x7, donde cada letra representa un sabor y combinan todos los sabores cruzando filas con las columnas. Así logran obtener 49 combinaciones.				

hay 7 maneras, para el segundo 6 y para el tercero hay 5 maneras porque los sabores no se repiten, entonces multiplicando cada opción tenemos 7*6*5=210 formas. .	En la segunda parte del problema, ellos inician combinando de a tres sabores y enlistan algunas de ellas, pero al final se dan cuenta que son muchos los arreglos a realizar y aplican la técnica de multiplicación obteniendo 210 combinaciones de cada sabor.

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Justifican su solución a partir de la técnica de conteo empleada, pero no tiene en cuenta el número de subconjuntos que deben formarse en el numeral dos.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realizan una representación gráfica de matriz para solucionar el reto y realizar el número de combinaciones. La representación en el numeral dos no les permitió solucionarlo correctamente.
Justificación matemática (JM)	**2**	Justifican el problema correctamente, pero no tienen en cuenta el número de subconjuntos que deben formarse en cada fin de semana.
Soluciones creativas (SC)	**2**	La representación gráfica realizada permite que ellos comprendan el problema y lo solucionen, pero no resulta conveniente para que desarrollen completamente el reto.

Fuente: Elaboración propia

En la solución de este reto, vemos cómo los estudiantes para comprender el problema en los recursos de apoyo hacen diferentes tipos de representaciones gráficas, o arreglos para realizar o aplicar las técnicas de conteo necesarias para verificar y solucionar adecuadamente. A medida que se avanza en el desarrollo de los mundos vemos que los estudiantes han mejorado en el uso del lenguaje matemático y en la justificación matemática ya que hay más fluidez a la hora de argumentar sus soluciones, utilizan los elementos conceptuales desarrollados en la fase de entrenamiento y preguntan cuando presentan dudas y a medida que hacen uso del discurso matemático buscan estrategias para realizar el reto, justificar sus soluciones, procedimientos en la solución para avanzar obtención de sus puntos.

Reto 2: **LA CENA** (150 puntos) Una familia compuesta por 6 integrantes que son papá, mamá, abuelo, abuela y 2 hijos, quieren sentarse para la cena de nochebuena en una mesa circular.

a. ¿De cuántas maneras podrían ubicarse si no hay ningún tipo de restricción?

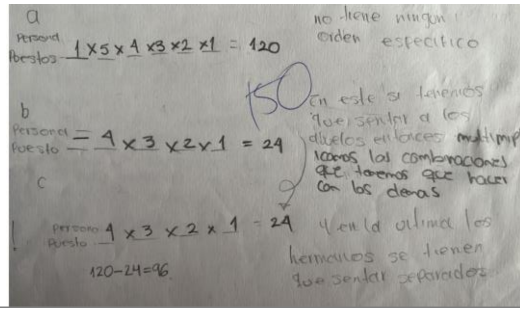
b. Si el abuelo y la abuela siempre se sientan juntos, ¿de cuántas formas podrían sentarse?

c. Si los dos hijos no pueden sentarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden ubicarse en la mesa?

RAC2: Identifica la técnica de conteo apropiada para realizar permutaciones circulares y las utiliza para solucionar problemas.

Tabla 57. *Resultados del reto de conteo RAC2 por el equipo Only girls.*

Evidencia



Justificación	Etapas de solución de problemas				
Profesora: Hola chicas ¿cómo van? ***Lia:*** *En la solución del problema aplicamos vemos que en el caso a no importa el orden de acomodación en la mesa, entonces es una permutación donde una es fijo y lo que hicimos fue multiplicar el orden de lugares en la mesa disponibles que son* $\mathbf{5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720}$ *maneras de ubicarse en la mesa. En el caso de que los abuelos están juntos entonces seria 4 lugares disponibles que es* $\mathbf{4 * 3 * 2 * 1 = 24}$ *formas de ubicar al resto de personas. En el caso de que los hijos no puedan estar juntos, hacer la resta de los dos numerales anteriores y nos da 96 maneras de ubicar a los hijos para que no estén juntos.* .	**I**	**D**	**E**	**A**	**L**
	1	**1**	**1**	**1**	**0**
	Observación: En este caso ellas realizan la actividad como si fuese una permutación lineal, y no tiene en cuenta la información suministrada de que es una permutación circular. En el numeral b ellas indican que los abuelos quedan en dos lugares fijos, por eso solo quedan 5 lugares para ubicar al resto de la familia, pero no se percatan que los abuelos entre ellos pueden cambiarse de lugar, lo que implica que no solucionan correctamente el reto. Por lo tanto, no terminan correctamente la solución del reto				

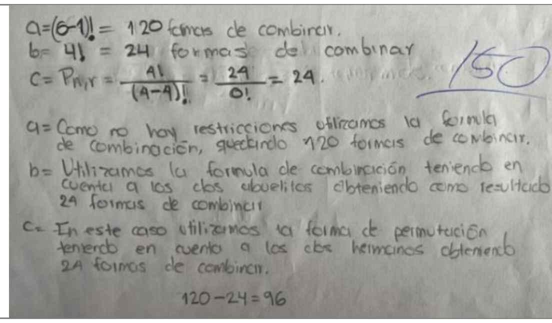
Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Identifican que es una permutación, y solucionan correctamente una parte del problema
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Trabajan las posiciones de las mesas de forma lineal y con base encuentran el número de permutaciones para cada caso.
Justificación matemática (JM)	**2**	Justifican correctamente parte de la solución del problema, pero falta tener en cuenta todas las posibilidades para solucionar el reto.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Desarrollan parcialmente el reto, aplicando la permutación para solucionarlo.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 58. *Resultados del reto de conteo RAC2 por el equipo Alfa, Deltha y Omega.*

Evidencia


a=(6-1)! = 120 formas de combinar.
b= 4! = 24 formas de combinar
C= $P_{n,r} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{24}{0!} = 24$.
150
a= Como no hay restricciones utilizamos la formula de combinación, quedando 120 formas de combinar.
b= Utilizamos la formula de combinación teniendo en cuenta a los dos abuelitos obteniendo como resultado 24 formas de combinar
c= En este caso utilizamos la forma de permutación teniendo en cuenta a los dos hermanos obteniendo 24 formas de combinar.
120-24=96

<table>
<tr><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Profesora: Hola chicos como los escuchó, ¿cómo les fue en este reto?
Pablo: Vemos que son combinaciones y permutaciones, aplicamos las fórmulas en el primero nos dio $\mathbf{5! = 120}$, en el segundo hay dos personas fijas, entonces es $\mathbf{4! = 24}$, y en el tercero primero es una permutación eso nos da 24, pero como los hijos no pueden estar juntos entonces restamos 120 de 21 y eso da 96, formas para que los hijos no estén juntos
.</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">En la solución de este reto, los estudiantes toman en cuenta los conceptos de permutación y combinación para su solución. En general la solución propuesta parece correcta, pero a la hora de ellos realizar el numeral b toman en cuenta solo que hay una posición fija de cada abuelo, y no que entre ellos pueden cambiarse de lugar. Por lo tanto, solo tienen en cuenta 24 formas de ubicarlos.</td></tr>
</table>

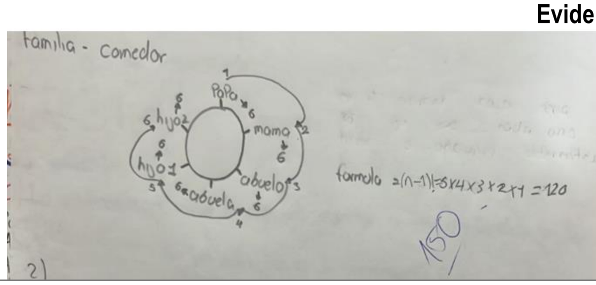
Elementos del discurso matemático

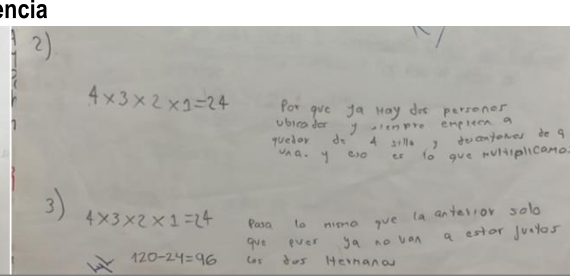
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Solucionan el reto, aplicando las técnicas de conteo vistas en clase, pero faltó analizar algunos elementos del numeral b del reto.
Recursos de apoyo (RA)	3	Usan como recurso las técnicas de conteo vistas en clase, y las aplican en la solución del problema.
Justificación matemática (JM)	2	Justifican adecuadamente parte de la solución del problema, pero falto tener en cuenta todas las posibilidades para solucionar el reto.
Soluciones creativas (SC)	2	Desarrollan el reto, aplicando la permutación circular para solucionarlo.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 59. *Resultados del reto de conteo RAC2 por el equipo obtenidos por LyL.*

Evidencia




2)
4×3×2×1=24
Por que ya hay dos personas ubicados y siempre empieza a quedar de 4 silla y descontamos de a una. y eso es lo que multiplicamos
3)
4×3×2×1=24
Para lo mismo que la anterior solo que ya no van a estar juntos los dos Hermanos
120-24=96

<table>
<tr><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Profesora: Hola chicas, las escucho como les fue en el reto.
LyL: Lo primero que hicimos fue una representación gráfica circular para ubicar a los familiares en la mesa. Luego de ubicados analizamos la posición de cada uno y multiplicamos de acuerdo con el lugar que iba quedando. De igual forma se hizo con el punto b, pero la diferencia es que hay dos lugares fijos, entonces</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usan una representación gráfica para ubicar la posición de los elementos de cada conjunto y poder determinar de cuántas formas pueden ubicarse. En el numeral b y c ellos tienen en cuenta el mismo arreglo para la solución, pero no caen en cuenta que las dos personas pueden</td></tr>
</table>

*.se multiplica 4*3*2*1=24. En el punto c es igual, la diferencia es que quedan separados.*	intercambiarse entre ellas, lo cual solo tienen una solución parcial en el reto

Elementos del discurso matemático		
Elementos	**Indicador obtenido**	**Observaciones**
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Aplican las técnicas de conteo vistas en clase, pero faltó analizar que las personas pueden intercambiarse entre sí.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Realizan una representación gráfica que les permite comprender el problema y encontrar la solución.
Justificación matemática (JM)	**2**	Justifican correctamente el problema, identifican la técnica de conteo adecuada para la solución del problema.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Desarrollan el reto, realizando diferentes tipos de representación que les ayuda a comprender y visualizar la solución.

Fuente: Elaboración propia

Al iniciar el desarrollo de la actividad los estudiantes trataron el problema como una permutación lineal, no tuvieron en cuenta que era una permutación circular, solo al hacer el primer sondeo de la solución se les debió aclarar que la posición circular afecta el orden de los elementos del conjunto y por ello debe trabajarse como permutación circular. En la solución del reto se ve un manejo en el lenguaje de lo que son las técnicas de conteo y varios de ellos las usan para solucionar el problema, también se visualiza que a pesar de no solucionarlo correctamente hacen uso de las etapas del modelo ideal para justificar y argumentar la solución. El equipo JNXS y SLL, hacen uso de un poder de invisibilidad para solucionar el reto y poder continuar con el siguiente, ya que ellos no comprenden el arreglo que se daba y decidieron utilizar una de las herramientas de juego.

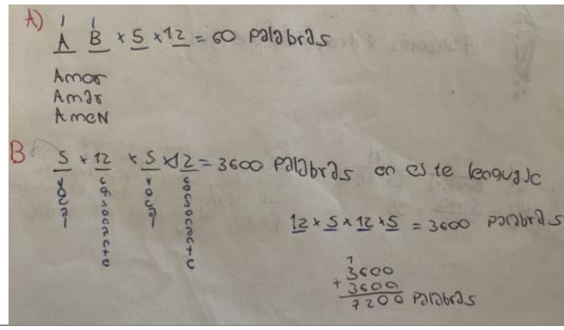
Reto 3: **LENGUAJE EXTRAÑO:** (150 puntos) (Adaptado de (OJM Regional 2011, 1°) Un lenguaje tiene alfabeto **ABDEFGIJLMNOPRSTU** (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con cuatro letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PASO, TINA, LULO y ROTO son palabras, pero TRIA, AAPS, MIAS y LUIS no lo son.

a. ¿Cuántas palabras pueden formarse que inicien con la vocal A, seguida de la letra M? Escribe 3 ejemplos. b. ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje? c. Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contiene la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

RAC3: Construye permutaciones con los elementos de un conjunto y determina la cantidad de subconjuntos totales que se pueden construir.

Tabla 60. *Resultados del reto de conteo RAC3 por el equipo JNXS.*

Evidencia



<table>
<tr><th>Justificación</th><th colspan="5">Etapas de solución de problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Profesora: Hola chicas ¿cómo van?
Emma: Profe cambiamos un cristal del mago porque estamos bloqueadas en punto b. En el a, lo que hicimos fue dejar fijo la A y M, y colocamos las opciones que hay de cada letra en los otros lugares, en total hay 1*1*5*12=60 palabras que inician con AM.
Profesora: Listo, cambiamos por un cristal, deben encontrar cuantas palabras inician con consonante, cuantas con vocal y sacar el total de palabras que se forman con cada uno.
Emma: Profe ya lo hicimos con vocal hay 5*12*5*12=3600 palabras. Con consonante habría 12*5*12*5*12=3600, en total hay 7200 palabras en ese alfabeto.</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>A</td><td>L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación:
En la solución del reto por parte del grupo, vemos como ellas hacen la combinación de las 3 palabras correctamente, y ubican en forma lineal las letras para saber cuántas inician con las letras AM. Sin embargo, por instinto colocan la B en su arreglo, pero tiene en cuenta que es consonante y continúan con el desarrollo de su reto de forma correcta. En el punto b hacen uso de su ayuda para solucionar el reto aplicando la técnica de conteo, pero se finaliza la clase y no logran desarrollar el numeral c.</td></tr>
</table>

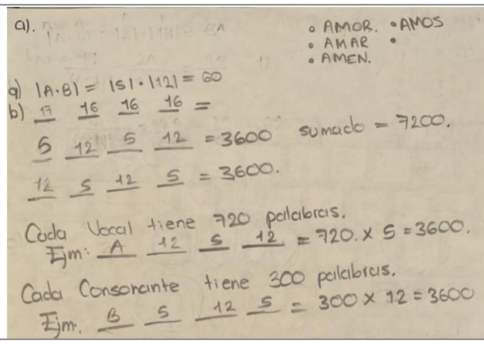
Elementos del discurso matemático

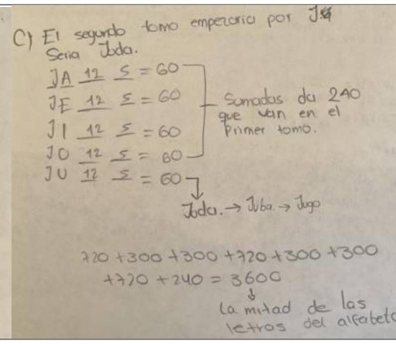
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Usan las técnicas de conteo apropiadas para resolver una parte del reto correctamente.
Recursos de apoyo (RA)	3	Realizan una representación lineal de los arreglos que hacen para solucionar el problema.
Justificación matemática (JM)	3	Justifican correctamente parte de la solución del problema, pero falta tener en cuenta todas las posibilidades para solucionar el reto.
Soluciones creativas (SC)	2	Desarrollan parcialmente el reto, pero por tiempo no logran finalizar completamente

Fuente: Elaboración propia

Tabla 61. *Resultados del reto de conteo RAC3 por el equipo Alfa, Deltha y Omega.*

Evidencia





Justificación	Etapas de solución de problemas
Profesora: *Chicos ¿cómo van con el lenguaje extraño?* ***Pablo:*** *Profesora aplicamos el principio de multiplicación para solucionarlo. En el primero es 5*12=60, porque dos letras son fijas. Para la parte b creímos que eran con las 17 letras en total, pero usted nos dijo que era diferente si empiezan con vocal o consonante entonces por vocales hay 3600 palabras y por consonantes hay 3600, en total son 7200 palabras. Ahora para saber cuál es la palabra, sabemos que hasta la J hay 3660 entonces se deben quitar las últimas 60 entonces lo que hicimos fue ver cuáles eran las últimas 60 y son las que empiezan con JU, seguida de la B y la A, entonces la palabra es JUBA.*	**I** 1 · **D** 1 · **E** 1 · **A** 1 · **L** 1 **Observación:** El grupo resuelve completamente el reto y hace uso del principio de multiplicación para solucionarlo, con base a las preguntas y orientaciones dadas ellos establecen la diferencia de palabras entre las vocales y las consonantes ya que el número de palabras es diferente y eso afecta el total de palabras que se pueden formar. También vemos que ellos realizan arreglos gráficos para ubicar la posición de cada letra, que les permite comprender el problema y darle la solución correcta.

I	D	E	A	L
1	1	1	1	1

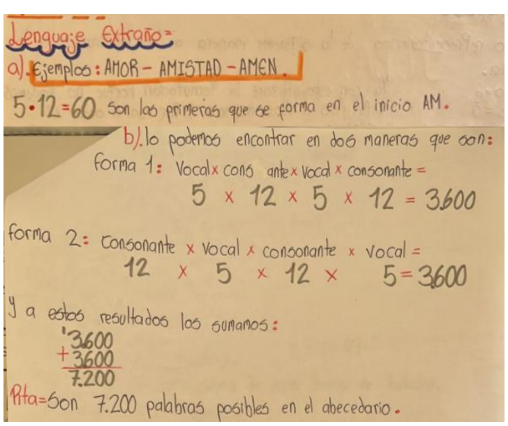
Elementos del discurso matemático

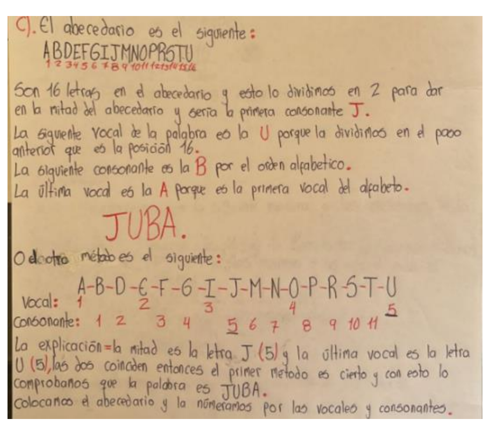
Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	3	Aplican el principio de la multiplicación para solucionar el reto y comprenden las variaciones dadas en el problema
Recursos de apoyo (RA)	3	Realizan representaciones gráficas para comprender el problema y usan técnicas de conteo apropiadas en la solución.
Justificación matemática (JM)	3	Justifican correctamente la solución del problema, realizando los procedimientos apropiados para la solución.
Soluciones creativas (SC)	3	Desarrollan el reto, y sus estrategias son útiles para comprender y solucionar el problema.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 62. *Resultados del reto de conteo RAC3 por el equipo Boom girls.*

Evidencia





Justificación	Etapas de solución de problemas

Profesora: *Chicas Boom, ¿cómo van con el reto?*
Any: *Profesora no lo hemos terminado, pero queremos cambiar un poder para pedir un tiempo extra para solucionar el reto.*
Profesora: *ok sería para mañana.*
Al día siguiente:
Any: *Hola profe mira nosotros en los dos primeros aplicamos principio de multiplicación. En el primero es 5*12=60, porque dos letras son fijas. Para la hay 3600 palabras y para consonantes hay 3600, en total son 7200 palabras. La letra de la mitad del alfabeto es la J luego sigue la U, luego siguiendo el orden de las letras la primera letra del alfabeto que es la B y por último va la primera vocal que es la A.*

I	D	E	A	L
1	1	1	1	0

Observación:
Este grupo hizo uso del poder de ampliar el reto para completarlo ya que se acabó el tiempo de la clase y no habían desarrollado la última parte.
En el numeral c no hay un uso adecuado de técnicas de conteo, sino que ellas de manera descriptiva, realizan la solución del problema, y justifican la solución del reto por el orden que tienen las letras del alfabeto, mas no haciendo uso de las técnicas de conteo. No es clara la justificación que dan en la solución del reto.

Elementos del discurso matemático

Elementos	Indicador obtenido	Observaciones
Uso del lenguaje matemático (UL)	**2**	Aplican parcialmente la solución al reto, y usan en la primera parte técnicas de conteo.
Recursos de apoyo (RA)	**3**	Aplican el principio de multiplicación para encontrar la solución de los numerales a y b.
Justificación matemática (JM)	**2**	Justifican parcialmente la solución del problema, pero en la última parte no utilizan técnicas de conteo en la solución de este.
Soluciones creativas (SC)	**2**	Desarrollan el reto, pero no utilizan el lenguaje matemático apropiado en su solución.

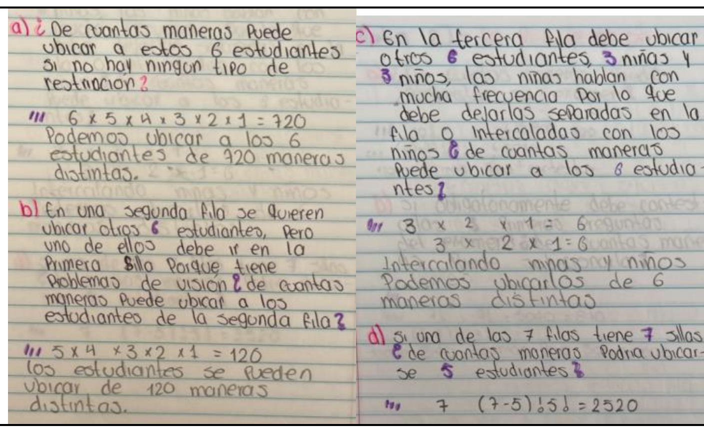
Fuente: Elaboración propia

En el desarrollo de este reto es importante mencionar que todos los grupos usaron poderes, o cristales para obtener ayudas para solucionar el problema. Todos los equipos lograron solucionar los numerales a y b correctamente, solo 4 equipos de los 7 realizaron el numeral c correctamente y encontraron la palabra buscada en el segundo tomo.

Frente a las etapas de la solución del problema es importante mencionar que ellos tienen dominio a la hora de justificar sus soluciones, sin embargo, la última pregunta para ellos fue de bastante complejidad porque no sabían cómo podían hacer para encontrar la palabra exacta con la información suministrada en el reto.

En el análisis de las categorías de análisis del discurso, ellos usan un lenguaje acorde a los conceptos abordados en la fase de entrenamiento, como lo son las técnicas de conteo, más específicamente el principio de multiplicación, permutaciones y combinaciones, logrando justificar y validar sus respuestas correctamente obteniendo los puntos necesarios para finalizar la fase de los retos grupales. Sin embargo, el reto 4 del lenguaje braile no alcanzó a ser desarrollado por los estudiantes, ya que con base al calendario académico las clases a ellos se terminaron el 24 de octubre y las semanas siguientes se realizan actividades de recuperación para aquellos estudiantes que tiene logros pendientes, por ende, no alcanzaron a abordar y solucionar el reto. En la última clase se les indicó que debían realizar la segunda parte de la fase de validación de los retos individuales, se dejó como actividad para la casa con el fin de que los estudiantes reforzaran los problemas del mundo del conteo. De los 7 estudiantes, solo 5 de ellos (71,42%), desarrollaron la actividad. A continuación, vemos las soluciones propuestas por los cinco estudiantes:

Reto de conteo individual 1 ordenando filas:



a) ¿De cuantas maneras Puede ubicar a estos 6 estudiantes si no hay ningun tipo de restriccion?

/// 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720
Podemos ubicar a los 6 estudiantes de 720 maneras distintas.

b) En una segunda fila se quieren ubicar otros 6 estudiantes, pero uno de ellos debe ir en la Primera silla Porque tiene Problemas de vision ¿de cuantas maneras Puede ubicar a los estudiantes de la segunda fila?

/// 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120
los estudiantes se pueden ubicar de 120 maneras distintas.

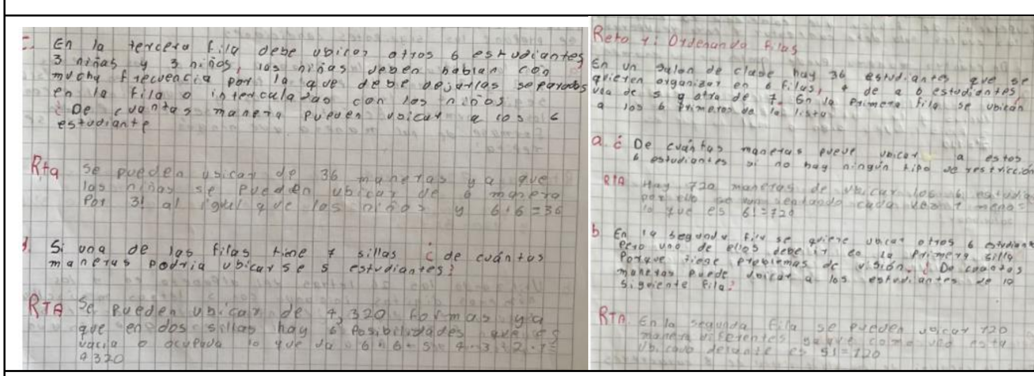
c) En la tercera fila debe ubicar otros 6 estudiantes, 3 niñas y 3 niños, las niñas hablan con mucha frecuencia Por lo que debe dejarlas separadas en la fila o intercaladas con los niños ¿de cuantas maneras Puede ubicar a los 6 estudiantes?

/// 3 x 2 x 1 = 6
3 x 2 x 1 = 6
Intercalando niñas y niños Podemos ubicarlos de 6 maneras distintas

d) Si una de las 7 filas tiene 7 sillas ¿de cuantas maneras Podria ubicarse 5 estudiantes?

/// 7 (7-5)!5! = 2520

Lia



Reto 4: Ordenando filas

En un salon de clase hay 36 estudiantes que se quieren organizar en 6 filas, 4 de a 6 estudiantes, una de 5 y otra de 7. En la Primera fila se ubican a los 6 Primeros de la lista

a. ¿De cuantas maneras puede ubicar a estos 6 estudiantes si no hay ningún tipo de restricción?

RTA Hay 720 maneras de ubicar los 6 estudiantes por ello se van restando cada vez 1 menos lo que es 6! = 720

b. En la segunda fila se quiere ubicar otros 6 estudiantes pero uno de ellos debe ir en la Primera silla Porque tiene problemas de visión. ¿De cuantas maneras puede ubicar a los estudiantes de la siguiente fila?

RTA En la segunda fila se pueden ubicar 120 manera diferentes sabre como ya esta ubicado delante es 5! = 120

c. En la tercera fila debe ubicar otros 6 estudiantes 3 niñas y 3 niños, las niñas deben hablan con mucha frecuencia por lo que debe dejarlas separados en la fila o intercaladas con los niños ¿De cuantas manera pueden ubicar a los 6 estudiante

Rta se pueden ubicar de 36 maneras ya que las niñas se pueden ubicar de 6 manera Por 3! al igual que los niños y 6·6 = 36

d. Si una de las filas tiene 7 sillas ¿de cuántas maneras podria ubicarse 5 estudiantes?

RTA Se pueden ubicar de 4,320 formas ya que en dos sillas hay 6 posibilidades que es vacia o ocupada lo que da 6·6·5·4·3·2·1 = 4320

Sammy

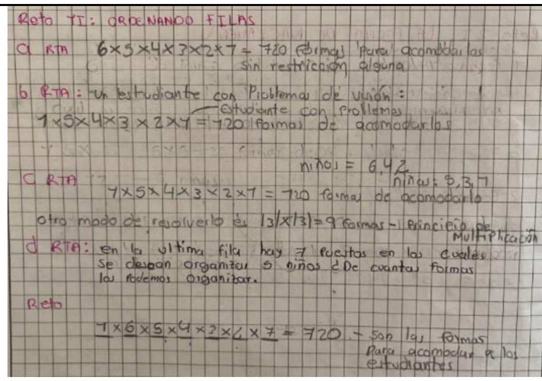
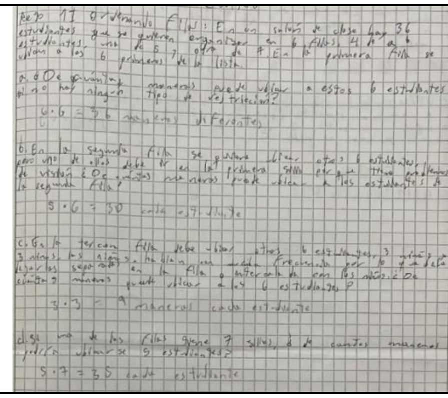
	
Any	**Brian**

Figura 29. *Soluciones propuestas al reto ordenando filas.*

Este reto fue realizado por los estudiantes de manera individual, en su desarrollo vemos como algunos de ellos usan como recurso plantear productos de acuerdo al arreglo que se describe en el reto para calcular el número de elementos, solo 4 lograron realizar correctamente los numerales a y b, pero no logran desarrollar los numerales c y d porque se confunden en la técnica de conteo.

Reto de conteo individual 2 la recuperación:

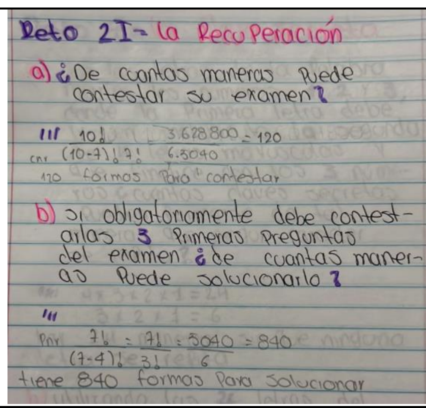
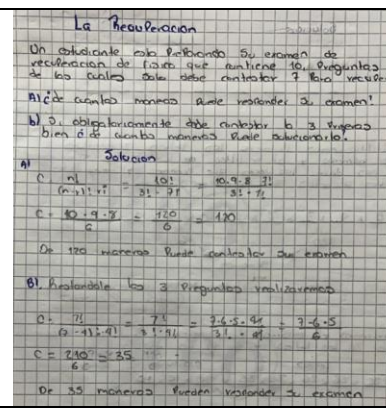
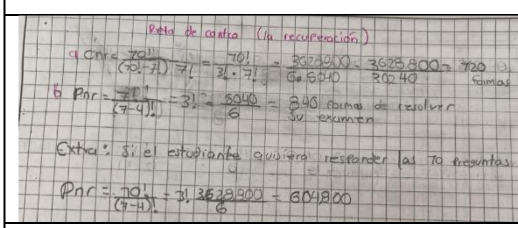
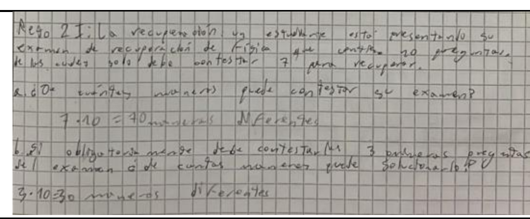
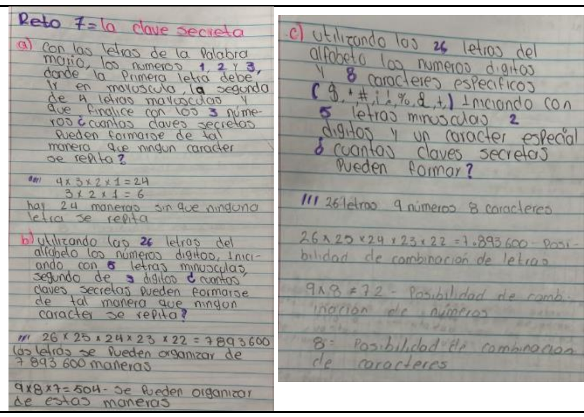
	
Lia	**Luis**
	
Any	**Brian**

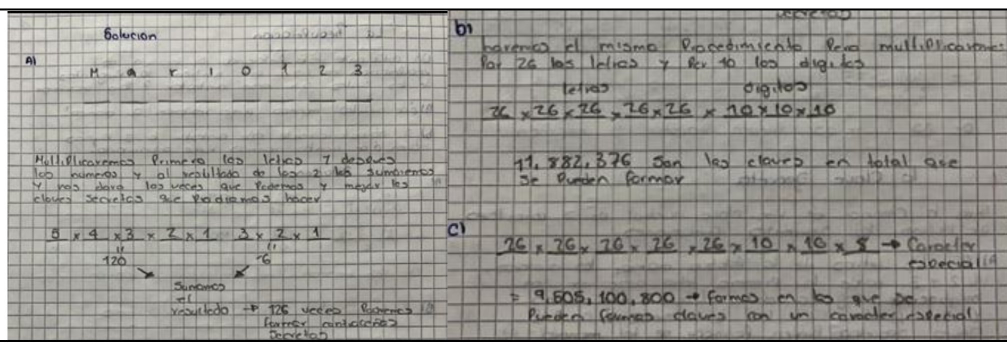
Figura 30. *Soluciones propuestas al reto de la recuperación.*

En el desarrollo de este reto, vemos que 4 estudiantes logran desarrollar correctamente la primera parte del reto, identifican que es una combinación y aplican la técnica correspondiente para su solución. En el desarrollo del numeral b solo Luis logra visualizar que es una combinación mientras que Samy Any y Lia desarrollan una permutación. Por su parte Brian no aplica las técnicas de conteo y realiza multiplicaciones básicas de los elementos que se indican en el problema.

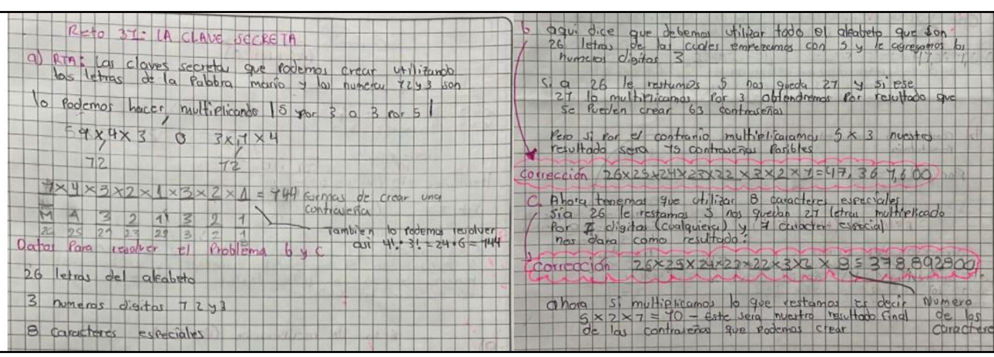
Reto de conteo individual 2 la clave secreta:



Lia



Luis



Any

Figura 31. *Soluciones propuestas al reto de la clave secreta.*

En este reto los estudiantes presentaron diferentes soluciones, algunos aplicaron principio de multiplicación y otros de suma, el numeral a, solo Samy lo desarrolló correctamente, mientras que los otros estudiantes, cometieron errores porque sumaron el total de permutaciones de las letras con los números. En los numerales b y c, dos de los cinco estudiantes lo desarrollaron correctamente, se evidencia que aplican la técnica de conteo correcta, pero al realizar la permutación de los números tuvieron en cuenta es que eran 3 y no la cantidad de números dígitos que eran 10*9*8, esto hizo que la solución del reto no lo realizaran correctamente.

4.6.3 Resultados obtenidos en la fase de aplicación de retos de conteo.

En esta oportunidad los estudiantes debían derrotar al Dragos alado, solo se trabajó con dos grupos 1101 y 1103, se desarrolló en las semanas de recuperación de fin de año. En el grupo debían de manera individual resolver 10 retos de olimpiadas matemáticas sobre técnicas de conteo y combinatoria. Se mantiene la misma dinámica del juego que en los retos numéricos y algebraicos, y herramientas de clase en la plataforma, se utiliza el sonómetro y el temporizador para controlar el nivel de ruido y el tiempo para controlar el desarrollo de la actividad en la clase.

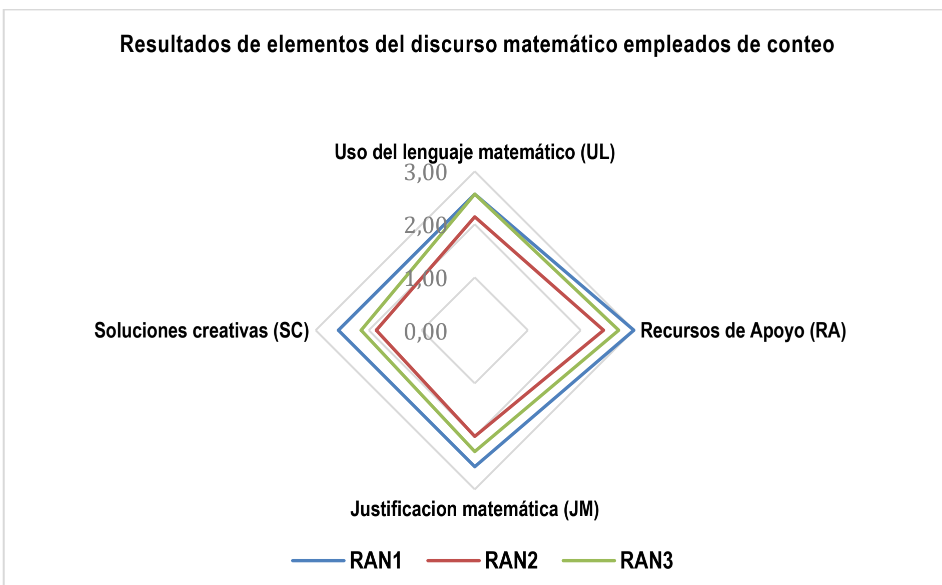
Al finalizar la actividad los estudiantes lograron superar la prueba y ganarle al Dragos alado, donde tuvieron 6 soluciones correctas de los 10 problemas, e hicieron uso de 4 cristales para cambiar la pregunta o en el caso de cuatro estudiantes de cada curso, usaron el poder de invisibilidad o transferencia del maná para quedar eximidos que contestar la pregunta del reto.

4.6.4 Conclusiones generales del mundo retos de conteo.

En el desarrollo del mundo retos de conteo participaron los siete estudiantes, sus resultados fueron muy diferentes a los retos numéricos y a los algebraicos, pues se evidencio que algunos lograban desarrollar algunas de las actividades propuestas a nivel grupal, y bajo el monitoreo constante del docente, pero a la hora de desarrollar los retos individuales, que se dejaron para la casa, no lograban desarrollar correctamente el reto, a pesar de que aplicaban algunas técnicas de conteo vistas en la fase de entrenamiento, porque algunos tuvieron errores en la interpretación de la información o no tenían en cuenta el número de elementos de conjunto, sino de los subconjuntos que se tenían que formar y por ende lo desarrollaban incorrectamente. En el proceso de validación cabe mencionar que ellos requieren de recursos de apoyo, a nivel de instrucción por parte del docente o de realizar gráficos, representaciones o conteos básicos para entender el problema y solucionarlo, usaban en su gran mayoría arreglos lineales y aplicaban el principio de multiplicación para solucionar los problemas.

Frente a las etapas de la solución de problemas del modelo Ideal vemos que ellos aplican las cuatro etapas sin dificultad, pero no comprueban si su solución fue correcta o no. A continuación, se hace un análisis de los resultados obtenidos:

Gráfica 10. *Resultados de elementos del discurso empleados por los estudiantes en el mundo de los retos de conteo.*

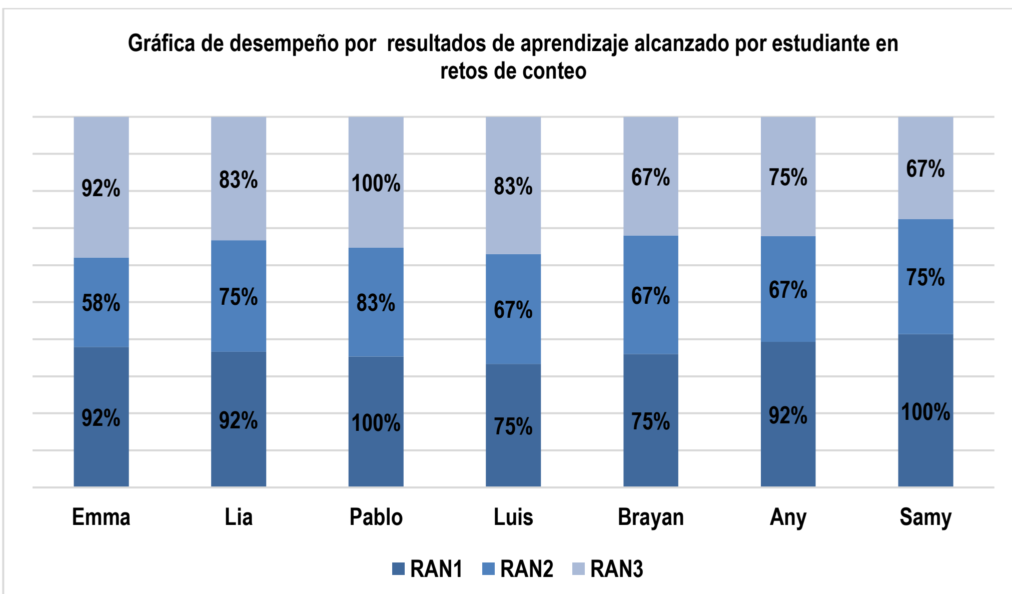


En el desarrollo de esta actividad encontramos que los elementos del discurso matemático empleados por los estudiantes que tiene una mayor valoración en la solución de los retos son los recursos de apoyo, aquí los estudiantes usan representaciones gráficas, de árbol, representaciones lineales para ubicar la posición de los elementos y desarrollan combinaciones de los elementos para comprender el reto y encontrar el número de posibilidades que se piden en cada situación.

En torno al lenguaje matemático, usan el principio de multiplicación para solucionar algunos de los retos, y en algunos otros casos se ve cómo ellos logran establecer algunas técnicas de conteo diferentes para su solución. Frente a las soluciones creativas vemos que es uno de los elementos más bajos en la calificación, esto es porque los retos no fueron realizados correctamente, sino solo una parte.

También vemos que ellos desde sus equipos de trabajo, si realizan actividades en el aula, participan de manera activa en las soluciones de sus grupos y cuando el docente se acerca para preguntar ellos se preocupan por darse a entender y utilizan los términos matemáticos propios del mundo del conteo.

Gráfica 11. *Resultados de aprendizaje alcanzado por estudiante en retos de conteo.*

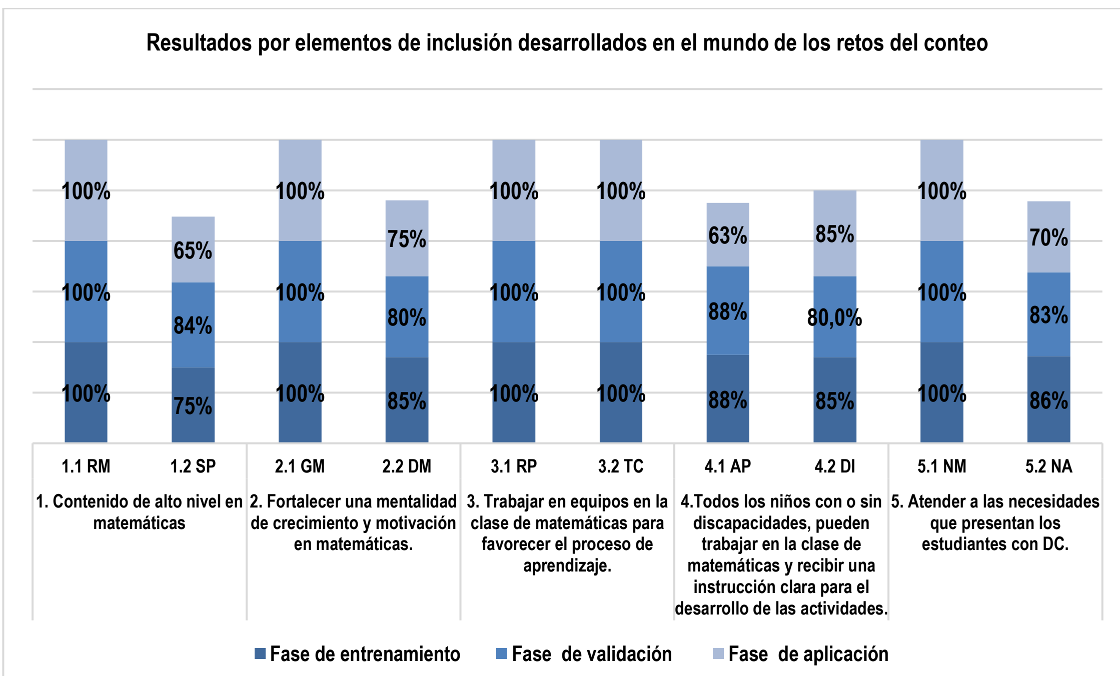


Con relación al uso del lenguaje matemático las técnicas de conteo que ellos más utilizaron fue el principio de suma y de multiplicación para solucionar los retos, casi todos los solucionaron de esta manera, al validar y justificar sus respuestas, ellos explican cuáles fueron sus estrategias de solución, reconocen cual es el principio de suma y de multiplicación, la diferencia de combinación y permutación, que algunos de ellos los aplicaban para solucionar de manera rápida los retos y poder ganar los 50 puntos extra por terminar entre los dos primeros grupos. Al revisar los resultados de aprendizaje que alcanzaron los estudiantes en la solución de los retos, vemos que el reto 3 es en el que los estudiantes obtuvieron un desempeño más bajo, teniendo en cuenta que varios de ellos no identificaron una permutación circular, sino que la trabajaron como una permutación lineal.

Resultados desde la inclusión

En la siguiente gráfica se muestra la valoración dada para cada elemento de la inclusión que se especifica en la tabla 45, ajustados al mundo de los retos del conteo, de acuerdo con los desempeños y actividades desarrolladas por los estudiantes en cada una de las fases.

Gráfica 12. *Resultados por elementos de inclusión desarrollados en los retos algebraicos.*



Entorno a los elementos de inclusión los indicadores continuaron iguales para el desarrollo de cada una de las fases, se ve que se implementaron en este mundo, pero hay algunas diferencias porque los estudiantes no desarrollan en la totalidad los retos propuestos y la mayoría de ellos solo una parte de las preguntas estaban bien solucionadas, otras aplicaron estrategias de solución que no corresponden a la hora de abordar y solucionar. Cabe resaltar que se hizo muy evidente la forma en cómo los estudiantes solucionan los retos en la fase individual, porque varios de ellos cometieron errores en su desarrollo, aquí se ve que no contaban con un apoyo en casa para solucionarlos correctamente.

Esto demuestra que para favorecer el aprendizaje de los estudiantes en su trabajo individual o lo que denomina Harel de trabajo repetido, ellos deben contar con el acompañamiento instruccional, para verificar cómo entienden el problema y cómo piensan que es la solución, es importante realizar un monitoreo constante del trabajo que los niños hacen en casa, para validar y verificar que sus procedimientos y soluciones sean correctas, pero varios de ellos no cuentan con este apoyo.

Resultados desde las necesidades

En este mundo se continúa con la formulación de preguntas en los retos, se dan puntos adicionales para aquellos que los solucionen de primeras o segundas, y se usan otros recursos para ayudar a focalizar a los estudiantes a fortalecer su autorregulación en la clase y trabajo activo en el aula que son el sonómetro y el temporizador, estos ayudan a que los estudiantes se focalicen a la hora de trabajar en equipo y no de distraigan hablando de otras cosas con sus compañeros de la clase.

Frente a las necesidades intelectuales en el desarrollo de cada reto, hace evidente en los estudiantes la necesidad de certeza, para ellos es un elemento determinante para la consecución de sus puntos, y les da seguridad frente a su trabajo desarrollado, el tener la aprobación de que están haciendo las cosas bien les motiva y da mucho ánimo para seguir con los otros retos; la necesidad de casualidad es importante mantenerla desde el docente porque permite verificar si el estudiante realmente comprendió la tarea que está desarrollando, la necesidad de cuantificar donde se relaciona estrechamente con los recursos empleados por los estudiantes al solucionar problemas como el uso de gráficos, combinaciones de los elementos de los conjuntos, el uso de la calculadora para realizar las operaciones correctamente, y la necesidad de comunicación es vital en el proceso de validación de sus soluciones ya que usan elementos discursivos que ayudan a los estudiantes a comunicar y expresar correctamente sus ideas haciendo uso del lenguaje matemático, para argumentar sus soluciones. Es importante mencionar que frente a la necesidad de estructura la fase de entrenamiento les brinda a los estudiantes, elementos teóricos que pueden aplicar en el resto de las fases, aquí se hizo necesario aumentar los retos de entrenamiento para que ellos se familiarizaron con las técnicas de conteo, en aras de que participaran en las fases de validación y de entrenamiento.

Conclusiones del capítulo 4.

La encuesta realizada a los docentes sirvió para vislumbrar algunas estrategias o metodologías de clase que emplean los maestros a la hora de enseñar matemáticas a estudiantes que presentan DC, porque pueden ser beneficiosas para el aprendizaje de las matemáticas y porque permite también establecer la necesidad de conocer más de cómo se puede mejorar los procesos de enseñanza a este tipo de población.

El desarrollo del mundo explorando, permitió delimitar elementos metodológicos y estrategias didácticas, que se debían mejorar para la implementación de los otros mundos, en aras de fortalecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de aquí emerge una metodología instruccional que se estructura en tres fases en el desarrollo de cada mundo que son la fase de entrenamiento, la fase de validación y la fase de profundización, cada uno tomando la solución de problemas como eje central en el aprendizaje de las matemáticas. Los retos propuestos e instrumentos de análisis de resultados permitieron conocer qué tipo de necesidades presentan los estudiantes con DC, además estructurar los elementos de inclusión que se debían implementar en el desarrollo de cada fase para que ellos lograran participar activamente y conocer cuáles elementos emplean ellos a la hora de solucionar retos matemáticos y validar o justificar sus soluciones.

CONCLUSIONES

Este apartado tiene como objetivo analizar de manera detallada los resultados descritos en el capítulo anterior, con base en el marco teórico y la metodología descrita, se quiere dar respuesta al problema de investigación ¿Qué estrategias metodológicas pueden implementarse en el aula de clase, para favorecer la inclusión de estudiantes que presentan diferentes tipos de discapacidad, en su proceso de enseñanza y aprendizaje en las clases de matemáticas basado en la resolución de problemas? A continuación, se hará de acuerdo con cada uno de los objetivos previstos en la investigación.

1. Analizar las percepciones y prácticas que tienen los profesores hacia los estudiantes que presentan DC, asociada a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Al analizar las percepciones y prácticas que tienen los maestros en ejercicio, encontramos que, al describir un ejemplo de las prácticas desarrolladas frente a la enseñanza de las matemáticas a un estudiante con DC, describen el uso de materiales concretos o manipulativos como el tangram, origami, representación gráfica, y uso de software GeoGebra para el desarrollo de actividades, que les permita atender y enseñar matemáticas a los estudiantes, que presentan DC. También manifiestan que no es viable integrar a los estudiantes con DC, en la clase de matemáticas por el grado de dificultad o complejidad que presenta, y que no es posible enseñar todos los temas de matemáticas; es necesario dejar actividades diferenciadas al resto de la clase.

A su vez indican que la formación que han recibido en su proceso de formación a veces les es útil para abordar en el proceso de enseñanza de las matemáticas, a este tipo de población y fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de estos estudiantes, pero no han tenido una formación que permita atender de manera efectiva a los niños que presentan DC.

2. Aplicar y evaluar un sistema de actividades basadas en la resolución de problemas matemáticos y la gamificación, que permita la inclusión de los estudiantes con DC en el aula de clase.

La propuesta didáctica denominada mundos matemáticos fue estructurada tomando en cuenta dos elementos conceptuales que son la inclusión y la solución de problemas que para efectos de la dinámica del juego se denominaron retos matemáticos. Estos fueron cruciales para conocer y establecer las categorías de análisis de los elementos que emplean los estudiantes a la hora de resolver retos matemáticos, y como es su proceso de argumentación o validación a la hora de justificar sus soluciones como lo menciona Schoenfeld (1985) y Harel (2008b).

El desarrollo del primer mundo explorando, mostró como resultados que los estudiantes con DC deben tener un acompañamiento presencial por parte del docente y de sus pares, a la hora de realizar las actividades, ya que de forma sincrónica ellos se dispersan con mucha facilidad, no comprenden las instrucciones que se les da, y en casa tienen muchos distractores que no les permiten desarrollar la atención y concentración en las clases, adicionalmente no tienen el apoyo u orientación para que puedan aprender y realizar las tareas asignadas

Una vez se retoman las clases presenciales en el 2021-II, por medio del sistema RGPS, la dinámica cambia y se ve que ellos se autorregulan más en la compañía de su docente y compañeros de clase participando activamente en las actividades propuestas y trabajando en las clases. También vemos que es importante antes de trabajar los retos, que ellos reciban unos elementos teóricos que sirvan de herramientas a la hora de trabajar las actividades propuestas, porque si no reciben este tipo de instrucción o intervención, no comprenden lo que deben realizar. Es aquí donde se diseñó una metodología instruccional desarrollada en el 2022, que relaciona las heurísticas de la solución de problemas, el marco de las necesidades intelectuales y psicológicas del DNR, y las estrategias de inclusión propuestas por Boaler (2016), para la construcción y aplicación de mundos matemáticos.

Cada mundo fue creado con base a la metodología IBD y el modelo de instrucción matemática DNR, donde se estructuraron tres fases que son fase de entrenamiento ligada a las formas de entender (FE) y formas de pensar (FP), ya que aquí los estudiantes reciben los elementos teóricos de acuerdo a la temática abordada, se explican ejemplos pero basados en la solución de problemas, esto fue muy interesante porque para ellos fue diferente pensar las matemáticas ya que tenían la posibilidad de participar activamente, realizar gráficos, desarrollar estrategias de solución como ensayo y error, pruebas, abordar casos particulares que les permitieran comprender el problema y dar la solución.

En la fase de validación se toman en cuenta elementos de la gamificación con todos los elementos de la estética y dinámica del juego junto con el principio de razonamiento repetido propuesto en el DNR, donde los estudiantes realizaron cuatro retos grupales y tres individuales, propios a las temáticas abordadas en cada mundo para conocer qué elementos desarrollan en la solución de problemas y en la justificación y validación de sus respuestas. Para analizar estos procesos propios de la práctica o actividad matemática se desarrolló una rúbrica de evaluación (Tabla 2.y 3.) que permitió categorizar cuales estrategias usaban los estudiantes para la resolución de problemas y cuales elementos del discurso empleaban a la hora justificar sus respuestas.

Por último, está la fase de aplicación donde los estudiantes de manera conjunta con base a los temas vistos solucionaron retos de olimpiadas matemáticas. Esta estructura fue pertinente para el desarrollo de los retos e incluir de manera efectiva a los estudiantes que tienen DC, para que participaran y fueran integrados activamente en el desarrollo de la clase.

3. Categorizar cuales elementos metodológicos conducentes a la inclusión favorecen el aprendizaje y la participación de los estudiantes con DC en el aula.

La metodología que se empleó se basó en cinco estrategias de inclusión propuestos por Boaler (2016), y que fueron adaptadas de acuerdo con la población de estudio, estos son:

1. Ofrecer a todos los estudiantes de grado once, contenidos de alto nivel en matemáticas. Se evidencia en: 1. El diseño de mundos basados en retos matemáticos (RM) y 2. El uso de las etapas de la solución de problemas, en la resolución de cada reto (SP).

2. Fortalecer una mentalidad de crecimiento y motivación en matemáticas. Se evidencia por 1. El uso de la gamificación, (GM) y también por los elementos del discurso matemático utilizados por los estudiantes al validar y justificar las soluciones de los retos (DM).

3. Enseñar a los estudiantes a trabajar juntos. Se ve reflejado en el rol asumido por cada estudiante en su equipo de trabajo, los poderes que tienen para defender el grupo (RP), y por el trabajo colectivo y colaborativo con sus pares al desarrollar los retos del mundo (TC).

4. Todos los niños con o sin discapacidades, que se encontraron en el aula de clase accedieron los mundos, y recibieron una instrucción clara para poder tener elementos teóricos que les sirviera para realizar los retos sin ser excluidos. Se evidencia con la asistencia y participación en el desarrollo de las actividades (AP), y desarrollo de los retos en cada fase del diseño instruccional (DI).

5. Tener en cuenta las necesidades que presentan los estudiantes con DC. (Necesidades intelectuales y psicológicas propuestas por Harel (2008)). En el desarrollo de la investigación se concluye que los estudiantes necesitan ser motivados y aceptados por sus pares para ser partícipes de su aprendizaje en el aula de clase de matemáticas (NM). También la necesidad fortalecer la autorregulación, quien es monitoreada por el docente a cada equipo para verificar el trabajo desarrollado por cada uno de ellos y verificar cómo son las formas de entender y formas de pensar a la hora de solucionar cada reto (NA).

4. Determinar cuáles son los elementos que emplean los estudiantes con DC en el proceso de solución de problemas matemáticos.

De acuerdo con los resultados obtenidos y a las evidencias de los problemas solucionados en las clases, vemos que ellos deben tener la fase de entrenamiento para mejorar sus desempeños a la hora de solucionar problemas matemáticos.

Antes de enfrentar los problemas es necesario que los estudiantes sean motivados para realizar las actividades y para que los niños con DC puedan abordar y solucionar los problemas, es necesario que éste sea dividido en tareas pequeñas o preguntas iniciales porque les permite entender lo que se les está preguntando, puedan abordarlo y desarrollar una solución esto ayuda a que los estudiantes no se bloqueen y puedan participar más en la clase. El proceso de monitoreo y acompañamiento constante ayuda a que los niños no se sientan aislados que al contrario son parte de la clase y para motivarlos a participar se puede dar puntos extra o vidas cuando ellos están justificando sus soluciones, aquí ellos se esfuerzan por desarrollar habilidades de comunicación para darse a entender y expresar las ideas que quieren socializar.

Al usar estrategias de gamificación, los estudiantes son motivados para aumentar su nivel, obtener beneficios puntos extras y llevar un registro de los puntos que ha alcanzado con su desempeño, esto implicó que ellos no entregaron ningún reto en blanco, sino que, por el contrario, buscarán diferentes estrategias para la solución y son las representaciones gráficas lo que más les ayuda a comprender el problema.

RECOMENDACIONES

Es poca la literatura que se da frente a la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes con DC, esto es una oportunidad para realizar investigaciones que den más aportes a este tema de investigación, y sería bueno explorar otros temas como lo geométrico, lo métrico y el pensamiento probabilístico, el cálculo etc, porque ayudaría a comprender más que tipo de estrategias o elementos son útiles para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje a esta población.

El uso de la gamificación ayuda a implementar estrategias de inclusión a los estudiantes, a desarrollar actividades que no solo sirven para mediar lo conceptual, sino que permite también hacer reconocimientos adicionales por buenos comportamientos actitudes positivas que enmarcan la formación integral de los estudiantes. Es importante seguir realizando investigaciones que aborden la teoría de la gamificación a otros temas de las matemáticas o de otras áreas del conocimiento y profundizar en todas las herramientas que tiene llevándolas a las aulas de clase.

REFERENCIAS

Aldana, E. & López, J. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Revista investigación desarrollo e innovación, 7*, 77-92.

Barbeau E. & Taylor P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom* (Vol. 12). (Springer, Ed.) International Commission on Mathematical Instruction.

Bass, H. (2017). Designing opportunities to learn mathematics theory-building practices. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 229-244.

Bello, P. (1997). *Motivación en tu vida.* Venezuela: Panapo.

Boaler J. (2016a). Designing mathematics classes to promote equity and engagement. *Journal of Mathematical Behavior, 41*, 172–178.

Boaler J. (2016b). *Mentalidades matemáticas.* Málaga, España: Sirio S.A.

Bransford J. & Stein B. (1993). *The ideal problem solver. A guide for improving thinking, learning and creativity.* New York: W.H. Freeman and Company.

Brynjolfsson, E., Hitt, L., & Hellen H. (2011). Strength in Numbers: How Does Data-Driven Decisionmaking Affect Firm Performance? . *SSRN*. Obtenido de https://ssrn.com/abstract=1819486

Carmona J. & Arango C. (2013). Hacia una inclusión educativa en la enseñanza de las Matemáticas. *Revista Educación científica y tecnológica*(Edicion especial), 636- 640.

Cass M., Cates D., Smith, M. & Jackson C. (2003). Effects of manipulative instruction on solving area and perimeter problems by students with learning disabilities. *Learning Disabilities*, 112- 120.

Cassel J. & Reid R. (1996). Use of a Self-Regulated Strategy Intervention to Improve Word Problem-Solving Skills of Students with Mild Disabilities. *Journal of Behavioral Education, 6*(2), 153-172.

De Guzmán M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.

Dobbins, A. Gagnon, J. & Ulrich, T. (2014). Teaching Geometry to Students With Math Difficulties Using Graduated and Peer-Mediated Instruction in a Response-to-Intervention Model. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 58*(1), 17-25.

Dweck, C. & Elliott, E. (1983). Achievement Motivation. *Handbook of Child Psychology, 4*, 643-691.

Faragher, R. (2015). Diversity. En R. S. Faragher, *Teaching mathematics: Foundations to middle years South Melbourne* (págs. 142–165). Oxford University Press.

Farias D. & Pérez J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la administración. (U. Simón, Ed.) *Formación Universitaria, 3*(6), 33-40. Obtenido de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062010000600005

Fernández, R. & Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4*, 11-23.

Gervasoni, A., & Lindenskov, L. (2011). Students with 'Special rights' for mathematics education. En M. G. Bill Atweh, *In Mapping equity and quality in mathematics education* (págs. 307-323). Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-90-

Goldin, G. et al. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education.* Hamburg, Germany: Springer.

Gonsalves, N. & Krawec, J . (2014). Using Number Lines to Solve Math Word Problems: A Strategy for Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 29*(4), 160–170.

Göransson, K. Hellblom, T. & Axdorph, E. (2016). A Conceptual Approach to Teaching Mathematics to Students With Intellectual Disability. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(2), 182-200.

Groos K. (1902). *Les Jeux des animaux.* Paris: Felix Alcan.
Hamari, J., Shernoff, D. J., Rowe, E., Coller, B., Asbell-Clarke, J., & Edwards, T. (2016). Challenging games help students learn: An empirical study on engagement, flow and immersion in game-based learning. *Computers in Human Behavior, 54*, 170–179.
Howard, S., San Martin, C., Salas, N., Blanco, P., y Díaz, C. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. *Revista Colombiana de Educación, 74*, 197-219.
Kaiser, G. (2017). Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. (Springer, Ed.) *ICME 13. Monographs*, 397-400. Obtenido de https://www.springer.com/series/15585
Kapp K., Blair L. & Mesch R. (2014). *The Gamification of Learning and Instruction Fieldbook: Ideas in to Practice.* San Francisco: Wiley.
Kevin K. Chung H. & Tam Y. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual and Developmental Disability, 30*(4), 207-216.
Krulik S. & Rudnick K. (1980). *Problem solving in school mathematics. .* Reston: Virginia: National council of teachers of mathematics. Year Book.
Lopez M. (2011). Barreras que impiden la escuela inclusiva y algunas estrategias para construir una escuela sin exclusiones. *Innovacion educativa*, 37 - 54.
MEN. (1994). *Ley general de educación.* Bogotá, Colombia. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf
MEN. (1996). *Lineamientos curriculares en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.
MEN. (2006). Orientaciones Pedagógicas para la atención a estudiantes con discapacidad cognitiva. 1-80.
MEN. (2013). Lineamientos Política de Educación Superior Inclusiva. (M. d. Nacional, Ed.) 1-98. Obtenido de http://www.dialogoeducacionsuperior.edu.co/1750/articles-327647_documento_tres.pdf
MEN. (2017). Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva . 1-230.
Montague, M. & Jitendra, A. (2012). Research-Based Mathematics Instruction for Students with Learning Disabilities. *ICME 13* (págs. 481- 513). Advances in Mathematics Education, 1st ed. [online] Springer.
NTCM.org. (18 de Abril de 2014). Obtenido de National Council of Teachers of Mathematics: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Access-and-Equity-in-Mathematics-Education/
OEA y UNESCO. (2004). *Educar para la diversidad. Módulo 4: aulas inclusivas.* Santiago de Chile, Chile.
Piaget J. (1964). *Seis estudios de Psicología* (Vol. 1). Barcelona, España: Labor.
Polya G. (1976). *How to solve it. (Traduccion española: Como plantear y resolver problemas.).* Mexico: Trillas .
Polya G. (1981). *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: Jhon Wiley & Sons.
Prendergast, M. Spassiani, N. & Roche, J. (2017). Developing a Mathematics Module for Students with Intellectual Disability in Higher Education. *Revista International Journal of Higher Education, 6*(3), 166-177.

Roos, H. (2013). Inclusive mathematics from a special education perspective: How can it be interpreted? En Ç. H. B.Ubuz (Ed.), *CERME 8:Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (págs. 2860-2869). Turkey.

Ross H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics., 100*, 25–41. Obtenido de https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Sampieri R., F. C. (2014). *Metodología de la investigación* (6 ed.). Mexico: Mac Graw Hill.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa. Icfes. Módulos de Investigación Social.* ARFO.

Santrock, J. (2002). *Psicología de la educación. Motivación y Aprendizaje.* México D. F: McGraw-Hill/Interamericana.

Schalock, R. (1999). Hacía una nueva concepción de la discapacidad. En Jornada Científica de Investigación sobre Personas con Discapacidad. (U. d. Salamanca, Ed.) 18-60.

Scheiner T. & Pinto M. (2019). Emerging perspectives in mathematical cognition: contextualizing, complementizing, and complexifying. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 357–372.

Schnepel, S., Krähenmann, H., Sermier Dessemontet, R. & Moser, E.,. (2020). The mathematical progress of students with an intellectual disability in inclusive classrooms: results of a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 103–119.

Schoenfeld A. (2011). *How We Think A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications.* New York: Routledge. Taylor & Francis Group.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, Florida: Academic Press.

Stieglitz S., Lattemann C., Robra S., Zarnekow R., & Brockmann T. (2017). *Gamification. Using Game Elements in Serious Contexts.* Berlin: Springer International Publishing.

Tomislav J., Ivica B. & Hyo J. (2018). Examining competitive, collaborative and adaptive gamification in young learners' math learning. *Computers & Education, 125*, 444-457.

Unesco. (1994). *Declaración de Salamanca y marco de acción para las necesidades educativas especiales. Salamanca, España.* Salamanca, España.

Vale, I. & Pimentel, T . (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. Práticas de ensino da matemática. (P. d. matemática, Ed.) *Investigação em Educação Matemática*, 347-360.

Verdugo, M. (2004). La concepción de discapacidad en los modelos sociales. 1-17. Obtenido de https://campus.usal.es/~inico/publicaciones/Verdugo-ModelosSoc.pdf

Witzel, B. S. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*(3), 49 - 60.

Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, S., Hidayanto, E. & Sulandra, I. (2019). A Commognitive Framework: The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research., 18*, 89-102.

Anexo 1. Encuesta a docentes.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACION MATEMÁTICA

ENCUESTA A DOCENTES SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD

Objetivo: Conocer las diferentes posturas que tienen los docentes de matemáticas de educación básica y media, frente a la enseñanza de las matemáticas a población con discapacidad.

Fuente elaboración propia

Apreciado maestro, desde su formación profesional sabemos la amplia experiencia y experticia que tiene frente a la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles de escolaridad y por ello es de vital importancia su colaboración en el desarrollo de la siguiente encuesta. Agradecemos su colaboración y disposición para el desarrollo de esta.

1. ¿En su institución educativa estudian niños que presentan algún tipo de discapacidad?
   SI_____ NO______
2. ¿Cuál es su nivel de formación más alto?
   Licenciatura____________
   Maestría _____________
   Profesional____________
   Especialización_________
   Doctorado_____________
3. ¿Cuántos años de experiencia tiene enseñando el área de matemáticas?
   ____

CUESTIONARIO:

4. ¿Cuál es la discapacidad que se encuentra con mayor frecuencia en la institución donde usted trabaja?

a. Visual ______
b. Física ______
c. Discapacidad cognitiva leve ______
d. Autismo _______
e. Síndrome de Down _____
f. Asperger_______
g. Otro _______ ¿Cuál? ________________

Marque con una X la respuesta que considere pertinente a la pregunta dada

	Siempre	**Casi siempre**	**A veces**	**Casi nunca**	**Nunca**
¿Desarrolla procesos de flexibilización o adaptaciones curriculares a los niños que presentan discapacidad cognitiva en sus clases?					

¿Desarrolla los PIAR (Planes de adaptación y ajustes razonables) para la enseñanza de matemáticas a estudiantes con discapacidad cognitiva?					
¿Considera que los estudiantes que presentan discapacidad cognitiva pueden aprender matemáticas?					
¿Considera que los estudiantes con discapacidad cognitiva pueden solucionar problemas matemáticos?					
¿Considera que los estudiantes con discapacidad cognitiva pueden recibir las mismas clases de matemáticas que los estudiantes de aula regular?					
¿Emplea metodologías didácticas para la enseñanza de matemáticas a estudiantes con discapacidad?					
La formación profesional que usted tiene hasta el momento ¿le permite orientar la enseñanza de las matemáticas de manera efectiva y oportuna a los estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad?					

12. Menciona algunas estrategias que haya empleado en su clase para la enseñanza de la matemática o geometría a estudiantes con discapacidad.

____

____

13. ¿Podría proporcionar un ejemplo concreto de las adaptaciones curriculares que haya realizado a sus estudiantes con discapacidad cognitiva en la clase de matemáticas?

____

____

14. ¿Qué temas de matemáticas y de geometría deben tener adaptación curricular para que puedan enseñarse a estudiantes de ciclo V que presentan discapacidad cognitiva?

____

____

15. ¿Considera relevante incluir dentro de los planes de formación de pregrado, o postgrado cursos para enseñar matemáticas a estudiantes con discapacidad cognitiva o problemas de aprendizaje en matemáticas?

____

____

Anexo 2. Enlaces de videos de clases

Explorando: https://drive.google.com/drive/folders/1yvqqKnfxBhR9xE7GtT6yF6QlTbunHj-7?usp=share_link

Retos numéricos:
https://drive.google.com/drive/folders/12hyRDXhSD5YoG3JhAXI_r6gDiQI11r9H?usp=share_link

Retos algebraicos:
https://drive.google.com/drive/folders/1n7G5meDW1h5NdexgFFxlawmFDyNc2_Xd?usp=share_link

Retos de conteo:

https://drive.google.com/drive/folders/1tGg6T9l5pPSR25U-g4-m_fmnNx3icBUD?usp=share_link