ANÁLISIS DE ALGUNAS NOCIONES TOPOLÓGICAS

EN LAS PRUEBAS SABER 9° DEL AÑO 2013 A 2015

FABIAN RICARDO BLANCO VEGA

Universidad Antonio Nariño
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

ANÁLISIS DE ALGUNAS NOCIONES TOPOLÓGICAS EN LAS PRUEBAS SABER 9° DEL AÑO 2013 A 2015

FABIAN RICARDO BLANCO VEGA

Trabajo de grado que se presenta como requisito parcial para obtener
El título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:
Victor Andrés Vargas Cubides
Profesor Asistente

asistencia de Investigación asociada al proyecto:
Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología
y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas

Universidad Antonio Nariño
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

A mi madre Doris.

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien.

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia agradezco a todos mis formadores, que hicieron posible la adquisición de mis conocimientos, para emprender mi labor como docente y ser un ejemplo a seguir como ellos, por otro lado, a mi familia especialmente Hermanos, Madre y Esposa quienes me apoyaron durante este proceso.

RESUMEN

La topología es una rama fundamental de las matemáticas que se utiliza en el desarrollo de diferentes áreas como análisis matemático, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos, etc., además de eso, es una herramienta útil en diferentes contextos como química, física, redes, etc., por tanto, es conveniente incluir la topología en los lineamientos curriculares de matemáticas para educación básica y educación media, para que los estudiantes puedan avanzar a estudios superiores con una idea básica de algunas nociones topológicas, lo anterior es posible dado que esta rama de la matemática se caracteriza por la forma intuitiva en que se pueden describir los conceptos que la fundamentan, lo que facilita su abordaje en etapas tempranas de aprendizaje, sin embargo, si comparamos los estudios realizados en topología, son pocas las investigaciones que han relacionado conceptos de topología con la enseñanza en educación básica y media.

En este trabajo se hace un rastreo de nociones topológicas que aparecen en las pruebas Saber 9° entre los años 2013 a 2015, con el fin de relacionar algunas preguntas con conceptos básicos de topología, y de esa forma mostrar que podemos abordar topología en educación básica y media, lo anterior porque el pensamiento espacial en las pruebas Saber ha estado dirigido específicamente a la perspectiva geométrica, dejando de lado la concepción de espacio desde el enfoque topológico. Para realizar este rastreo se creó una rejilla en Excel con todas las preguntas de las pruebas Saber escogidas, analizando, en cuál de estas aparecen nociones topológicas explícitamente o implícitamente, bien sea en el enunciado de la pregunta o en las opciones de respuesta.

De este rastreo se obtuvieron diferentes resultados que serán tenidos en cuenta para el proyecto de investigación *"Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas"*, el cual busca hacer sugerencias para una transformación y actualización en los currículos de educación media y básica.

Palabras clave: Topología, Teoría de grafos, Pruebas saber, Currículo.

ABSTRACT

Topology is a fundamental branch of mathematics used in the development of different areas such as mathematical analysis, differential equations, graph theory, etc., besides that, it is a useful tool in different contexts such as chemistry, physics, networks, etc., therefore, it is appropriate to include topology in the curricular guidelines of mathematics for basic and middle school, so that students can advance to higher education with a basic idea of some topological notions, the above is possible since this branch of mathematics is characterized by the intuitive way in which some of the concepts that support it can be described, which facilitates its approach in early stages of learning, however, if we compare the studies carried out in topology, there are few researches that have been related topology concepts with teaching in basic and middle school.

In this work, we did a tracing of topological notions that appear in the *Saber* 9° tests between 2013 and 2015, in order to relate some questions with basic concepts of topology, and in this way show that we can approach topology in basic and middle school, the above because spatial thinking in the Saber tests has been directed specifically to the geometric approach, leaving aside the conception of space from the topological approach. To perform this tracing, was created a grid in Excel with all the questions of the chosen *Saber* tests, analyzing, one by one, in which of these test topological notions appear explicitly or implicitly, either in the statement of the question or in the statement of the answer options.

From this tracing we obtained different results that will be taken into account for the research project *"Design of a virtual environment for learning of topology and its applications, based on the development of metacognitive skills"*, which seeks to make suggestions for a transformation and update in the curricula of secondary and basic school.

Keywords: Topology, Graph theory, *Saber* tests, Curriculum.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICAS

LISTA DE ANEXOS

1 INTRODUCCIÓN

Los estándares básicos de competencias en matemáticas del ministerio de educación nacional han mostrado la importancia de desarrollar el pensamiento espacial de forma independiente al desarrollo del pensamiento métrico, lo anterior, debido a diferentes aproximaciones que se pueden hacer a los objetos en el espacio, como lo afirma el MEN:

> *había aspectos espaciales más intuitivos y cualitativos que los de la geometría, de los que se desarrolló una ciencia abstracta del espacio (llamada "topología" por la palabra griega para el espacio o el lugar, "topos"), los cuales no necesitaban de las nociones métricas*. (MEN, 2006, pág. 57)

Como hipótesis de investigación, sugerimos que se pueden abordar conceptos básicos de topología en educación básica y media, dado que muchas de las preguntas que aparecen propuestas en las pruebas Saber 9° de los años 2013 a 2015 involucran nociones topológicas básicas desde un abordaje intuitivo.

En el trabajo de (Duval, R., 2006) se plantea la importancia de usar distintos tipos de representación asociados a un mismo objeto matemático, con base en eso, podemos pensar la geometría euclidiana plana como un tipo de representación del espacio de dos dimensiones, sin embargo, existen otros modelos geométricos de dos dimensiones, tales como el plano hiperbólico, el plano proyectivo, las superficies de 2 dimensiones, los complejos poliedros, etc., por lo cual es importante hacer una aproximación a los objetos bidimensionales desde una perspectiva más general.

Por otro lado, tal y como lo afirma (Dickson, L., & Brown, M., 1991), la geometría espacial es más intuitiva para los niños que la geometría plana, de manera que en educación básica no puede privilegiarse la enseñanza de la geometría plana sobre la enseñanza de geometría en el espacio, y dado que la topología permite acercarse a la noción de espacio desde otro punto de vista, en donde la forma deja de ser objeto de estudio, y las medidas de ángulo y longitud carecen de importancia, se vuelve interesante desarrollar el pensamiento espacial desde un enfoque topológico.

Actualmente la topología posee diversas aplicaciones a la vida real, por ejemplo, en física de materiales tenemos fases topológicas, aislantes topológicos, superconductores topológicos y semimetales topológicos. La presente asistencia de investigación se enmarca en el proyecto de investigación "*Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas*", que propone un abordaje lúdico de la topología en el cual el estudiante se responsabilice de su aprendizaje, y entre uno de los objetivos del proyecto se busca transformar y actualizar el currículo actual de enseñanza básica y media para que los estudiantes adquieran nociones básicas de topología en edades tempranas.

Como supuesto, se establece que el currículo actual no responde a las necesidades científicas ni tecnológicas del mundo moderno, contradiciendo el fin del mismo donde se pretende que el estudiante sea matemáticamente competente, algo que permite pensar que esto es efectivamente cierto es la ausencia de la topología en el currículo de matemáticas, a pesar de que en la actualidad esta área tiene aplicaciones a la química, física, las redes, los nudos, etc., por tanto, existe un amplio margen de contextos de aplicabilidad, de hecho, es usada en escáneres de tumores y procesamiento de imágenes, investigación y ciencia. La topología también posee un alto componente de actividades lúdicas e interesantes, desde experimentos con papel, obras de arte, pasatiempos, hasta combinatoria, por ejemplo, en el libro (Barr, S., 2012) podemos encontrar actividades con bandas de Möbius, cilindros y toros.

Pensando en comprobar estas hipótesis, se crea la presente asistencia de investigación, concentrándose en el análisis de las pruebas Saber 9°, las cuales están pensadas en principio para otorgar a los colegios una forma de retroalimentarse y mejorar, además de eso, buscan identificar competencias y conocimientos en los estudiantes colombianos. Se hace primordial rastrear concepciones, actividades y procesos que el ministerio dirija, ya que los colegios y los docentes van a ver influenciadas sus prácticas educativas por estos lineamientos.

En el capítulo 2 se hace una descripción del contexto de la investigación, describiendo el proyecto de investigación al cual se encuentra vinculada esta asistencia, además de eso, se hace una breve descripción del grupo de investigación al que se encuentra vinculado el proyecto, junto con su misión, visión y algunos de sus objetivos.

En el capítulo 3 se habla sobre algunos de los principales problemas que motivaron la aparición del área de topología, algunos conceptos básicos que fueron usados en el rastreo, y algunos trabajos en los que se establece la relación que hay entre la topología y la educación básica.

En el capítulo 4 se hace una descripción de la asistencia de investigación destacando la principal tarea a realizar obteniendo un estado del arte que aporte al semillero de investigación.

En el capítulo 5 se presentan los productos obtenidos en la asistencia de investigación, describiendo cada uno de los parámetros que tuvimos en cuenta para delimitar la investigación, centrándonos en ciertas nociones topológicas, pensamientos matemáticos, y procesos generales.

En el capítulo 6 aparecen las conclusiones y los aportes del trabajo de grado al proyecto de investigación, destacando algunas comparaciones interesantes que se perciben al analizar los datos.

2 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo de grado es producto de una asistencia de investigación vinculada al proyecto *"Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas"* el cual se encuentra asociado al grupo de investigación Culturas Universitarias.

2.1 GRUPO DE INVESTIGACIÓN CULTURAS UNIVERSITARIAS

El grupo de investigación Culturas Universitarias fue constituido en el año 2002, actualmente tiene categoría B de Colciencias y está siendo liderado por el profesor John Jairo Briceño Martínez de la Maestría en Educación de la Universidad Antonio Nariño.

La misión del grupo es aportar al estudio de los procesos de formación profesional y subjetividades del contexto universitario.

La visión del grupo es constituirse en un grupo líder en el tema a nivel nacional, y actuar como ente asesor de tribunales de ética profesional, y de entidades de educación superior que incluyan en su planeación académica el componente ético y valorativo.

Algunos de los objetivos del grupo son:

- Establecer espacios interinstitucionales de discusión, investigación y cooperación en una temática ciertamente árida.
- Establecer un vínculo formal con el Ministerio de Educación Nacional y el ICFES en el cual se retroalimenten tanto los procesos del grupo como los procesos relacionados con la temática objeto de estudio, que estas entidades gubernamentales realicen o proyecten.
- Ampliar el alcance del grupo incrementando su composición, muy especialmente con estudiantes de pregrado interesados en desarrollar sus trabajos de grado en relación con la formación en valores, la responsabilidad social, la acción social responsable y problemáticas relacionadas.

Este grupo cuenta con cinco líneas de investigación que son: Culturas universitarias, educación y sociedad, integración de TIC en educación, lenguaje y desarrollo humano, y administración y gestión educativa.

2.2 PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

El proyecto de investigación "*Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas*" busca desarrollar los contenidos de un curso de didáctica de la topología en un ambiente B-learning que use herramientas de aprendizaje virtuales y tradicionales, además de eso, en el diseño del curso se busca incorporar herramientas metacognitivas que ayuden a los estudiantes a asumir su aprendizaje de forma autorregulada.

Dentro de las metas propuestas en el proyecto, se busca conocer la aproximación intuitiva que tienen los estudiantes de educación básica y media a conceptos básicos del área de topología, lo anterior tomando como base las asignaturas del área de matemáticas que son propuestas en los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998).

2.3 ASISTENCIA DE INVESTIGACIÓN

En esta asistencia de investigación se hace un rastreo de las nociones topológicas que aparecen en las pruebas Saber 9°, lo que permite identificar la aproximación intuitiva que tienen los estudiantes de educación básica a esta área de la matemática, con base en esta información se podrán hacer modificaciones en el diseño del curso que se construyó como parte de los objetivos del proyecto de investigación "*Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas*".

3 MARCO TEÓRICO

3.1 ORIGENES DE LA TOPOLOGÍA

El recorrido de los puentes de Königsberg es un problema que nació como pasa tiempo de los ciudadanos de la ciudad de Königsberg que pertenecía a Alemania y actualmente pertenece a Rusia con el nombre de Kaliningrado. Este problema consistía en recorrer los siete puentes sin pasar más de una vez por el mismo puente y volver al punto inicial, recorriendo las cuatro partes de la ciudad que son divididas por el rio Pregolya, debido a la ausencia de una solución del problema, un gran matemático llamado Leonhard Euler (1707-1783), se interesó en encontrar una solución haciendo un abordaje desde la teoría de grafos, con el objetivo de mostrar que este problema no tenía solución. Para solucionar este problema se definieron los siguientes tipos de caminos que pueden tenerse en un grafo:

Camino Eureliano: Camino donde todas sus aristas pueden ser visitadas solo una vez.
Camino Hamiltoniano: Camino donde todos sus vértices pueden ser visitados solo una vez.
Desde la teoría de grafos se esboza la solución del problema de los puentes de Königsberg**,** buscando existencia de un camino Eureliano en el siguiente grafo:

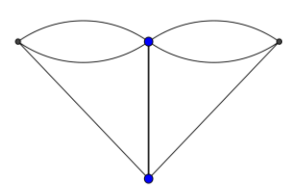


Ilustración 1: Puentes de Königsberg.

Se puede verificar que no existe un camino Eureliano sobre él, por tanto, el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución, sin embargo, es fácil observar que existe un camino Hamiltoniano en el grafo.

Los grafos se utilizan en el estudio de diversos tópicos de la matemática, por ejemplo, dado que dos grafos son iguales si ellos tienen la misma cantidad de vértices y aristas, desde la teoría de grafos se plantea una concepción distinta de las figuras geométricas que poseen vértices y aristas, es decir los poliedros.

El teorema de los cuatro colores es un problema que consiste en pintar un mapa utilizando la menor cantidad de colores posible, lo anterior con la restricción de que dos países con frontera común se encuentren coloreados de la misma forma, dado que en ese caso no podríamos diferenciar las fronteras. Este no tiene una demostración formal desde el punto de vista matemático, sin embargo, se pudo llegar a una solución a través de un algoritmo creado por Robertson en el año 1996.

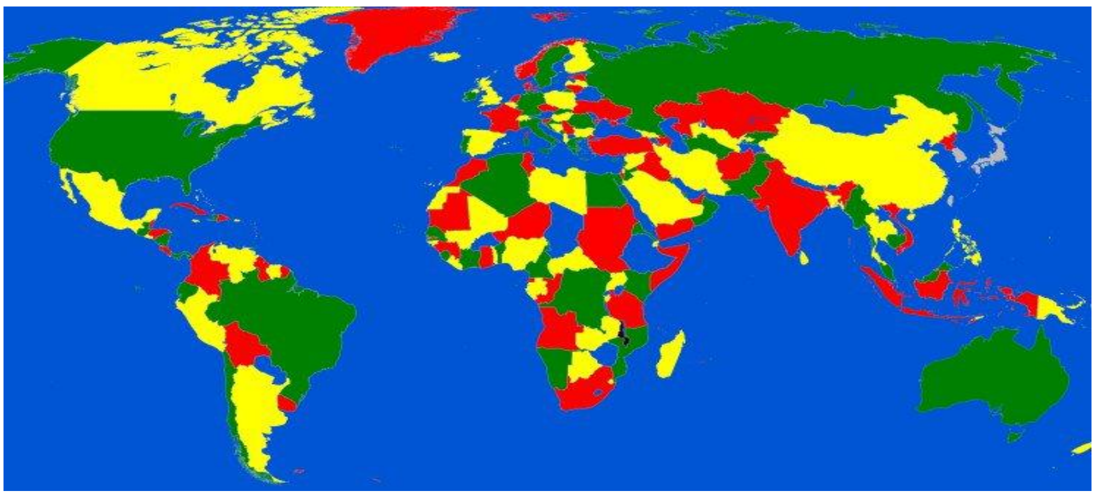


Ilustración 2: Teorema de los Cuatro Colores.

La cinta de Möbius llamada así en honor a August Ferdinand Möbius (1790-1868), consiste en que al realizar un movimiento se obtiene una superficie de una cara y un borde orientable.

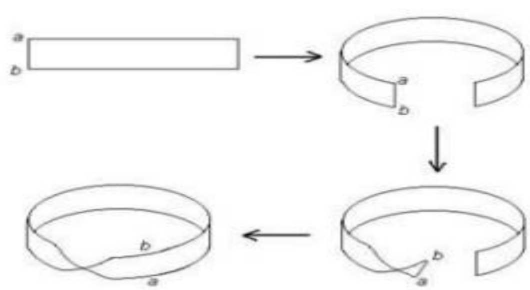


Ilustración 3: Cinta de Möbius.

El recorrido de los puentes de Königsberg, el teorema de los cuatro colores y la cinta de Möbius fueron trabajados por (Monroy, 2010) para poder ver en los estudiantes de grado décimo un manejo más adecuado del pensamiento espacial geométrico, con la comprensión de conceptos como proximidad, posición, borde, vecindad, conectividad, compacidad, metricidad, y no solamente con lo que se maneja en la geometría euclidiana que es lo único que se enseña en la escuela de hoy, dejando a un lado los conceptos anteriormente mencionados que le darían al estudiante una herramienta fundamental para crear su noción de espacio trabajando desde una perspectiva topológica.

Vemos que la teoría de grafos relaciona diferentes problemas como el recorrido de los puentes de Königsberg y el problema de pintar un mapa utilizando la menor cantidad de colores. En el primer caso, se usa la teoría de grafos para explicar por qué este problema no tiene solución, y en el segundo caso, se usa para demostrar un teorema denominado el teorema de los cuatro colores, que busca encontrar cual es la menor cantidad de colores que se necesitan para colorear un mapa sin que dos países vecinos tengan el mismo color.

Se dice que un grafo es plano, si ninguna de sus aristas se cruza, y se define el número cromático de un grafo, como la menor cantidad de colores que se necesitan para colorear todos sus vértices garantizando que ningún par de vértices con arista común tengan el mismo color. El teorema de los cuatro colores es equivalente al siguiente teorema, tomando cada país como un vértice del grafo y cada frontera entre dos países como una arista del grafo.

TEOREMA: El número cromático de un grafo plano es menor o igual que cuatro.

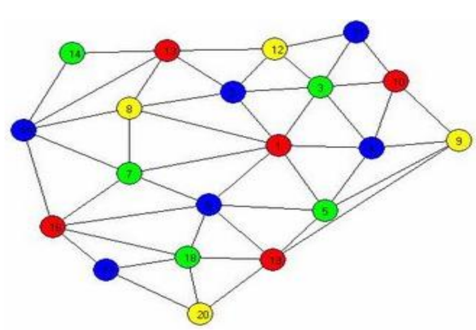


Ilustración 4 Grafo Plano Coloreado.

Estos problemas necesitan de nociones topológicas básicas para su comprensión, las mismas que fueron rastreadas en las pruebas Saber 9°, estas son: vecindad, interior, frontera, continuidad, etc., estos conceptos son de suma importancia ya que brindarían al estudiante un soporte más amplio en estudios posteriores, así como se asegura.

> *"Un tratamiento juicioso de las nociones de topología en la secundaria, ayudaría a que los estudiantes tuvieran mayor comprensión de conceptos tales como límite y continuidad que son claves en el desarrollo del cálculo."* (Delgado, 2010, pág. 15).

Además de estos tres problemas que dieron origen a la topología, también encontramos otros que ayudaron en la estructuración de esta rama de las matemáticas, como la característica de Euler para poliedros, la cual garantiza que en todo poliedro se satisface la ecuación $C + V - A = 2$ donde $C = número\ de\ caras$, $V = número\ de\ vértices$, $A = número\ de\ aristas$.

$C = 4$

$V = 4$

$A = 6$

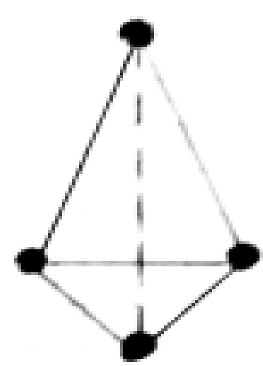


Ilustración 5: Poliedro.

$$C + V - A = 2.$$

Después Antonie Jean Lhuilier (1750 – 1840) deduce que la característica de Euler está relacionada con el número de agujeros del poliedro, de lo cual aparece la ecuación

$$V - A + C = 2 - 2g,$$

donde g es el número de agujeros que posee el poliedro, y en donde surge el concepto de conectividad y por qué no hablar también de continuidad.

$$C + V - A = 2 - 2g \qquad 12 + 16 - 28 = 2 - 2(1).$$

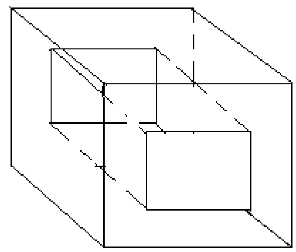


Ilustración 6: Poliedro con Agujeros.

Por último, está la Botella de Klein, nombrada así en honor al matemático Félix Klein la cual es una superficie abierta no orientable.

Con esto vemos que actividades como dibujar, colorear superficies, manipulación de objetos, estudio de los problemas que estructuraron esta rama de las matemáticas, se pueden trabajar las nociones topológicas en la educación básica ampliando la noción de espacio como lo afirmo (Villegas, M., Medina, M., García, M., & González, F., 2013) en un congreso de matemáticas.

> "las nociones topológicas pueden abordarse proponiendo a los niños actividades que les permitan reconocer superficies, relación entre y con figuras, y características entre sus elementos, distinción de los límites, bordes, cercanías, etc."

Queda claro que son múltiples las herramientas que han utilizado diferentes investigaciones para introducir la topología desde los primeros años en educación básica, aunque todo se quede en un proyecto, porque en los planes de estudio actuales todavía no se incorporan las propiedades topológicas.

3.2 CONCEPTOS Y NOCIONES TOPOLÓGICAS

En el trabajo (Echeverry, A. & Vergel, C., 2016), que toma como base el trabajo de Piaget, afirma que todo niño puede aproximarse intuitivamente a las nociones de interior, vecindad, conexidad, etc. Con base en lo anterior se rastrearán estos conceptos en las pruebas Saber 9° para tener una visión más amplia de la geometría.

Teniendo en cuenta esto, surgen las siguientes preguntas:

- ¿Qué son las nociones topológicas?
- ¿Dónde se originan estas nociones topológicas?

Para dar respuesta a estas preguntas la investigación se centrará en la topología conjuntista y combinatoria, donde esta última se interesa más por elementos cualitativos de la geometría como lo son número de caras, vértices, aristas, entre otras. Estos elementos dieron origen a algunos invariantes topológicos como la característica de Euler, propuesta por el matemático con el mismo nombre, quien es uno de los grandes precursores del área de topología.

Sin embargo, en la topología conjuntista es donde se definen de forma rigurosa estos conceptos que estudiaremos a lo largo del texto, las cuales estructuraron la base del Análisis Matemático, la Geometría Riemanniana, entre otras áreas de la matemática.

Para empezar, una colección de subconjuntos X, se define como un conjunto cuyos elementos son subconjuntos del conjunto X. A continuación, aparecen ejemplos de algunas colecciones de subconjuntos de un conjunto de tres elementos.

Ejemplo: Sea $X = \{a, b, c\}$, algunas colecciones de subconjuntos de X son:

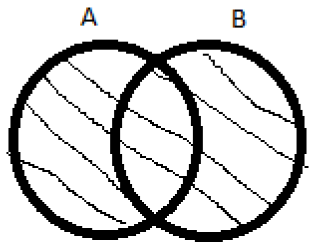
$2^X = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$ (Partes de X);

$\Omega = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$;

$\Omega' = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$.

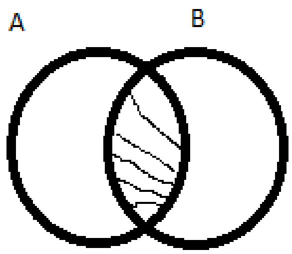
Otro punto a resaltar es la unión e intersección de conjuntos, definidas como:

$A\ U\ B\ =\ \{x: x \in A\ o\ x \in B\}$;



$A \cup B$

$A \cap B \ = \ \{x\colon x \in A \ y \ x \in B\}$.



$A \cap B$

En el caso de colecciones arbitrarias de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, se denota la unión e intersección los elementos de los conjuntos de la colección como:

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\bigcap_{i \in I} A\,i$$

Ahora definiremos una clase de colecciones de subconjuntos que satisfacen propiedades particulares, y que reciben el nombre de topologías. A partir de estas colecciones aparecen las nociones que se van a estudiar en este trabajo.

Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- X y $\emptyset$ están en τ.
- La unión de elementos de cualquier sub-colección de τ es un elemento de τ.
- La intersección de elementos de cualquier sub-colección finita de τ es un elemento de τ.

Ejemplo: Algunas de las nueve topologías el conjunto $X = \{a, b, c\}$ son las colecciones:

$\tau_1 = \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}, \tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}, X\}, \tau_4 = 2^X$.

Con esta definición vamos a delimitar los conceptos topológicos que se van a utilizar en esta investigación las cuales son: Invariante topológico, vecindad abierta, punto interior, interior de un conjunto, punto de adherencia, clausura de un conjunto, punto de frontera, frontera de un conjunto, punto de acumulación, puntos aislado, conjunto disconexo y conjunto conexo.

Ahora vamos a dar algunas definiciones formales de conceptos topológicos básicos acompañados de nociones intuitivas que serán utilizadas como base en el rastreo de las preguntas de las pruebas Saber 9°.

Definición (Invariante topológico): Un invariante topológico es una propiedad **P** que se conserva por homeomorfismos.

Noción intuitiva (invariante topológico): Un invariante topológico es aquello que no cambia a pesar de que contraiga o se expanda.

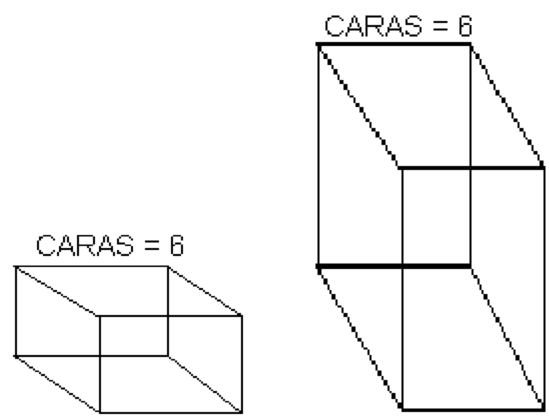


Ilustración 7: Invariante Topológico.

Definición (Vecindad abierta): Dado un espacio topológico (X, τ) y un punto $x \in X$, todo conjunto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $U \in \tau$ es llamado una vecindad abierta del punto x.

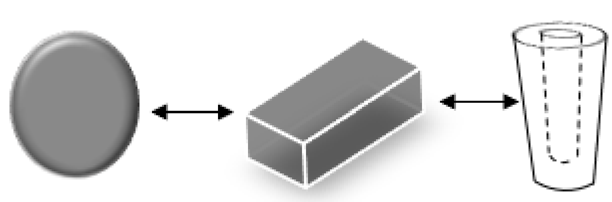


Ilustración 8: Homeomorfismo.

Noción intuitiva (Vecindad abierta): Una vecindad de un punto x es un conjunto formado por elementos que rodean el punto x.

Ejemplo: Dado un número real x y $\varepsilon > 0$ el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es una vecindad básica de x.

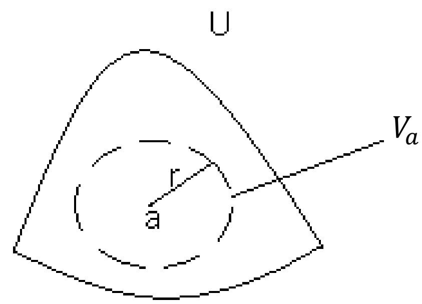


Ilustración 9: Vecindad Abierta.

Observando esta imagen podemos definir la vecindad de a en U como el conjunto de puntos que están contenidos a cierta distancia de a con radio r, donde r es un ε > 0

Definición (Punto de interior): Un punto $x \in S$ se llama punto interior de S cuando existe una vecindad abierta U de x tal que $x \in U \subset S$.

Noción intuitiva (Punto Interior): Un punto x que está en el interior de X si los puntos alrededor del punto están en el conjunto X.

La noción de interior en topología se relaciona también con el concepto de Bola ya que, si existe una Bola contenida en el conjunto S que contenga un punto x, se dice que este punto está en el interior de S.

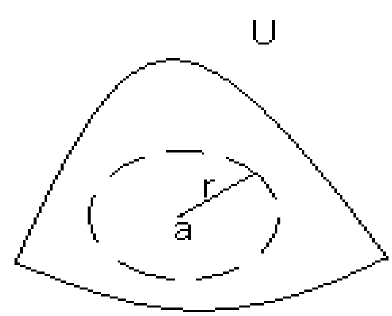


Ilustración 10: Punto Interior.

Definición (Punto de adherencia): Dado un espacio topológico (X, τ) y un conjunto $A \subset X$, se dice que x es un punto adherente de A, si para toda vecindad abierta U de x se satisface $U \cap A \neq \emptyset$. El subconjunto de X formado por todos los puntos adherentes de A se llama adherencia de A.

Noción intuitiva (Punto de adherencia): Un punto de adherencia es aquel que se encuentra en el conjunto, o tan cercano al conjunto como se quiera al conjunto.

Definición (Clausura de un conjunto): La clausura de un conjunto X es el conjunto de todos los puntos de adherencia de X, este conjunto se denota como $\bar{X}$.

Noción intuitiva (Adherencia de un conjunto): La clausura de un conjunto, es aquel conjunto que lo contiene y tiene un borde definido.

Definición (Frontera): Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $S \subseteq X$ un subconjunto. Diremos que $x \in X$ es un punto frontera de S, si para toda vecindad U de x se satisface $U \cap S \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos frontera de S se denomina la frontera de S, y se representa por $fr(S)$.

Noción intuitiva (Frontera): La frontera de un conjunto se puede entender como el conjunto de puntos que se encuentran en el borde del conjunto y de su complemento.

Una gráfica que nos da una idea más clara de lo que es el término frontera es la siguiente

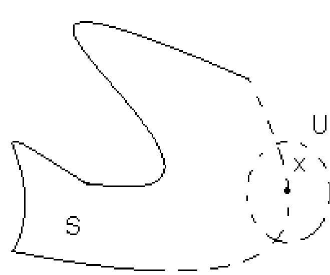


Ilustración 11: Punto de Frontera.

Definición (Puntos aislados): Dado (X, τ) un espacio topológico y $S \subset X$, diremos que un punto $x \in S$ es un punto aislado de S, si existe una vecindad U de x tal que $U \cap S = \{x\}$.

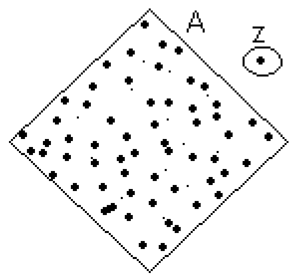


Ilustración 12: Puntos Aislados.

Noción intuitiva (Puntos aislados): Un punto aislado se puede entender como un punto que no tiene elementos del conjunto cercanos.

Definición (Punto de acumulación): Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $S \subseteq X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de S, si cualquier vecindad U de x satisface $(U - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de S se llama el conjunto derivado de S, y se representa por S'.

Noción intuitiva (Punto de acumulación): Son puntos a los cuales podemos acercarnos tanto como se quiera, generando sobre un punto bastantes puntos cercanos generando puntos que se van acumulando

Ejemplo: Se observa en el conjunto $A = \frac{1}{n_{(n \epsilon N)}}$, que se generan infinitos puntos de acumulación en el punto 0.

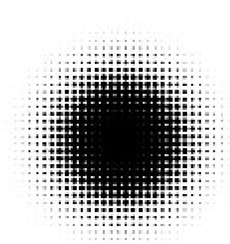


Ilustración 13: Puntos de Acumulación.

Definición (Conjunto disconexo): Un conjunto X es llamado disconexo, si existen abiertos U, V tales que $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$. La dupla (U, V) es llamado una separación de X.

Noción intuitiva (Conjunto disconexo): Intuitivamente podríamos decir que un conjunto es disconexo si está separado, un ejemplo de esto es el conjunto de Cantor.

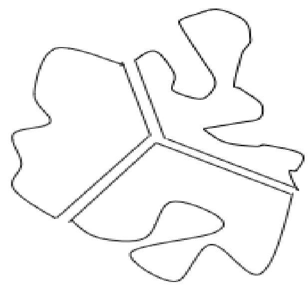


Ilustración 14: Conjunto Disconexo.

Definición (Conjunto conexo): Decimos que un conjunto X es conexo, si no es disconexo.

Noción intuitiva (Conjunto conexo): Se podría definir conexo como aquello que está conectado, y si nos referimos al espacio es aquella figura de una sola pieza, que no se puede dividir.

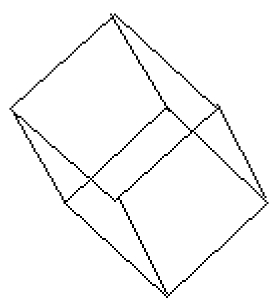


Ilustración 15: Conjunto Conexo.

3.3 PRECEDENTES EN DIDÁCTICA DE LA TOPOLOGÍA EN EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

La didáctica de la matemática comenzó a ser reconocida científicamente a mediados de los años sesenta, según (Gascón, 1998), en esta época se reconocieron las primeras teorías, experimentos e investigaciones, siendo esta tratada como una ciencia, por esta razón la mayoría de los estudios en didáctica de la topología son bastante recientes.

Las actividades didácticas que pretenden abordar la comprensión de nociones topológicas, en su mayoría están dirigidas a pregrado, principalmente en los programas de licenciatura en matemáticas e ingeniería de sistemas, en la licenciatura porque la topología nace de problemas en un contexto geométrico y analítico (Bastán, M., Cuenya, H. & Fioritti, G. , 2010) y en la ingeniería porque encontramos una gran cantidad de trabajos en teoría de redes utilizando grafos. Sin embargo, son pocos los estudios que relacionan la enseñanza de la topología con la educación básica si lo comparamos con los estudios relacionados con el área que existen en educación superior, además de eso, los estudios que existen son secuencias didácticas, cuyo objetivo es mejorar la comprensión de conceptos como vecindad, interior, frontera, etc.

Los conceptos mencionados en el capítulo anterior se rastrearon en las pruebas Saber 9°, entendiendo como noción lo mínimo que debería aprender un estudiante para comprender esta rama de las matemáticas. La dificultad que aparece en la comprensión de estas ideas por parte de los estudiantes de licenciatura en matemáticas, y por otro lado en educación básica y media para un acercamiento a sus nociones, ha llevado a que los docentes creen diferentes estilos de enseñanza y generen secuencias didácticas, unidades didácticas, juegos, entre otras actividades, que buscan vincular el aprendizaje de topología en la educación básica, tomando como metodología la ingeniería didáctica y la teoría de las situaciones didácticas de (Brousseau, 2007), la cual postula que para todo conocimiento matemático es posible construir una situación fundamental, lo anterior lo propone (Espinoza, 2017) en su secuencia didáctica para la comprensión del concepto de métrica, vecindades, interior, exterior y frontera.

Además de estas formas de enseñar conceptos fundamentales de topología, vemos como en la tesis de (Muñoz, C., Ossa, C. & Quintero, A., 2016) una estrategia para la comprensión de conceptos fundamentales de topología, consiste en relacionar el estudio de esta área con literatura narrativa como: Malditas Matemáticas, Alicia en el País de los Números, El Hombre que Calculaba.

Dado que esta investigación tiene como objetivo secundario rastrear nociones topológicas en las pruebas Saber 9°, tiene más relevancia el estudio de abordajes topológicos en educación básica y media, sin embargo, los trabajos que encontramos coinciden en mostrar que la educación básica y la topología no están unidas, pues en el pensamiento espacial se da prioridad a la geometría desde el punto de vista euclidiano y no a las propiedades topológicas que se relacionan a este tipo de pensamiento.

Entre algunos trabajos que proponen metodologías que relacionan topología y educación básica aparece el artículo de (Fernandez, E. & Vidal E., 1984), donde se resalta la importancia de la enseñanza de geometría y topología en niveles elementales para mejorar sus capacidades cognoscitivas, haciendo énfasis en que la topología es el punto de partida para empezar a enseñar geometría.

Según (Fernandez, E. & Vidal E., 1984), cuando cita a Piaget e Inhelder 1956, y Sauvy 1972 para afirmar que aproximadamente a partir de los 6 años los conceptos topológicos van transformándose en conceptos euclidianos y proyectivos, y que a esto se le llamo por muchos años la primacía topológica, pero después de experimentos hechos por Lovell 1959 , Clements y Batista 1992 se refuto esta teoría, dado que un rectángulo y un circulo son topológicamente isomorfos, sin embargo, al manipular figuras geométricas, los niños consideraban diferentes los objetos con bordes y los objetos sin bordes, lo que contribuyó a que tomara más fuerza la didáctica de la geometría sobre la primacía topológica.

Pero este experimento de Piaget nos deja ver que hay algunas características que el niño ve en la figura, que según (Fernandez, 1984) son relaciones de proximidad, separación, orden, contorno y continuidad, esto debido a que los niños resaltan características no medibles al manipular objetos, que es la concepción de espacio desde el enfoque topológico. A partir de estas hipótesis se han planteado diferentes trabajos que relacionan la topología con los ciclos básicos de aprendizaje.

Uno de estos es el de (Cognigni, T. & Braicovich, R., 2011) En este artículo de la revista Números vemos como las autoras basándose en la conjetura de los cuatro colores, enseñan a estudiantes entre los 5 y 14 años, por medio del coloreo de grafos topología combinatoria y grafos planos.

También está el trabajo que realizó (Arias, 2013) en el cual vemos diferentes actividades manipulando plastilina y alambre dulce para que los estudiantes comprendan algunas nociones topológicas.

Vemos como hay tesis que van dirigidas a estudiantes de licenciatura en matemáticas donde se hace una transposición didáctica para mejorar la comprensión de conceptos fundamentales en topología y como en algunos artículos de las revistas especializadas en didáctica se hace una referencia del estudio de la topología en educación básica, dando una visión más amplia de la topología para ser trabajada desde los primeros ciclos de la educación básica, como también lo hicieron en sus tesis de grado: Delgado Monroy y Norma Leticia Cabrera Fermoso, Rubén González Vera, Herminia Mendoza Mendoza Roberto Arzate Robledo, y Oscar cárdenas, Julián Guzmán Baena en el trabajo "Topología desde la infancia", las reseñadas anteriormente, manejan ciertos tópicos que van dirigidos hacia la comprensión de algunas nociones topológicas desde los primeros años de educación, estos tópicos son: grafos, recorrido, forma, equivalencia, nudos los cuales resultan de gran utilidad para comprender mucho mejor el concepto de topología. o realizando una transposición didáctica como (Cárdenas, 2007) que utiliza cartografía para enseñar topología en educación básica.

Hay otros trabajos que también tienen como objetivo principal introducir a los estudiantes en los conceptos básicos de la topología general a través de tres problemas que dieron origen a esta rama de las matemáticas y se puede decir que dieron origen por lo que estipula.

"El Programa Epistemológico iniciado por Broussea (1986), se asigna un rol fundamental al estudio del saber matemático, no sólo como un saber en sí mismo sino analizando el tipo de problemas que le dieron origen" (Bastan., 2010)

3.4 COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

Los estándares básicos de competencias (MEN, 2006) buscan definir las competencias que debe tener un estudiante de educación básica y media para ser competente en el área de matemáticas, la clasificación hecha en este documento se divide en los procesos generales de la actividad matemática y los tipos de pensamiento matemático.

Los procesos generales buscan que los estudiantes se apropien de los saberes propios en una disciplina de estudio, en el caso de matemáticas se clasifican en cinco categorías que son: la formulación tratamiento y resolución de problemas; la modelación; la comunicación; el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Por otro lado, el mismo documento propone que el desarrollo del pensamiento lógico-matemático se puede desarrollar tomando como base cinco categorías de pensamiento matemático que son: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos; el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas; el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos analíticos.

4 DESCRIPCIÓN DE LA ASISTENCIA DE INVESTIGACIÓN

4.1 CONTEXTO DE LA ASISTENCIA DE INVESTIGACIÓN

Dentro de los objetivos del proyecto de investigación "*Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas*" que busca aproximar a los estudiantes hacia la topología en un contexto lúdico, usando estrategias metacognitivas, con el objetivo que los estudiantes se responsabilicen de su aprendizaje. Aparece como una de las tareas rastrear las nociones topológicas que aparecen en las pruebas Saber 9° publicadas por el MEN entre los años 2013 a 2015, con el objetivo de identificar qué tipo de conceptos están siendo evaluados en estas pruebas nacionales, pues se piensa que de esta forma podremos establecer un estado del arte y un punto de partida para desarrollar algunas de las estrategias que ayuden a cumplir el objetivo principal de la investigación.

Las pruebas Saber fueron introducidas por el MEN a comienzos del presente siglo con el fin de evaluar a los colegios en competencias argumentativas, propositivas e interpretativas, sin embargo, estas competencias han ido transformándose y para nuestro rastreo las competencias que miden las pruebas son: razonamiento, argumentación, planteamiento de problemas, resolución de problemas, comunicación, representación y modelación. Paralelamente evaluar conocimientos de los estudiantes en los pensamientos geométrico, espacial, variacional, aleatorio y numérico, mediante la solución de problemas verbales, por lo anterior, se hace primordial analizarlas minuciosamente.

Existen varios parámetros que se deben tener en cuenta cuando se desean analizar documentos o pruebas, la delimitación que se presenta en el próximo párrafo propende por identificar si aparecen este tipo de nociones implícitamente o explícitamente en las pruebas Saber 9°, bien sea en problemas, enunciados, frases, soluciones, vocabulario o preguntas.

Las nociones topológicas escogidas para delimitar la investigación son: puntos de acumulación (PA), puntos de adherencia (PD), puntos aislados (PS), frontera (F), interior (I), Punto interior(PI), conexión (C), disconexión (AC), vecindad abierta (VA), invariante topológico (IT).

4.2 ACTIVIDADES A DESARROLLAR EN LA ASISTENCIA DE INVESTIGACIÓN

Este proyecto de grado busca identificar nociones topológicas en las pruebas Saber 9° entre los años 2013 a 2015, los objetivos de la asistencia de investigación son los siguientes:

- Identificar las siguientes nociones topológicas en las pruebas Saber 9° entre los años 2013 a 2015

  Tipo de noción:

  - Interior
  - Vecindad abierta
  - Invariante topológica
  - Puntos de adherencia
  - Frontera
  - Puntos de acumulación
  - Puntos Aislados
  - Disconexión
  - Conexión
- Analizar sobre cada prueba si la noción seleccionada aparece de manera implícita o explícita.

  Tipo de mención:

  - mención implícita al objeto topológico (MI)
  - mención explícita al objeto topológico (ME)

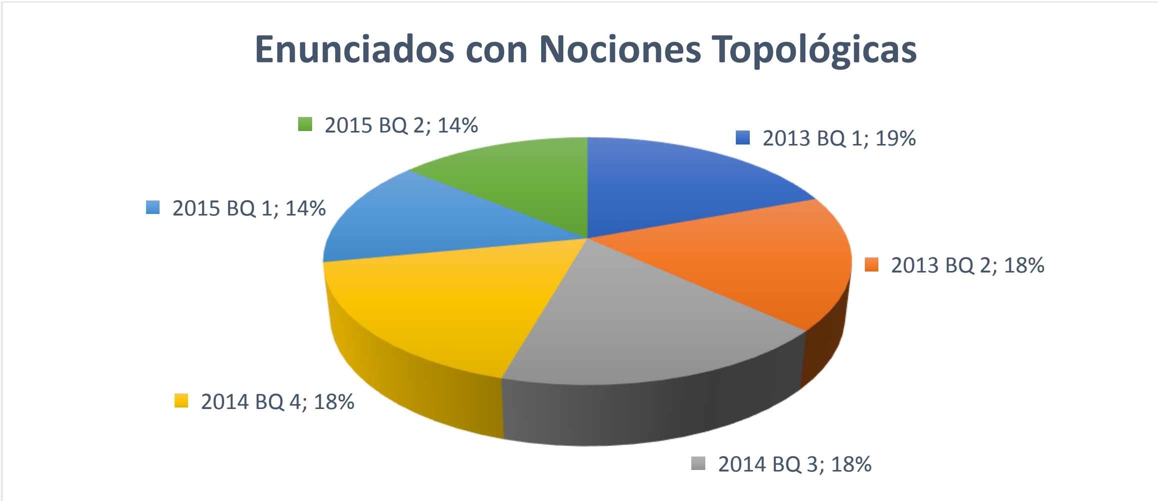
5 PRESENTACIÓN DE LOS PRODUCTOS DE INVESTIGACIÓN

Se construyó una rejilla en Excel anexo a, en la cual aparece el análisis de cada una de las pruebas Saber 9° entre los años 2013 y 2015. Este análisis se divide en cinco parámetros que son: cantidad de preguntas, enunciado, noción topológica, mención, pensamiento matemático, y los procesos generales, estos dos últimos siguiendo los lineamientos curriculares (MEN, 1998). Estos parámetros ubicados en la primera fila se subdividen en columnas donde en la segunda columna aparece la cantidad de preguntas del área de matemáticas que fueron sometidas a rastreo analizando 161 preguntas en total. En el anexo b, aparece un ejemplo de los criterios que se utilizaron para seleccionar nociones topológicas en cada una de las preguntas.

Los ítems que aparecen en la primera columna y que están subdivididos en bloques, debido al descanso que se estipula en estas pruebas, existiendo dos bloques de matemáticas por año donde:

- 2013 BQ 1: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 1 año 2013
- 2013 BQ 2: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 2 año 2013
- 2014 BQ 3: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 3 año 2014
- 2014 BQ 4: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 4 año 2014
- 2015 BQ 1: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 1 año 2015
- 2015 BQ 2: Prueba Saber 9° realizada en el bloque 2 año 2015

En la tercera columna aparece la cantidad de enunciados del área de matemáticas en los cuales fue encontrada alguna noción topológica los cuales se dividen en dos preguntas y respuesta ya que son de opción múltiple y hay opciones de respuesta donde aparecieron las nociones topológicas. Totalizando entre ambas un 34% del total de enunciados, con un 62% para preguntas y un 38% para las opciones de respuesta aclarando que cada ítem seleccionado aparece solamente una vez sin tener en cuenta si la noción topológica aparece en la pregunta, en la respuesta, o en ambas. Y del total de nociones topológicas que se encontraron en los enunciados del rastreo, se construye la siguiente gráfica.



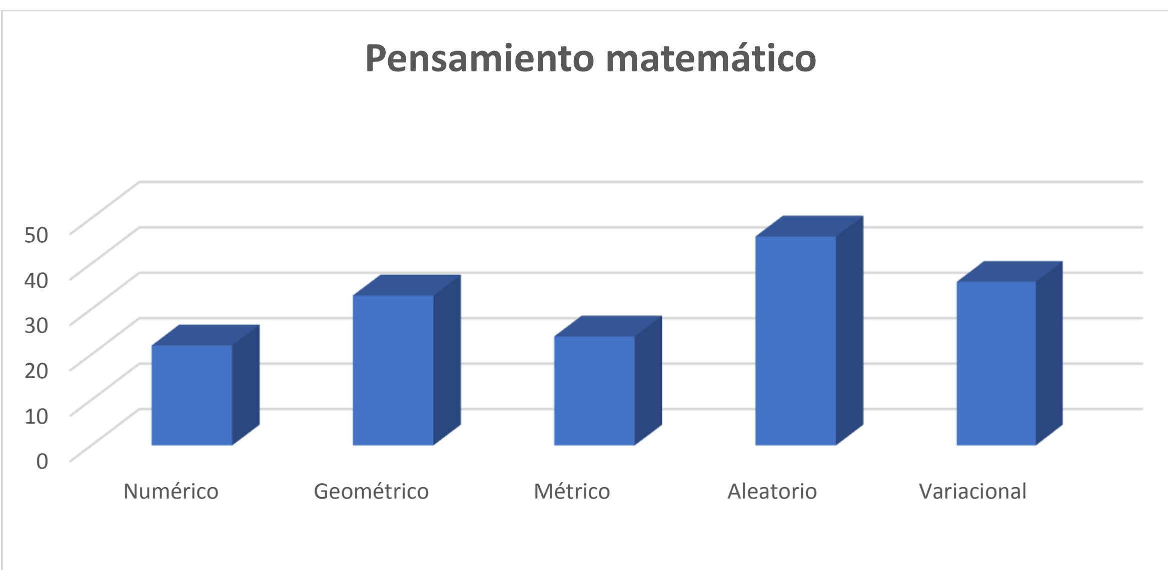
1 Enunciados de Nociones Topológicas.

En la cuarta columna se específica cual noción topológica se seleccionó en cada enunciado a partir de los conceptos y nociones incluidas en el capítulo 1, esta selección se hace como lo muestra el anexo c que corresponde a una pregunta donde se selecciona la noción topológica puntos aislados, con su respectiva observación del porque allí aparece, totalizando todas las nociones que aparecen se construye el siguiente gráfico, observando que la noción más encontrada fue la de invariante topológico, debido a la gran cantidad de poliedros que aparecen en las pruebas, donde un 80% de las preguntas solicitan información geométrica dejando de lado la parte topológica.

2 Nociones Topológicas.

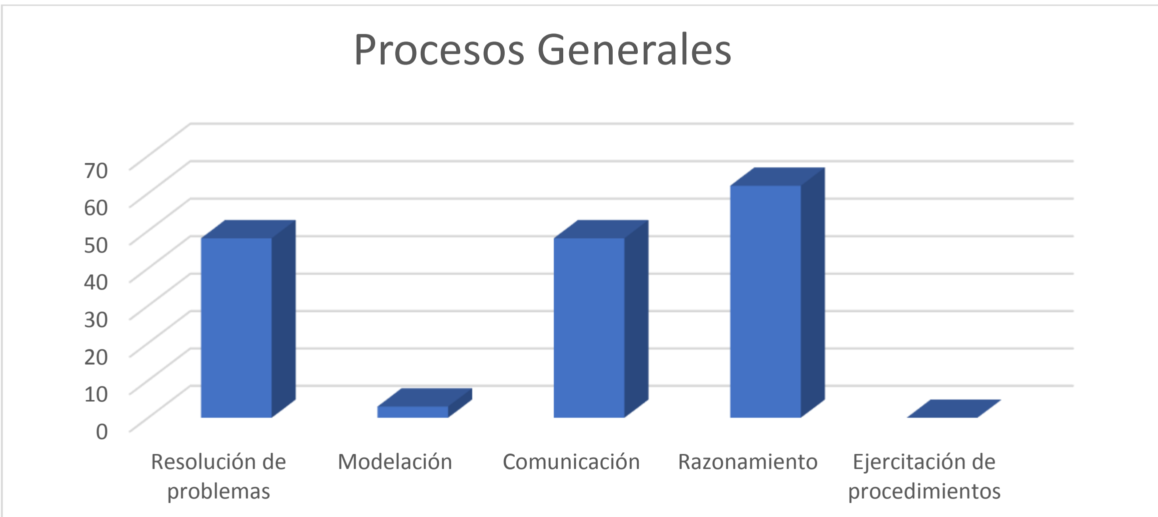
La quinta columna hace referencia a la mención, la cual se divide en dos explícita o implícita dependiendo de la situación en que aparezca esta noción en la pregunta o en las opciones de respuesta de las pruebas Saber 9°, dando como resultado que tan solo un 8% aparecen de forma explícita y un 92% de forma implícita, en el anexo c, se observa que la pregunta va dirigida únicamente a la medida dejando de lado cosas como lejos, cerca, vecinos, interior y otros más.

En la sexta y séptima columna aparecen los procesos generales y los cinco tipos de pensamiento matemático, estos pensamientos son el numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional (MEN, 1998), algunas de estas clasificaciones respecto al pensamiento matemático y los procesos generales aparecen en (ICFES, 2014) donde se encuentran algunas preguntas ya clasificadas por expertos en la materia, tomando estos como referencia para las clasificaciones que no aparecen en el documento citado y que fueron realizadas por el autor del trabajo de grado. Según la clasificación realizada, la mayoría de preguntas que se hicieron manejaron un pensamiento aleatorio, aun así, la brecha no es muy grande y se mantiene un equilibrio entre los cinco tipos de pensamiento por pregunta que se realiza en las pruebas Saber 9°, como lo muestra la gráfica.



3 Pensamiento Matemático.

Además, se totalizan los procesos generales a los cuales hace referencia cada pregunta, dividiéndolos en resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento y ejercitación de procedimientos, esta división de estos procesos se encuentra descrita en los lineamientos curriculares por competencias. (MEN, 1998), la siguiente grafica muestra dicha información, destacando que el proceso de modelación es trabajado en pocas preguntas en las pruebas saber 9°, pero que con topología se podría trabajar, un ejemplo de esto sería la teoría de grafos para modelar diferentes tipos de redes.



4 Procesos Generales.

6 CONCLUSIONES Y APORTES AL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Con base en los rastreos realizados a las pruebas Saber 9° entre los años 2013 a 2015, se consigue comprobar que en un porcentaje muy bajo de las preguntas aparece de forma explícita algún tipo de noción topológica. De lo anterior se puede concluir que no se están tomando la reglamentación establecida en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), en los cuales se pide involucrar el área de topología como una forma de abordar el pensamiento espacial desde un punto de vista diferente a la geometría.

El porcentaje de preguntas en las cuales aparecen nociones topológicas de forma implícita, muestra que algunas nociones básicas de topología, principalmente invariantes topológicos, interior, conexión y disconexión, están siendo abordadas en los colegios desde contextos diferentes a la topología, tales como la geometría, y en años preliminares al cálculo, lo cual puede llegar a facilitar la integración de esta área de la matemática en los currículos en los primeros ciclos de aprendizaje.

Nociones topológicas como frontera, vecindad abierta y puntos aislados representan un porcentaje muy bajo encontrando solo dos preguntas con estas nociones, descritas en el anexo c y anexo d. La noción frontera no se encontró en ninguna pregunta dejando pasar una oportunidad para que el estudiante se indague por límites y continuidad, lo cual puede servir para estudios posteriores.

Las pruebas Saber 9° analizadas muestran que todos los pensamientos matemáticos se abordan aproximadamente en igual cantidad de preguntas contrario a los procesos generales donde la modelación y ejercitación de procedimientos se encuentra en un porcentaje muy bajo.

Las preguntas que incluyen el pensamiento geométrico, el cual tiene una relación directa con la topología dado que esta área de la matemática también es llamada geometría de la posición, todas incluyen medidas bien sea de poliedros, figuras planas, distancias, ángulos, entre otras, sin embargo dejan de lado la topología de forma explícita, alejándola del currículo de matemáticas, teniendo en cuenta que estas pruebas son un gran referente a la hora de crear un plan de estudios, junto con los referentes curriculares sugeridos por el ministerio (MEN, 1998).

El aporte de esta asistencia de investigación al proyecto *“Diseño de un ambiente virtual para el aprendizaje de topología y sus aplicaciones, basado en el desarrollo de habilidades metacognitivas”*, ha sido mostrar las competencias disciplinares que se podrían esperar en el área de topología por parte de estudiantes de grado 9°, con base en la aparición de algunos conceptos de topología en forma puramente intuitiva. Este tipo de información ayudará a mejorar las estrategias didácticas que se están desarrollando en el proyecto de investigación, que buscan facilitar el aprendizaje y la enseñanza de esta área de las matemáticas en estudiantes con distintos niveles de formación, lo anterior haciendo uso ambientes virtuales que ayuden a crear un ambiente lúdico que aproxime a los estudiantes a la topología de una forma más intuitiva, y de esta forma puedan desarrollar más fácilmente habilidades metacognitivas que los ayuden a responsabilizarse de sus procesos de aprendizaje.

REFERENCIAS

Arias, A. (2013). *Experiencia topológica en grados cuarto, quinto y sexto de la educación básica.* Pereira: Universidad tecnológica de Pereira.

Barr, S. (2012). *Experiments in topology.* Courier Corporation.

Bastán, M., Cuenya, H. & Fioritti, G. . (2010). Un análisis histórico epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática*.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teorÍa de las situaciones didácticas . *Didáctic to Algebra Study*, vol. 7.

Cárdenas, O. (2007). *La enseñanza de la topología a través de la cartografía.*

Cognigni, T. & Braicovich, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Números revista didáctica de las matemáticas*, 135–148.

Delgado, D. (2010). *Prouesta didáctica para el trabajo de algunas nociones de topología en el grado décimo.* Bogota.: Universidad Nacional de Colombia.

Dickson, L., & Brown, M. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.*

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 143-168.

Echeverry, A. & Vergel, C. (2016). *Grafos en la educación básica.*

Espinoza, H. (2017). *Una secuencia didáctica sobre conceptos de topología métrica para la formación de docentes de matemática.* Perú: UNE.

Fernandez, E. & Vidal E. (1984). Enseñanza de la topología y geometría en los niveles elementales. *Enseñanza de las ciencias.*, 111-115.

Gascón. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.*

ICFES. (2014). *Saber 3° 5° 9° matemáticas.* Bogota: ISBN de la versión electrónica: 978-958-11-0618-9.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá.: Magisterio.

MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá.

Muñoz, C., Ossa, C. & Quintero, A. (2016). *Literatura científica: una estrategia didáctica para la comprensión de situaciones problema desde la topología con maestros en formación.*

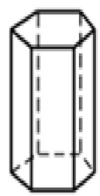
Villegas, M., Medina, M., García, M., & González, F. (2013). Las Nociones Espaciales en Educación Infantil. Un Estudio Diagnóstico.

ANEXOS

Pruebas Saber MEN	Cantidad de preguntas en la prueba	Enunciados donde aparecen nociones topológicas		Noción topológica									Mención		Pensamiento Matemático					Procesos Generales				
		Pregunta	Respuesta	Puntos de acumulación	Puntos aislados.	Puntos de adherencia	Conexión	Disconexión	Interior	Frontera	Vecindad abierta	Invariante Topologica	Explicita	Implícita	Numérico	Geométrico	Métrico	Aleatorio	Variacional	Resolución de problemas	Modelación	Comunicación	Razonamiento	Ejercitación de procedimientos
2013 BQ 1	27	8	3	2	0	0	1	1	3	0	0	4	2	9	5	5	5	6	6	8	3	8	8	0
2013 BQ 2	27	7	3	0	1	0	4	2	2	0	0	1	0	10	5	6	3	8	5	7	0	10	10	0
2014 BQ 3	27	4	6	1	0	1	1	3	1	0	0	3	2	8	3	6	3	8	7	8	0	9	10	0
2014 BQ 4	27	7	3	0	0	0	3	3	1	0	0	3	0	10	3	4	5	8	7	7	0	9	11	0
2015 BQ 1	27	5	3	0	0	1	3	1	1	0	0	2	0	8	4	5	4	9	5	6	0	7	14	0
2015 BQ 2	26	4	4	1	0	0	1	1	2	0	1	2	1	7	2	7	4	7	6	12	0	5	9	0
	161	35	22	4	1	2	13	11	10	0	1	15	5	52	22	33	24	46	36	48	3	48	62	0

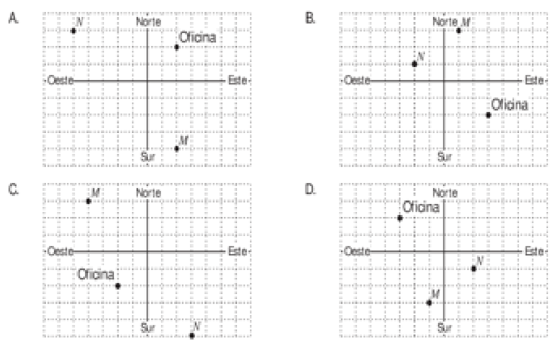
Anexo a: Tabla de resultados

Asistente de investigación	Fabian Ricardo Blanco Vega	Cantidad de enunciados analizados	27	Grado	9	Consecutivo	4	Documento publicado po MEN.
Documento	Prueba Saber Matematicas 9° Bloque 3 2014	Año de publicación documento	2014	Fecha de la realización	15/04/2017			

número	Enunciado	Tipo de enunciado		Noción topológica									Mención		Pensamiento Matemático					Procesos Generales					Observaciones
		Pregunta	Respuesta	Puntos de acumulación	Puntos aislados	Puntos de adherencia	Conexión	Disconexión	Interior	Frontera	Vecindad abierta	Invariante Topologico	Explícita	Implícita	Numérico	Geométrico	Métrico	Aleatorio	Variacional	Resolución de problemas	Modelación	Comunicación	Razonamiento	Ejercitación de procedimientos	
79	En la figura se muestra un prisma hexagonal.  **Figura** **NO** es correcto afirmar que el prisma tiene A. 6 caras rectangulares. B. 10 vértices. C. 2 caras hexagonales. D. 18 aristas.		X									x	x			X						X			Se pregunta sobre invariantes topologicos como caras, vertices y aristas.

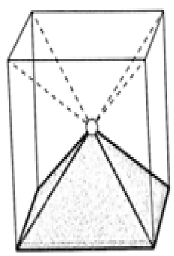
Anexo b: Pregunta analizada invariante topológico

Asistente de investigación	Fabian Ricardo Blanco Vega	Cantidad de	27	Grado	9	Consecutivo	2	Documento publicado por el MEN
Documento	Prueba Saber Matematicas 9° Bloque 2 2013	Año de publicación	2013	Fecha de la	15/03/2017			

número	Enunciado	Tipo de enunciado		Noción topológica									Mención		Pensamiento Matemático					Procesos Generales						
		Pregunta	Respuesta	Puntos de acumulación	Puntos aislados	Puntos de adherencia	Conexión	Disconexión	Interior	Frontera	Vecindad abierta	Invariante topologico	Explícita	Implícita	Numérico	Geométrico	Métrico	Aleatorio	Variacional	Resolución de problemas	Modelación	Comunicación	Razonamiento	Ejercitación de procedimientos	Observaciones	Respuesta
39	Dos personas, *M* y *N*, acordaron encontrarse en una oficina. Para llegar a la oficina, la persona *M* debe caminar 5 cuadras al sur y después 2 al este; la persona *N* debe caminar 5 cuadras al oeste y después 3 al norte. ¿En cuál de los planos coordenados se representa correctamente la posición de las personas y de la oficina? *Nota: El lado de cada cuadrado de la cuadrícula representa 1 cuadra.* 		X		X									X			X					X			Se observan puntos aislados donde lo aislado no dependera de la escala manejada en el plano cartesiano.	D

Anexo c: Pregunta analizada puntos aislados

Asistente de investigación	Fabian Ricardo Blanco Vega	Cantidad de enunciados	27	Grado	9	Consecutivo	6	Documento publicado por el MEN.
Documento	Prueba Saber Matematicas 9° Bloque 2 2015	Año de publicación documento	2015	Fecha de la realización del análisis	5/03/2017			

número	Enunciado	Tipo de enunciado		Noción topológica											Mención		Pensamiento Matemático					Procesos Generales					Observaciones	Respuesta
		Pregunta	Respuesta	Punto de acumulación	Puntos aislados	Adherencia	Conexión	Disconexión	Interior	Frontera	Vecindad abierta	Invariante topologico	Explicita	Implícita	Numérico	Geométrico	Métrico	Aleatorio	Variacional	Resolución de problemas	Modelación	Comunicación	Razonamiento	Ejercitación de procedimientos		
53	La altura de la pirámide dentro del cubo de la figura es la mitad de la altura del cubo, y su vértice superior se localiza en el centro del cubo.  Figura El volumen del cubo es A. 8 veces el volumen de la pirámide. B. 6 veces el volumen de la pirámide. C. 5 veces el volumen de la pirámide. D. 4 veces el volumen de la pirámide.	X									x			X		X							X		la información que nos brinda la pregunta es geométrcia relacionada con la medida de volumen. aunque se podria relacionar con topología si tomamos el cubo como una vecindad para el punto medio de este, siendo este un punto interior.	D

Anexo d: Pregunta analizada vecindad abierta.