



UNIDAD DIDÁCTICA PARA APOYAR LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE  
PITÁGORAS A TRAVÉS DE UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

ALEXANDER BASABE URIBE

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D. C.  
2019

UNIDAD DIDÁCTICA PARA APOYAR LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE  
PITÁGORAS A TRAVÉS DE UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

ALEXANDER BASABE URIBE

Trabajo de grado que se presenta para optar al Título de  
Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Dr. Diego Vizcaíno.

Modalidad: Diseño de material didáctico.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D. C.  
2019

## DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico con todo mi amor:

A Dios, por darme la oportunidad de crecer en conocimiento y sabiduría.

A mi madre, mi novia y mis tíos, por su apoyo incondicional quienes fueron mi fuente de inspiración que estuvieron muy pendientes de mi proceso académico.

A cada uno de mis profesores que con su esmero saber, me guiaron y me enseñaron su experiencia académica, para que pudiera lograr este proyecto académico.

A mis compañeros, quienes sin esperar nada a cambio compartieron su espacio y su saber.

## **AGRADECIMIENTOS**

Doy gracias a Dios, por esta etapa que me brinda, por la iluminación y el entendimiento, por darme fuerzas en mantenerme firme a mis convicciones y deseos de adquirir un conocimiento matemático.

A mi madre Julia y mis tías Yolanda y Fabiola, que con su apoyo y motivación con palabras de aliento me inspiraron, para que todo esto sea una realidad.

A mi amor Dolly, por su compañía y sus recomendaciones diarias, que me brindo para poder continuar y terminar este proceso académico que tanto dedique.

## RESUMEN

Este trabajo, es el diseño de material didáctico, dirigido a docentes que quieran utilizar este material para enseñar el teorema de Pitágoras a través de un aprendizaje significativo a estudiantes de grado octavo. Por lo cual, se toma como elemento inicial, antecedentes que permite tener un panorama para la construcción de su estructura, como también, la parte histórica del teorema, trabajos que se han realizado sobre este teorema y la manera en la que, el estudiante podrá aprender de manera significativa y no mecánica en la geometría.

Para esta creación, es de vital importancia la indagación de antecedentes, como se mencionó anteriormente, los cuales nos permitirá poder tener una claridad y un rumbo en su construcción, permitiendo poder desarrollar esta unidad, estableciendo su respectiva justificación del material didáctico, como también sus objetivos que son parte primordial de este trabajo.

El soporte de esta unidad, está enmarcada por lo disciplinar, pedagógico, las recomendaciones y directrices que el MEN establece, alcanzando los objetivos que se desean, a partir de los estándares básicos de competencia y los DBA.

Finalizando con la validación y análisis de las guías didácticas diseñadas, las conclusiones y recomendaciones que permitirá poder hacer de esta unidad didáctica, una herramienta para su enseñanza e implementación.

**Palabras claves:** Unidad didáctica, aprendizaje significativo, teorema de Pitágoras, estándares y DBA.

## ABSTRACT

This work is a design of teaching material, aimed at eighth grade students, which aims to teach the Pythagorean Theorem through meaningful learning. Which, is taken as an initial element, background that allows to have a panorama for the construction of its structure, as well as the historical part of the theorem, works that have been carried out on this theorem and the way in which, the student can learn significantly and not mechanically in geometry.

For this creation, it is of vital importance the background inquiry, as mentioned above, which allowed us to have a clarity and a direction in its construction, to be able to develop this unit, establishing its respective justification of the didactic material, as well as its objectives that They are a primary part of this work.

The support of this unit is framed by the disciplinary, pedagogical, recommendations and guidelines established by the MEN, reaching the objectives they want, based on the basic standards of competence and the DBA.

Finalizing with the validation and analysis of the specific didactic guides, the conclusions and recommendations that can allow the power of this didactic unit, a tool for its teaching and implementation.

**Keywords:** Didactic unit, significant learning, Pythagorean theorem, specifically and DBA.

# Tabla de Contenido

RESUMEN .....	5
ABSTRACT .....	6
1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	1
1.1 NECESIDAD DE ENSEÑAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS.....	1
1.2 DIFICULTAD EN EL APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS.....	3
1.3 ANTECEDENTES .....	6
1.3.1 EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.....	6
1.3.2 PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO .....	8
1.3.3 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN MATEMÁTICAS Y SU INFLUENCIA EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO .....	9
1.4 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	11
1.5 JUSTIFICACIÓN.....	11
1.6 OBJETIVOS .....	13
1.6.1 OBJETIVOS GENERALES .....	13
1.6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
2 MARCO TEÓRICO.....	14
2.1 MARCO DE REFERENCIA.....	14
2.1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS.....	14
2.2 MARCO DISCIPLINAR.....	24
2.2.1 PITÁGORAS.....	24
2.3 MARCO PEDAGÓGICO .....	34
2.3.1 LA ENSEÑANZA.....	34
2.3.2 EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO .....	38
2.4 MARCO LEGAL .....	46
2.4.1 ELEMENTOS IMPORTANTES DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICAS .....	46
2.4.2 DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE .....	55
3 METODOLOGÍA.....	57
4 UNIDAD DIDÁCTICA.....	59
5 SECUENCIA DIDÁCTICA.....	63
6 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE INSTRUMENTO .....	66

6.1	VALORACIÓN .....	66
6.2	CRITERIOS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS .....	66
6.3	DESARROLLO DE LA VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	68
6.4	VALORACIÓN CRITERIOS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO .....	69
7	CONCLUSIONES .....	71
8	RECOMENDACIONES .....	72
9	REFERENCIAS.....	73
10	MATERIAL DIDÁCTICO .....	77
10.1	GUÍA DOCENTE.....	77
10.2	GUÍAS DEL ESTUDIANTE .....	83

# 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 NECESIDAD DE ENSEÑAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras es el tema más trabajado en la enseñanza de la matemática escolar. Este tema es importante si se tiene en cuenta el desarrollo histórico y las habilidades mentales que implica su aprendizaje.

De acuerdo con González, lo vital de este teorema, como elemento histórico y además cultural, permite en la etapa escolar, dar un salto en lo intelectual y cognitivo, permitiendo poder dar uso a lo empírico, especulativo e inductivo, como también poder adquirir la habilidad de utilizar el razonamiento deductivo (González, 2008).

El trabajo que se realiza con el teorema de Pitágoras en la etapa escolar permite trabajar en los diferentes tipos de razonamientos lógicos, donde convierte a este teorema en uno de los más interesantes, por ejemplo, en sus demostraciones, ya que permite un desarrollo con características matemáticas, que acerca a los estudiantes a una geometría que puede ser aplicada en la vida.

El desarrollo y utilización de teorema de Pitágoras, según González, no debe depender solamente de su dibujo, sino que se hace necesario la aplicación del ejercicio intelectual de la deducción lógica (González, 2008).

Por ser un referente del desarrollo geométrico en Grecia, el teorema de Pitágoras mantiene un valor teórico, didáctico e histórico, que puede ser aplicado a la cotidianidad y realmente pertenece al desarrollo cultural del hombre.

El problema es que, para su enseñanza, muchas veces no hay una orientación adecuada con objetivos claros. Esto hace que el docente y los estudiantes lo trabajen sin sentido y de forma mecánica. Por lo tanto, en este trabajo se propone una alternativa de enseñanza a través de guías didácticas diseñadas para la enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras.

Dentro de esta necesidad, es desarrollar bases adecuadas, para que los estudiantes puedan lograr los rectos académicos que tendrán en los siguientes grados escolares, noveno, décimo y once. Permitiendo, aplicar de manera clara el teorema de Pitágoras, con los nuevos conceptos que se encuentren en geometría de noveno, trigonometría en decimo y la aplicabilidad del teorema en física.

## 1.2 DIFICULTAD EN EL APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

El aprendizaje de las matemáticas es importante para la educación hoy en día, porque construye en los estudiantes habilidades mentales indispensables para su desarrollo. Todos los docentes necesitan trabajar en el desarrollo de las habilidades mentales, desde su clase y desde el tema que se va a trabajar con los estudiantes. El trabajo inadecuado del docente, se centra solo en la memorización y la repetición de las fórmulas matemáticas, lo que no permite que las habilidades mentales puedan ser desarrolladas de la forma más adecuada.

Los estudiantes expresan que las matemáticas no son fáciles de entender, especialmente en el Teorema de Pitágoras, ya que se genera un alto grado de insatisfacción y fracaso dentro de su estudio porque, su trabajo en clase es mecánico y monótono hace que este teorema no sea nada agradable para su aprendizaje (Font, 2014).

En otras palabras, lo que se pretende y se quiere alcanzar, es llegar a que el aprendizaje de los estudiantes, se convierta en la mejor experiencia, dejando a un lado lo mecánico y monótono, introduciendo nuevas formas de aprender, como el aprendizaje significativo que entrega a los estudiantes procesos adecuados que generan satisfacción y no frustración en sus nuevos conocimientos.

Es así, que el aprendizaje mecánico es de forma memorística y repetitiva no siendo posible utilizarlo de forma distinta o en situaciones diferentes en las que se ha aprendido. Esto indican que el aprender de forma mecánica, desarrolla un aprendizaje sin arraigo, sin una retención adecuada en la estructura cognitiva del

sujeto y un proceso que se olvida rápidamente y que además es de corta duración a nivel intelectual.

Algunas definiciones respecto al aprendizaje memorístico, son: La adquisición memorística no presenta significado donde dificulta su aplicación en diferentes situaciones y contextos (Font, 2014). Es decir que, no es una manera adecuada de poder llevar el aprendizaje, donde pueda contribuir a una enseñanza aplicada y que sea útil en el desarrollo de los estudiantes, por lo tanto, es posible solo para dar respuestas a asuntos netamente temporales.

Otra definición que también indica el proceso del aprendizaje, es aquel que aparece caracterizado por notas como: incorporación arbitraria de los nuevos conocimientos, falta de integración de los mismos en la estructura cognitiva del sujeto que aprende, adquisición memorística sin significado que dificulta su aplicación a diferentes situaciones y contextos (Font, 2014).

De esta forma, la enseñanza arbitraria o mecánica solo traerá cierto grado de incertidumbre e insatisfacción en los estudiantes, frenando y desarrollando procesos inadecuados al llevar este tipo de estrategias en las aulas.

Es por ello, que lo contrario de un aprendizaje mecánico es el aprendizaje significativo, ya que los elementos son contrarios a este aprender, además no hay preconceptos de la nueva información ingresada, dándose de manera arbitraria, sin ningún tipo de interacción con los conocimientos previos. Es por eso, que lo más adecuado es utilizar el aprendizaje significativo, ya que permite la adecuada

adquisición de significados en el saber, la retención y la transferencia de lo aprendido. (Ausubel, 1983).

Por esta razón, es necesario que se abandone todo tipo de estrategia de enseñanza con aprendizaje memorístico, cambiándolo por otros tipos de estrategias que lleguen a la adquisición de aprendizajes y la organización de conceptos, que puedan ser aplicados en el aprendizaje de los estudiantes en su etapa escolar.

Las investigaciones, recomiendan que los docentes trabajen de manera adecuada la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de forma contextualizada y con un valor significativo, donde el estudiante pueda ver su utilidad en lo cotidiano (Font, 2014).

Es así, que la importancia del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, pueda estar en función de la aplicación de lo aprendido matemáticamente a su diario vivir y los docentes dentro de su estrategia pedagógica, apliquen un aprendizaje en contexto.

## **1.3 ANTECEDENTES**

### **1.3.1 EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA**

Esta tesis es realizada en España por María Dolores Torres González (2017), su objetivo, explorar y describir, características del conocimiento didáctico que manifiesta los profesores en formación, cuando se someten a análisis de tareas desarrolladas por alumnos en torno al teorema de Pitágoras.

Esta investigación se enmarca, en la problemática que surge por las dimensiones de conocimientos del profesor de matemáticas, con la utilización de material didáctico al momento de enseñar el teorema de Pitágoras.

Cuando se hace referencia a la dimensión de conocimiento, estas se relacionan con las condiciones del aprendizaje, que son, la dimensión de la ignorancia y el aprendizaje, dimensión del grado de certeza del aprendizaje, dimensión de la consolidación del conocimiento, la temporalidad del conocimiento y la utilidad del conocimiento.

El apoyar la labor docente en su proceso inicial, permite que pueda tener el dominio adecuado de su conocimiento y destrezas, para las relaciones que se forman, entre el docente y el estudiante, donde pueda transmitir sus conocimientos de forma adecuada cuando se trabaja con el teorema de Pitágoras.

De esto, se genera una preocupación, cuando surgen hallazgos, en relación a la falta de conocimiento, relacionado con la geometría, especialmente cuando el docente está iniciando con su labor como profesor de matemáticas.

Por lo tanto, esta tesis pretende poder explorar, el conocimiento que utiliza los docentes que inician su profesión, sus explicaciones en clase, justificaciones de las estrategias utilizadas en la enseñanza, los razonamientos y procedimientos, tales como tareas propuestas a los estudiantes y la enseñanza.

Por otra parte, también se pretende conocer, cuál va a ser esa propuesta didáctica para la trasmisión de conocimiento matemático, siendo estudiantes que inician la labor docente. Este tipo de proceso, tiene interés, los docentes en ejercicio, para conocer qué tipo de estrategias se pueden utilizar al momento de poder enseñar, los elementos didácticos para la transmisión de los conocimientos, como también los formadores docentes e investigadores en didáctica de las matemáticas.

La forma de conocer, la implementación didáctica por parte de los docentes, es a través de cuestionarios semántico con preguntas abiertas, que permiten poder reunir, elementos acerca de la creación de material didáctico para la enseñanza del teorema de Pitágoras.

Por tanto, el conocimiento que se extrae por medio de los cuestionarios, ayuda a desarrollar las nociones y conceptos de la geometría, permitiendo mejorar los procesos de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras.

La metodología que se utiliza, para el desarrollo de esta investigación, está basada en la aplicación de cuestionarios, de carácter exploratorio y descriptivo, donde permite desarrollar un análisis de contenido cualitativo, que permite conocer las diferentes formas de enseñar, la construcción didáctica y también las estrategias que se pueden incorporar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, y que busca poder ser enseñada de la mejor manera.

El trabajo realizado, contribuye a dar características en conocimiento didáctico, de la formación docente para estudiantes que están iniciando con su profesión, permitiendo tener herramientas al momento de enseñar el teorema de Pitágoras.

En conclusión, los resultados arrojados en el proceso de la exploración en toda la investigación, proporciona información relevante para que los futuros docentes, conozcan técnicas y estrategias para ser utilizadas, en la enseñanza, creando herramientas útiles al momento de poder impartir los conocimientos geométricos, y que los estudiantes puedan tener procesos acordes a las construcciones hechas por el docente, ante la preparación de sus clases.

### **1.3.2 PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO**

El desarrollo de esta propuesta didáctica, se realiza en Colombia por Camilo Torres (2018), su objetivo es diseñar material didáctico para la enseñanza del teorema de Pitágoras a estudiantes de grado octavo a través de la solución de problemas.

Torres, presenta su planteamiento sobre la importancia de la construcción matemática, basada a partir de elementos históricos, que permite fundamentarlos para el desarrollo científico y conceptual en estudiantes de básica y media. Establece que, para darse este proceso, se necesita realizar tres pasos, desarrollo conceptual, ejemplos y ejercicios, y que partir de lo histórico, se puede iniciar con las transformaciones intelectuales, dando bases para un desarrollo conceptual y como actividad continua en los estudiantes.

Establece que los docentes en formación y en ejercicio se preocupan en el desarrollo de los conceptos, sin realizar demostraciones, haciendo que su enseñanza se base en la repetición y esta problemática es compleja, dejando a un lado las construcciones y demostraciones griegas.

Plantea que la enseñanza de las matemáticas es muy importante, ya que desarrolla en los estudiantes un pensamiento geométrico.

La metodología utilizada en la propuesta didáctica, se desarrolló a través de la solución de problemas, por medio del modelo de van hiele y tomo como base lo establecido por el ministerio de educación nacional para la estructura de su trabajo.

### **1.3.3 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN MATEMÁTICAS Y SU INFLUENCIA EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO**

La construcción de esta tesis, se realizó en Ecuador por Jonathan Perlaza y Beatriz Vimos (2013), su objetivo es optimizar el aprendizaje significativo como procedimiento didáctico para mejorar el rendimiento académico en matemática de los estudiantes del sexto año del centro de Educación Básica.

El grupo de estudio investiga sobre el aprendizaje significativo a partir de la construcción de nuevos saberes que le permita al docente implementar y evaluar el proceso del aprendizaje significativo. Hoy en día se ha convertido en una dificultad la enseñanza de las matemáticas debido al desconocimiento de nuevas estrategias y falta de preparación continua por parte de los docentes, como resultado un déficit en el conocimiento y preparación de los estudiantes.

Por medio de un aprendizaje significativo se busca crear, nuevas estrategias metodológicas, que permite al estudiante estar motivado en clase y así mejorar su rendimiento académico.

El implementar nuevas técnicas y estrategias para incentivar el aprendizaje en los estudiantes, hace que los docentes, tenga que actualizarse continuamente para generar un mejor aprendizaje. Por lo tanto, si el docente no construye alternativas que despierten el interés en los estudiantes en matemáticas, lo que hace es crear una desmotivación por lo cual, su rendimiento va a ser insuficiente.

En el proceso de la enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas mediante el uso de nuevas estrategias a partir de un aprendizaje significativo, permite al estudiante afianzar los conocimientos y desarrollar destrezas, superando las dificultades y así mejorar su rendimiento académico.

## 1.4 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo diseñar guías de aprendizaje para la enseñanza del Teorema de Pitágoras y conseguir un aprendizaje significativo en los estudiantes?

## 1.5 JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo, propone desarrollar una unidad didáctica, basada en un aprendizaje significativo, para la enseñanza de la geometría en el Teorema de Pitágoras. Este tema va dirigido a estudiantes de grado octavo, donde la creación de este material, tendrá elementos necesarios tales como una adecuada didáctica, acorde a la edad de los estudiantes, como también una adecuada orientación pedagógica, para que los estudiantes puedan encontrar un material que sea claro, sencillo y agradable en el proceso de su aprendizaje.

Con este material, lo que se busca es hacer que la enseñanza de las matemáticas, en especial la geometría, sea agradable en su aprendizaje, permitiendo, tanto el docente como el estudiante, poder alcanzar el desarrollo de este saber de forma adecuada, propuesto en los objetivos de cada guía.

Hoy en día, el estudio de las matemáticas en el campo escolar, no es muy admirado por los estudiantes, porque encuentran en su aprender muchas dificultades para entenderlas y aplicarlas. Se ha podido observar que este fenómeno ha surgido a partir de la manera de cómo se está enseñando las matemáticas.

Por la problemática, que se ve hoy en día, es necesario buscar estrategias adecuadas de aprendizaje, que permita un acercamiento nuevamente al estudio de las matemáticas a nivel escolar, donde para ello es muy importante crear aprendizajes que sean motivantes, llenos de significado y que puedan ser aplicados en lo cotidiano.

El desarrollo de esta unidad didáctica, busca ser parte, de la solución del problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, creando guías que incluye, elementos históricos que permiten a los estudiantes poder darle un contexto al tema que se va a tratar (Matthews, 1994), también dentro de este desarrollo habrá preconceptos que los mismos estudiantes ya han trabajado, logrando poder dar una continuidad a sus saberes, también el desarrollo del paso a paso de los problemas geométricos que puedan encontrar, teniendo así un soporte y un acompañamiento a la adquisición de los nuevos saberes que alcanzaran los estudiantes, en la medida que vallan desarrollando esta unidad didáctica.

Esta unidad, se diseña de manera adecuada, logrando aportes, cambios en la manera de enseñar y de aprender, especialmente en aspectos procedimentales, basado en la propuesta de un aprendizaje significativo.

La propuesta ayuda a recomendar, modos didácticos interesantes ante la enseñanza, para que sean más motivantes y que inspiren a los estudiantes a seguir una línea de pensamiento geométrico y puedan tomar a las matemáticas como alternativa en su vida profesional.

## **1.6 OBJETIVOS**

### **1.6.1 OBJETIVOS GENERALES**

Diseñar y elaborar guías didácticas para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras a estudiantes de grado octavo, basado en el aprendizaje significativo.

### **1.6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Identificar los elementos que se necesitan, para la creación de la unidad didáctica, teniendo como base el aprendizaje significativo.
- Determinar de manera clara y precisa el contenido de la unidad didáctica, con elementos seleccionados para su diseñarlo.
- Seleccionar adecuadamente los subtemas para la creación de la unidad didáctica, determinando el proceso lógico del aprendizaje.
- Validar la unidad didáctica por expertos y atender sus recomendaciones, en un proceso de mejoramiento continuo.

## **2 MARCO TEÓRICO**

### **2.1 MARCO DE REFERENCIA**

#### **2.1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS**

Este antecedente histórico se llama, El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años, es escrita por Pedro Miguel González Urbaneja (2008), no aparece objetivos en su publicación, pero se puede establecer que busca mostrar el desarrollo histórico de la creación de teorema de Pitágoras, pasando por cada una de las respectivas civilizaciones y para este trabajo se tomará las más representativas, que son los viajes que realizo Pitágoras, para la construcción de su teorema.

##### **2.1.1.1 CIVILIZACIÓN PREHELÉNICA**

Visto desde una perspectiva geométrica, se han podido determinar, que la civilización prehelénica, no tenía noción de la demostración de las áreas del triángulo rectángulo y existe una fe, que fue el mismo Pitágoras quien realizo la demostración de forma lógica el teorema, permitiendo así su reconocimiento en esta civilización.

En el teorema de Pitágoras, existe una relación entre los lados del triángulo rectángulo con el desarrollo matemático en tres partes. En la primera parte, de manera aritmética, el resultado numérico para los lados del triángulo. En la segunda parte la utilización de métodos aritméticos y geométricos donde se crean leyes generales de la formación de sus lados y, por último, entra a desarrollar de manera

profunda un pensamiento matemático e investigativo en las demostraciones para poder generalizar sus resultados, (González, 2008).

### **2.1.1.2 BABILONIA**

Hasta el momento se ha investigado, que los babilonios ya tenían bases aritméticas a partir de su propia escritura con 1000 años de evolución, antes que Pitágoras, esta escritura se basaba en símbolos cuneiformes escritos en tablillas de arcilla cocidas por el sol, donde los arqueólogos han encontrado y recuperado miles de estas tablillas. Se han podido interpretar la gran mayoría de estas, encontrando el desarrollo matemático que se utilizaba en esos tiempos de la civilización babilónica.

Todos los escritos, como sus cálculos lo realizaban en tablillas, existen 300 tablillas que tienen relación con el desarrollo matemático y se han encontrado operaciones de tipo multiplicativo, recíprocos numéricos, desarrollo de cuadrados, de cubos entre otros.

En la geometría Babilónica, ya conocían la utilización del triángulo rectángulo, como también las propiedades de los triángulos semejantes, en el álgebra, conocían problemas de segundo grado, tercero y cuarto grado, el desarrollo de sistemas de ecuaciones, como también la utilización del sistema sexagesimal base 60, donde para ellos los resultados y los cálculos eran más exactos.

Las tablillas más conocidas son, la tablilla de YALE con referencia (YBC 7289) de 1600 años antes de cristo, se encuentra en la universidad de YALE, su traducción da a conocer la utilización del sistema de números sexagesimal y que existe una relaciona con el teorema de Pitágoras.

Esta tablilla presenta una figura de un cuadrado cortada por dos diagonales formando cuatro triángulos rectángulos, con sus respectivas clasificaciones numéricas de cada uno de sus lados, esta numeración está escrita por medio de escritura cuneiforme. La diagonal horizontal tiene las siguientes numeraciones 1, 24, 51, 10 =  $1 + 24/60 + 51/60 + 10/60 = 1.414213 = \text{RAÍZ DE } 2$ .

Después, en un lado del cuadrado aparece el número 30 y en las partes internas del cuadrado aparecen 42, 25, 35, donde se tomaría  $30(1; 24, 51, 10)$  es decir  $42.426384 = 30 \cdot 1.41421$  donde en estos resultados es la relación aritmética de una aplicación primitiva del teorema de Pitágoras, (González, 2008).

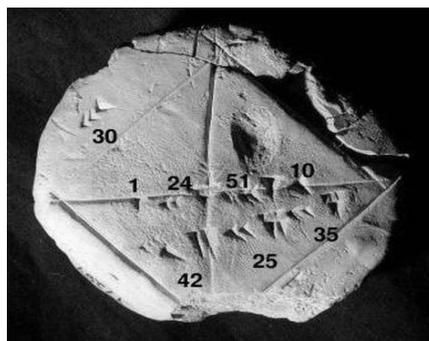


Imagen tomada de: [https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica\\_babil%C3%B3nica](https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B3nica)

La tablilla de PLIMTON 322, es la otra tablilla que nos da una información muy relevante de la manera como los babilónicos manejaban y utilizaban las matemáticas, esta tablilla data entre 1900 a 1600 años antes de cristo, ha sido revisada por algunos historiadores, dándonos a conocer su respetiva traducción.

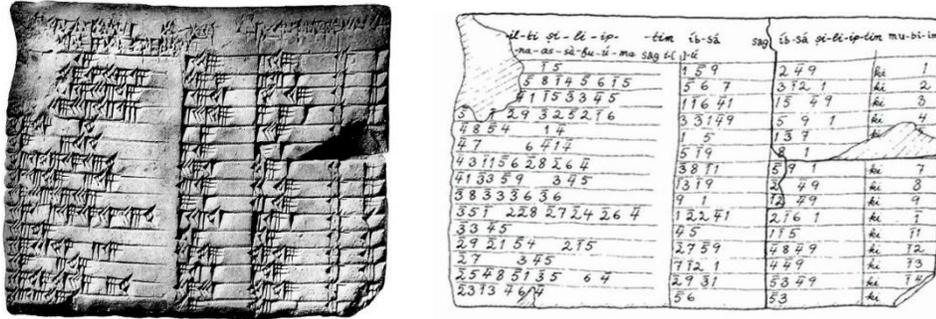


Imagen tomada de: <https://www.ancient-origins.es/noticias-ciencia-espacio/tablilla-babilonica-teorema-pitagoras-004472>

En 1945 hicieron saber su significado y traducción de una manera muy clara, Neugebauer y Sachs en (Mathematical cuneiform texts) describen que las anotaciones realizadas por los Babilonios tenían ya números pitagóricos y anotaciones de tablas trigonométricas, sin ángulos, sin Aproximaciones y mucho más exactas que los resultados realizados por los mismos griegos, (González, 2008).

La tablilla PLIMTON 322, describe triángulos rectángulos utilizando la trigonometría de manera diferente como hoy en día se utiliza, es una manera fascinante de ver como los Babilonios interpretaban las matemáticas, llegando a resultados trigonométricos mucho más exactos.

### 2.1.1.3 EGIPTO

Las matemáticas egipcias se ven reflejadas en dos documentos muy famosos, el papiro de RHIND y el papiro de MOSCÚ, donde en ella se encuentran anotaciones de valor matemático, no se encuentran registros sobre el teorema de Pitágoras. Pero sin dejar a un lado, los egipcios ya tenían noción y utilización del triángulo de lados 3, 4 y 5, que ellos lo llamaban como el Triángulo egipcio, que vendría siendo un triángulo rectángulo y para trazar una línea perpendicular utilizaban la escuadra. Estos elementos eran manejados por los agrimensores que eran personas que se encargaban de medir y recuperar los linderos de manera periódica por el crecimiento del Rio Nilo (González, 2008).

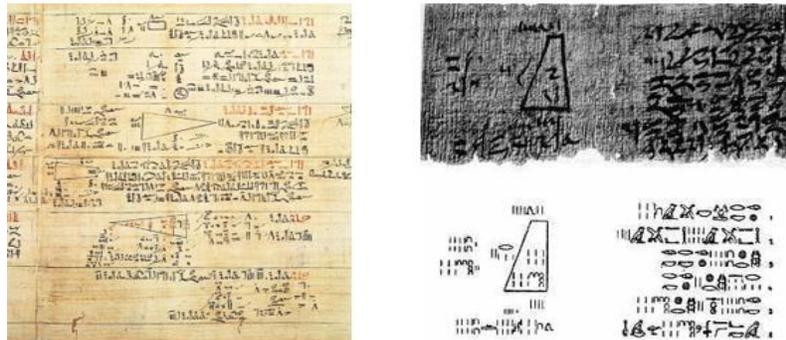


Imagen tomada de: [https://www2.uned.es/geo-1-historia-antigua/universal/EGIPTO%20PAPIROS/Papiros%20egipcios\\_rhin\\_y\\_moscu.htm](https://www2.uned.es/geo-1-historia-antigua/universal/EGIPTO%20PAPIROS/Papiros%20egipcios_rhin_y_moscu.htm)

De todas maneras, los egipcios utilizaban el triángulo egipcio con lados 3, 4 y 5 como un triángulo especial, dándole el valor espiritual a cada uno de sus lados, el lado 3 representando a Osiris, el lado 4 representando a Isis y el lado 5 representando a Horus, (González, 2008).

Uno de los problemas que Egipto presentaba, era la crecida del Rio Nilo el cual, se borraran los linderos de separación de las tierras que, por medio de ángulos rectos, volvían a construirlos, de esta forma lograban trazar líneas perpendiculares con segmentos que formaban ángulos de  $90^\circ$  de esta forma podían reconstruir sus linderos perdidos.

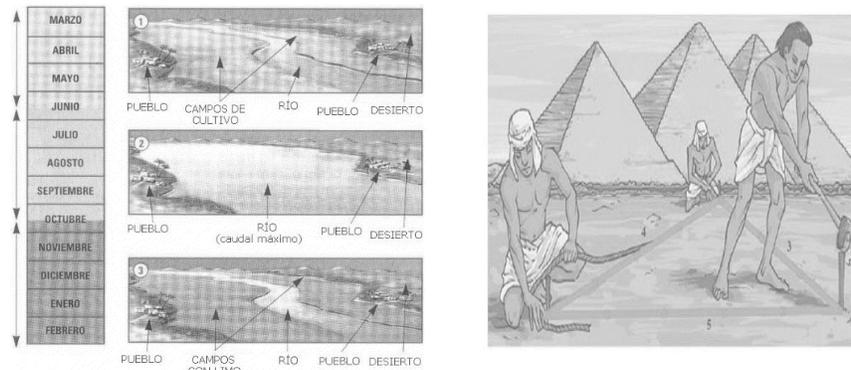


Imagen tomada de: [https://rea.ceibal.edu.uy/elp/egipto-don-del-nilo/regimen\\_de\\_crecidas\\_del\\_ro\\_nilo.html](https://rea.ceibal.edu.uy/elp/egipto-don-del-nilo/regimen_de_crecidas_del_ro_nilo.html)

Imagen tomada de: <http://professorlendoaprendendo.blogspot.com/2013/06/plano-de-aula.html>

Los agrimensores dominaban de manera perfecta los triángulos, gracias a los anudadores, personas que hacían nudos a las cuerdas de igual distancia, podían medir los linderos perdidos por la crecida del río Nilo y recuperarlos.

Los egipcios se dieron cuenta que las cuerdas creadas por nudos, se podían formar triángulos con un ángulo recto de  $90^\circ$ , obteniendo de esta manera triángulos rectángulos.

De todas maneras, la construcción de pirámides, se puede visualizar que existen componentes triangulares en su fabricación y construcción, incorporando relaciones pitagóricas que después se conceptualizara con el Teorema de Pitágoras, (González, 2008).

### 2.1.1.4 INDIA

Esta civilización hace aportes de manera importante en la geometría, especialmente en temas trigonométricos. Sus conocimientos en la trigonometría, fueron utilizados para poder realizar construcciones de templos y altares. Esta civilización desarrollo fuertes conocimientos en la parte aritmética, como también en la parte geometría, utilizando sus saberes y sus quehaceres con el teorema de Pitágoras. Todo este saber que fue creado, por la civilización india, quedo registrado en el **Sulvasutra**, manual para la utilización de la cuerda. La palabra **Sulvasutra**, se puede mirar etimológicamente como **Sulva** quiere decir cuerdas utilizadas para mediciones y **Sutra**, libro de reglas para la ciencia de la medición. De igual manera, el mismo ejercicio o trabajo que realizaban los egipcios, utilizaban el Sulvasutra, manual para sus construcciones (González, 2008).

Las evidencias de la civilización india, sobre el manejo de la geometría son el **Sulvasutra de Baudhayana** y el **Apastamba** donde se remontan su elaboración, al siglo V antes de cristo. En estos manuales se describe la manera de usar las cuerdas para medir y el poder realizar trazos perpendiculares, a través de ternas de cuerdas donde sus longitudes son ternas pitagóricas.

Las ternas pitagóricas de los hindúes se clasifican de la siguiente forma:

c - b = 1			c - b = 2			c - b = 3		
a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	8	15	17	15	36	39
5	12	13	12	35	37			
7	24	25						

Ternas pitagóricas de los hindúes

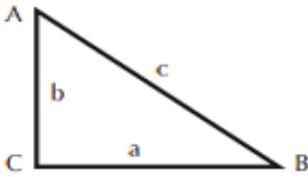


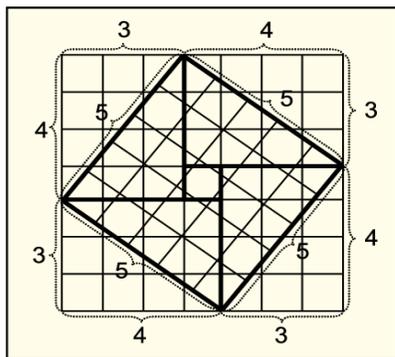
Imagen tomada de: <http://historiadelasmaticasp.blogspot.com/p/los-portes-de-una-civilizacion.html>

### 2.1.1.5 CHINA

Existen en la actualidad dos tratados chinos que contienen elementos matemáticos y geométricos, utilizados por esta civilización, asociados con el teorema de Pitágoras. Los tratados son el **Chou Pei Suan Ching** con 300 años antes de cristo y el **Chui Chang Suang Shu** con 250 años antes de cristo. Estos escritos fueron traducidos por dos historiadores, **Zho Shuang** y **Liu Hui**. Los tratados hablan de resultados numéricos y las leyes generales de la formación de ternas pitagóricas.

En el tratado de **Chou Pei Suan Ching** aparece el Diagrama de la hipotenusa. Esta nos indica, que en cada semirectángulo de anchura 3 y longitud 4, la diagonal debe valer 5, si se resta del cuadrado total de área 49, los cuatro semirectángulos exteriores, suman 24 en su área, la resta es un cuadrado que vale 25 de área.

Tratado de **Chou Pei Suan Ching**, donde aparece el Diagrama de la hipotenusa:



句股零合以成弦零

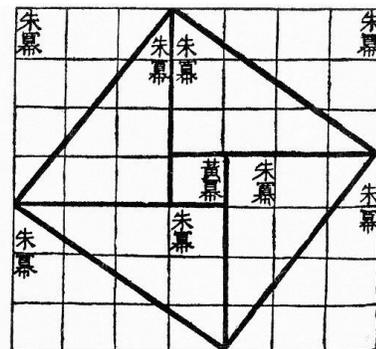


Imagen 1 tomada de: [https://www.researchgate.net/figure/Visual-proof-that-a-triangle-with-sides-3-4-5-is-right-angled-according-to-Chou-Pei\\_fig6\\_228658931](https://www.researchgate.net/figure/Visual-proof-that-a-triangle-with-sides-3-4-5-is-right-angled-according-to-Chou-Pei_fig6_228658931)

Imagen 2 tomada de: <https://www.timetoast.com/timelines/el-teorema-de-pitagoras-85ee3000-5888-416f-bd47-ca3c445de27b>

En el Chui Chang Suang Shu contiene 246 problemas donde en 24 hace referencia a triángulos rectángulos, donde el más famoso es el del Bambú roto.

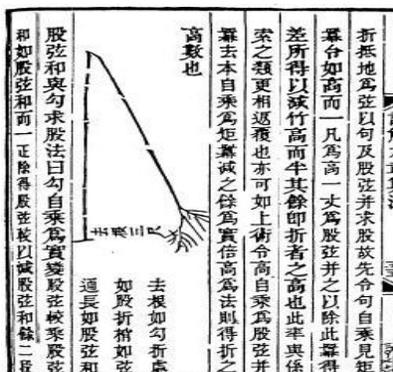


Imagen tomada de: <http://elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com/p/el-teorema-de-pitagoras-en-la-india-y.html>

Hay un bambú de diez de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura.

Este problema tiene una combinación del teorema de Pitágoras con ecuaciones cuadráticas, ya que para su resultado es necesario la ecuación:

$$x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$$

Estos ha sido los aportes de cada una de las civilizaciones, que han permitido que Pitágoras, pueda demostrar formalmente su teorema. Lo cual indica, que el teorema de Pitágoras, hace parte de la construcción humana.

Este teorema se convierte en un baluarte, que deja recuerdo del desarrollo humano, pero que también, involucra la etapa escolar de las personas, que han pasado por este teorema, convirtiéndolo en un elemento cultural.

Este antecedente, nos ha permitido poder saber, que el desarrollo matemático se ha venido dando desde hace más de 3000 a 2000 años antes de cristo. Esto permite mostrar que el pensamiento matemático ha sido creado por el hombre y que su legado nos permite seguir dejando huellas incomparables, para el avance en cada una de las ciencias, en especial en las matemáticas.

Y conviene subrayar, que es Pitágoras el que ha podido realizar la demostración de este teorema con una explicación racional, donde ha podido dejar ese valor significativo para el surgimiento de la geometría, desde la escuela pitagórica con origen en la ciencia deductiva.

La metodología utilizada en este antecedente, se basa en la recopilación histórica de los avances matemáticos en la historia, de cada una de las civilizaciones que han dejado su legado.

Este antecedente permite, adquirir bases históricas para el desarrollo de la unidad didáctica, haciendo de esta, poder reunir herramientas para que la enseñanza del teorema sea de manera significativa en los estudiantes.

## 2.2 MARCO DISCIPLINAR

### 2.2.1 PITÁGORAS

En este marco disciplinar, se abordará la vida de Pitágoras, los aportes a las matemáticas, los elementos de la construcción del teorema, la definición del triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras y su aplicación.

Pitágoras nació en la isla de Samos (Grecia), en el 569 a. C. y murió en Metaponto (Italia) en el 475 a. C., hijo de Mnesarco, un mercader de Tiro, y su madre Pythais, originaria de Samos en Jonia. Fue un matemático y filósofo, discípulo de Tales de Mileto y de Fenecidas de Siria, estudió en la escuela de Mileto. Viajó por Oriente Medio (Egipto y Babilonia). Sufrió el exilio para escapar de la tiranía del dictador Samio Polícrates, por lo que viajó hasta establecerse en el 531 a. C. en las colonias italianas de Grecia donde fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona al sur de Italia, (Strathern, 2014).

Toda la filosofía de Pitágoras, se pudo conocer solo a través de su grupo de seguidores, así mismo, cada una de las aportaciones que realizó a las matemáticas, aunque llevan su nombre, sin embargo, muchas de ellas, también fueron autoría de sus discípulos.

El amplio trabajo investigativo que desarrolló Pitágoras, con los números pares e impares, los números primos, de los cuadrados, la invención de las tablas de multiplicar, los cinco sólidos regulares, la existencia de los números irracionales, las escalas musicales, el teorema que lleva su nombre, entre otras investigaciones.

Pitágoras también, fundó una escuela filosófica y religiosa en Crotona, al sur de Italia, que tuvo numerosos seguidores, se llamaban matemáticos o más conocidos como Pitagóricos. Vivían en sociedad de forma permanente, no deseaban cosas materiales tales como (casas, carros, entre otros) y su alimentación era vegetariana, se llegó a conformar un grupo de 300 seguidores selectos, que oía las enseñanzas de Pitágoras y debían tener estrictas reglas de conducta.

Las enseñanzas de Pitágoras fueron, que su nivel más profundo la realidad, es de naturaleza matemática (números y música), que la filosofía (la búsqueda de la sabiduría) puede usarse para purificar el espíritu, que el alma puede elevarse para unirse con lo divino, que los miembros de la hermandad deben guardar lealtad y preservar el conocimiento, (Strathern, 2014).

El pentáculo, fue adoptado como el santo y seña para poder ingresar a las reuniones de la escuela pitagórica, una de la razón por la cual, se adoptó es por la simbología que ella posee, la simbología de la feminidad, la sinfonía de los números y por qué se tiene como el templo de la armonía.

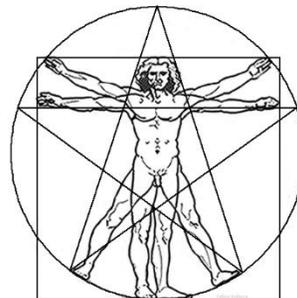
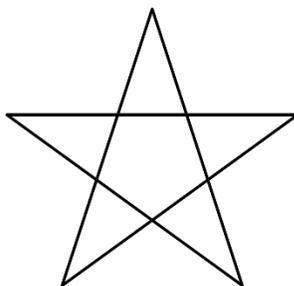


Imagen 1 tomada de: <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Pentagram.svg>

Imagen 2 tomada de: <https://emborg.com.ar/mandalas/7-cosas-no-conocias-este-mandala-renacentista/>

El dibujo de Leonardo Da Vinci, es titulado el cuerpo humano, hace relación con el anagrama humano, la estrella adoptada por los Pitagóricos, la proporción aurea y la sagrada Tetraktys Pitagórica.

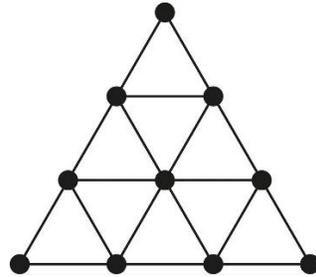


Imagen tomada de: <https://www.redbubble.com/es/people/nitty-gritty/works/12776857-tetraktys-la-unidad-de-cuatro-pitagoras?p=canvas-print>

Esta figura triangular muestra como el número Diez es la suma de los cuatro primeros números es el cuarto número triangular.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \text{y} \quad 1 + 0 = 1$$

La Tetraktys es la representación del número Diez, que tiene el sentido de la totalidad, la unidad, el ciclo de los nueve primeros números.

Para los pitagóricos se trata de la santa Tetraktys, la más sagrada de todos los números por simbolizar a la creación universal, fuente y raíz de la eterna naturaleza donde todo vuelve a ella. Esta figura la tenían por sagrada, ellos hacían el juramento como Pitagóricos, a nombre de Pitágoras, pero sin nombrarlo, por haber transmitido el Tetraktys que es el numero perfecto y la clave de la doctrina Pitagórica, (Strathern, 2014).

Es de esta forma, la comunidad pitagórica estableció su hermandad, teniendo como supremo a Pitágoras, donde estableció normas y reglas para su sana convivencia los unos con los otros.

Fue para este tiempo, en la ciudad de Crotona, donde se desarrolló el descubrimiento del teorema que llevaría su nombre, como obra importante para las matemáticas. Se dice que pudo haberlo descubierto Pitágoras o algunos de sus seguidores, pero llevaría su nombre, (Strathern, 2014).

El Teorema de Pitágoras solo se aplica a triángulos rectángulos, que tienen un ángulo recto de  $90^\circ$  y dos ángulos agudos menores de  $90^\circ$ . Cabe decir, que también se puede hallar este tipo de figura geométrica dentro de otras figuras, de dos dimensiones y tres dimensiones, también se puede descubrir triángulos rectángulos, por ejemplo, rectángulos, rombos, trapecios, triángulos y también en cubos, conos, pirámides, entre otras figuras en las que podemos hallar esta figura geométrica.

### **2.2.1.1 TRIANGULO RECTÁNGULO**

En la geometría euclidiana se tiene como triángulo rectángulo, a todo triángulo con un ángulo recto de 90 grados. La proporción que se encuentran en el triángulo es un enfoque en la trigonometría y que a partir de esta figura geométrica se cumple el teorema de Pitágoras.

### 2.2.1.2 PROPIEDADES

En el triángulo rectángulo tiene que cumplir lo siguiente:

- Tiene dos ángulos agudos.
- La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
- La longitud del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de la longitud de los cuadrados de los catetos.
- Para efectos de área, un cateto cualquiera se puede considerar como base y el otro cateto como altura.
- La mediana de la hipotenusa descompone un triángulo rectángulo escaleno en dos triángulos: uno obtusángulo y otro acutángulo, no congruentes pero equivalentes.
- La mediana de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles lo descompone en dos triángulos rectángulos isósceles congruentes y equivalentes.
- Dos triángulos rectángulos, con hipotenusa común, y los ángulos rectos en semiplanos opuestos determinados por la recta que contiene a la hipotenusa, forman un cuadrilátero birrectángulo.
- La mediana que parte del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.
- La altura que parte del vértice del ángulo recto, coincide con un cateto, con tal de considerar al otro cateto como una base.

### 2.2.1.3 TIPOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Hay dos tipos de triángulo rectángulo, el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo escaleno.

**El triángulo rectángulo isósceles:** Los dos catetos deben tener la misma longitud, los ángulos internos deben medir  $45^\circ$  y  $90^\circ$ . En este tipo de triángulos la hipotenusa suele medir lo mismo que los catetos.

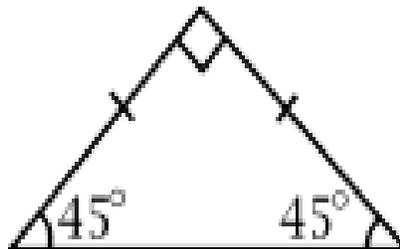


Imagen tomada de: <https://www.pequeocio.com/triangulo-rectangulo/>

**El triángulo rectángulo escaleno:** Los tres lados y los tres ángulos tiene diferente medida. (figura 11)

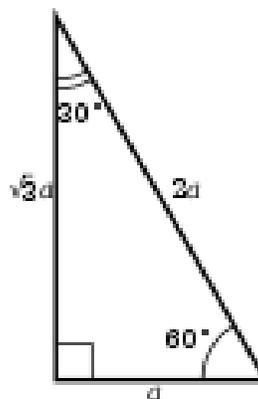


Imagen tomada de: <https://www.pequeocio.com/triangulo-rectangulo/>

**El triángulo rectángulo de lados consecutivos:** las medidas de sus lados tienen 3, 4 y 5 unidades de longitud (figura12).

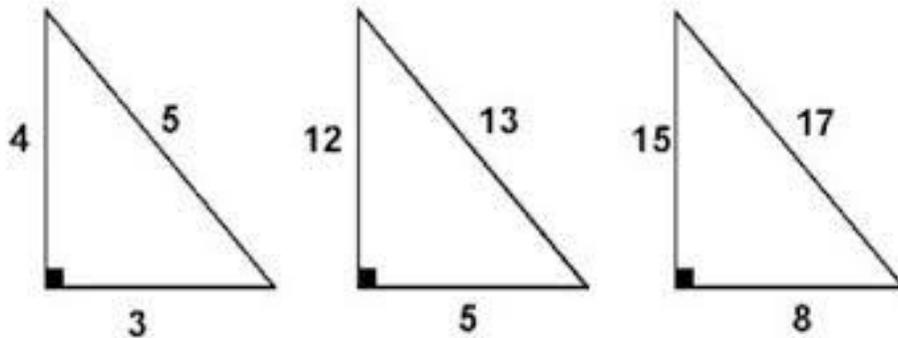


Imagen tomada de: <https://www.pequeocio.com/triangulo-rectangulo/>

Estos son los tipos de triángulos rectángulo que se pueden trabajar en el teorema y que también se denomina las ternas pitagóricas.

#### 2.2.1.4 TEOREMA DE PITÁGORAS

El Teorema de Pitágoras, es la formulación mediante el razonamiento deductivo del filósofo y matemático Pitágoras, donde establece una relación con la figura geométrica, especialmente con el triángulo rectángulo.

Para el trabajo del teorema, Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Además, le establece letras a cada parte de la longitud del triángulo rectángulo, la hipotenusa la represento con la letra **c** y los catetos los represento con las letras **a** y **b**.

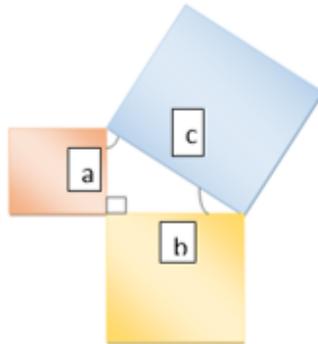


Imagen tomada de: Creación propia

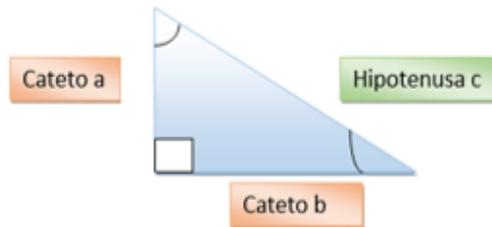


Imagen tomada de: Creación propia

**La hipotenusa (c):** Es el lado del triángulo opuesto al ángulo recto.

**Los catetos (a y b):** Son los lados del triángulo adyacente del ángulo recto (figura 9). Si transformáramos los lados del triángulo rectángulo en cuadrados, sus lados serían la suma de cada una de las áreas que forman los catetos donde es igual al área del cuadrado formado por la hipotenusa.

Entonces, podemos decir que se cumple la siguiente relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A partir de esta ecuación, Pitágoras pudo representar de diferentes maneras sus interrogantes, dependiendo de cuál de sus lados necesitaba encontrar. Cuando se

necesitaba buscar la incógnita, que se encuentra en la hipotenusa, se utilizó esta ecuación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Y cuando se necesitaba buscar la incógnita que se encuentra en algún de sus catetos se utiliza las ecuaciones:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Por tanto, el teorema de Pitágoras permite poder tener una relación con cada uno de sus lados del triángulo rectángulo, siendo de gran utilidad, cuando tenemos información de dos de sus lados y queriendo encontrar la incógnita de algunos de sus lados. Es por ello que podemos utilizar alguna de las ecuaciones establecidas por Pitágoras para la búsqueda de algunas de sus incógnitas

### 2.2.1.5 TERNAS PITAGÓRICAS

Las ternas pitagóricas están formadas por tres números naturales, que son longitudes de los lados del triángulo rectángulo y estos valores cumplen con el teorema de Pitágoras. De esta forma a, b, y c, son números naturales, formarían la terna pitagórica si cumple la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Se desarrolla a partir de las siguientes ecuaciones: Para  $n \neq 0$

$$a = 2(n) + 1$$

$$b = 2(n)^2 + 2(n)$$

$$c = 2(n)^2 + 2(n) + 1$$

<b>u</b>	<b>v</b>	<b>a = u<sup>2</sup> - v<sup>2</sup></b>	<b>b = 2 · u · v</b>	<b>c = u<sup>2</sup> + v<sup>2</sup></b>
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
3	1	8	6	10
4	3	7	24	25
4	2	12	16	20
4	1	15	8	17

### 2.2.1.6 APLICACIÓN

Para la aplicación del teorema de Pitágoras es importante aprender la manera adecuada la utilización de este teorema, tener claro su definición y las partes que se establece en el triángulo rectángulo, donde esto permitirá poder resolver problemas que surgen en nuestra vida cotidiana. Para esto, es necesario la aplicación del teorema, conocer la longitud de dos de sus lados o ya sea de un lado y su hipotenusa, que con estos valores se podrá encontrar la incógnita, a partir de la ecuación establecida para hallar el valor.

## **2.3 MARCO PEDAGÓGICO**

En cuanto al marco pedagógico, es importante que esté delimitado los elementos, para el desarrollo de la enseñanza del Teorema de Pitágoras a través de un aprendizaje significativo, para ello es necesario, conocer los conceptos y las definiciones, que se requieren para alcanzar los logros de esta unidad didáctica.

### **2.3.1 LA ENSEÑANZA**

#### **2.3.1.1 ¿QUÉ ES ENSEÑAR?**

Entendemos por enseñar la acción de instruir, educar, disciplinar y adoctrinar, entre otros sinónimos, el cual pretende enseñar. Además, podemos decir que la utilización de métodos para adquirir un conjunto de conocimientos, principios e ideas, que se puede dar a conocer a alguien, son importantes.

Como resultado, para poder lograr el fin de enseñar, es necesario la interacción del docente, actor principal y emisor de conocimientos e ideas, el alumno que es el receptor de la información suministrada por el docente y además el objeto del conocimiento, que sería lo que el docente ha preparado para compartir en un espacio determinado y que para ello se requiere poder utilizar estrategias para su comunicación, (Pérez, 2008).

Igualmente, que se pueda obtener lo propuesto, es necesario que no falte ninguno de estos tres elementos, el docente, el alumno y el objeto de conocimiento, si alguno de estos elementos faltara, el proceso de enseñar no tendría fruto, por consiguiente, no se podría dar.

Como se puede observar, la enseñanza requiere ser comunicada por medio de un conocimiento o un saber, para ello se necesita de quien la pueda percibir o recibir y se puede dar por medio de una comunicación escrita o hablada. Para esto, existen herramientas que permiten su desarrollo, entre ellos está la utilización de textos, guías, material didáctico, trabajo grupal, la participación en debates y mesas redondas, esto hará que el proceso de la enseñanza se pueda realmente concretar, (Pérez, 2008).

Es por ello, la necesidad de crear la unidad didáctica, para que a partir de lo establecido y lo que se quiere comunicar, como el Teorema de Pitágoras, se pueda entregar y es necesario encontrar técnicas adecuadas para su enseñanza.

### **2.3.1.2¿CUÁLES SON SUS MÉTODOS?**

Para la enseñanza existen diversos métodos y técnicas que se pueden usar, que a lo largo de la historia se han desarrollado y que han sido de mayor utilidad, para el proceso de la enseñanza.

Es decir, que para la creación de este tipo método y técnicas no solamente es la creación de una enseñanza de manera netamente mecánica, sino que es importante al momento de enseñar, el poder crear unas circunstancias apropiadas donde se puedan incluir a los alumnos a su desarrollo, creando como estrategia grupos de trabajo para que entre ellos puedan intercambiar sus ideas e intereses y también sus saberes.

A partir de siglo XX, la mayoría de los docentes están tomando una nueva postura en el proceso de enseñar, se están dando cuenta, que también el alumno puede tomar participación en el proceso de su enseñanza y que puedan ocurrir cambios que lo transformen, entonces, los docentes buscan diferentes tipos de actividades que le sean agradable para el estudiante, donde lo motiven y que sea de su interés, por lo tanto, el docente busca métodos diversos que se sale de lo tradicional, alejando a los alumnos, siendo este la consecuencia del desinterés y el aburrimiento, y creando barreras para no lograr el proceso de enseñar, (Raffino, 2019).

Como resultado, es necesario no utilizar métodos o técnicas que no sean significativas en los estudiantes y buscar procesos adecuados para su enseñanza.

Los métodos para enseñar son muy variados, de todos ellos vamos a nombrar algunos, que se relacionan a la enseñanza de las matemáticas, para ello vamos a tomar algunos aportes de Renzo Titone e Imideo Nérici, que hacen su publicación en 1973 y dan algunos aportes en la utilización de métodos de enseñar.

#### **2.3.1.2.1 MÉTODO DEDUCTIVO**

Cuando el asunto estudiado procede de lo general a lo particular. El profesor presenta conceptos, principios, definiciones o afirmaciones de las que se van extrayendo conclusiones y consecuencias, o se examinan casos particulares sobre la base de las afirmaciones generales presentadas.

### **2.3.1.2.2 MÉTODO INDUCTIVO**

Cuando el asunto estudiado se presenta por medio de casos particulares, sugiriendo que se descubra el principio general que los rige. Es el método, activo por excelencia, que ha dado lugar a la mayoría de descubrimientos científicos. Se basa en la experiencia, en la participación, en los hechos y posibilita en gran medida la generalización y un razonamiento globalizado.

### **2.3.1.2.2 MÉTODO ANÁLOGO**

Cuando los datos particulares que se presentan permiten establecer comparaciones que llevan a una solución por semejanza hemos procedido por analogía. El pensamiento va de lo particular a lo particular. Es fundamentalmente la forma de razonar de los más pequeños, sin olvidar su importancia en todas las edades.

### **2.3.1.2.3 MÉTODO SINTÉTICO**

Reconstrucción de un todo a partir de elementos distinguidos por el análisis, va de lo abstracto a lo concreto.

Estos son algunos de los métodos que, en algún sentido, son los más utilizados y recomendados, donde se pueden adatar a la necesidad, en la que se pueda encontrar el docente, por lo cual, para el desarrollo de la unidad didáctica es adecuado el método deductivo, que permite a partir del objeto de conocimiento proceder de lo general a lo particular, comenzando con los conceptos, principios y

definiciones y se va extrayendo conclusiones para poder tener bases generales de lo enseñado

### **2.3.2 EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO**

El desarrollo de este marco pedagógico, centra de manera adecuada crear un aprendizaje en los estudiantes, como también crear elementos primordiales de la profesión docente, la cual tiene como intención el proceso de enseñanza a estudiantes, de emitir saberes de manera apropiada, sin forzar el ingreso de la información y tratar de que sean asimilados, generando valor y significado en el aprendizaje, y posteriormente ser usados en diferentes contextos de la vida.

La teoría del aprendizaje significativo surge de David Ausubel (1918-2008), Psicólogo y pedagogo, norteamericano, referente de la psicología constructivista, dedicó su trabajo a investigar sobre la enseñanza de los conocimientos que adquiere el alumno y la asimilación del conocimiento, más conocida como el aprendizaje significativo.

En principio, el aprendizaje significativo está compuesto por la manera en la que el estudiante adquiere nuevos significados, que son el resultado del producto del aprendizaje significativo (Ausubel, 1976). Entonces, el nacimiento de los nuevos significados, muestra el fin, en que el proceso del aprendizaje significativo ha dado su resultado.

Así mismo, la importancia y la manera de poder aprender, que surgen de nuevos aportes y se inicia con el proceso de aprender de manera significativa (Piaget, 1962).

Por lo que se refiere a la manera en que hoy en día los estudiantes adquieren nuevos conocimientos, que se realiza en su gran mayoría, sin dar mucha importancia a lo que el estudiante realmente pueda aprender y que su conocimiento pueda ser aplicado a largo plazo, durante su proceso de formación. Este tipo de observaciones se conecta con la teoría más importante de la psicología constructivista, que es la teoría del aprendizaje significativo.

Es decir, para poder iniciar una adecuada enseñanza, es importante conocer los saberes de los estudiantes, para así poder llegar de manera objetiva y descubrir su manera de pensar y de actuar (Torres, 2017).

De tal manera, se determina el aprendizaje como el proceso por donde el estudiante, puede seguir incrementando su conocimiento, puede ir perfeccionándolo y a partir de procesos significativos, poder utilizarlo en su contexto (Ausubel, 1976).

Entonces, el estudiante adquiere y asume su posición como un procesador activo de información, haciendo de este proceso de aprendizaje, una manera sistemática y organizada, no llegando a acciones memorísticas (Díaz y Hernández, 1999).

De esta manera, es necesario señalar la importancia del aprendizaje a través de su propio descubrimiento, es donde tenemos que entender, que los alumnos descubren nuevos conceptos, a partir de sus asociaciones y relaciones, forman nuevas ideas originales en su aprender cotidiano.

Por tanto, el aprendizaje requiere de una nueva estructura de forma activa para poder percibir, diseñar ideas, conceptos y esquemas, que están inherentes en la

estructura cognitiva de los estudiantes (Ausubel, 1976). Es decir, la importancia que el mismo estudiante, a partir de lo que ya sabe, más lo que está descubriendo, se compacte en una nueva estructura cognitiva que él está formando.

Por lo tanto, la construcción del conocimiento solo puede surgir, con el ingreso de nuevos saberes que dan un significado, junto con el conocimiento que ya existe en el estudiante, de tal manera que aprender significa que los nuevos saberes se conectan con los anteriores, haciendo de esta una construcción con un nuevo significado (Ausubel, 1976).

En otras palabras, “el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje” (Ausubel, 1976).

Por lo que se refiere, es el alumno que crea sus propias ideas, conceptos, de forma clara, generando a partir de estos significados, su nuevo aprender, creándolo y relacionándolo por él mismo con los nuevos conceptos.

El aprendizaje significativo no está solo constituido con este proceso, también es su producto que da como resultado emergente a la interacción entre los subsumidores y la nueva información o saber, como consecuencia del enriquecimiento y modificaciones, permitiendo dar un lugar a los nuevos subsumidores que servirán de base para los aprendizajes posteriores.

De igual manera, para que se pueda crear un aprendizaje significativo, se debe dar condiciones fundamentales:

- ✓ Tener una actitud de predisposición de manera significativa para aprender por parte del estudiante.
- ✓ La creación de material de estudio que sea potencialmente significativo.
- ✓ La estructura del material debe estar diseñado con una secuencia lógica, para que el aprender no sea arbitrario si no sustantiva.
- ✓ Que el estudiante pueda hacer uso de sus conocimientos previos, para que en el desarrollo del aprender pueda interactuar significativamente.

Las formas de aprender se encuentran en la jerarquía de la estructura cognitiva del aprendizaje significativo, estas son:

- ✓ **Subordinado:** Relación supeditada entre el nuevo material y la estructura cognitiva ya existente, que está comprendida por el derivado y lo correlativo.
  - **Derivativo:** Se da cuando el material es aprendido y entendido con un ejemplo específico de un concepto ya existente, confirma o ilustra una posición general previamente aprendida.
  - **Correlativo:** Es una extensión, elaboración, modificación previamente aprendidas.
- ✓ **Superordenado:** cuando una nueva proposición se relaciona con ideas subordinadas.
- ✓ **Combinado:** la nueva idea en vista en relación con otras ideas preexistentes.

### **2.3.2.1 TIPOS DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO:**

Para Ausubel (1976) son, las representaciones, conceptos y proposiciones”. Donde dice:

- **Aprendizaje de representaciones:** La persona otorga significado a símbolos asociándolos a aquella parte concreta y objetiva de la realidad.
- **Aprendizaje de conceptos:** En vez de asociarse un símbolo a un objeto concreto y objetivo, se relaciona con una idea abstracta.
- **Aprendizaje de Proposiciones:** surge de la combinación lógica de conceptos.

Para el desarrollo de la unidad didáctica, se toma el tipo de aprendizaje por representación, claro está que, sin descartar los demás tipos, permitiendo integrarlos también en el aprendizaje.

El estudiante encontrar en las guías, símbolos e imágenes, que se encuentran asociados a figuras que ya son conocidas, permitiendo su relación y ampliando sus significados

### **2.3.2.2 CONDICIONES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO**

Para que el aprendizaje sea realmente significativo, es necesario poder reunir ciertas condiciones, la nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario y sustancial, la disposición del alumno por aprender y la naturaleza de los materiales o contenidos del aprendizaje.

Es importante tener en cuenta que no se enseña por enseñar, sin ningún objetivo. Todo aprendizaje debe de ir acompañado de su finalidad, su lograr y el motivo del aprendizaje.

Durante el aprendizaje significativo el estudiante relaciona de manera no arbitraria y sustancial la nueva información con los conocimientos y experiencias previas que ya posee en su estructura cognitiva (Díaz y Hernández, 1999).

Es importante que el docente conozca el proceso, las motivaciones del aprendizaje para los estudiantes, como también su aplicación. Así mismo, poder llevar el registro del proceso de desarrollo intelectual y cognitivo en la etapa del estudiante. Estas condiciones nos permiten tener en cuenta, la importancia de crear un aprendizaje significativo.

### **2.3.2.3 FASES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO:**

Para Ausubel (1976) las fases son: inicial, intermedia y final.

#### **2.3.2.3.1 FASE INICIAL:**

- El aprendiz percibe a la información como constituida por piezas o partes aisladas sin conexión conceptual.
- El aprendiz tiende a memorizar o interpretar en la medida de lo posible estas piezas y para ello usa su conocimiento esquemático.
- El proceso de la información es global y este se basa en escaso conocimientos sobre el dominio, uso de conocimientos de otro dominio para interpretar la información.
- Uso predominante de estrategias de repaso para aprender la información.
- Gradualmente el aprendiz va construyendo un panorama global del dominio o del material que va a aprender, por lo cual usa su conocimiento esquemático, establece analogías para representarse

ese nuevo dominio que constituye en suposiciones basadas en experiencias previas, etc.

#### **2.3.2.3.2 FASE INTERMEDIA:**

- El aprendiz empieza a encontrar relaciones y similitudes entre las partes aisladas y llega a configurar esquemas y mapas cognitivos, sobre el material.
- Se va realizando de manera paulatina un proceso más profundo del material.
- Hay más oportunidad para reflexionar sobre la situación, material y dominio.
- El conocimiento llega a ser más abstracto, es decir, menos dependiente del contexto donde originalmente fue adquirido.
- Es posible el empleo de estrategias elaboradas y organizadas tales como: mapas conceptuales y redes semánticas, así como para usar la información en la solución de tareas-problemas, donde se requiera la información a aprender.

#### **2.3.2.3.3 FASE TERMINAL:**

- Los conocimientos que comenzaron a ser elaborados en esquemas o mapas cognitivos en la fase anterior, llegan a estar más integrados y a funcionar con mayor autonomía.
- Como consecuencia de ello, las ejecuciones comienzan a ser más autónomas y a exigir un menor control consciente.

- Igualmente, las ejecuciones del sujeto se basan en estrategias específicas del dominio para la realización de tareas, tales como solución de problemas, preguntas y respuestas, etc.
- Existe mayor énfasis en esta fase sobre la ejecución que en el aprendizaje, dado que los cambios en la ejecución que ocurren se deben a variaciones provocadas por la tarea, más que arreglos o ajustes internos.

Esto nos permite visualizar el continuo proceso de las fases, estableciendo el proceso del aprendizaje que debe ser continuo, la transición de cada una de las fases de manera gradual dejando a un lado los resultados inmediatos, permitiendo que el estudiante pueda desarrollar cada una de las destrezas para ir alcanzando los objetivos que pretende el aprendizaje significativo.

## **2.4 MARCO LEGAL**

### **2.4.1 ELEMENTOS IMPORTANTES DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICAS**

En el proceso de análisis y lectura de este documento podemos evidenciar que el desarrollo de los estándares básicos de competencia en matemáticas está orientado, para que el trabajo en los estudiantes, se desarrolle por medio de un aprendizaje significativo.

Es importante mirar algunos elementos de los estándares básicos de competencia en matemáticas, que permite ampliar el desarrollo de la unidad didáctica y para ello vamos a tener en cuenta, lo que nos ayuda a dar una mejor visión.

#### **2.4.1.1 LA IMPORTANCIA DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICAS**

Para el ministerio de educación nacional (MEN, 2006), la enseñanza de las matemáticas es de vital importancia que los derechos que todas las personas como sujetos educativos tenemos, “la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos” (p 46).

Es de vital importancia, desarrollar de manera óptima un proceso que permita poder cubrir aprendizajes adecuados, para que se pueda lograr el objetivo que los estándares desea establecer en el área de matemáticas y hacer de este aprendizaje

una cobertura en todas las áreas de la enseñanza, especialmente en matemáticas, que no tenga ningún tipo de distinción entre los estudiantes, que puedan participar en este proceso formador y que se pueda impartir dentro de las aulas.

Es por eso, la importancia de que el aprendizaje este directamente relacionado con aspectos significativos, lo que permiten hacer que los estudiantes logren alcanzar lo establecido por el MEN y para ello el docente juega un papel de gran importancia en este proceso a alcanzar.

Para esto, es necesario poder tener tres elementos importantes establecidos por el MEN (2006) que son las reorganizaciones, redefiniciones y reestructuraciones de los procesos de enseñanza de las matemáticas, donde en primer lugar según el MEN (2006) “se hace necesaria una nueva visión de las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio” (p47).

Es por ello la importancia, que cuando se esté impartiendo, algún tema específico hacer énfasis de la creación, quien lo creó, donde se creó, para que se creó, todo esto para hacer frente a lo exigido. Todo ello para poder mostrar elementos históricos en el momento en que se esté enseñando las matemáticas y hacerla más motivantes con los estudiantes que estén recibiendo esta formación matemática.

Para esto es importante, que el aprendizaje de las matemáticas tenga sentido, es necesario hacer una inclusión con el desarrollo del campo social, en los cambios

que se estén dando en el periodo de su aprendizaje, como también la participación ciudadana, los valores éticos y morales de los estudiantes.

La necesidad de que la enseñanza este orientada, con objetivos bien definidos, en los contenidos y que se direcciona una enseñanza de apoyo para desarrollar competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas (MEN, 2006).

#### **2.4.1.2SER COMPETITIVO**

A continuación, vamos a adentrarnos al concepto de competencia, donde los lineamientos curriculares, son los que dan una visión, a la transición de las competencias como instrumento del conocimiento matemático, como establece el MEN (2006) “la cual se utilizaban los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático, dentro y fuera de la institución educativa” (p 48).

Considero que este paso, ha generado grandes cambios en el aprendizaje en los estudiantes en Colombia, permitiendo que se puedan incorporar nuevos sistemas y estructuras matemáticas eficaces, para que se puedan lograr los diferentes tipos de pensamiento lógico-matemático en la actualidad, permitiendo así la incorporación de esas formas de aprender en especial de manera significativa, como base primordial a lo que queremos lograr con esta unidad didáctica.

Así mismo, con este cambio de visión, a partir de los lineamientos curriculares, se puede mirar mejor el proceso del aprendizaje con la llegada de algunos autores importantes, tales como el MEN (2006) menciona, “potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Gowin” (p 49), desde el punto de vista de un aprendizaje significativo, que da sentido a la educación matemática, que, además, omitir el paso de dar sentido vuelve frágil el entendimiento y es un costo cognitivo que trata la memorización, ya que cuando alguien únicamente memoriza, cada dato nuevo es más fácil de olvidar (RUEF, Sin fecha)

Así pues, para alcanzar los objetivos propuestos, permitiendo desarrollar elementos de un aprendizaje significativo y claro entre los estudiantes, generando un aprendizaje a largo plazo, es decir generar ese saber paso a paso como lo establece el MEN.

Además, se requiere que el docente tenga claro hacia dónde quiere llegar con sus estudiantes, permitiendo ese saber de forma clara, fácil de entender y así mismo poder utilizarlo en su diario vivir.

Por otra parte, la manera como se pretende llegar a estos conocimientos matemáticos, está determinado por dos tipos básicos que el MEN indica, que son el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental.

El conocimiento conceptual está determinado por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, de carácter declarativo y se asocia de saberes, el saber qué y el saber por qué (MEN, 2006). Dicho de otra manera, poder explorar

ese saber en los elementos que establece los conceptos teóricos e históricos en matemáticas. Así pues, el saber que, nos hace referencia y relacionado al conocimiento que vamos a adquirir o que vamos a alcanzar.

Este conocimiento procedimental, establece en los estudiantes desarrollen construcciones, conocimientos definidos del saber cómo (MEN, 2006). En otras palabras, la importancia de la aplicación de los diferentes tipos de saberes, en el aprendizaje escolar y que es de suma importancia en el aprendizaje significativo que es lo que se desea llegar a realizar. **Saber que, saber por qué y saber cómo,** son algunos saberes para que tanto los niños, niñas y jóvenes puedan desarrollar sus conocimientos y así poder llegar a la expresión de ser matemáticamente competentes.

De modo, que no solamente son estos tres saberes que se deben tener en cuenta, sino que también están el **saber qué hacer, saber cuándo y saber por qué hacerlo** (MEN, 2006). Esto para que los estudiantes puedan tener el gusto a lo que se está realizando, como también que entiendan, lo que y como, se realiza el aprender matemático.

Los estudiantes deben usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración (MEN, 2006).

Por otra parte, se exige que los estudiantes puedan llegar a dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlo de manera flexible y eficaz” (MEN, 2006). Esto con el fin de que los estudiantes adquieran las

habilidades necesarias de poder proceder en el desarrollo de sus competencias matemáticas, como también en los tipos de conocimiento el conceptual y el procedimental.

Es decir que estaríamos también logrando los objetivos que nos hemos establecido para el desarrollo de esta unidad didáctica como elemento importante que como finalidad, lo que pretendemos es desarrollar el tema específico planteado, adecuando, no solo un simple aprendizaje, sino que también añadiendo valor a este aprender, valor que, dentro de los conceptos, es hacer que sea un aprender a largo plazo, como se establece en la teoría del aprendizaje significativo.

#### **2.4.1.3 EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LOS SISTEMAS GEOMÉTRICOS**

En cuanto al desarrollo de nuestra unidad didáctica, por ser como tema central el teorema de Pitágoras, se encuentra alineada al pensamiento espacial y los sistemas geométricos, para ello se realiza un registro que establece el MEN, para así poder diseñar de manera acorde y adecuada nuestra unidad didáctica.

Con respecto al pensamiento espacial y sistemas geométricos, como establece el MEN (2006) “es el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p 61).

Debido a lo que establece el MEN es que el estudiante tenga una participación en las dimensiones y relaciones espaciales para su interacción con cada figura, dentro

de su propio espacio y pueda realizar sus propias representaciones, teniendo como punto importante su acercamiento conceptual, permitiendo conocer y manipular sus propias representaciones.

Según el MEN (2006) esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos (p 61).

En efecto es muy relevante que los estudiantes puedan explorar la parte espacial, a partir de sus sentidos como también a partir de su propio cuerpo, haciendo así una manera de mostrar la importancia del espacio, el cual habita. Como también según el MEN (2006) “cada una de las propiedades del cuerpo en virtud a su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea” (p 61), como se indica Grecia Gálvez, el meso-espacio y el macro- espacio.

El meso-espacio, no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos, sino las relaciones entre los objetos involucrados, toma elementos cualitativos.

El macro-espacio, hace necesaria la metrización, sin importar si el objeto está cerca o lejos, sino poder determinar qué tan cerca o qué tan lejos se encuentra el objeto. Es a partir de este enunciado que se toma valores cuantitativos, apareciendo nuevas propiedades y nuevas relaciones entre los objetos.

Por lo cual a partir del macro-espacio se inician los estudios de las propiedades espaciales, donde es necesario la métrica, permitiendo así generar mayor

conocimiento de manera formal de la geometría, en especial la geometría Euclidiana.

Como resultado el MEN (2006) determina que “Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial” (p 62).

#### **2.4.1.4EL CONTEXTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

Para el trabajo de toda actividad docente el MEN, establece la necesidad de poner en contexto todo el desarrollo de aprendizaje con los estudiantes, con respecto a, el contexto inmediato o contexto de aula, el contexto escolar o contexto institucional y el contexto extraescolar o contexto sociocultural (MEN, 2006).

Así pues, para el desarrollo de los procesos de aprendizaje es necesario hacer que lo todo aprendido por el estudiante esté relacionado con su entorno, su cultura, sus tradiciones y la manera como él vive, todo esto para hacer que lo aprendido tenga un significado y se motive para aprender todo lo que se está viviendo en el aula de clase.

Otro elemento que también es de vital importancia, es hacer que lo aprendido por él estudiante, debe de tener un aprendizaje significativo, para ello es de vital importancia el poder hacer que todo lo visto, se asocie en lo que él vive dentro de su ambiente tanto social, cultural, y artístico.

En relación al **contexto inmediato o contexto de aula**, está determinado por las paredes, ventanas, muebles y materiales, por las normas explícitas o implícitas con las que se trabaja en clase y por la situación del problema preparada por el docente.

Al **contexto escolar o contexto institucional** está determinado por los escenarios de las actividades diarias, la arquitectura escolar, las tradiciones y los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos, así como por el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito de las distintas áreas curriculares y el llamado “currículo oculto” de la institución determina el (MEN, 2006).

También y por ultimo tenemos el **contexto extra escolar o contexto sociocultural** Está conformado por todo lo que pasa fuera de la institución en el ambiente de la comunidad local, de la región, el país y el mundo.

Estos elementos, son recomendaciones para el desarrollo escolar, que se realice de manera adecuada, llegando a poder cubrir tanto las necesidades de la población como también las exigencias que se encuentran dentro de las instituciones educativas, permitiendo hacer un ejercicio adecuado para la educación y aprendizaje (MEN, 2006).

## 2.4.2 DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

Los derechos básicos de aprendizaje (DBA) son una guía fundamental que nos brinda el MEN, donde se relacionan los diferentes conocimientos fundamentales en la escuela, trabajados por áreas y grados escolares.

La lectura de los derechos básicos de aprendizaje nos permitirá reunir elementos para la fortalecer este marco teórico y nos ayudará a reunir bases para el diseño de nuestra unidad didáctica.

Para grado octavo, los DBA (2017), mencionan como enunciado: “identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales” (p 62) y estas las complementa con las siguientes evidencias de aprendizaje:

- ✓ Describe teoremas y argumenta su validez, a través de diferentes recursos.
- ✓ Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto.
- ✓ Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras y Thales, entre otros.
- ✓ Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo.
- ✓ Resuelve problemas utilizando teoremas básicos.

Esta propuesta por parte de los DBA, nos indica que trabajar el teorema de Pitágoras en grado octavo, es parte de los temas mínimos que debe ser planeado,

por los docentes de matemáticas. En este caso la planeación de las guías está bajo la base de conseguir un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

### 3 METODOLOGÍA

La metodología que se implementó para el desarrollo de este trabajo de grado, está orientada en ocho etapas, el cual permite estructurar, paso a paso la unidad didáctica, que está orientado en la enseñanza del teorema de Pitágoras a través de un aprendizaje significativo a estudiantes de grado octavo.

El desarrollo de estas etapas, permite visualizar de manera general, el proceso de la elaboración de este trabajo.

**Etapa 1.** Búsqueda del material, para la investigación, la lectura y la estructura cognitiva del tema a trabajar. En esta etapa, se busca el material que se relaciona con el tema propuesto, para ello iniciamos haciendo un listado de posibles términos que generalizan el trabajo, entre ellos están, la problemática de la enseñanza de las matemáticas, el teorema de Pitágoras, los problemas que involucran la manera de enseñar mecánica de las matemáticas, la historia del teorema de Pitágoras, la enseñanza y sus diferentes métodos, el aprendizaje significativo, tipos de aprendizaje significativo, las leyes que regulan la educación en Colombia, tales como los estándares de competencia en matemáticas y los DBA.

**Etapa 2.** Planteamiento del problema. A partir del material encontrado se inicia las lecturas que permiten poder plantear el problema de investigación, así que, a partir de la recopilación de información se establece los parámetros que brinda más sustento en la estructura del desarrollo del problema a trabajar en el material didáctico.

**Etapa 3.** Elaboración de la justificación. A partir del planteamiento del problema ya desarrollado, se puede elaborar el documento que justifica el que, porque, para que, como, se construirá la unidad didáctica.

**Etapa 4.** Elaboración de los objetivos generales y específicos. En relación con esta etapa, para su construcción es de vital importancia tener claro la justificación del problema, que a partir de la etapa 3 se diseñó y planteo los diferentes tipos de objetivos, el cual son el fin y el logro del trabajo realizado.

**Etapa 5.** Construcción del marco teórico. Se divide en tres partes, el marco disciplinar, pedagógico y legal, que permite tener claro los parámetros, para establecer el diseño de las guías, que forman la unidad didáctica.

**Etapa 6.** Diseño de la unidad didáctica. En esta etapa, se inicia la elaboración de la unidad didáctica, a partir de la teoría consultada, estas guías son: guía para el docente, guía de evaluación diagnóstica, guía 1 conociendo a Pitágoras, guía 2 el triángulo de Pitágoras, guía 3 el teorema de Pitágoras, guía 4 somos pitagóricos, guía de evaluación final.

**Etapa 7.** Conclusiones y recomendaciones. Del resultado de la elaboración del trabajo, que surgieron estos dos aspectos importantes.

**Etapa 8.** Validación del material didáctico. En esta etapa se seleccionan dos docentes que reunieron las condiciones necesarias para que la unidad didáctica pudiera ser validada, a partir de su experiencia, pudiera ser revisada en su contenido, permitiendo tener el concepto de los expertos, sobre su diseño y la posibilidad de ser aplicado, en los estudiantes.

## 4 UNIDAD DIDÁCTICA.

La unidad didáctica está comprendida por: la guía para el docente, guía de evaluación diagnóstica, guía 1 conociendo a Pitágoras, guía 2 el triángulo de Pitágoras, guía 3 el teorema de Pitágoras, guía 4 somos pitagóricos, guía de evaluación final.

### LA ESTRUCTURA DE LA GUÍA PARA EL DOCENTE

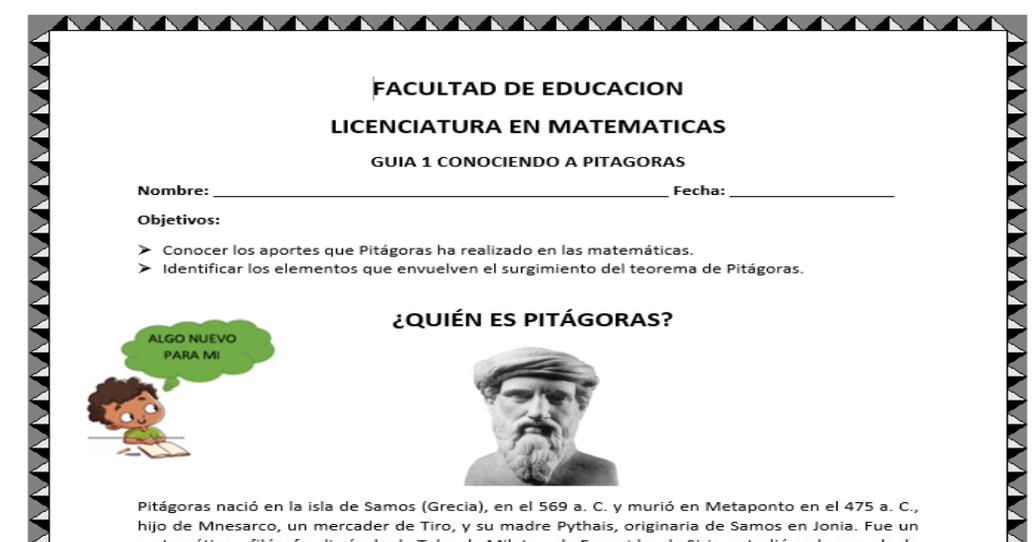
Número de guía, tema a tratar, los objetivos de la guía para alcanzar, el contenido de la guía, los recursos o materiales que se necesita para el desarrollo de la guía, la duración de la actividad y las fases del aprendizaje.

GUÍA:	1
TEMA:	PRUEBA DIAGNOSTICA
OBJETIVOS:	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Diferenciar los distintos tipos de triángulos y sus principales propiedades.</li> <li>➤ Identificar los triángulos y agruparlos a partir de sus ángulos y lados.</li> </ul>
CONTENIDOS:	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Definición de triángulo.</li> <li>✓ Clasificación de triángulos.</li> <li>✓ Cálculo de la medida interna del triángulo.</li> </ul>
RECURSOS:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• TV.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> <li>• Tablero.</li> </ul>
DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:	Una hora de clase.
FASES DEL APRENDIZAJE:	<p><b>INICIAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante recibirá la información de la utilización de la guía.</li> <li>✓ Se recordará los temas que debería manejar y utilizar.</li> </ul> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante por medio de esta prueba diagnóstica, empezará a encontrar relación con sus saberes, ya establecidos y afianzando de manera progresiva su saber.</li> </ul> <p><b>TERMINAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En esta fase el estudiante podrá ya tener mayor autonomía con su saber, el cual tendrá la capacidad de plantear soluciones claras.</li> </ul>

La guía para el docente, es una herramienta que está diseñada, para que tenga la orientación necesaria, en el desarrollo de las actividades y además pueda visualizar todo el contenido que los estudiantes van a trabajar.

## LA ESTRUCTURA DE LA GUÍA PARA EL ESTUDIANTE

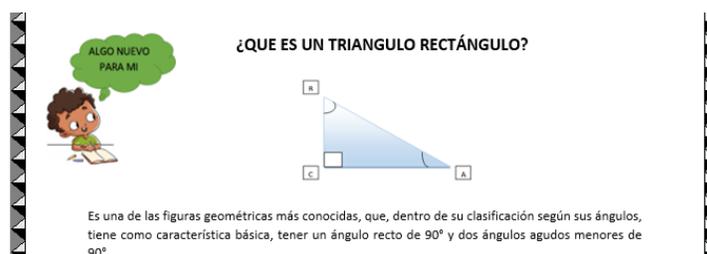
Numero de guía, tema a tratar, los objetivos de la guía para alcanzar, y las fases del aprendizaje.



**Las fases del aprendizaje son tres:**

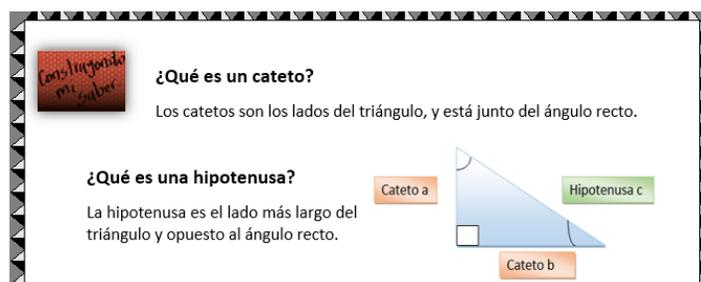
**Inicial:** Algo nuevo para mí.

En esta etapa, el estudiante podrá iniciar un nuevo saber, orientado por el docente que lo acompaña en su proceso.



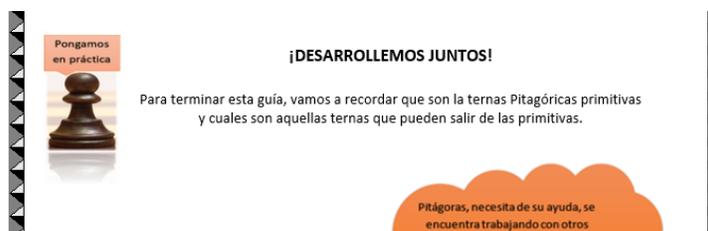
**Intermedia:** Construyo ni saber.

En esta etapa, el estudiante une su nuevo conocimiento con los conocimientos previos que ya existían en él.



**Final:** Pongamos en práctica.

En esta etapa, se pondrá en práctica todo lo enseñado y el estudiante desarrollará con lo visto con el docente, el fin de la guía.



La unidad didáctica es diseñada de manera amigable en términos de una adecuada letra, imágenes significativas de los temas a ver, contenidos fáciles de entender, para que su aprendizaje sea agradable, está acompañado de habladores que permiten adquirir preconceptos, permitiendo que su aprender sea dinámico y motivante.

Esta unidad busca, nuevas alternativas en la enseñanza y poder llegar a los estudiantes para dar a conocer las matemáticas de manera didáctica. También se busca, que los docentes que quieran trabajar con esta unidad, sienta el respaldo de su contenido y puedan abarcar de manera apropiada el tema establecido.

|

## 5 SECUENCIA DIDÁCTICA.

La secuencia que se desarrolla en esta unidad, va de manera progresiva, iniciando desde los pre saberes, su prueba diagnóstica, la construcción del significado, asociación de lo que ellos ya saben con la nueva información, la conceptualización del tema, desarrollo del teorema de Pitágoras, el resultado de sus saberes, reunión de la información adquirida, actividades, grupales e individuales y aplicación del teorema de Pitágoras en un contexto geométrico y cotidiano, y su evaluación, permitiendo un aprendizaje significativo.

GUÍA: 0		PRUEBA DIAGNOSTICA
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Diferenciar los distintos tipos de triángulos y sus principales propiedades.</li> <li>➤ Identificar los triángulos y agruparlos a partir de sus ángulos y lados.</li> </ul>	
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Definición de triángulo.</li> <li>✓ Clasificación de triángulos.</li> <li>Calculo de la medida interna del triángulo.</li> </ul>	

GUÍA 1		CONOCIENDO A PITÁGORAS
<b>OBJETIVOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Saber de la vida de Pitágoras.</li> <li>➤ Conocer los aportes que Pitágoras ha realizado en las matemáticas.</li> <li>➤ Identificar los elementos que envuelven el surgimiento del teorema de Pitágoras.</li> </ul>	
<b>CONTENIDOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La Historia de Pitágoras.</li> </ul>	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Sus viajes.</li> <li>✓ La escuela Pitagórica.</li> </ul> <p>Aporte de Pitágoras a las matemáticas.</p>
--	---

GUÍA 2 EL TRIANGULO RECTÁNGULO	
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Identificar las partes del triángulo rectángulo.</li> <li>➤ Conocer las características y tipos del triángulo rectángulo.</li> <li>➤ Comprender y aplica el concepto del triángulo rectángulo.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Triángulo rectángulo.</li> <li>✓ Propiedades del triángulo rectángulo.</li> <li>✓ Tipos de triángulos rectángulos.</li> </ul>

GUÍA 3 EL TEOREMA DE PITÁGORAS	
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras.</li> <li>➤ Resolver problemas al rededor del Teorema de Pitágoras.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Teorema de Pitágoras.</li> <li>✓ Partes del triangular rectángulo.</li> <li>✓ Aplicación de del teorema de Pitágoras en figuras geométricas.</li> </ul>

GUÍA 4 TERNAS PITAGÓRICAS	
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Identificar las ternas pitagóricas.</li> <li>➤ Desarrollar ternas pitagóricas primitivas.</li> </ul>
CONTENIDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Ternas pitagóricas primitivas.</li> </ul>

GUÍA 5	EVALUACIÓN FINAL
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"><li>➤ Aplicar el concepto del teorema de Pitágoras.</li><li>➤ Resolver problemas alrededor del Teorema de Pitágoras.</li></ul>
CONTENIDOS	Reunión de temas de las respectivas guías.

## 6 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE INSTRUMENTO

La validación y análisis de la unidad didáctica, como instrumento de enseñanza-aprendizaje, se realizó, por medio de docentes que están vinculados en la formación matemática y tienen una amplia trayectoria en la práctica como docentes, el cual, por medio de su experiencia, se pudo realizar el análisis detallado sobre el diseño y la estructura de la unidad didáctica.

### 6.1 VALORACIÓN

La valoración, con la que se realizó la validación y análisis de la unidad, está comprendida por cinco ítems.

LETRA	CALIFICACIÓN	VALOR
<b>E</b>	EXCELENTE	5
<b>MB</b>	MUY BUENO	4
<b>B</b>	BUENO	3
<b>R</b>	REGULAR	2
<b>NM</b>	NECESITA MEJORAR	1

### 6.2 CRITERIOS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS

Los criterios de validación y análisis de la unidad didáctica, están comprendidos en catorce ítems que permitió encerrar todas las características necesarias para su respectiva valoración, donde los docentes seleccionados, pudieron revisar cada una de las guías diseñadas y dar su valoración.

## CRITERIOS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS

1. La estructura de la unidad didáctica, en relación al tipo de letra, tamaño, distribución y organización.
2. Las imágenes utilizadas para el acompañamiento y motivación del material a trabajar.
3. Las imágenes utilizadas para la presentación del tema a tratar.
4. El tema que se aborda es adecuado y pertinente, para los estudiantes del grado octavo.
5. Los objetivos que se plantean en el desarrollo de cada guía, es comprensible para el estudiante.
6. El lenguaje que se utiliza para trabajar el tema es sencillo y claro.
7. Las actividades tienen relación con los derechos básicos de aprendizaje, lineamientos y estándares que propone el MEN.
8. Las actividades que se desarrollan son adecuadas para el proceso de aprendizaje del estudiante de grado octavo.
9. El contenido que se eligió es pertinente para trabajar desde un aprendizaje significativo.
10. Las actividades y su diseño pueden ayudar a despertar interés en el aprendizaje de las matemáticas.
11. El material elaborado sirve de apoyo para los docentes que quieran enseñar el teorema de Pitágoras.
12. La guía de evaluación permite evaluar los contenidos desarrollados.
13. La unidad didáctica promueve el aprendizaje significativo y colaborativo.
14. El material diseñado motiva a ser implementado por otros docentes.

### 6.3 DESARROLLO DE LA VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La selección de los docentes que, dentro de su trayectoria profesional, reúnen la experiencia para realizar la valoración y análisis de la unidad didáctica, para apoyar la enseñanza del teorema de Pitágoras a través de un aprendizaje significativo.

**Docente 1:** Jainer F. Rodríguez R.

Licenciado en matemáticas, egresado de la universidad nacional de Colombia con posgrado. Con 34 años de experiencia en educación secundaria y 12 años de educación universitaria. Actualmente docente del colegio femenino Mercedes Nariño.

**Docente 2:** Oscar Andrés Galindo.

Matemático, egresado de la universidad nacional de Colombia. Con 18 años de experiencia en educación universitaria con posgrado. Actualmente docente de la Universidad Antonio Nariño.

## 6.4 VALORACIÓN CRITERIOS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DEL DEL INSTRUMENTO

Se realizó un promedio de la valoración de cada uno de los docentes, con sus respectivas observaciones indicadas en su validación y análisis.

**Docente 1:**

**Calificación: 3.78.**

**Observaciones y recomendaciones:**

- Mejorar la redacción del material.
- El material (unidades) es pertinente para el grado octavo, una vez se halla enseñado ecuaciones de primer grado.
- Algunas propiedades del triángulo rectángulo no son pertinentes para este nivel.
- Se debe mejorar la evaluación final, precisando claramente las actividades.
- La parte conceptual debe ser revisada.

**Docente 2:**

**Calificación: 4.9**

**Observaciones y recomendaciones:**

- El material presentado es muy pertinente a los objetivos del curso de matemáticas para grado octavo.
- Dice le docente: Desde mi punto de vista, me parece agradable tener un material bien escrito, con reseñas históricas, con retos en el proceso de aprendizaje del curso, los cuales propone el material revisado.

- Como un aspecto a mejorar, sería tener un lenguaje más claro para los estudiantes a fin de entender los conceptos establecidos.

Se tomó en cuenta, las observaciones realizadas por los docentes validadores, para las modificaciones y mejoras que se tenían que realizar en la unidad didáctica.

A partir, de las observaciones por los validadores, se realizó las correspondientes modificaciones, donde mejoro considerablemente la unidad didáctica.

Calificación total de validación y análisis de la unidad didáctica.

**4.34**

## 7 CONCLUSIONES

Para diseñar guías que permitan el aprendizaje significativo es necesario poder tener elementos que la construyen, la parte histórica, la parte disciplinar, la parte legal establecido por MEN, el desarrollo conceptual, el proceso pedagógico, trabajo didáctico y el diseño adecuado acorde a la edad y grado del estudiante.

El aprendizaje del Teorema de Pitágoras es importante, para poder abordarlo de manera significativa, iniciando desde el campo histórico, esto permite poder realizar un trabajo de interés en dejar un saber a largo plazo en los estudiantes.

Que los estudiantes tengan unas bases adecuadas en el desarrollo del Teorema de Pitágoras, donde esto ayudara a que puedan aplicarlo, en la parte de la geometría, trigonometría, cálculo y la física.

Esta unidad es elaborada para los estudiantes que puedan adquirir y alcanzar competencias matemáticas, relacionadas especialmente con la geometría, permitiendo así enfrentarse a pensamientos de índole deductivos.

Podemos también concluir que los docentes que se encuentren con este material, van a tener, un material que su aplicación va a ser practico, sencillo y de uso fácil, haciendo de su experiencia algo agradable y placentero con sus estudiantes.

## 8 RECOMENDACIONES

Para el desarrollo y la utilización de este material, se recomienda que su implementación sea utilizada por docentes que enseñen geometría en grado octavo, el cual van a poder tener una propuesta de enseñanza y aprendizaje para sus estudiantes, también antes de iniciar su desarrollo se recomienda, una revisión de las fases del aprendizaje significativo de Ausubel.

También para realizar estas guías es de vital importancia, la indagación y la ubicación de donde se desarrollaron los hechos del Teorema de Pitágoras, para que se pueda llegar con su aprendizaje de manera histórica y motivadora.

En desarrollo de las guías van a encontrar, trabajo manual, trabajo individual y trabajo colaborativo, esto permitirá la utilización de este material, los estudiantes podrán tener diferentes momentos en el trabajo de las guías.

## 9 REFERENCIAS

Aprendizaje mecánico, (2017). <https://glosarios.servidor-alicante.com>

Barrios Calmaestra, Luis. (2007) "Ternas pitagóricas" [recurso en línea], en: Descartes 3D, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España. Disponible en Internet: [http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/TernasPitagoricas/ternaspitagoricas.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/TernasPitagoricas/ternaspitagoricas.htm) [Fecha de última consulta: 20 de marzo de 2012]. CC BY-NC-SA 2.5.

Díaz, A. F. & Hernández, R. G. (1999). Constructivismo y Aprendizaje Significativo en: *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. (pp. 18-28). México: Mc Graw Hill.

Díaz, Tulia María. (Sin fecha). El aprendizaje del teorema de Pitágoras en el grado octavo. *Institución Educativa inmaculada concepción proyecto: desarrollo del pensamiento matemático en doce instituciones educativas del departamento de Sucre*. Fundación Promigas, asesoría pedagógica Fucai.

El teorema de Pitágoras, (2006). <http://www.elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com/p/el-teorema-de-pitagoras-en-la-india-y.html>

El teorema de Pitágoras, (2015). <http://www.timetoast.com/timelines/el-teorema-de-pitagoras>

González Urbaneja, P. M. 2008: El Teorema Llamado De Pitágoras Una Historia Geométrica De 4000 Años. Pág. 103 – 110.

Grimauldo, Carina. (2011) "En busca de ternas Pitagóricas" [actividad en línea], en: Educaplay.com. Disponible en internet: [http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/544911/en\\_busca\\_de\\_ternas\\_pitagoricas.htm](http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/544911/en_busca_de_ternas_pitagoricas.htm) [Fecha de última consulta: 20 de marzo de 2012].

Joseph D. Novak & Alberto J. Cañas. (2009). Cómo aprenden las personas. Institute for Human and Machine Cognition. [www.ihmc.us](http://www.ihmc.us). Documento recuperado en julio de 2013 de <http://aprende.cmappers.net/resource/list>.

Matemáticas. Teorema de Pitágoras. (Año no especificado). Explicación y teoría. Tu espacio joven. <http://www.estudiantes.info/matematicas/geometria/2-eso/teoremadepitagoras.htm>

Matthews, M. R. (1994). Historia filosofía y enseñanzas de las ciencias: La aproximación actual. *Enseñanza de las ciencias*, 12(2) p. 255-277.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2017). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas.

Pérez Porto, Julián. (2008). Definición de enseñanza. <https://definicion.de/ensenanza/>.

Perlaza, J y Vimos, B. (2013). Aprendizaje significativo en matemáticas y su influencia en el rendimiento académico. Universidad Estatal de milagro, Facultad de educación, licenciado en ciencia de la educación, Guayas, Ecuador.

Pitágoras en la antigüedad, (2008).  
[http://www.arisheras.blogspot.com/2009/05/pitagoras-em-la-antigüedad\\_17.html](http://www.arisheras.blogspot.com/2009/05/pitagoras-em-la-antigüedad_17.html)

Raffino, María Estela (2019). Concepto de Enseñanza. Argentina, Edición el 15 de marzo de 2019. <https://concepto.de/ensenanza/>.

Renzo Titone e Imideo Nérici, (1973). Hacia una Didáctica General Dinámica Kapelusz, Buenos Aires.

Rodríguez Palmero, M. L. (2004). La Teoría del Aprendizaje Significativo. Centro de Educación a Distancia (C.E.A.D.). C/ Pedro Suárez Hdez, s/n. C.P. nº 38009 Santa Cruz de Tenerife.

Ruef, J. (Sin fecha) Think you're bad at math? You may suffer from 'math trauma. Recuperado de: <https://theconversation.com/think-youre-bad-at-math-you-may-suffer-from-math-trauma-104209>

Strathern, Paul. (2014) Pitágoras y su teorema en 90 minutos. Editorial siglo XXI.

Torres González, M. D. (2017). El teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de educación secundaria. Universidad de Granada, facultad ciencias de la educación, maestría en educación matemática, Madrid, España.

Torres Ruiz, C. E. (2018). Propuesta didáctica para la enseñanza del teorema de Pitágoras a estudiantes del grado octavo. Universidad Antonio Nariño, facultad de educación, licenciatura en matemáticas. Bogotá D. C.

Torres, Arturo (2017). Psicología Educativa y Del Desarrollo: La Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel. <https://psicologiaymente.com/desarrollo/aprendizaje-significativo-david-ausubel>.

Weisstein, Eric W. (sin fecha). «Triángulo rectángulo». Weisstein, Eric W, ed. Math World. Wólfram Research.

## 10 MATERIAL DIDÁCTICO

### 10.1 GUÍA DOCENTE

<b>GUÍA:</b>	<b>0</b>
<b>TEMA:</b>	<b>PRUEBA DIAGNOSTICA</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Diferenciar los distintos tipos de triángulos y sus principales propiedades.</li> <li>➤ Identificar los triángulos y agruparlos a partir de sus ángulos y lados.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Definición de triángulo.</li> <li>✓ Clasificación de triángulos.</li> <li>✓ Calculo de la medida interna del triángulo.</li> </ul>
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• TV.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> <li>• Tablero.</li> </ul>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>FASES DEL APRENDIZAJE:</b>	<p><b>INICIAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante recibirá la información de la utilización de la guía.</li> <li>✓ Se recordará los temas que debería manejar y utilizar.</li> </ul> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante por medio de esta prueba diagnóstica, empezara a encontrar relación con sus saberes, ya establecidos y afianzando de manera progresiva su saber.</li> </ul> <p><b>TERMINAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En esta fase el estudiante podrá tener mayor autonomía con su saber, el cual tendrá la capacidad de plantear soluciones claras.</li> </ul>

<b>GUÍA:</b>	<b>1</b>
<b>TEMA:</b>	<b>CONOCIENDO A PITÁGORAS</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Ubicación histórica de la vida de Pitágoras.</li> <li>➤ Conocer los aportes que Pitágoras ha realizado en las matemáticas.</li> <li>➤ Identificar los elementos que envuelven el surgimiento del teorema de Pitágoras.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La Historia de Pitágoras.</li> <li>✓ Sus viajes.</li> <li>✓ La escuela pitagórica.</li> <li>✓ Aporte de Pitágoras a las matemáticas.</li> </ul>
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• Tv.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> <li>• Tablero.</li> </ul>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>FASES DEL APRENDIZAJE:</b>	<p><b>INICIAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Es necesario usar estrategias de repaso para aprender la información que se va iniciar.</li> <li>✓ El estudiante en la medida que va desarrollando la guía va a asociando la información, para tener mayor dominio en el tema.</li> </ul> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En la medida que se va aprendiendo sobre la vida de Pitágoras y de su comunidad se va mas afianzando su saber.</li> </ul> <p><b>TERMINAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En esta fase el estudiante podrá tener mayor autonomía con su saber, el cual tendrá la capacidad de plantear soluciones claras.</li> </ul>

<b>GUÍA:</b>	<b>2</b>
<b>TEMA:</b>	<b>EL TRIANGULO RECTÁNGULO</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Identificar los elementos del triángulo rectángulo.</li> <li>➤ Conocer las características y tipos del triángulo rectángulo.</li> <li>➤ Comprender y aplica el concepto del triángulo rectángulo.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Triángulo rectángulo.</li> <li>✓ Propiedades del triángulo rectángulo.</li> <li>✓ Tipos de triángulos rectángulos.</li> </ul>
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• Tv.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> <li>✓ Tablero.</li> </ul>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>FASES DEL APRENDIZAJE:</b>	<p><b>INICIAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Los estudiantes asociaran los elementos de las clasificaciones de los triángulos, recordando temas anteriores, permitiendo poder afianzar cada uno de sus saberes con el nuevo contenido del triángulo rectángulo.</li> </ul> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante en la medida que va asociando el conocimiento de los triángulos, podrá asociarlo con el nuevo saber del triángulo rectángulo ubicándolo de manera directa con el tema.</li> </ul> <p><b>TERMINAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En esta fase el estudiante podrá tener mayor autonomía con su saber, el cual tendrá la capacidad de plantear soluciones claras.</li> </ul>

<b>GUÍA:</b>	<b>3</b>
<b>TEMA:</b>	<b>EL TEOREMA DE PITÁGORAS</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras.</li> <li>➤ Resolver problemas al rededor del Teorema de Pitágoras.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Teorema de Pitágoras.</li> <li>✓ Partes del triangular rectángulo.</li> <li>✓ Aplicación de del teorema de Pitágoras en figuras geométricas.</li> </ul>
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• Tv.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> <li>• Tablero.</li> </ul>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>FASES DEL APRENDIZAJE:</b>	<p><b>INICIAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante reconocerá elementos que caracterizan los triángulos rectángulos, permitiendo hacer relación de lo visto anteriormente, con el nuevo tema.</li> </ul> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En la medida que el estudiante va conociendo las partes del triángulo rectángulo, va comprendiendo mejor su importancia y afianzando también los conocimientos previos, así como aplicarlos de manera gradual y ordenada.</li> </ul> <p><b>TERMINAL:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ El estudiante podrá aplicar lo aprendido de forma segura, tenido un fundamento claro de su nuevo saber, con la posibilidad de poder utilizarlo de manera acorde con su aprender.</li> </ul>

<b>GUÍA:</b>	<b>4</b>
<b>TEMA:</b>	<b>TERNAS PITAGÓRICAS</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Identificar las ternas pitagóricas.</li> <li>➤ Desarrollar ternas pitagóricas primitivas.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ternas pitagóricas primitivas.</li> </ul>
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> <li>• Tv.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Marcadores.</li> </ul> <p>Tablero.</p>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>FASES DEL APRENDIZAJE:</b>	<p><b>INICIAL:</b></p> <p>✓ Se inicia con elementos históricos para que el estudiante pueda volver a asociarlos, con la guía 1, permitiendo así tener una imagen tanto histórica como lo que ha venido aplicando hasta el momento.</p> <p><b>INTERMEDIA:</b></p> <p>✓ En el proceso de su desarrollo con el tema propuesto, el estudiante tendrá la actitud de afrontar más claro la aplicación del teorema de Pitágoras, desarrollando el mismo los problemas de la guía.</p> <p><b>TERMINAL:</b></p> <p>✓ Los conocimientos que se iniciaron desde la guía 1, permiten al estudiante tener más autonomía en el desarrollo de lo aprendido, teniendo este tema en su aplicación con mayor seguridad.</p>

<b>GUÍA:</b>	<b>5</b>
<b>TEMA:</b>	<b>EVALUACIÓN FINAL</b>
<b>OBJETIVOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Aplicar el concepto del teorema de Pitágoras.</li> <li>➤ Resolver problemas alrededor del Teorema de Pitágoras.</li> </ul>
<b>CONTENIDOS:</b>	Se reúnen todos los temas de las respectivas guías.
<b>RECURSOS:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de actividades.</li> <li>• Espacio del aula.</li> </ul>
<b>DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b>	Una hora de clase.
<b>DESARROLLO</b>	El estudiante desarrollara su guía de evaluación, donde se encontrara con los temas estudiados, los puntos a desarrollar orientados a que el estudiante afiance su saber aplicando lo aprendido.

## 10.2 GUÍAS DEL ESTUDIANTE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

### GUÍA DIAGNOSTICA

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

#### Objetivos:

- Diferenciar los distintos tipos de triángulos y sus principales propiedades.
- Identificar los triángulos y agruparlos a partir de sus ángulos y lados.

## EL TRIANGULO Y SUS PROPIEDADES



El triángulo de las bermudas es una zona geográfica en la cual se encuentran la ciudad de Miami florida en Estados Unidos, las islas bermudas frente a la costa este de Estados Unidos y puerto rico, por esta razón es llamado el triángulo de las bermudas, ya que esta área se encuentra encerrada por estas 2 ciudades y la isla de puerto rico, pero este enigmático triangulo encierra muchos mitos, debido a que a lo garlo del tiempo han ocurrido muchos casos de desapariciones misteriosas cerca de esta área, pese a los diferentes intentos de explicar estos sucesos aterradoros, aún persiste el misterio del triángulo.

1. Con sus palabras defina ¿Que es un triángulo?

---

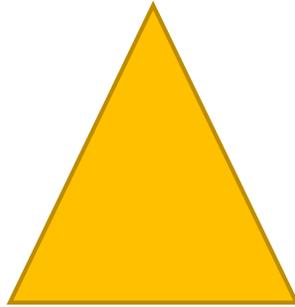
---

---

---

---

2. Nombre las partes del triángulo de manera apropiada, sus vértices y sus lados:



3. La clasificación de los triángulos se divide en:

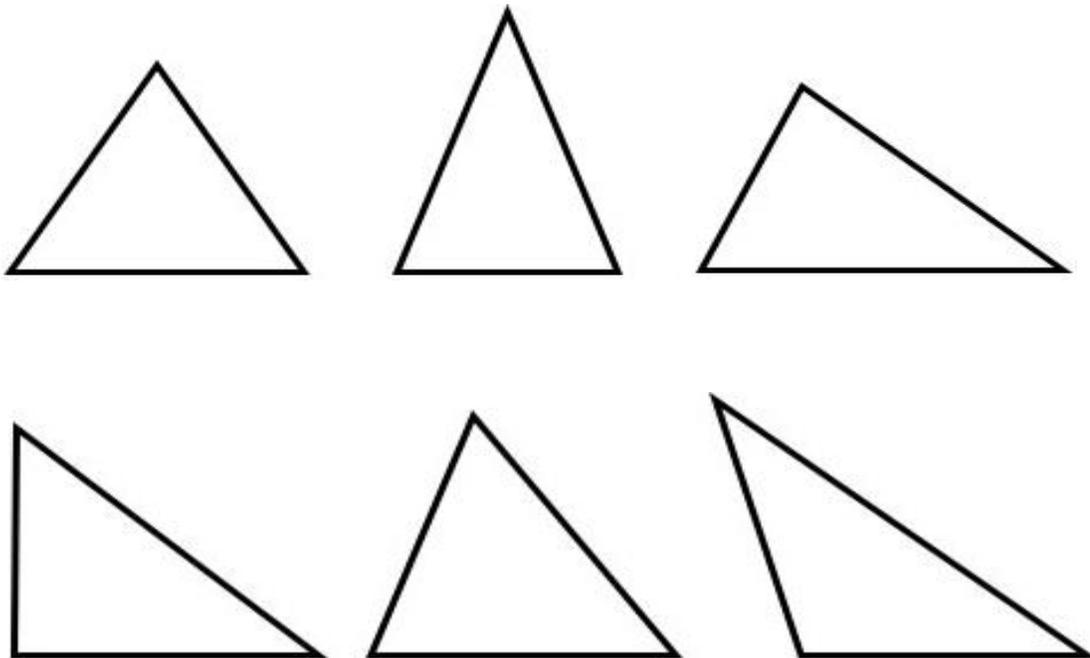
1. Según sus:

---

2. Según sus:

---

4. Selecciona las diferentes imágenes de triángulos y determina la clasificación a la que pertenece, a partir de la respuesta del punto anterior:



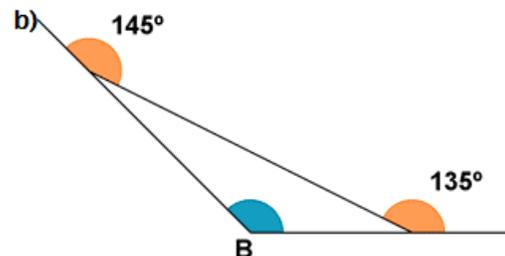
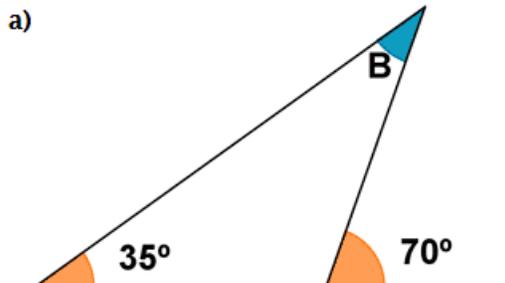
Un ángulo interno, es un ángulo formado por dos lados de un polígono que, compartiendo un extremo común, está contenido dentro del polígono. Un polígono simple tiene sólo un ángulo interno por cada vértice y está situado del lado opuesto del polígono.



5. Observando esta imagen y las imágenes del punto 4, podemos decir que la suma de los ángulos internos siempre va a ser:
- $280^\circ$ .
  - $360^\circ$ .
  - $180^\circ$ .
  - $90^\circ$ .

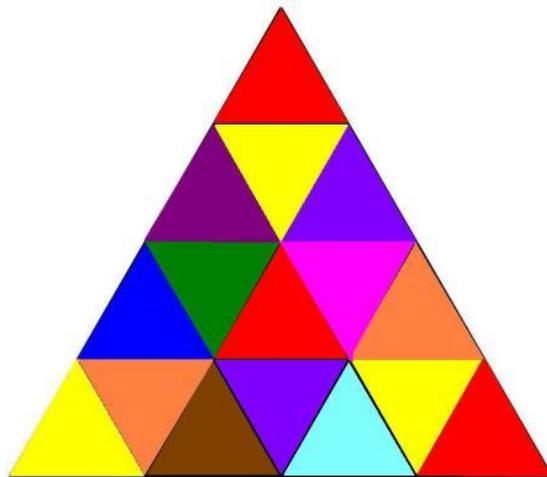
¿Cuál de estas opciones es la correcta?

6. Calcula la medida del ángulo B de los siguientes triángulos.



# TRABAJEMOS EN GRUPO

¿Cuántos triángulos distintos de cualquier tamaño puedes contar?



---

---

---

---

# FACULTAD DE EDUCACIÓN

## LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

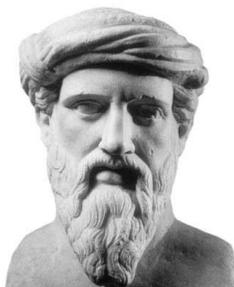
### GUÍA 1 CONOCIENDO A PITÁGORAS

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

#### Objetivos:

- Conocer los aportes que Pitágoras ha realizado en las matemáticas.
- Identificar los elementos que envuelven el surgimiento del teorema de Pitágoras.

### ¿QUIÉN ES PITÁGORAS?



Pitágoras nació en la isla de Samos (Grecia), en el 569 a. C. y murió en Metaponto en el 475 a. C., hijo de Mnesarco, un mercader de Tiro, y su madre Pythais, originaria de Samos en Jonia. Fue un matemático y filósofo, discípulo de Tales de Mileto y de Fenecidas de Siria, estudió en la escuela de Mileto. Viajó por Oriente Medio (Egipto y Babilonia). Sufrió el exilio para escapar de la tiranía del dictador Samio Polícrates, por lo que viajó hasta establecerse en el 531 a. C. en las colonias italianas de Grecia donde fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona al sur de Italia. Se cree que inventó (si no él sus discípulos), las tablas de multiplicar y que fue el primero en demostrar el conocido **Teorema de Pitágoras** sobre la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque ya los babilonios y los egipcios, lo usaban en sus cálculos y construcciones, pero sin haberlo **demostrado**.

#### En su cuaderno responda las siguientes preguntas:

¿Dónde nació Pitágoras?

¿Qué le sucedió a Pitágoras en su ciudad Natal?

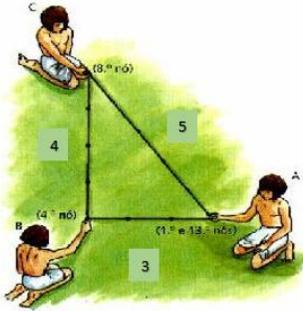
¿En qué países y lugares estuvo viajando Pitágoras?

¿Cuál es la figura geométrica que se describe en la lectura? Dibújalo e indique el tipo de triángulo.



## ¿Sabías que?

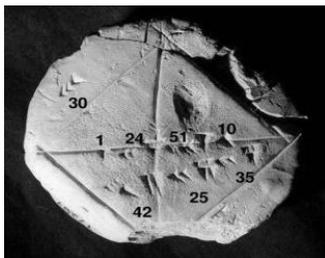
En los viajes que realizó Pitágoras por Egipto pudo descubrir, que utilizaban el triángulo rectángulo, para medir y recuperar los linderos de los campos de cultivo ante la crecida del Río Nilo.



Los agrimensores dominaban de manera perfecta los triángulos, gracias a los anudadores, personas que hacían nudos a las cuerdas de igual distancia, donde por medio de los nudos podían medir los linderos. Los egipcios ya tenían noción y utilización del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, que ellos lo llamaban como el Triángulo egipcio, que vendría siendo un triángulo rectángulo y para trazar una línea perpendicular, utilizaban la escuadra.

El viaje que también realizó por Babilonia, pudo darse cuenta que los babilonios ya tenían bases aritméticas a partir de su propia escritura con 1000 años antes que Pitágoras, esta escritura se basaba en símbolos cuneiformes escritos en tablillas de arcilla cocidas por el sol, donde los arqueólogos han encontrado y recuperado miles de estas tablillas. Las más conocidas son la tablilla Yale y la tablilla PLIMTON. Pero estas matemáticas no habían sido demostradas ni comprobadas y es cuando Pitágoras en medio de su investigación matemática, realiza su demostración.

**Tablilla Yale**



**Tablilla PLIMTON**



De los viajes que Pitágoras realizó, responda en su cuaderno:



¿Quiénes eran los agrimensores?

¿Quiénes eran los anudadores y que actividades realizaban?

¿Cuáles eran las medidas del triángulo egipcio y que figura geométrica formaba?

¿Cuáles son las tablillas más importantes para los babilonios?

## LA ESCUELA PITAGÓRICA



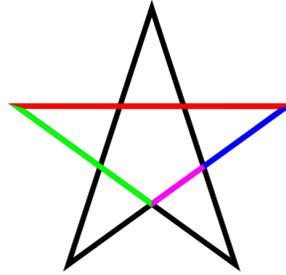
**Pitagóricos** celebrando el amanecer. Óleo de Fyodor Bronnikov

**Pitágoras** fundó una escuela filosófica y religiosa en Crotona, al sur de Italia, que tuvo numerosos seguidores. Se llamaban a sí mismos **matemáticos** o los llamaban **los Pitagóricos**. Vivían unidos a esta sociedad de forma permanente, no tenían posiciones personales (casas, carros, entre otros) y eran vegetarianos. Hasta 300 seguidores llegaron a conformar este grupo selecto, que oía las **enseñanzas de Pitágoras** directamente y debían tener estrictas reglas de conducta.

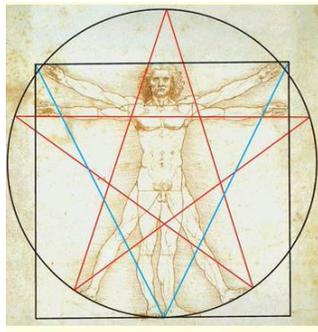
### Las enseñanzas de Pitágoras fueron:

- Que su nivel más profundo, la realidad es de naturaleza matemática (números y música).
- Que la filosofía (la búsqueda de la sabiduría) puede usarse para purificar el espíritu.
- Que el alma puede elevarse para unirse con lo divino.
- Que los miembros de la hermandad deben guardar lealtad y preservar el conocimiento.

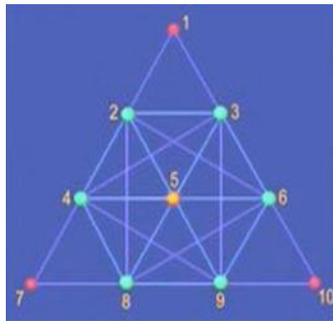
## LA ESTRELLA PITAGÓRICA



El pentáculo, también llamado pentagrama, pentalfa y pentángulo, fue adoptado como **santo y seña** por la escuela Pitagórica para poder entrar a sus reuniones. Hay muchas razones por las cuales los pitagóricos adoptaron esta estrella por su simbología, es el templo de la armonía, la sinfonía del número, el anagrama humano y el símbolo de la feminidad.



Esta obra es dibujada por Leonardo Da Vinci, titulada el cuerpo humano, hace relación con el anagrama humano o le estrella adoptada por los Pitagóricos y **la sagrada Tetraktys Pitagórica**.



Esta figura triangular muestra como el número Diez es la suma de los cuatro primeros números  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  y  $1 + 0 = 1$  es el cuarto número triangular.

La Tetrakty es la representación del número Diez, que tiene el sentido de la totalidad, la unidad el ciclo de los nueve primeros números. Para los pitagóricos se trata de **la santa Tetraktys**, el más sagrado de todos los números por simbolizar a la creación universal, fuente y raíz de la eterna naturaleza donde todo vuelve a ella. Esta figura la tenían por sagrada. Por eso hacían el juramento **como Pitagóricos**, hecho en nombre de Pitágoras, pero sin nombrarlo, por haber transmitido el Tetrakty que es el número perfecto y la clave de la doctrina **Pitagórica**.

## PITÁGORAS Y LAS MATEMÁTICAS

Se dice que, las principales ideas y descubrimientos han sido atribuidos a Pitágoras, por ser el fundador de la hermandad Pitagórica, donde también, ha sido trabajo de sus discípulos, pero no se sabe con exactitud cuales fueron de Pitágoras y cuáles de sus discípulos.

Estos son algunos de sus aportes a las matemáticas:

### ➤ La invención de tabla de multiplicar:

Tabla Pitagórica

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Alumno:.....  
Escuela:.....



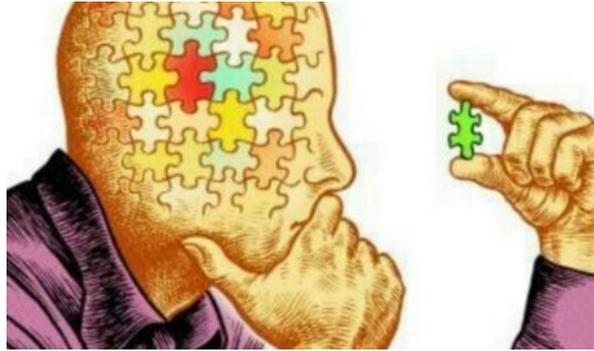
### ➤ Los cinco solidos regulares:



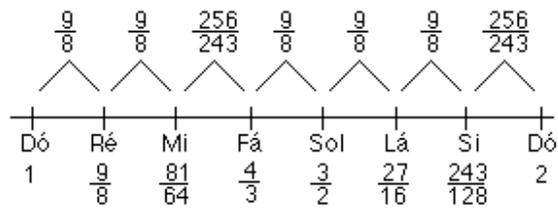
### ➤ La existencia de los números irracionales:



- **Demostración matemática mediante el razonamiento deductivo.**



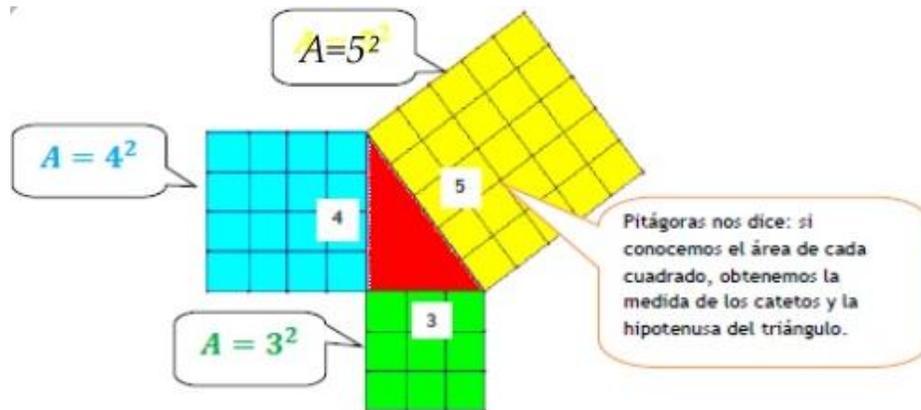
- **Los intervalos entre notas musicales:**



- **Afirmo que “LOS NÚMEROS GOBIERNAN EL MUNDO”**  
Transformo el estudio de la geometría:



- El conocido **TEOREMA DE PITÁGORAS** es la demostración que lleva su nombre:



Pongamos  
en práctica



## TRABAJEMOS EN GRUPO

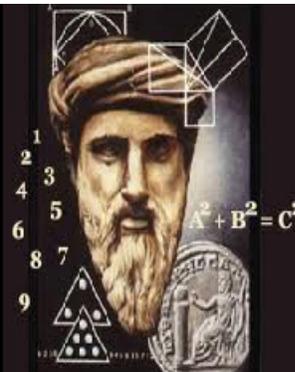
Para los pitagóricos los poliedros regulares tenían un significado místico, donde cada uno de los poliedros representa los cinco elementos, tierra (café), fuego (rojo), aire (azul cielo), agua (azul) y universo (gris oscuro lleno de estrellas).

Realiza cada una de estas figuras en un octavo de cartulina, copia la plantilla, pínталas con tempera dependiendo el elemento a que corresponda y comparte con tus compañeros la mística de los pitagóricos.

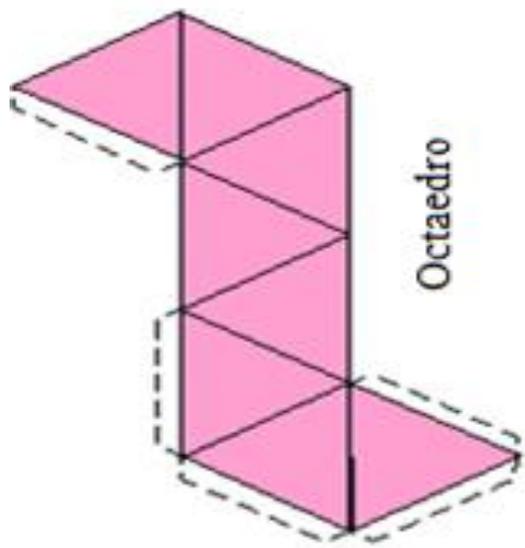
"...Los números son los elementos de todas las cosas siendo el cielo armonía y número..."

"...el todo y las cosas todas se definen en el tres, fin, medio y principio, número de todo que su número es la triada (tetractys)..."

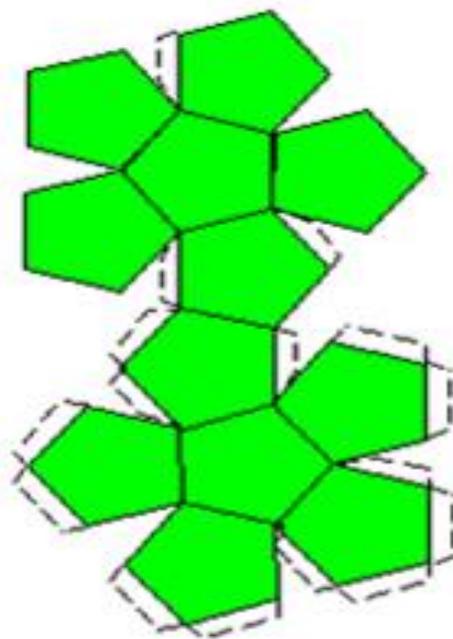
Pitágoras



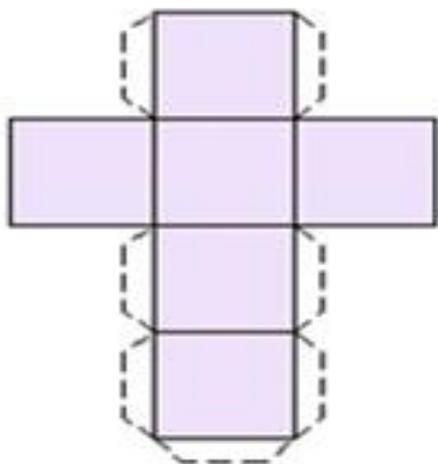
Para finalizar esta Guía es necesario ver el siguiente video: Donald en el país de las matemáticas (película completa) duración 27:27 en la siguiente dirección - <https://www.youtube.com/watch?v=zegO2qlaKlo>



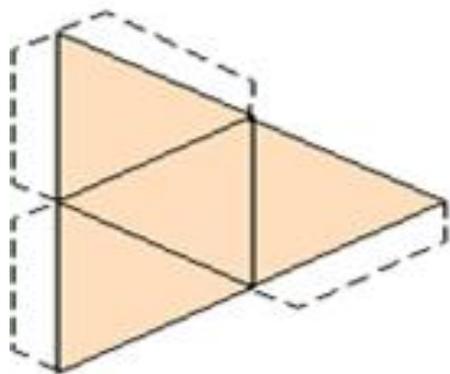
Octaedro



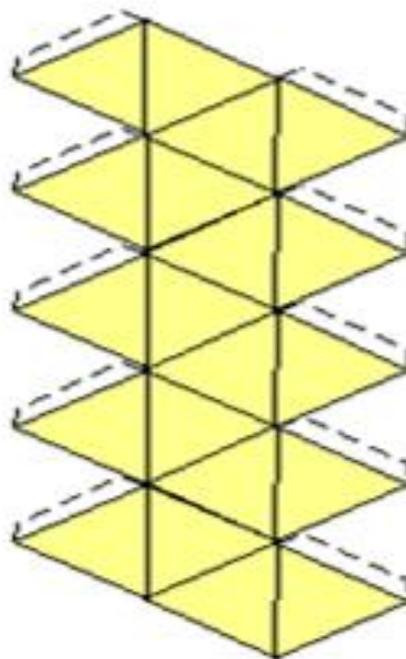
Dodecaedro



Hexaedro o cubo



Tetraedro



Icosaedro

# FACULTAD DE EDUCACIÓN

## LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

### GUÍA 2 EL TRIANGULO DE PITÁGORAS

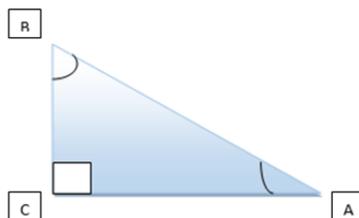
Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

#### Objetivos:

- Describir los elementos que componen el triángulo rectángulo.
- Identificar las propiedades del triángulo rectángulo.
- Descubrir los triángulos rectángulos dentro de otras figuras geométricas.



### ¿QUE ES UN TRIANGULO RECTÁNGULO?



Es una de las figuras geométricas más conocidas, que, dentro de su clasificación según sus ángulos, tiene como característica básica, tener un ángulo recto de  $90^\circ$  y dos ángulos agudos menores de  $90^\circ$ .



### PROPIEDADES

El triángulo rectángulo tiene que cumplir las siguientes propiedades:

- Tiene dos ángulos agudos.
- La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
- La longitud del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de la longitud de los cuadrados de los catetos.
- Para efectos de área, un cateto cualquiera se puede considerar como base y el otro cateto como altura.
- La mediana que parte del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.
- La altura que parte del vértice del ángulo recto, coincide con un cateto, con tal de considerar al otro cateto como una base.

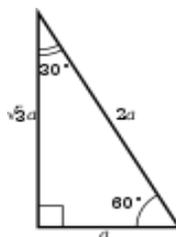
## ¿QUÉ TIPOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS EXISTEN?

Hay tres tipos de triángulos rectángulos:

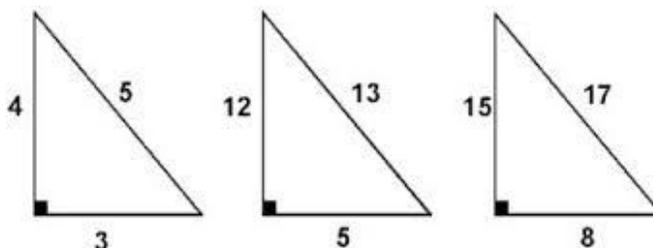
- ✓ **Triángulo rectángulo isósceles:** Los dos catetos deben tener la misma longitud, los ángulos internos deben medir,  $45^\circ$  dos ángulos agudos y  $90^\circ$  un ángulo recto. En este tipo de triángulos la hipotenusa suele medir lo mismo que los catetos.



- ✓ **Triángulo rectángulo escaleno:** Los tres lados y los tres ángulos tiene diferente medida, uno de sus ángulos debe ser recto y medir  $90^\circ$  y los otros dos ángulos deben de ser agudos menores de  $90^\circ$ .



- ✓ **Triángulo rectángulo de lados consecutivos:** las medidas de sus lados tienen 3, 4 y 5 unidades de longitud, como se muestra en la imagen.



Estos son los tipos de triángulos rectángulos que se pueden trabajar en el teorema de Pitágoras y que también se denominan como ternas pitagóricas los Triángulo rectángulo de lados consecutivos.

Pongamos  
en práctica



## ¡RESUMAMOS!

Según lo visto anteriormente, sobre el triángulo rectángulo, realicemos el siguiente cuestionario, responda con sus propias palabras.

a) ¿Qué es un triángulo rectángulo?

b) ¿En qué clasificación de los triángulos se encuentra?

c) Enuncia con sus palabras al menos 5 propiedades del triángulo rectángulo.

d) ¿Cuáles son los tipos de triángulos rectángulos que existen? Dibújalos.

- e) En las siguientes figuras geométricas de dos dimensiones, y tres dimensiones, descompongamos las figuras, buscando triángulos rectángulos, teniendo en cuenta su definición y sus propiedades.

### FIGURAS GEOMÉTRICAS DE DOS DIMENSIONES



**Cuadrado**



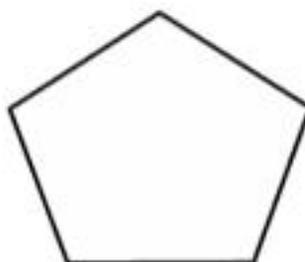
**Rectángulo**



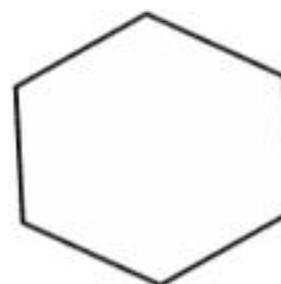
**Trapezio**



**Triángulo**



**Pentágono**



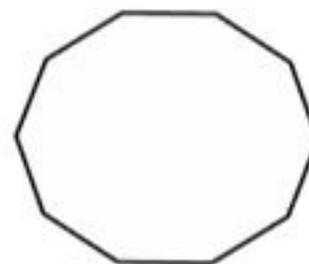
**Hexágono**



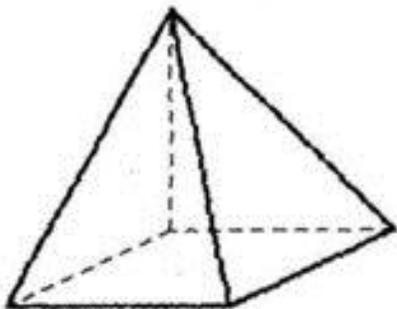
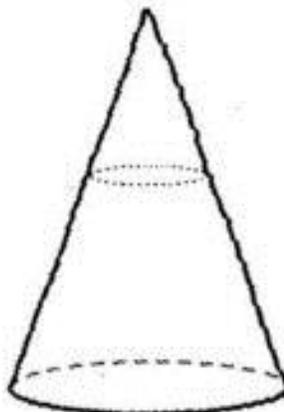
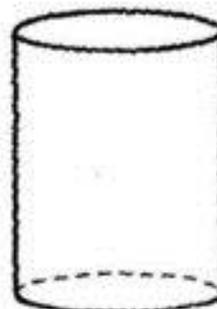
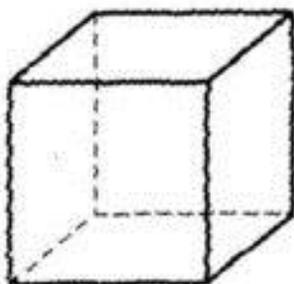
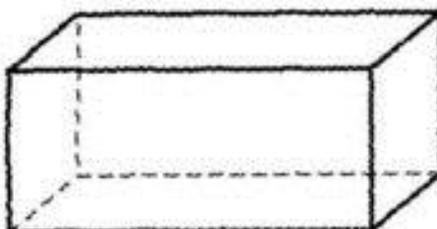
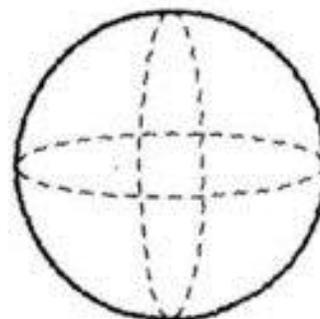
**heptágono**



**Octógono**



**Decágono**

**FIGURAS GEOMÉTRICAS DE TRES DIMENSIONES****PIRAMIDE****CONO****CILINDRO****CUBO****PARALELEPIPEDO RECTANGULAR****ESFERA**

Hasta el momento hemos visto las características del triángulo rectángulo, donde nos ayudara a poder identificarlo fácilmente, en cualquier figura geométrica.



FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
GUÍA 3 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

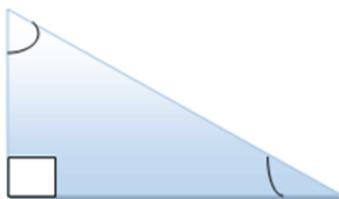
Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

**Objetivos:**

- Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras.
- Resolver problemas alrededor del Teorema de Pitágoras.

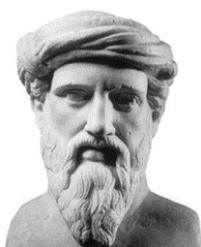
**¡RECORDEMOS!**

Completa la siguiente definición a partir de la figura geométrica:



Un triángulo rectángulo, como ya sabemos está formado por un \_\_\_\_\_ que mide \_\_\_\_\_ y dos \_\_\_\_\_ que miden \_\_\_\_\_.

**EL TEOREMA DE PITÁGORAS**



La historia nos cuenta que el Teorema de Pitágoras es una teoría que fue demostrada a mediados del siglo VI, por el matemático griego Pitágoras. Esta teoría, llamada Teorema lleva su nombre, porque Pitágoras pudo probar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los catetos es igual al área cuadrada que está sobre el lado de su hipotenusa y que siempre se puede demostrar para todos los triángulos rectángulos sin ninguna excepción.

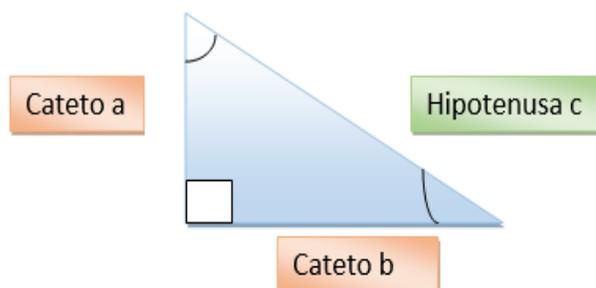


## ¿Qué es un cateto?

Los catetos son lados del triángulo, y forman el ángulo recto.

## ¿Qué es una hipotenusa?

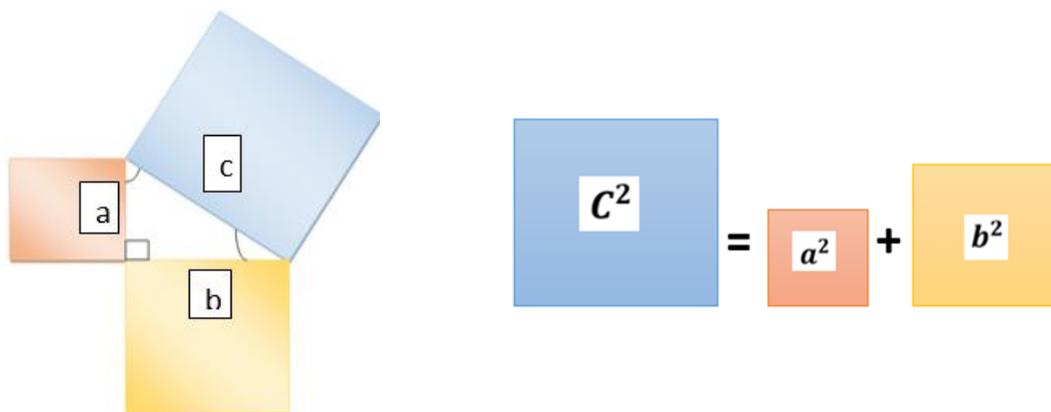
La hipotenusa es el lado más largo del triángulo y opuesto al ángulo recto.



A partir de estas dos definiciones podemos entender lo que Pitágoras nos decía.

## Pitágoras entonces decía que:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa (**c**) es **igual** a la **suma** de los cuadrados de las medidas de los catetos (**a** y **b**).

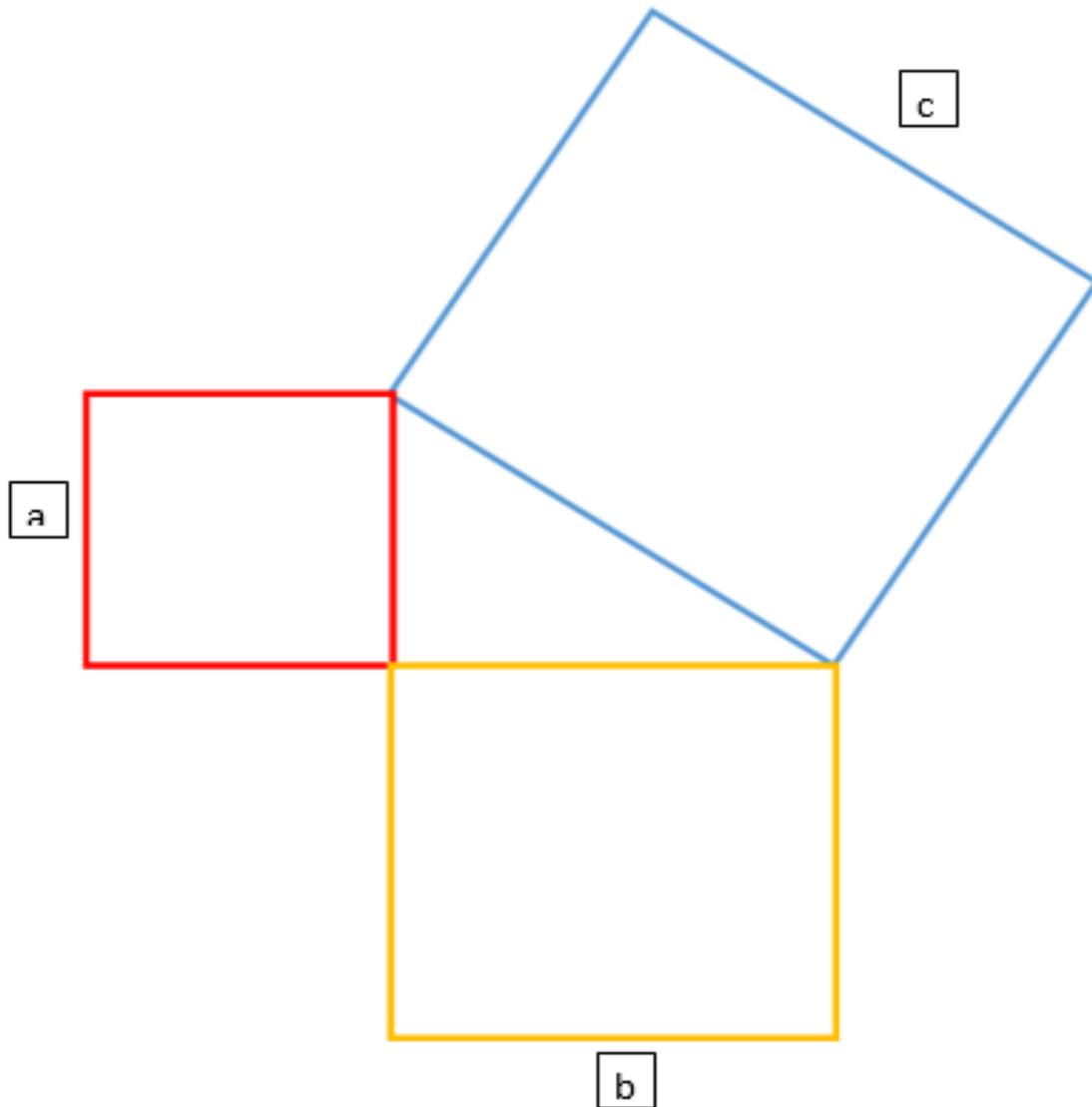


Y esto lo podemos expresar, matemáticamente, por medio de una ecuación de la siguiente manera.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## DEMOSTREMOS

Para la siguiente demostración del teorema de Pitágoras, vamos a tomar el cuadrado (c) que va ser nuestra hipotenusa, le trazaremos líneas horizontales y verticales de una medida de 5 centímetros por 5 milímetros, después haremos lo mismo con los cuadrados (a y b), de las mismas medidas.



Al momento de haber realizado las líneas como se indicó al inicio, enumere, iniciando con el número 1, los cuadritos de **a** sin dejar espacios vacíos, lo mismo con **b**, pero el primer número de **b**, tiene que ser el consecutivo del último número de **a**, hasta llenar todos los espacios que haya y se hace la misma numeración con el cuadro **c**, comenzando desde el número 1.

La suma del cuadrado que está dentro del cuadrado de **a** más la suma del cuadrado que están dentro de **b** va a ser igual a la cantidad de cuadritos que están dentro de cuadrado de **C**. De esta manera podremos demostrar que todo lo que está en **a + b** es igual a lo que está en **C**. Es así, como podemos conocer una forma de demostrar, lo que Pitágoras nos planteó. **(Esta demostración la desarrollo un matemático llamado Euclides, que también era de Grecia).**

Hasta el momento, el teorema de Pitágoras es el que cuenta con un mayor número de demostraciones de maneras diferentes y con métodos muy diversos, que llega a la imaginación del hombre.

**Ver en YouTube: Seis demostraciones del teorema de Pitágoras, en el siguiente link.**

<https://youtu.be/ypiq44XPvP8>



## APLICACIÓN DE TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras desde el momento que demostró su teorema, dio a conocer su ecuación matemática, que se ha vuelto muy famosa en todo el mundo.

**Teorema:** En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esta ecuación, es para hallar el valor de la **hipotenusa**.

Vamos a ver algunos ejemplos, de la manera adecuada de utilizar esta ecuación, siga sus pasos.

### Ejemplo:

Calcule el área del cuadrado construido sobre la **hipotenusa** del siguiente triángulo rectángulo.

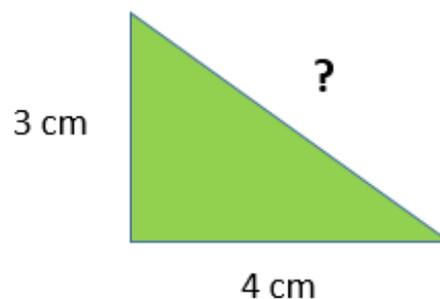
Paso 1: Reemplazar valores.  $c^2 = a^2 + b^2$

Paso 2: Realice su operación.  $c^2 = 3^2 + 4^2$

Paso 3: Despeje a C.  $c^2 = 25$

Paso 4: Realice la raíz.  $c = \sqrt{25}$

Paso 5: Resultado.  $c = 5$



¿Qué es un teorema?  
Es una proposición,  
cuya verdad, tiene que  
ser demostrada.

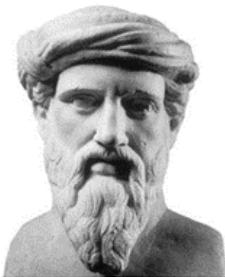


**Respuesta:** El valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo es de 5 cm.

**Esta era la manera como Pitágoras buscaba sus incógnitas en la hipotenusa.**

## ¡Fácil verdad!

En el teorema, pueden surgir otro tipo de incógnitas, en alguno de sus catetos, para ello es necesario, utilizar las siguientes ecuaciones. Miremos algunos ejemplos y observen como hallar la incógnita.



### ECUACIONES:

$$\text{Hipotenusa } c^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Cateto } a^2 = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$\text{Cateto } b^2 = \sqrt{c^2 - a^2}$$

### Ejemplo:

Calcule el área del cuadrado construido al lado del **cateto (a)** del siguiente triángulo rectángulo.

Para el desarrollo de este ejemplo vamos a tener la ecuación para encontrar **a**.

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Paso 1: Reemplazar valores.

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Paso 2: Realice su operación.

$$a^2 = 10^2 - 8^2$$

Paso 3: Despeje a.

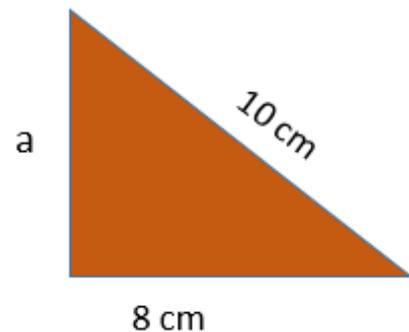
$$a^2 = 164$$

Paso 4: Realice la raíz.

$$a = \sqrt{164}$$

Paso 5: Resultado.

$$a = 12.80$$



**Respuesta:** El valor del **Cateto (a)** del triángulo rectángulo es de **12.80 cm**

**Ejemplo:**

Calcule el área del cuadrado construido al lado del **cateto (b)** del siguiente triángulo rectángulo.

Para el desarrollo de este ejemplo vamos a tener la ecuación para encontrar b.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

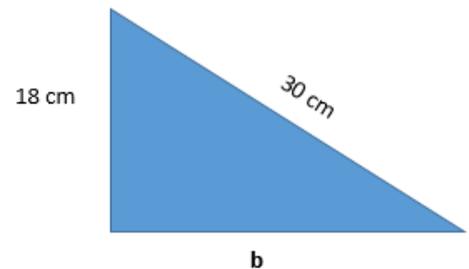
Paso 1: Reemplazar valores.  $b^2 = c^2 - a^2$

Paso 2: Realice su operación.  $b^2 = 30^2 - 18^2$

Paso 3: Despeje a.  $b^2 = 1224$

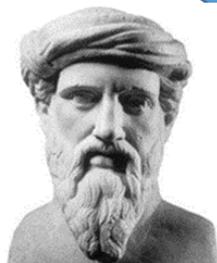
Paso 4: Realice la raíz.  $b = \sqrt{1224}$

Paso 5: Resultado.  $b = 34.98$



**Respuesta:** El valor del **Cateto (b)** del triángulo rectángulo es de **34.98 cm**.

Mi teorema también está dentro de las diferentes figuras geométricas en dos dimensiones. Veamos...



CON LAS TRES ECUACIONES QUE HEMOS UTILIZADO.  
BUSCA LA SOLUCIÓN DE LA INCÓGNITA, PARA LAS SIGUIENTES FIGURAS GEOMÉTRICAS.

ECUACIONES:

$$\text{Hipotenusa } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Cateto } a^2 = c^2 - b^2$$

$$\text{Cateto } b^2 = c^2 - a^2$$

Pongamos  
en práctica

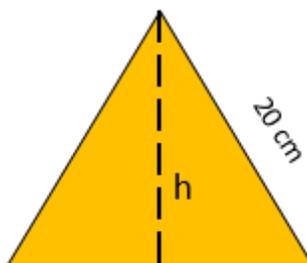


**¡DESARROLLEMOS JUNTOS!**

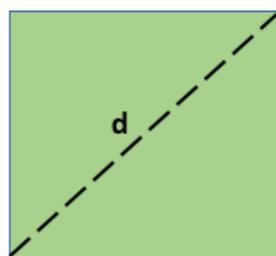
Vamos a traer a nuestro recuerdo, aquellas fórmulas, que se han trabajado para encontrar áreas y perímetros de figuras geométricas en dos dimensiones y las uniremos con el teorema de Pitágoras.

**Pista**, identifique como primera medida el triángulo rectángulo y después desarrolle.

- a. Calcula la altura del triángulo equilátero de 20 cm de lado.

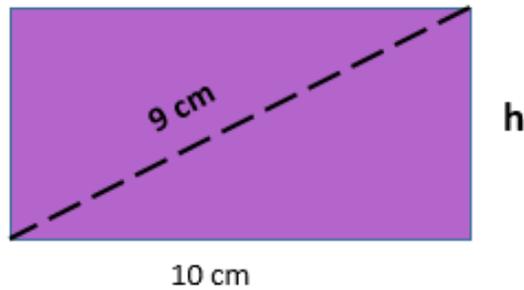


- b. Calcula la diagonal del cuadrado de 15 cm de lado.

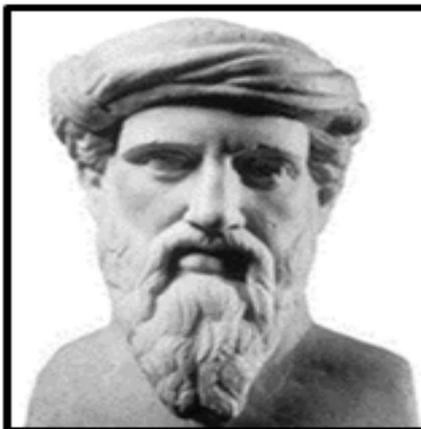
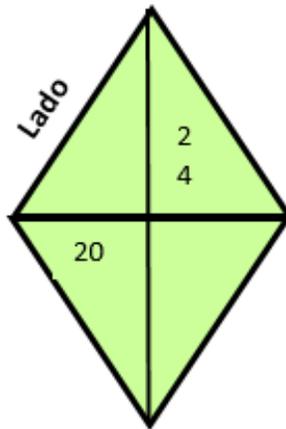


15 cm

- c. Calcula la altura de un rectángulo, cuya diagonal mide 9 cm y la base 10 cm.



- d. Calcula el lado del rombo cuyas diagonales son 24 cm y 20 cm.



"... Lleva a tu vida las matemáticas:  
suma alegrías, resta las penas, deriva  
los problemas, divide las tareas, integra  
tus virtudes y multiplica tus  
amistades..."

Pitágoras

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**  
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**  
**GUÍA 4 SOMOS PITAGÓRICOS**

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

**Objetivos:**

- Identificar números que cumplan la relación métrica del teorema de Pitágoras.
- Desarrollar ternas pitagóricas primitivas.



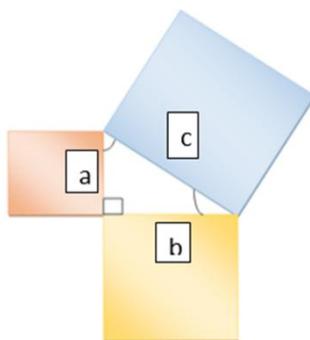
## ¡RECORDEMOS!

Pitágoras, dentro de sus viajes pudo descubrir como las diferentes civilizaciones de Babilonia y Egipto, utilizaban el triángulo rectángulo para construir templos, edificaciones y medir la tierra. De esta manera Pitágoras lo que estableció fue la demostración de forma deductiva, de las áreas que se encontraban en los lados del triángulo rectángulo.

Creando como ecuación principal y estableciendo que:

**En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**

Así como se muestra en las figuras.

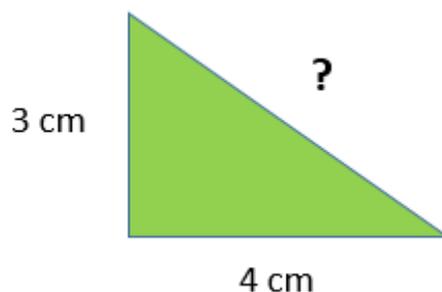


$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



¿Se acuerdan de este ejemplo?



Su resultado fue **5 cm**, ustedes lo encontraron.

Para los egipcios y para los babilonios era muy común encontrar este tipo de triángulos, con esta consecución de números, 3, 4 y 5 y se pueden encontrar muchos más.

A esta consecución de números le vamos a dar el nombre de **Ternas Pitagóricas**. Así pues, las letras **a**, **b**, **c** forman una terna pitagórica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Una Terna Pitagórica, la forman tres números naturales, que son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y, por lo tanto, cumplen el Teorema de Pitágoras

**Ejemplo:**

Los números 3, 4 y 5, miremos si son una Terna Pitagórica.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

Podemos darnos cuenta que la suma de los catetos es igual a la hipotenusa, dando cumplimiento al Teoremas de Pitágoras.



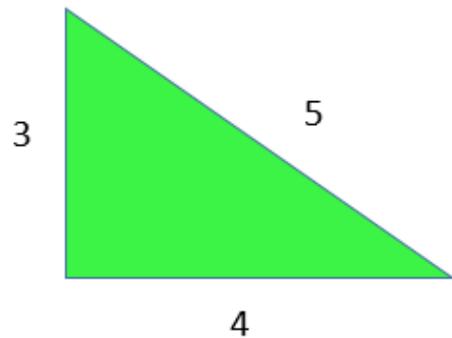
Pitágoras, utilizaba las siguientes fórmulas para crear ternas. Tomaba un valor diferente de cero y que fuera un número natural.

$$\begin{aligned} \text{Para } n \neq 0, \quad & a = 2n + 1 \\ & b = 2n^2 + 2n \\ & c = 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Observemos como Pitágoras formaba sus propias ternas.

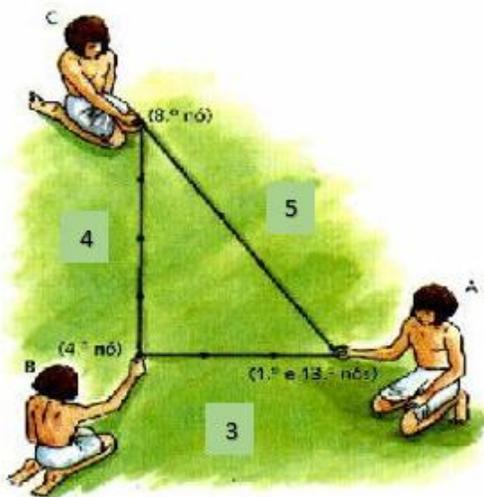
Para  $n = 1$

$$\begin{aligned} a &= 2(1) + 1 \\ a &= 3 \\ b &= 2(1)^2 + 2(1) \\ b &= 4 \\ c &= 2(1)^2 + 2(1) + 1 \\ c &= 5 \end{aligned}$$



¿Estos números que les recuerda? 3, 4, y 5.

¿No les recuerda a los agrimensores, aquellos egipcios que dominaban perfectamente los triángulos?



Los egipcios ya tenían noción y utilización del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, donde ellos lo llamaban el Triángulo egipcio.

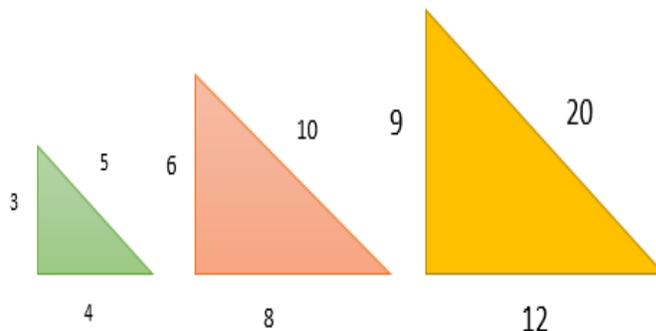
Por lo tanto, los egipcios sabían de las ternas, pero Pitágoras, demostró de manera deductiva y matemáticamente las fórmulas para construir ternas que también llevarían su nombre, **Ternas Pitágoras**.

Algo curioso y es que, a partir de esta terna Pitagórica primitiva (3, 4, 5), podremos encontrar más ternas, creando también infinitos triángulos rectángulos. ¡Miremos...!

Tenemos el triángulo rectángulo 3, 4 y 5, lo que tenemos que hacer es utilizar números naturales llamados  $n$ , mayores a 1 en la siguiente ecuación.

$$3n + 4n = 5n \quad \text{donde } n > 1.$$

Ejemplo:  $n = 1$  (3, 4, 5)  
 $n = 2$  (6, 8, 10)  
 $n = 3$  (9, 12, 20)



*etc ... a partir de esta ecuacion nacen infinitas ternas con infinitos triangulos.*

¿Qué opinas? ¡Fácil verdad!

Las Ternas Pitagóricas primitivas son aquellas que salen a partir de las ecuaciones que planteo Pitágoras. Veamos como buscar Ternas Pitagóricas primitivas.

Existen también las ternas pitagóricas llamadas las primitivas.

Tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Para } n \neq 0, \quad a &= 2n + 1 \\ b &= 2n^2 + 2n \\ c &= 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Ya conocemos la terna primitiva (3, 4, 5) esta nace  $n = 1$ .

¡busquemos más!



## TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS

**Ejemplo:**

**Paso 1:** Buscamos la terna pitagórica primitiva, donde esta **n** lo reemplazamos por **2**.

$$n = 2 \quad \text{Paso 1:} \quad a = 2(2) + 1$$

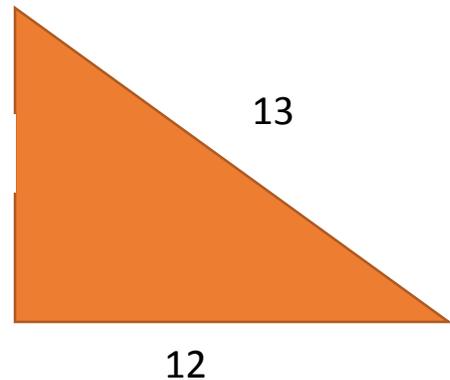
$$a = 5$$

$$\text{Paso 2:} \quad b = 2(2)^2 + 2(2) \quad 5$$

$$b = 12$$

$$\text{Paso 3:} \quad c = 2(2)^2 + 2(2) + 1$$

$$c = 13$$



**Paso 2:** Comprobamos, si al elevar al cuadrado **a** y **b**, al sumar ambos catetos, su resultado será **c** la hipotenusa. Es la manera de comprobar.

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$25 + 144 = 169$$

$$169 = 169$$

**(5, 12, 13)**

**Ejemplo:**

**Paso 1:** Buscamos la terna pitagórica primitiva, donde esta **n** lo reemplazamos por **3**.

$$n = 3 \quad \text{Paso 1:} \quad a = 2(3) + 1$$

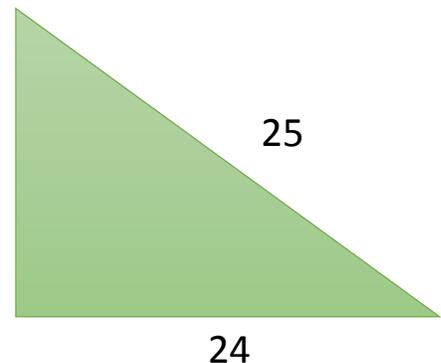
$$a = 7$$

$$\text{Paso 2:} \quad b = 2(3)^2 + 2(3) \quad 7$$

$$b = 24$$

$$\text{Paso 3:} \quad c = 2(3)^2 + 2(3) + 1$$

$$c = 25$$



**Paso 2:** Comprobamos.

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

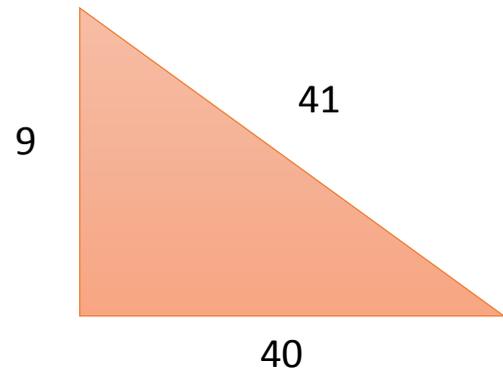
$$49 + 576 = 625$$

$$625 = 625$$

**(7, 24, 25)**

**Ejemplo:****Paso 1:** Buscamos la terna pitagórica primitiva.

$$\begin{aligned}
 n = 4 \quad a &= 2(4) + 1 \\
 a &= 9 \\
 b &= 2(4)^2 + 2(4) \\
 b &= 40 \\
 c &= 2(4)^2 + 2(4) + 1 \\
 c &= 41
 \end{aligned}$$

**(9, 40, 41)****Paso 2:** Comprobamos.

$$\begin{aligned}
 9^2 + 40^2 &= 41^2 \\
 81 + 1600 &= 1681 \\
 1681 &= 1681
 \end{aligned}$$

**Encuentre las siguientes Terna Pitagóricas utilizando sus ecuaciones y sus pasos:**

$$n = 5$$

$$n = 6$$

## PROPIEDADES DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS:

- Tienen tres números pares.
- Tiene dos números impares y uno impar.
- No puede tener todos sus números impares.
- No puede tener dos pares y un impar.
- El cuadrado de un impar es impar y el de un par es par.
- La suma de dos pares es par y de impar y par es impar.

Por lo tanto, si **a** es impar y **b** es par entonces **c** tiene que ser impar.

Y si **a** y **b** son impares, **c** es par.

Pongamos  
en práctica



### ¡DESARROLLEMOS JUNTOS!

Para terminar esta guía, vamos a recordar que son la ternas Pitagóricas primitivas y cuales son aquellas ternas que pueden salir de las primitivas.

Las ternas a buscar son:

$$n = 7$$

$$n = 8$$

$$n = 9$$

$$n = 10$$

$$n = 11$$

Observe de los ejemplos  
anteriores.

Pitágoras, necesita de su ayuda, se encuentra trabajando con otros pitagóricos creando las escalas musicales, solicita que le ayudes a encontrar 5 ternas pitagóricas primitivas y comprobar si cumplen con su teorema.

Vamos muchos éxitos...



**$n = 7$**

**$n = 8$**

**$n = 9$**

**$n = 10$**

## ¡EVALUEMOS!

### GUÍA 5 PITÁGORAS ESTA CON NOSOTROS

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

#### Objetivos:

- Aplicar el teorema de Pitágoras a la solución de triángulos rectángulos.
- Resolver problemas alrededor del Teorema de Pitágoras.

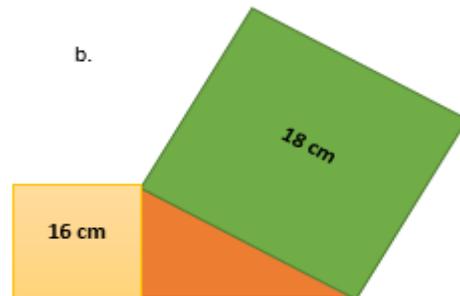
**Es importante para el desarrollo de esta guía, tener claro los conceptos del teorema de Pitágoras que vimos en cada guía.**

- 1. Complete y construye el cuadrado que falta de cada una de las figuras, indicando su área, utilizando el teorema de Pitágoras y sus ecuaciones.**

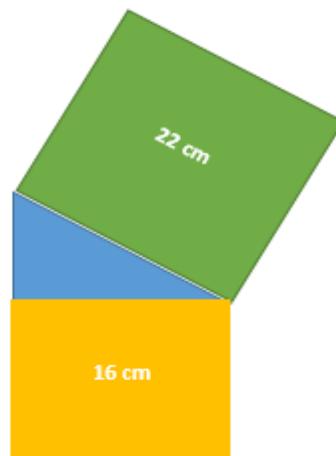
a.



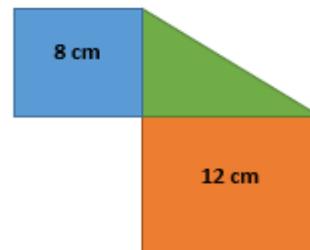
b.



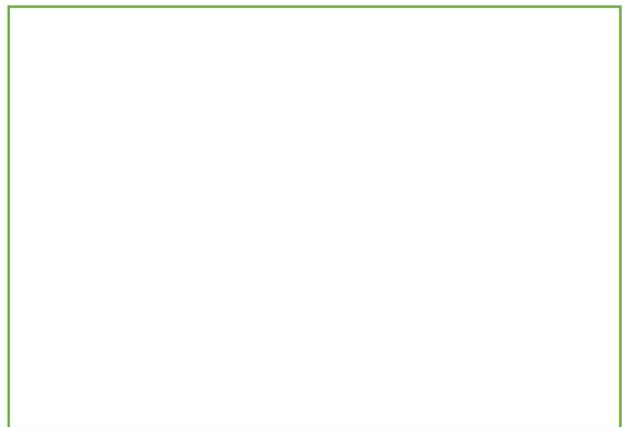
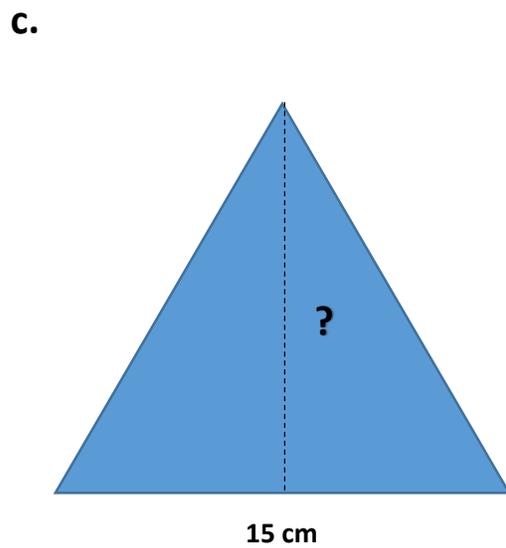
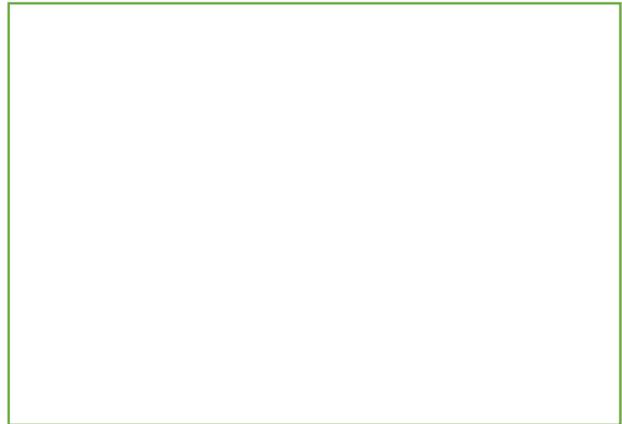
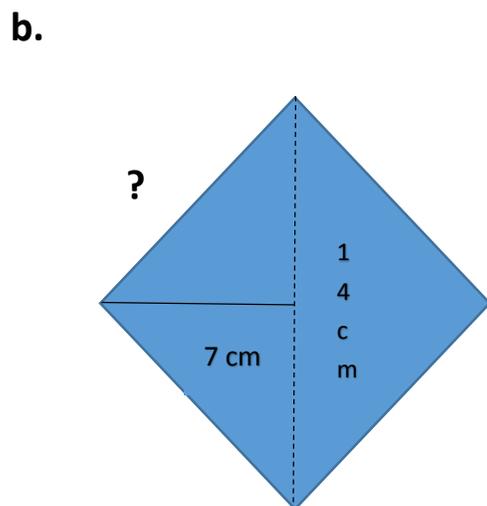
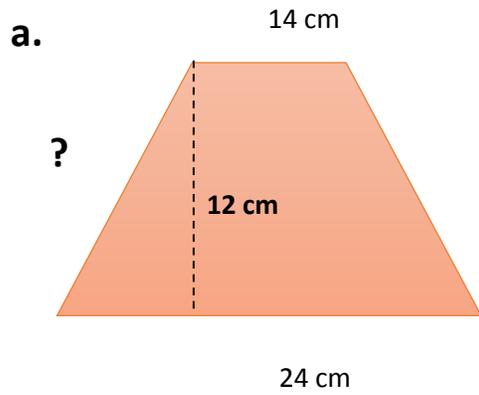
b.



c.

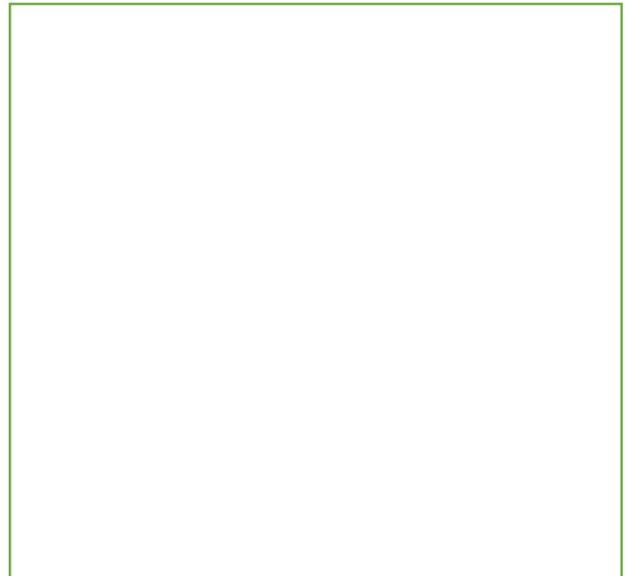
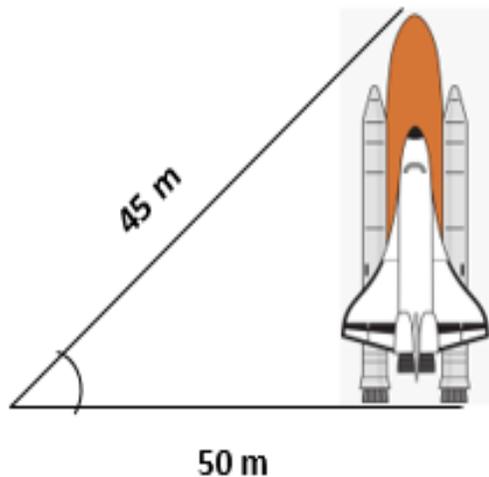


2. Halla la incógnita de la figura figuras.

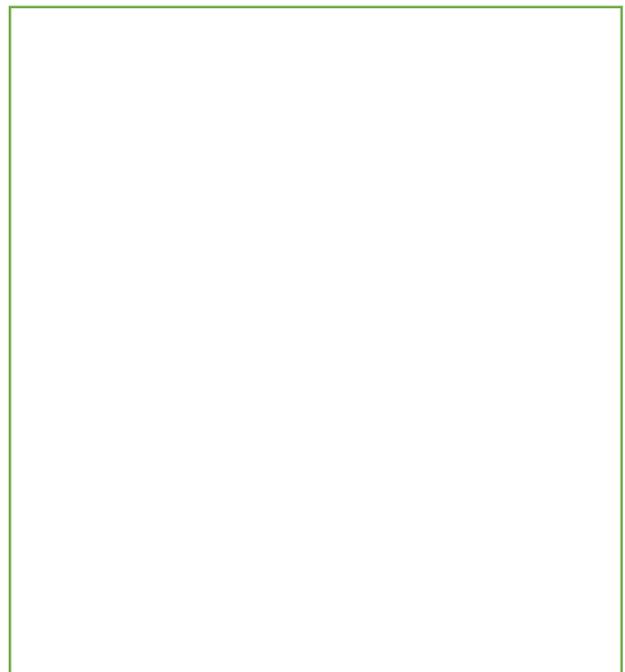


2. Encuentre las incógnitas de las siguientes figuras.

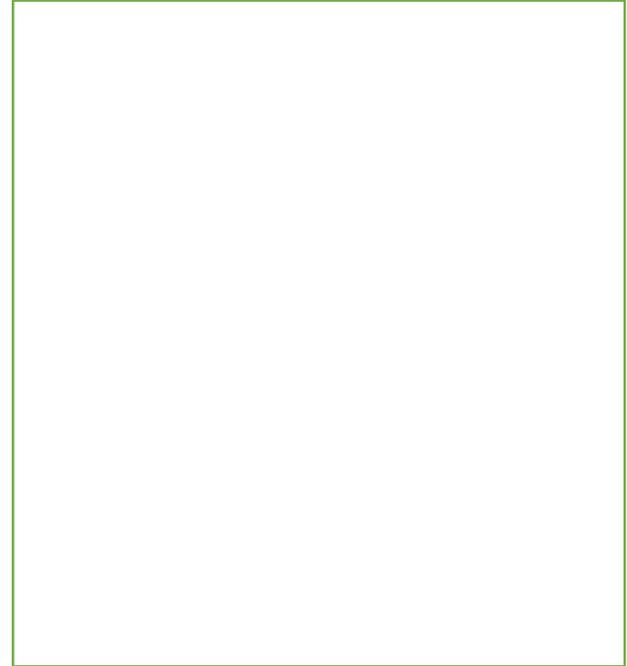
a. Encuentre la altura del cohete.



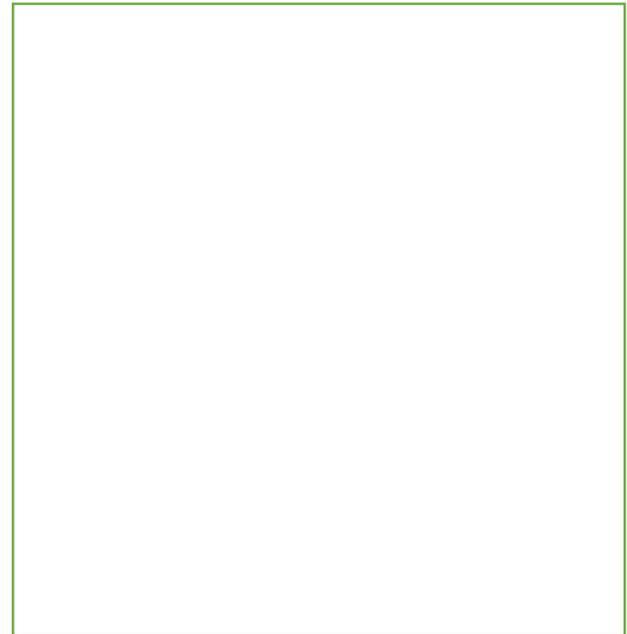
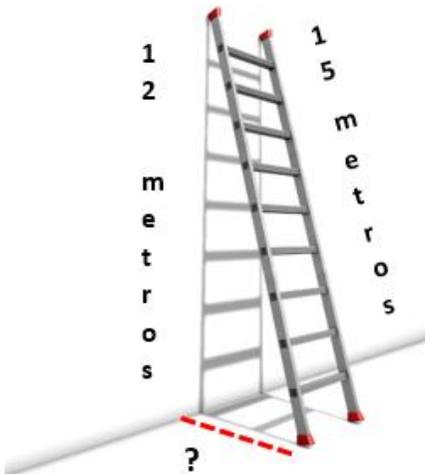
b. La torre de pisa, es el campanario de la catedral de pisa en Italia, fue construida para estar vertical, pero por la inestabilidad del piso se inclinó unos grados. Tiene una altura de 60 metro y una base de 5 metros. ¿Cuánto mide la pared inclinada?



- c. Si nos detenemos en el punto naranja a 100 metros de distancia de la torre Colpatría en la ciudad de Bogotá, nuestra mirada genera un ángulo, el cual nos da como medida de 210 metros. ¿Cuál es la altura que tiene la torre Colpatría?



- d. Hay una escalera de 15 metros apoyada en una pared, a una altura de 12 metros. ¿Qué distancia se encuentra separada la escalera de la pared?



3. Ternas pitagóricas, ¿se acuerdan de ellas? están relacionadas con las siguientes ecuaciones que Pitágoras realizó para encontrarlas.

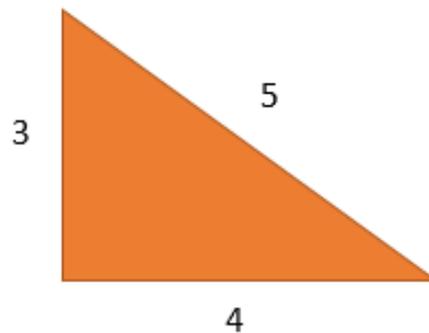
$$\begin{aligned} \text{Para } n \neq 0, \quad a &= 2n + 1 \\ b &= 2n^2 + 2n \\ c &= 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Vamos, veamos cómo nos fue con el tema anterior.

Para encontrar ternas es muy sencillo sigamos los siguientes pasos:

**Paso 1:** Buscamos la terna pitagórica primitiva.

$$\begin{aligned} n = 1 \quad a &= 2(1) + 1 \\ a &= 3 \\ b &= 2(1)^2 + 2(1) \\ b &= 4 \\ c &= 2(1)^2 + 2(1) + 1 \\ c &= 5 \end{aligned}$$



**(3,4,5)**

**Paso 2:** Comprobamos.

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 9 + 16 &= 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

Para este punto vamos a encontrar las ternas pitagóricas, con su respectiva comprobación, paso 1 y paso 2.

$$n = 12$$

$$n = 13$$

$$n = 14$$

$$n = 15$$

**n = 12**

**n = 13**

**n = 14**

**n = 15**

