DISEÑO DE ACTIVIDADES CON EL USO DE LA VISUALIZACIÓN PARA APOYAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN CICLO IV

JUAN SEBASTIAN GUERRERO

Universidad Antonio Nariño
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
Año 2019

DISEÑO DE ACTIVIDADES CON EL USO DE LA VISUALIZACIÓN PARA APOYAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN CICLO IV

JUAN SEBASTIAN GUERRERO

Trabajo de grado que se presenta como requisito parcial para obtener

El título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Dra. Grace Judith Vesga Bravo

Modalidad: Diseño de material didáctico

Universidad Antonio Nariño
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
Año 2019

RESUMEN

El presente trabajo de grado tiene como finalidad el diseño de material didáctico para la enseñanza de temas matemáticos por medio de la visualización. Se ha hecho un estudio de antecedentes donde el papel protagónico lo asume el desarrollo de la visualización en la enseñanza de temas matemáticos. El marco teórico abarca estudios que resaltan la importancia de la visualización al momento de enseñar matemáticas, ya que es por medio de los sentidos que el ser humano capta la realidad que le rodea. El método de enseñanza, se basa en la construcción de conocimiento por parte del estudiante, donde el docente opera como guía del proceso. El material didáctico desarrollado, pretende fortalecer la adquisición de conceptos matemáticos, facilitando la comprensión y creando una imagen visual del tema, que resulta fácil de recordar al momento de aplicarlo en la construcción de nuevos conocimientos y en la solución ejercicio de aplicación.

Palabras claves: Visualización, Contextualización, Constructivismo, Teorema De Pitágoras, Sistemas De Ecuaciones, Expresiones Algebraicas, Propiedades De Los Números Reales, Potenciación, Fraccionarios.

Tabla de Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado consistió en el diseño de material para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la visualización. Partiendo de las experiencias vividas al realizar la práctica pedagógica y como docente del área de matemáticas en diferentes instituciones educativas, nace la inquietud de indagar la problemática del aprendizaje matemático de los estudiantes de ciclo IV.

El autor de este trabajo ha podido observar falta de motivación hacia las matemáticas, porque muchas veces lo que se propone a los estudiantes son situaciones mecánicas y rutinarias. Crear e implementar material didáctico que fomente el aprendizaje de las matemáticas desde lo visual, sirve para darle a los conceptos de las matemáticas una representación visual o física que facilite la comprensión de los temas, para que los estudiantes puedan darle una aplicabilidad cotidiana e incluso lúdica a las funciones y ecuaciones aritméticas que se ven en clase.

Para la elaboración de los antecedentes se tomaron como base trabajos investigativos de educadores, los cuales han sido realizados con el fin de profundizar en el tema del desarrollo del aprendizaje matemático desde lo visual, mencionando sus conceptos básicos, experiencias e ideas principales. De otra parte, en documentos curriculares colombianos emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como los estándares curriculares de matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), se señala que un estudiante de ciclo IV debe estar en la facultad de modelar cualquier situación que se le proponga realizando los procesos matemáticos y contextualizando en la vida real, es decir, se contempla esto como una competencia básica.

Por lo anterior, esta propuesta busca aportar material que puede ser usado en grado ciclo IV, con base en la visualización para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Se busca que los estudiantes se interesen por las actividades propuestas y se fomente el pensamiento crítico.

En el primer capítulo se describe la manera como se identificó y se llegó a la solución propuesta desde el proceso de la práctica pedagógica. En el segundo se presentan los referentes teóricos considerados para el desarrollo del material: la visualización, y los referentes curriculares. En el tercer capítulo se describe la manera en que fue diseñado y validado el material. Se presentan conclusiones y recomendaciones, así como los referentes teóricos considerados.

CAPÍTULO 1: IDENTIFICACIÓN Y EXPLORACIÓN

En este capítulo se describe una de las dificultades observadas durante el desarrollo de la práctica y que condujo a pensar en desarrollar el material propuesto. Para esto se presentan algunos antecedentes sobre el tema considerado.

1.1 Identificación de la necesidad

El autor de este trabajo realizó la práctica docente en el Instituto Femenino Mercedes Nariño durante la jornada nocturna. La Institución se encuentra ubicada en la localidad Antonio Nariño en el barrio Restrepo de Bogotá, en la Av. primera de mayo con carrera 12. Es un colegio femenino donde la edad de las estudiantes con las que se trabajó estaba entre los 18 y 60 años aproximadamente, pertenecientes mayoritariamente a estratos dos y tres. La modalidad de estudio es bachillerato semestralizado, en la jornada nocturna y los cursos se manejan desde noveno hasta once. Se desarrollaron actividades con los siguientes grupos: 301, que corresponde a noveno, 402, que corresponde a décimo y 501, 502 que corresponden a once.

Las estudiantes cursan su bachillerato a manera de validación en jornada nocturna. Se evidenció que las estudiantes presentaban dificultad en conceptos básicos y que esto dificultaba el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los temas establecidos por la institución.

Durante las clases, el docente titular expone el tema y propone la realización de ejercicios mientras lleva a cabo el respectivo acompañamiento a los grupos. Al conversar con algunas de las estudiantes, manifestaron que a veces se les dificultaba las matemáticas por factores que influyeron de manera externa al contenido de la misma, entre ellos, por la figura autoritaria y malgeniada de docentes anteriores, que no se les tenía en cuenta su participación. Destacaron que los ejemplos gráficos dados por el docente titular facilitaban la comprensión y aplicación de los temas.

Con base en estas dificultades observadas y la libertad dada por el docente titular para plantear libremente la clase, el autor de este trabajo, con la orientación del asesor, planteó varias actividades con uso de la visualización para crear una visión amigable de los temas matemáticos, superando el prejuicio de que son temas difíciles, explicados de manera monótona por un docente rígido y autoritario. Al usarla, se evidenció una aceptación positiva de las estudiantes, y una forma de superar los prejuicios y entender la utilidad y facilidad de aplicación en los conceptos matemáticos enseñados visualmente. Es importante agregar, que el autor de este trabajo no tenía experiencia docente previa y nunca había realizado ese tipo de actividades, por lo cual, por lo cual fue el primero en aprender y darse cuenta que diferentes temas matemáticos pueden presentarse de formas variadas, teniendo en cuenta el contexto en particular.

La primera clase se realizó sobre sistemas de ecuaciones lineales con el uso de emoticones. Específicamente se propuso a las estudiantes resolver:

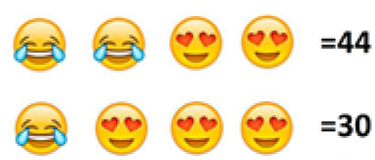


Figura 1. Imagen tomada de planeador 1, 2018-1

Es decir, que la actividad consistía en encontrar el valor que debía tener cada emoticón para que se cumpliera el sistema de ecuaciones planteadas. Estas imágenes se llevaron impresas en un tamaño grande. Se fueron dando orientaciones, buscando que, con la participación activa de las estudiantes, se pudiera hacer la traducción al lenguaje algebraico al tiempo que se manipulaba el material y se llegará a:

$$\begin{cases} \underline{1}: 2x+2y=44 \\ \underline{2}: x+3y=30 \end{cases}$$

De $\underline{1}$: $2y = 44-2x$

$\boxed{y = \frac{44-2x}{2}}$ Ecuación III

De $\underline{2}$: $3y = 30-x$

$\boxed{y = \frac{30-x}{3}}$ Ecuación IV

$\boxed{\text{Ecuación III}} = \boxed{\text{Ecuación IV}}$

$\frac{44-2x}{2} = \frac{30-x}{3}$

$3(44-2x) = 2(30-x)$

$132-6x = 60-2x$

$132-60 = 6x-2x$

$72 = 4x$

$x = 72/4$

$\boxed{x = 18}$

En $\underline{4}$:

$y = \frac{44 - 2*(18)}{2}$

$y = \frac{44 - 36}{2}$

$y = 8/2$

$\boxed{y = 4}$

Figura 2. Imagen tomada de planeador 1, 2018-1

Otra de las actividades consistió en el desarrollo del teorema de Pitágoras planteado desde la demostración gráfica. El fin de la actividad fue que las estudiantes comprendieran el teorema antes de la fórmula, y que el concepto estuviese claro antes de implementar operaciones, catetos y datos cuya representación visual era desconocida.

La actividad se dividió en varias etapas. Inicialmente se partía de una representación gráfica. El practicante dispuso de la siguiente imagen impresa, la cual colocó en el tablero:

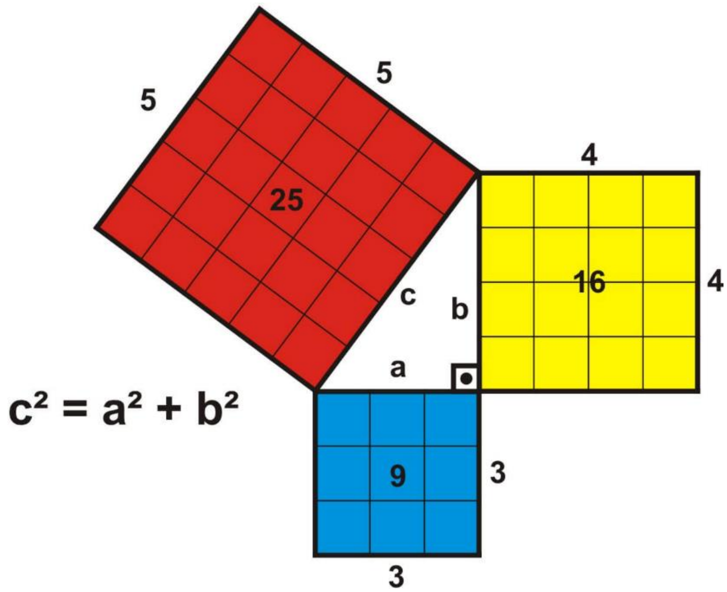


Figura 3. Imagen tomada de planeador 2, 2018-2

Después se mostraba que el número de cuadros de la figura amarilla junto con los de la figura azul son los mismos que hay en la figura roja, para ello se pidió a una voluntaria que recortara los cuadros de las figuras amarilla y azul mientras las demás prestan atención. Luego se le pidió que colocaran los cuadros individuales en el cuadro rojo grande poniendo cuadro pequeño sobre cada cuadro pequeño hasta que el cuadro rojo esté completado por fichas azules y amarillas, así sea al azar. Y con este trabajo se buscaba que las estudiantes pudieran conjeturar sobre el teorema para luego presentar la demostración de forma analítica.

Se pudo observar que, con este tipo de actividades, propuestas al grupo que estaba conformado en total por quince estudiantes, tanto jóvenes como adultas, se logró despertar interés, participación y se alcanzaron los aprendizajes esperados. Esto condujo a pensar que era pertinente ampliar la experiencia y pensar en un diseño de material con base en la visualización.

Para ello se revisaron algunos trabajos, que se describen en el siguiente apartado, que mostraban que la visualización facilita la enseñanza a los estudiantes, ya que, con la respectiva orientación del docente, pueden construir mentalmente los conceptos y definiciones, primero de manera intuitiva y luego se va formalizando.

Se sabe que la visualización puede acompañar un desarrollo simbólico, como una imagen visual, en virtud de su concreción, puede ser un factor esencial para crear el sentimiento de auto evidencia e inmediatez (Fischbein, 1987). Para los estudiantes, la visualización tiene un poderoso papel complementario en tres aspectos esenciales:

- Como apoyo para la ilustración de resultados esencialmente simbólicos y proporcionando una prueba en su propio derecho
- Una manera de resolver conflictos entre soluciones simbólicas correctas e incorrectas.
- Como una forma de ayudar a retomar y recuperar los fundamentos conceptuales que puedan ser de utilidad para el desarrollo de la humanidad (Arcavi, 2003).

Con base la experiencia previa y con la documentación teórica y de antecedentes se propuso el desarrollo de este trabajo de grado con el objetivo de *Diseñar actividades de aprendizaje basadas en la visualización para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en ciclo IV .*

Se considera que crear material didáctico que fomente el aprendizaje de las matemáticas desde lo visual, sirve para darle a los conceptos de las matemáticas una representación visual o física que facilite la comprensión de los temas y para que los estudiantes puedan darle una aplicabilidad cotidiana.

1.2 Exploración de la dificultad

Para conocer y entender el papel que puede tener la visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se revisaron trabajos investigativos de otros educadores. A continuación, se describen algunos, señalando las experiencias desarrolladas e ideas principales consideradas para el material propuesto.

1.2.1 Procesos y habilidades en visualización espacial

El doctor Ángel Gutiérrez, quien es Máster oficial de investigación con doctorado en Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Valencia, cuyas obras datan desde el año de 1979 hasta la actualidad, es el autor de este trabajo de investigación presentado 1992 en el Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, en la Universidad de Valencia, Valencia, España.

El profesor Ángel realiza un análisis exhaustivo de las formas en las que se puede desarrollar el pensamiento matemático, tomando como fundamento el aprendizaje desde lo visual. Para el autor, el elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales o representaciones imaginarias que las personas hacen de los objetos de la realidad que los rodea. Estas representaciones vistas desde el punto de vista matemático tienen diferentes denominaciones como percepción espacial, imaginación espacial, visión espacial o visualización, entre otros. Dentro de los diferentes tipos de imágenes mentales, el autor fundamenta su teoría principalmente en el VP, o Procesamiento Visual, el cual consiste en convertir información abstracta en imágenes. El IFI, o Interpretación de Información Figurativa, demuestra representaciones visuales físicas para extraer la información que contienen.

El objetivo de la investigación fue desarrollar las habilidades de visualización espacial, como la conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de relaciones espaciales y discriminación visual. Participaron niños de 11 y 12 años, quienes cursaban sexto, la experiencia se desarrolló durante 20 sesiones de una hora cada una, en las cuales se buscaba integrar los tres contextos en los que se estudia la geometría espacial: Cuerpos físicos, representaciones planas y representaciones en el ordenador. Las principales actividades realizadas por los estudiantes fueron:

- Identificar representaciones planas de sólidos.
- Mover sólidos.

- Dibujar representaciones planas de sólidos.
- Construir sólidos

El material didáctico que se usó en estas actividades fue:

- Poliedros sombreados (Figuras en el ordenador)
- Poliedros de varillas (Físicos, hechos con pitillos)
- Cubos encajables multilink (Derivación de los Legos)
- Material informático con diferentes tipos de recursos y programación.
- Material impreso

Como conclusión, el autor indica que los principales logros alcanzados por los estudiantes fueron:

- Movimiento de cuerpos reales, versus movimiento de cuerpos en el ordenador.
- Utilización de cuerpos opacos versus utilización de cuerpos de varillas.
- Movimiento continuo versus movimiento instantáneo
- Movimiento libre versus movimiento limitado

1.2.2 El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con geoplano

Este trabajo fue desarrollado por los investigadores Josetxu Arrieta, José Álvarez y Antonio González en 1997. El propósito principal del trabajo era que los estudiantes aprendieran el teorema de Pitágoras mediante la manipulación de geoplanos. Los geoplanos, usados en España en los años ochenta, se refieren a materiales didácticos, los cuales están compuestos por una superficie en la que sobresalen un conjunto de puntas o clavos, alrededor de los que se pueden construir figuras geométricas con bandas elásticas.

El uso del geoplano hace uso de la visualización basada en la geometría, la cual favorece la construcción progresiva de los conocimientos que comprenden el análisis de la actividad de los objetos, a partir del uso de materiales que se pueden manipular, con el fin de solucionar fácilmente situaciones basadas en la cotidianidad. En el desarrollo del presente trabajo, se ha recurrido al uso de geoplanos cuadrados de dimensiones 5 x 5 y 8 x 8 respectivamente, los cuales están representados en la siguiente imagen:

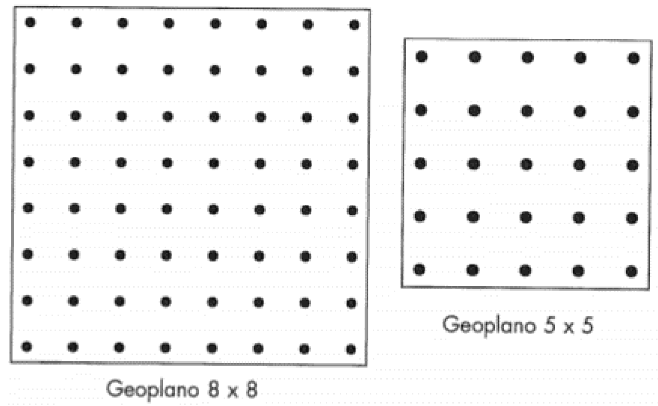


Figura 4. Geoplanos cuadrado de 5 x 5 y 8 x 8 puntas respectivamente.

Fuente: Arrieta y Álvarez (1997), pág. 72

Los investigadores usaron el geoplano para proponer una serie de actividades. En la sesión introductoria se presenta importancia del estudio del teorema de Pitágoras, así como las actividades que se desarrollarán. Las actividades iniciaban con exploración del material a través de la construcción de segmentos de longitud dada, hasta avanzar al descubrimiento de la relación pitagórica y la demostración del Teorema de Pitágoras. Una de las actividades consistía en recortar un cuadrado en unas facciones determinadas de la siguiente manera:

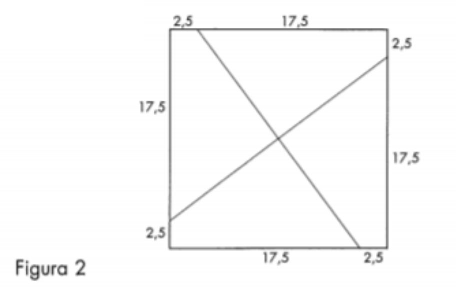


Figura 5. Cuadrado de construcción para el Teorema de Pitágoras.

Fuente: Arrieta y Álvarez (1997), pág. 77

Posteriormente siguiendo otras indicaciones, se construye el triángulo y los cuadrados de los catetos:

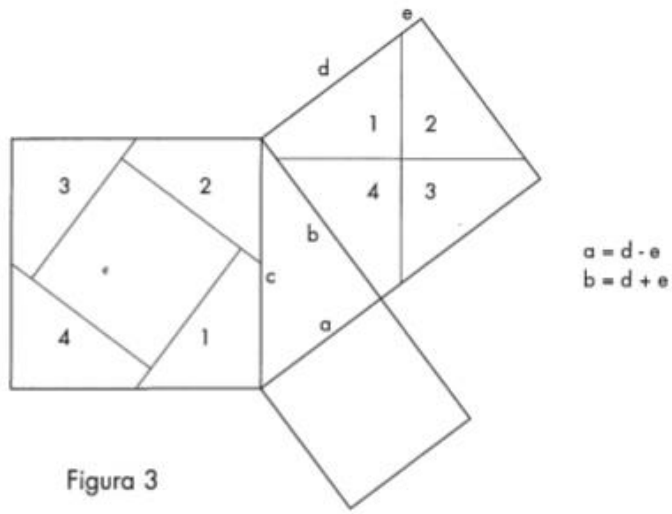


Figura 6: Demostración de la relación pitagórica.

Fuente: Arrieta y Álvarez (1997), pág. 77

Haciendo uso del geoplano se introduce el concepto de igualdad de segmentos, proporcionalidad y ubicación por coordenadas, para determinar que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa.

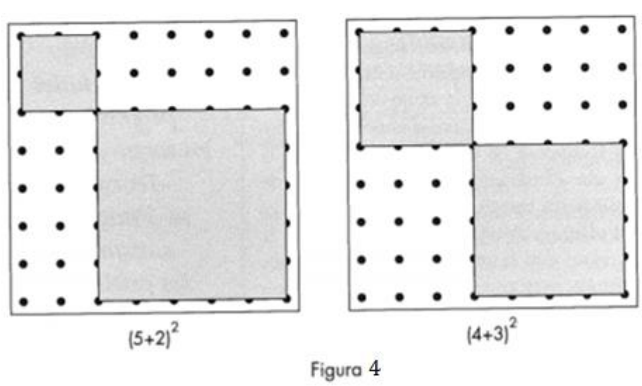


Figura 7: Concepto de igualdad de segmentos.

Fuente: Arrieta y Álvarez (1997), pág. 83

Después de demostrar el teorema, se procede a la aplicación de la teoría en situaciones de la vida real, los cuales se representan mediante un gráfico:

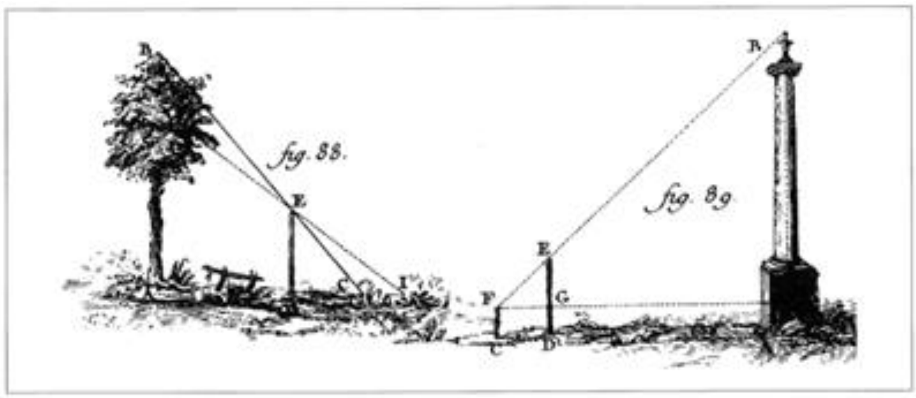


Figura 8: Ejercicio de aplicación.

Fuente: Arrieta y Álvarez (1997), pág. 86

1.2.3 Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos

Desarrollado por Raymond Duval en el 2005. Desarrolla la intuición geométrica, que consiste en analizar los componentes que constituyen la figura mediante la percepción visual. Estos componentes son: Observación, reproducción, construcción, descripción, definición, entre otros. Duval clasifica las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los estudiantes. Esta teoría divide la forma de ver la geometría, basándose la manera de movilizar la aplicación de las propiedades en los tipos de operaciones que se aplican en las figuras:

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR geómetra	CONSTRUCTOR	INVENTOR artesano
1. Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requerida por la actividad propuesta	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia UNA forma particular como TÍPICA	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y, por tanto, de procedimiento de medición)	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura "final"	Transformar unas formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones
2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permita un cálculo	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos...) que la figura de partida

Figura 9: Cuatro entradas clásicas a la geometría.

Fuente: Duval (2005), pág. 16

Duval (2005) analiza como un estudiante puede pasar de una de estas maneras a otra diferente, cada manera de ver induce un tipo particular y limitado de comprensión, esto le lleva a plantear los niveles independientes de "ver", que consisten en relacionar el reconocimiento distintivo de las formas con la identificación de los objetos que se ven.

Dos mecanismos de identificación de objetos a partir de las formas visuales, son la visualización icónica, la cual consiste en que la figura sigue siendo un objeto independiente de las operaciones que se realicen sobre ella (Duval, 2005) y la visualización no icónica en la que la figura es una configuración contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja (Ibidem, 2005). Duval descompone las formas en que pueden distinguirse los objetos, la forma impuesta producida por aplicación de instrumentos de construcción de figuras, y la forma que se basa en la imaginación. Este proceso se explica en el siguiente diagrama:

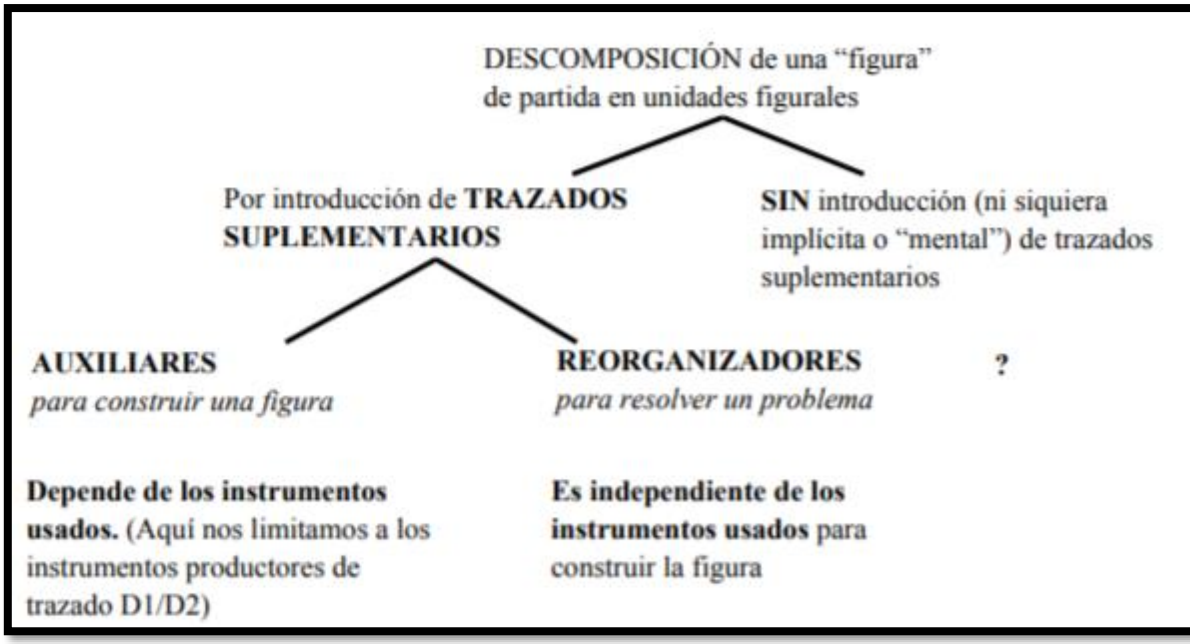


Figura 10: ¿Dos o tres modos de visualización no icónica?

Fuente: Duval (2005), pág. 24

Se plantean los siguientes modos de funcionamiento cognitivo para identificar los objetos representados, la deconstrucción dimensional de las formas que consiste en descomponer las figuras, un número menos respecto a la dimensión en la que se encuentran construidas, la descomposición heurística que divide un todo en formas reconocidas que se pueden superponer y la deconstrucción dimensional de las formas: "Para que una figura dé lugar a una visualización geométrica, debe surgir de lo que hemos llamado un "circuito de visualización" organizado alrededor de una trama de trazados" (Duval, 2005, Pág. 32)

El análisis realiza una transición desde la forma de ver hasta la forma de expresarse, existen palabras se usan para expresar lo que se comprende visualmente en una figura, así como para explicar en qué se diferencia un razonamiento de una descripción y un razonamiento que justifica de un razonamiento que demuestra (Duval, 2005). Para ello se usa el siguiente esquema:

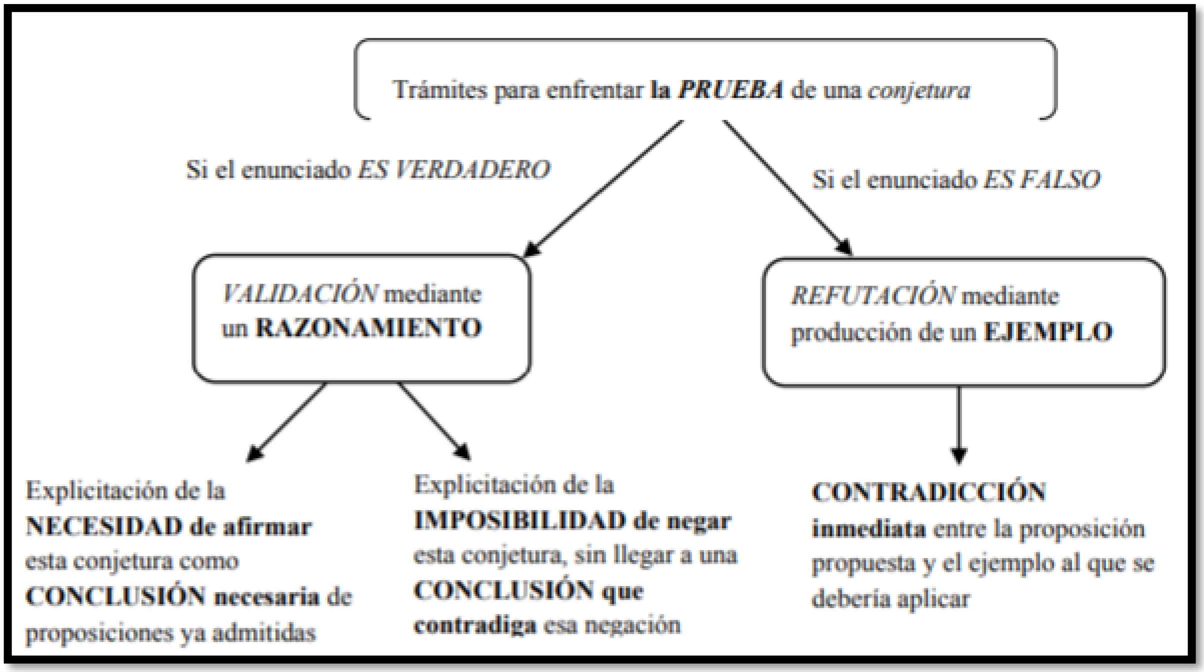


Figura 11: Análisis de la visualización y razonamientos para justificar o para probar.

Fuente: Duval (2005), pág. 47

Como conclusión, Duval afirma que desconocer la complejidad cognitiva implicada en toda actividad geométrica (2005), afecta el estudio de la geometría, así como el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

1.2.4 Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

Desarrollado por Julio Cesar Barreto García en el 2008. Este trabajo desarrolla el Teorema de Pitágoras de manera visual con base en un enfoque histórico, donde se mencionan las demostraciones que se han hecho del Teorema y que comprenden el aprendizaje mediante la visualización. Su marco teórico parte de la definición de visualización. Según el diccionario de la Real Academia Española (2001), “consiste en concebir las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar.” Su esquema parte de cómo el estudiante en un principio intuye visualmente el Teorema de Pitágoras, hasta observar su aprehensión operativa y anclaje discursivo.

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de Educación Matemática tanto nacionales como internacionales donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnosticó mediante una serie de actividades en torno a la deducción del teorema, partiendo de nociones de áreas de figuras geométricas elementales y sus propiedades, el estudio de los productos notables de la suma y de la diferencia del cuadrado de dos cantidades desde un punto de vista geométrico para luego usarlas en la intuición del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos notables hasta llegar a una demostración geométrica (Barreto 2008).

Del proceso se obtuvieron los siguientes resultados: Suficiente (S), Poco (P), Nada (N):

	S	P	N
Los conceptos como: congruencia, semejanza, simetría, traslación son útiles para entender las nociones de área	75%		25%
El trinomio cuadrado perfecto es útil en el Teorema de Pitágoras	100%		
Los triángulos rectángulos notables son útiles en la explicación del Teorema de Pitágoras	65%	35%	
Los triángulos isorrectángulos son útiles en la explicación del Teorema de Pitágoras	50%	50%	

Figura 12: Resultados de las actividades

Fuente: Barreto (2008). Pág. 2.

Se procede a explicar el método de desarrollo del teorema con base a la visualización. Se toma un triángulo rectángulo cuyos lados miden a= 4 unidades, b=3 unidades y c=5 unidades. A la izquierda se muestra un triángulo rectángulo notable de longitudes 3, 4 unidades en los catetos y 5 unidades en la hipotenusa. A la derecha se encuentra el mismo triángulo rectángulo notable con unos cuadrados construidos sobre sus lados. Después de construir los cuadrados de los catetos, se procede a dividirlos en unidades cuadradas, lo cual se representa en la siguiente figura. A la izquierda se muestra la aprehensión operativa de cambio figural realizada en el triángulo rectángulo notable dado anteriormente. Y a la derecha el mismo triángulo rectángulo notable con la conclusión obtenida en este caso.

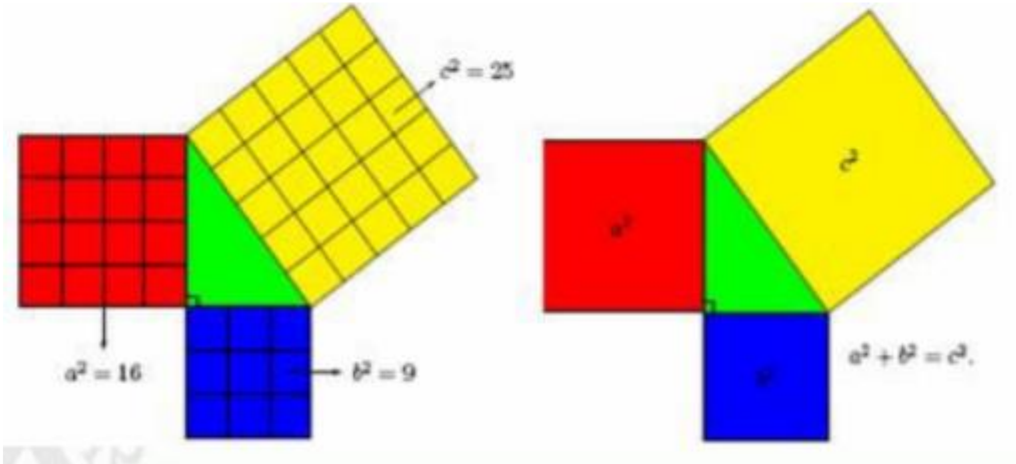


Figura 13: Deducciones del Teorema de Pitágoras

Fuente: Barreto (2008). Pág. 3.

Posteriormente se procede a realizar de manera didáctica, la aplicación de la teoría en ejercicios de aplicación. A la izquierda mostramos unas figuras hechas con foami, para ver de una manera didáctica la parte realizada de una manera geométrica-algebraica con el triángulo rectángulo dado anteriormente. A la derecha se muestra la Actividad realizada por los participantes con un triángulo rectángulo de lados 8, 15 unidades en los catetos y 17 unidades en la hipotenusa

Figura 14: Trabajo de los estudiantes

Fuente: Barreto (2008). Pág. 3.

Como conclusión, se tiene que el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, aplica para un triángulo rectángulo cualquiera. Los estudiantes se basan en la visualización como método de percepción intuitiva, para demostrar inductivamente que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de sus catetos, enfatizando la relación al aprendizaje histórico realizado por los griegos.

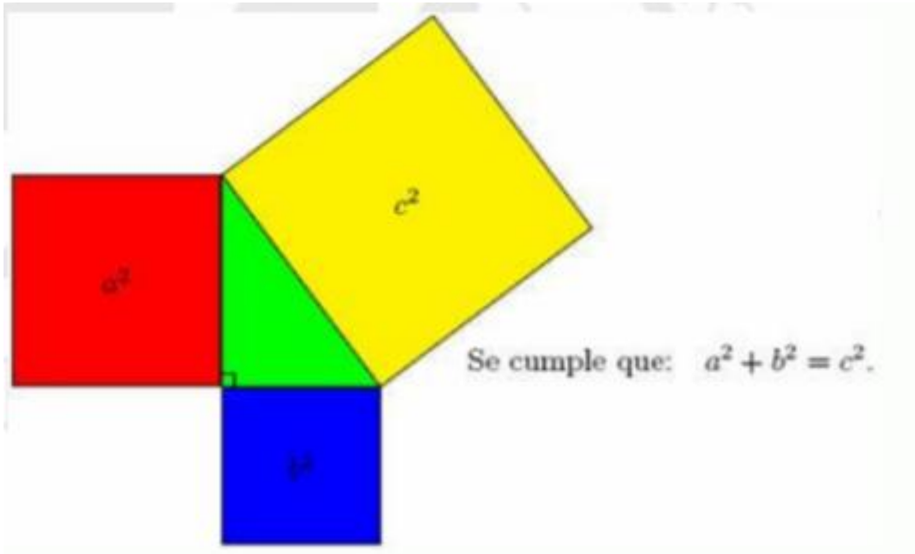


Figura 15: Demostración gráfica del Teorema de Pitágoras.

Fuente: Barreto (2008). Pág. 9.

La enseñanza de la matemática por medio de materiales visuales contrarresta las dificultades presentadas por las estudiantes, las cuales surgen de conceptos errados o recelo a la materia. La visualización permite comprender conceptos nuevos debido a la familiaridad que se desarrolla, ya que, al hacer uso de la visión de una manera didáctica y simple, se crean y procesan imágenes mentales que fortalecen la construcción del conocimiento.

CAPÍTULO 2: REALIZACIÓN CONTEXTUAL

En este capítulo se describen aspectos teóricos considerados para el diseño del material. La decisión fue diseñar actividades con énfasis en la visualización y enfoque constructivista, enmarcados en los referentes curriculares colombianos.

2.1 El rol de las representaciones visuales en la enseñanza de las matemáticas

Desde la postura de Arcavi (2003), la visualización es la principal herramienta que el ser humano utiliza para desarrollar su aprendizaje, ya que es el sentido que más estimula el sistema nervioso al momento de interactuar con mundo que percibe. Respecto al aprendizaje, menciona que la visualización se debe entender no únicamente desde el punto de vista meramente fisiológico, sino también como la capacidad del ser humano de trascender una representación física y realizar un análisis para construir pensamiento lógico.

La visualización tiene su base en la creación de imágenes mentales que se apoyan en la visión física y facilitan la comprensión de los conceptos y la creación del pensamiento matemático. La visión tiene sus limitantes, para ello existen herramientas como las gráficas, los diagramas, las representaciones físicas y tecnológicas, (como los softwares de graficación de la naturaleza de GeoGebra, por ejemplo) que permiten representar y comunicar la información, el pensamiento y el desarrollo de ideas desconocidas hasta ahora y permitir el avance en la comprensión. Expresar los datos de igual manera que como lo haríamos en la vida diaria, facilita la comprensión de los temas, de la manera como lo expone (1992), haciendo que la información sea fácil de percibir.

Anscombe (1973) afirma que las representaciones gráficas pueden tener varios propósitos, como:

i. Percibir y apreciar algunas de las características generales de los datos
ii. Ver detrás de esas características generales y captar el trasfondo de lo que representan.

La visualización también puede jugar un papel central, ya que aparece para inspirar una solución completa, más allá de lo meramente procesal. Consiste en algo más que una simple traducción, el solucionador es capaz de imaginar una situación fuertemente visual, imponérsela a una situación específica y derivar de él la solución. El repertorio visual de los sujetos se puede poner al servicio de la resolución de los ejercicios e inspirar soluciones creativas.

El razonamiento visual no está destinado sólo a apoyar el descubrimiento de nuevos resultados y de formas de probarlos, sino que también se convierte en un razonamiento plenamente aceptable, el cual incluye la demostración de los teoremas matemáticos. (Dreyfus, 1994, p. 114). La visualización no sólo organiza los datos a mano de forma significativa estructural, sino que también es un factor importante que guía el desarrollo analítico de una solución (Fischbein, 1987, p. 101).

La visualización puede ser el propio proceso analítico que concluye con una solución general y formal. No sabemos lo que vemos, vemos lo que sabemos; ésta es una afirmación que aplica a muchas situaciones en las que los estudiantes no necesariamente ven lo que nosotros como profesores o investigadores vemos. Presmeg (1986, p. 44) afirma que muchas veces "una imagen o un diagrama puede relacionar el pensamiento con detalles irrelevantes", es decir, irrelevantes para un experto. Pero para el estudiante que carece de conceptos básicos son propiedades fundamentales que pueden ser captadas gracias a las herramientas gráficas.

Para Arcavi (2003), las percepciones son conducidas conceptualmente, y ver lo que no se ve en este caso no es simplemente producir/interpretar una pantalla que revelaciones o una herramienta con la que podemos pensar, sino que hace referencia al desarrollo y uso de una estructura conceptual intermedia que nos permite ver a través de la misma pantalla, cosas similares a las vistas por un experto. Incluso implica la competencia para aclarar contextos en los que objetos similares pueden significar cosas muy diferentes, incluso para el mismo experto.

La visualización en la enseñanza de la matemática ofrece una mejor comprensión de la misma, y enriquece nuestra comprensión en aspectos que sirven para avanzar en los diferentes campos de estudio.

La visualización como recurso didáctico constituye un poderoso instrumento para el docente, pues la misma es fuente de conocimientos relacionados con la generalización y con el método inductivo, es un medio de ilustración que sirve de fundamento de la percepción sensorial. La base del conocimiento visual es la exploración, la cual permite abordar conceptos con un alto nivel de complejidad de una manera informal en los primeros estadios de su formación.

El uso de la imagen como herramienta de aprendizaje constituye el resultado de una de las indagaciones de los educadores de tiempos pasados. Se idearon subsidios para la memoria que agilizaran los procesos de enseñanza: figuras dibujadas, símbolos algebraicos, cifras y caracteres, lenguajes de diverso tipo, entre otros, son algunas de las propuestas que, al referirse al desarrollo de la memoria artificial, se inscriben en el programa renovador de la escuela, con el propósito de almacenar debidamente la información pertinente y no saturarla innecesariamente.

2.2. Constructivismo

El presente trabajo se enmarca en un enfoque constructivista.

Rol del Docente: El docente es quien diseña y coordina las actividades o situaciones de aprendizaje que sean atractivas para los educandos, con el fin de que sean ellos quienes construyan nuevas ideas o conceptos basados en sus conocimientos anteriores. En las actividades propuestas en el presente trabajo, es el docente el que motiva la iniciativa y el trabajo autónomo de los estudiantes, para que, haciendo uso de la visualización, se repasen y fortalezcan los conceptos que se poseen antes de compartir la comprensión de los mismos por parte del educador. El docente desafía la indagación de los estudiantes cuando realiza preguntas durante el desarrollo de la clase, las cuales fomentan el análisis y la reflexión, y los lleva a preguntarse entre ellos mismos con el fin de construir conocimiento.

Rol del estudiante: El estudiante es el que construye su propio conocimiento mediante la guía del docente, con base en los materiales y herramientas proporcionados en clase. El objetivo es crear un ambiente de indagación y reflexión entre el docente y los estudiantes; mientras se van repasando conocimientos previos, los estudiantes participan en las actividades propuestas enlazando sus ideas con las de los demás, para ello pueden preguntarse unos a otros con el fin de escuchar y clarificar los conceptos que se están construyendo.

Desde la postura de Jean Piaget (1983), el conocimiento es el que el niño construye al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos. No existe por sí mismo en la realidad sino dentro del razonamiento del sujeto pensante, deriva de la coordinación de las acciones que realiza el sujeto con los objetos. Piaget afirma que el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, se refieren a la relación que existe entre los números al momento de realizar operaciones entre ellos y la concepción que tienen los niños acerca de estos procesos de cálculo.

Para Piaget, el pensamiento matemático tiene su fundamento en la construcción del número, ya que de él dependen las operaciones lógicas de las clases de seriación e inclusión. Piaget plantea que, en la escuela, el niño logra construir los aspectos cognitivos del número eficazmente, cuando se promueven situaciones en las cuales el papel de la interacción social del niño sea un factor fundamental que potencie la construcción de dicho concepto (Zapata, 2006)

Lev Vygotski (1979) lo abarca desde lo que él ha denominado como “egocentrismo cognitivo”. Afirma que las influencias sociales y culturales deben ser tomadas en cuenta al momento de realizar un proceso de investigación en el ambiente escolar, ya que, desde su teoría no es posible entender el desarrollo del niño si no se conoce la cultura donde se cría. (Vygotsky, 1981)

Desde el constructivismo se señala la importancia de trabajar desde los aprendizajes previos de los estudiantes. Es decir, observar los aprendizajes que traen los estudiantes, sus habilidades y sus dificultades, con el fin de partir de lo que saben para apoyar y avanzar en su proceso (MEN, 2011). Esta es una estrategia, que preferentemente debe emplearse al inicio de cualquier secuencia didáctica, o bien antes de que los aprendices inicien cualquier tipo de actividad de indagación, discusión o integración sobre el material de aprendizaje propiamente dicho, sea por vía individual o colaborativa (Cetina, 2013).

2.3 Marco legal

Los temas abordados en las actividades, corresponden al fortalecimiento de las representaciones dadas a los números de manera variacional, es decir, partiendo desde la aplicación de las propiedades de los números reales en las expresiones algebraicas (todas las propiedades, principalmente potenciación y radicación vistas como antecedente al tema de las expresiones algebraicas), así como en la construcción de Teoremas basados en fórmulas dadas (Teorema de Pitágoras). La visualización busca crear una estructura de apoyo en el paso de operar con números a operar con expresiones algebraicas.

2.4 Lineamientos y Estándares:

Pensamiento numérico y variacional:

El desarrollo de las actividades se encuentra enfocado en el razonamiento algebraico, que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas (Godino, 2003, Pag 774).

Según los Derechos Básicos de Aprendizaje instituidos por el Ministerio de Educación Nacional y los lineamientos curriculares establecidos a nivel Nacional, los estudiantes de grado octavo a grado noveno deben tener las habilidades y la capacidad cognitiva para desarrollar las siguientes competencias:

Respecto al Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos:

- Utiliza números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

- Identifica y utiliza la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
- Reconoce el significado de los exponentes racionales positivos y negativos y utiliza las leyes de los exponentes.

Respecto al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos:

- Reconoce y contrasta propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras).
- Conoce el teorema de Pitágoras y alguna prueba gráfica del mismo.
- Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce.

Respecto al Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos:

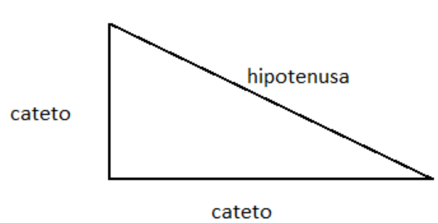
- Usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

2.5. Temas de desarrollo

Se consideraron algunos temas relevantes del ciclo IV para el diseño de las actividades, a continuación, se hace una referencia general.

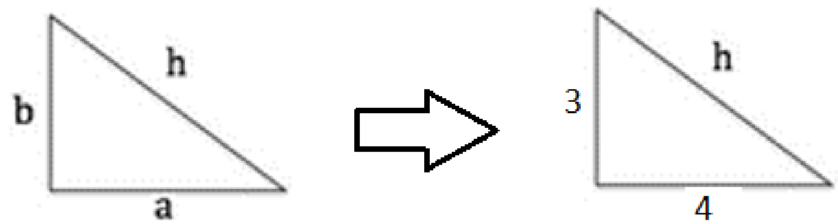
2.5.1 Teorema de Pitágoras y fórmula Pitagórica:

Consiste en aplicar la fórmula pitagórica para hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



Los catetos corresponden a los lados de un triángulo rectángulo, y el más largo se denomina hipotenusa.

La suma de los cuadrados de los catetos equivale al cuadrado de la hipotenusa:



$h^2 = a^2 + b^2$

$h = \sqrt{a^2 + b^2}$

$h^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$h^2 = \sqrt{25}$

$h^2 = 5$

2.5.2 Sistemas de ecuaciones 2x2:

La solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen a todas las ecuaciones del sistema. Existen diferentes métodos para solucionar este sistema, por ejemplo, el método de sustitución. Este método consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y el resultado, reemplazarlo en la otra ecuación y de ese modo encontrar la solución, como se ejemplifica a continuación:

2.5.3 Expresiones algebraicas:

Las expresiones algebraicas se refieren a aquellas expresiones donde se combinan las cantidades numéricas y literales, relacionadas por las operaciones básicas: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las letras reciben el nombre de variables. Un término algebraico es el producto de un factor numérico por una o más variables literales.

Una expresión algebraica contiene letras, números y signos. La manipulación de expresiones algebraicas tiene las mismas propiedades que la manipulación de expresiones numéricas, ya que las letras se comportan como si fuesen números. Las expresiones algebraicas que se tratarán en este curso tendrán, por lo general, una o dos letras. Un ejemplo de expresión con una única letra es:

$$3x^2 + 4x - 2 - x^2 + 7x$$

Ante cualquier expresión, lo primero que debe hacerse es simplificarla, utilizando las propiedades de las expresiones, que son equivalentes a las propiedades de los números. En el caso del ejemplo, deben agruparse los términos con las mismas letras. Por un lado, debemos sumar $3x^2$ y $-x^2$, mientras que, por otro lado, se debe sumar $4x$ y $7x$:

$$3x^2 - x^2 = 2x^2$$

$$4x + 7x = 11x$$

Así pues, la expresión de segundo grado $3x^2 + 4x - 2 - x^2 + 7x$ es igual a $2x^2 + 11x - 2$.

El valor numérico de una expresión algebraica se halla sustituyendo la letra por un número determinado. Por ejemplo, el valor numérico de $2x^2 + 11x - 2x^2 + 11x - 2$ cuando $x = 3$ es igual a $2 \cdot 3^{\mathbf{2}} + 11 \cdot 3 - 2 = 18 + 33 - 2 = 49$.

El grado de una expresión algebraica con una única letra es el exponente máximo de esta letra en la expresión. Por ejemplo, el grado de $2x^2 + 11x - 2$ es 2

2.5.4 Exponentes negativos:

El exponente de un número nos dice cuántas veces debemos usar ese número en una multiplicación (Matemáticas Prácticas 2003).

Ejemplo: $8^2 = 8 \times 8 = 64$

Un exponente negativo nos indica cuántas veces dividir por ese número.

Ejemplo: $8^{-1} = 1 \div 8 = 1/8 = 0{,}125$

También podría calcularse así:

$$5^{-3} = 1 \div (5 \times 5 \times 5) = 1/53 = 1/125 = 0{,}008$$

Una forma más simple de manejar exponentes negativos consiste en calcular el exponente (a^n) y posteriormente utilizar su Inverso ($1/a^n$).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

CAPITULO 3: DISEÑO Y EVALUACIÓN DEL MATERIAL

Se describen las fases que se llevaron a cabo para el diseño y evaluación del material. Inicialmente se señalan de manera general y luego se hace una presentación completa para su desarrollo.

3.1 Fases

La realización de este trabajo está comprendida por cuatro fases, que se describen a continuación.

Fase I: Consiste en analizar los artículos y documentos que determinan el método apropiado para la realización de las actividades basadas en la enseñanza desde lo visual, con el fin de obtener resultados positivos respecto a su aplicación.

Fase II: Se revisan los antecedentes donde se evidencia el desarrollo de material didáctico basado en la visualización, y se estudia la metodología de enseñanza, la aplicación del material didáctico basado en los diferentes referentes teóricos que se tuvieron en cuenta para la realización de las actividades.

Fase III: Se diseñan las actividades y se enuncian sus características, así como los aspectos tenidos en cuenta para la correspondencia respecto a los referentes teóricos y los objetivos que se esperan alcanzar.

Fase IV: Validación del material diseñado. El material fue validado con uso de una rúbrica por dos docentes con experiencia en educación básica y media.

3.2 Características de las actividades

Se desarrolla el aprendizaje para el dominio, que consiste en la consecución de los estándares por parte del estudiante, los cuales se definen como un objetivo específico de aprendizaje. Es la expresión de lo que debe saber y saber hacer en un ámbito de contenido dado a una determinada edad o nivel educativo. El logro de estas competencias es lo que determina el nivel de calidad en la educación de un determinado proceso de aprendizaje, señalan el punto de llegada deseable para los alumnos.

Los temas tomados como base para el diseño desde lo visual en el presente trabajo, fueron seleccionados partiendo desde la experiencia docente del autor, así como desde las mismas prácticas realizadas en semestres anteriores, donde se evidenció la dificultad y premeditación de parte de los estudiantes hacia el tema del pensamiento variacional. Se toma como punto de referencia una de las propiedades de la potenciación en los números reales, los exponentes negativos. Al ser una de las propiedades donde se evidenció mayor dificultad, y donde se implementará la visualización para establecer familiaridad con este proceso. Se procederá a introducir el pensamiento variacional por medio de actividades gráficas que resultan atractivas para los estudiantes gracias a la visualización.

La estructura de cada actividad consta de las siguientes cuatro etapas, las cuales están diseñadas y descritas para el docente, a manera de planeador. Las actividades están pensadas para una duración de una hora cada una. La duración aproximada de cada uno de los apartados se describirá a continuación:

Observemos (10 minutos):

Se comienza estimulando la familiaridad de los estudiantes con temas previos, haciendo uso de los recursos visuales.

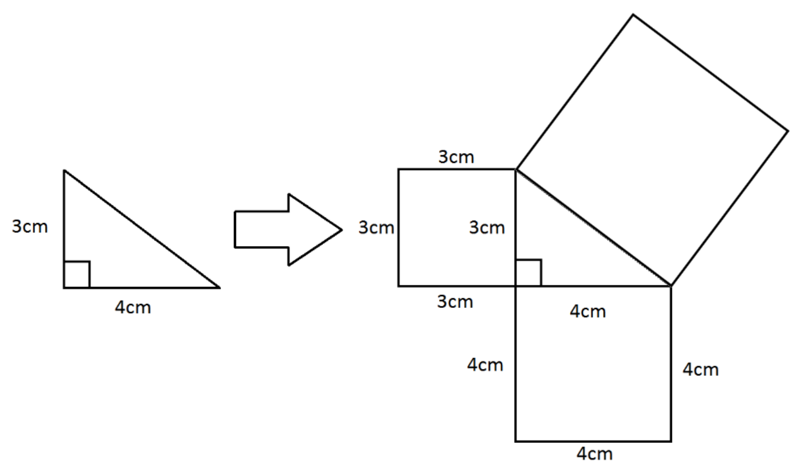


Figura 16: Imagen Actividad No 1

En el ejemplo se propone observar una figura formada por triángulos y cuadrados, antes de abarcar el tema o los procedimientos (fórmula pitagórica) que se requieren para la realización del Teorema de Pitágoras. Se pregunta a los estudiantes acerca de las figuras que observan y las propiedades básicas que poseen. Por ejemplo: El triángulo es rectángulo porque posee un ángulo de 90º, el cruce de dos segmentos que forman un ángulo recto se denomina perpendicular, así como se pueden observar cuáles de los segmentos de los cuadriláteros regulares (de lados iguales) son paralelos, entre otras propiedades. Se plantea un ejercicio que se construye partiendo de conceptos que son dominados por los estudiantes con base en la visualización.

Construyamos (15 minutos):

El docente sigue un proceso de acompañamiento constante, en el que se orienta a los estudiantes con el objetivo de que se logre la adquisición del concepto fundamental del tema, incluso antes de enunciar el mismo.

El docente es el que ocupa el rol de promover el pensamiento crítico y propiciar situaciones para que el alumno construya o descubra los conocimientos. Las actividades se realizarán de forma individual o en grupo, según sea determinado por el docente, de manera que cada estudiante logre la construcción del conocimiento propio y en conjunto. Posteriormente se socializará en grupo con el fin de evidenciar una generalización, lo cual da pie para formalizar patrones y regularidades en el aspecto de las matemáticas que se está construyendo (Godino, 2003, Pag 774).

Por ejemplo, en la primera actividad, se busca que los estudiantes construyan la siguiente figura con lápiz y regla de manera individual, repasando conceptos de perpendicularidad, paralelismo, congruencia de los lados de los polígonos regulares, propiedades del triángulo rectángulo, entre otros. Seguido de ello, se indica la partición en unidades de los cuadriláteros siguiendo la unidad de medida estándar utilizada, en este caso, los centímetros.

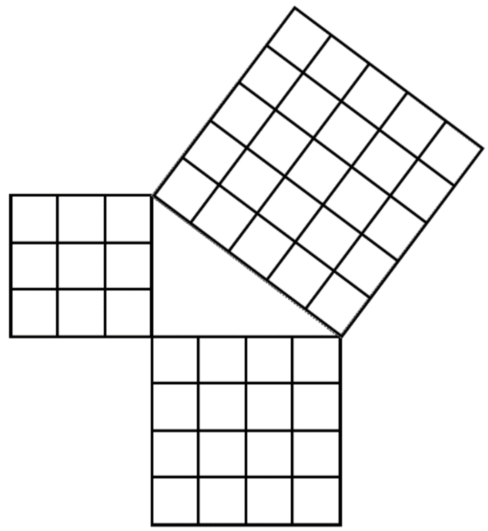


Figura 17: ejemplo, etapa construyamos, actividad No 1

Contextualicemos (15 minutos)

En esta etapa el docente propone socializar de manera grupal los aspectos del Teorema que se analiza visualmente, para posteriormente presentar de manera más formal el conocimiento que se busca adquirir. Se busca que los nuevos aprendizajes permitan aplicar el concepto adquirido tanto para el desarrollo de ejercicios en diferentes contextos.

Por ejemplo, en la actividad 1, que corresponde a la demostración gráfica del Teorema de Pitágoras, se hace explícito el Teorema y se presenta, incorporando a los estudiantes a través de preguntas, de modo que el proceso de visualización utilizado los lleve a la construcción de su propio conocimiento.

Apliquemos (20 minutos)

El docente propondrá a los estudiantes los ejercicios que se realizarán conforme al concepto construido, teniendo como base las propiedades y procedimientos que, desde el momento, hacen parte del aprendizaje para el dominio y servirán para futuros aprendizajes mediante la exploración de los conocimientos previos. Esta parte se presenta como un taller para los estudiantes. Cada actividad tiene un título y un objetivo que enuncia el conocimiento que el estudiante debe fortalecer con base a la construcción realizada previamente. La evaluación se realizará de manera sistemática de acuerdo al desarrollo de las actividades, teniendo en cuenta la claridad en la descripción y el manejo del tema por parte de los estudiantes, debe estar orientada a evaluar los procesos personales de construcción personal del conocimiento, con el fin de obtener de parte los alumnos un conjunto de construcciones personales y únicas con las que estructuran su propio conocimiento. Esta evaluación mide:

- La capacidad de aplicar los conocimientos en situaciones diferentes a las planteadas por el docente.
- La habilidad de dar nuevos significados al conocimiento, usando métodos propios de aplicación en la solución de los ejercicios.

Existe una evaluación permanente dado que el papel del docente y el estudiante determina un acompañamiento en la construcción de nuevos conceptos basados en conocimientos anteriores. Al finalizar las actividades el docente puede evaluar estos aspectos de manera tanto individual como grupal.

A continuación, se describirán de manera general las actividades diseñadas, las cuales tienen su fundamento en la introducción del pensamiento variacional en la malla curricular del ciclo IV, las actividades completas se pueden ver en los anexos.

1. **Exponentes negativos:** Consiste en explicar de manera gráfica el concepto de aplicación de la propiedad de los exponentes negativos en los números reales, a manera de generalización por medio de las representaciones formales.
2. **Expresiones algebraicas:** Desarrolla la introducción al pensamiento variacional en el ciclo IV, donde los estudiantes aplican las propiedades de los números reales a variables representadas por letras.
3. **Teorema de Pitágoras:** Este teorema se desarrolla de manera gráfica mediante una actividad visual y de forma analítica haciendo uso de los conceptos de las expresiones algebraicas aplicados en una fórmula que puede despejarse en términos de variables específicas.

4. **Sistemas 2x2:** Aplican el concepto del pensamiento variacional usando dos fórmulas simultáneamente, como introducción a solucionar sistemas con tres o más fórmulas.

3.3 Validación del material

El material fue evaluado por dos con amplia experiencia en enseñanza de las matemáticas en educación básica y media, uno de ellos cursa actualmente estudios de Doctorado en Educación Matemática.

El formato de validación usado indagaba sobre la pertinencia de las actividades y su estructura acorde con los referentes teóricos y los temas considerados. Para realizar la valoración a cada aspecto se daba valor numérico y se podían realizar observaciones. La escala considerada fue: 5 (Excelente); 4 (Muy bueno); 3 (bueno); 2 (Regular) y 1 (Necesita Mejorar). En la tabla se presentan los diferentes aspectos considerados, se incluía una parte de observaciones generales.

Tabla 1. Rúbrica para la evaluación del material

Criterios	Valoración	Observaciones
La estructura de las actividades responde a las etapas que se cumplen en la enseñanza matemática con base en la visualización.		
Las actividades tienen relación con los Derechos Básicos de Aprendizaje, Lineamientos Curriculares y Estándares de competencias que propone el MEN para grado ciclo IV.		
Las actividades son apropiadas para ser usadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de los temas establecidos.		
Las imágenes usadas son pertinentes para ser trabajadas desde la visualización y promover el interés de los estudiantes		
Las sugerencias y ejemplos para abordar cada una de las actividades son claras y coherentes con el tema propuesto		
La presentación del material es pertinente y adecuado para el nivel de conocimiento de los estudiantes (diseño, tipo, formato de las imágenes)		
Las actividades son claras y promueven la creatividad y el trabajo colaborativo		
Las actividades son apropiadas para la población de estudiantes a la cual va dirigida (grado ciclo IV)		

Criterios	Valoración	Observaciones
El diseño de las actividades puede ayudar a despertar interés de los estudiantes por el aprendizaje de los temas propuestos		
La guía del docente es adecuada y permite usar el material de manera adecuada acorde con los referentes teóricos seleccionados (Visualización en las matemáticas)		
El material invita a ser implementado por otros docentes		

Fuente: Adaptado de Triana (2018)

Los dos docentes valoraron muy bien el material, con un promedio de 4.8 y 4.5 respectivamente (ver anexos 5 y 6), destacan que las actividades pueden ser útiles y la parte visual apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Algunas de las recomendaciones y las acciones realizadas al respecto se describen a continuación:

- Incluir la historia de las matemáticas como herramienta pedagógica. No se modificó el material al respecto, el material, como se ha señalado se basa en la visualización matemática. Otros trabajos podrían trabajar con ambos aspectos.
- Proponer ejercicios de aplicación a situaciones reales. Algunas de las situaciones a través de las cuales se presenta el tema hacen referencia a situaciones reales. Sin embargo, debido a la delimitación y la falta de tiempo para profundizar en algunos aspectos, este es efectivamente un aspecto que debe ser fortalecido.
- Se considera que varias de las actividades son más pertinentes para grado octavo. Efectivamente la mayoría de las actividades deben ser trabajadas en grado octavo, sin embargo, teniendo en cuenta que los estándares están organizados por ciclos, se considera dejar las actividades abiertas al ciclo. Cada docente, acorde con su plan de estudio puede decidir en qué momento son más pertinentes, bien sea para presentar el tema como nuevo, pero también como refuezo, en grado noveno.
- Proponer actividades para trabajar de manera colaborativa. Se reescribieron algunas partes de las actividades, de modo que se vea más claramente el

papel del docente y de los estudiantes y se señalan momentos de trabajo colaborativo e individual.

Finalmente es importante señalar que se realizaron ajustes adicionales, buscando hacer más evidente el aprendizaje significativo en el desarrollo de las actividades.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 Conclusiones

Se logró cumplir con el objetivo inicialmente trazado, es decir, diseñar actividades que hagan uso de la visualización para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de algunos temas matemáticos del ciclo IV. Sin embargo, es importante señalar que esto no es una tarea fácil. Para el autor de este trabajo diseñar este material fue un reto porque el uso mismo de la visualización era un reto y se pudo observar que no resultó nada fácil lograr una secuencia para presentar una temática en particular, por lo cual, el material es más de apoyo a diferentes procesos.

Depende de un trabajo en conjunto entre el docente y los estudiantes, que, para la enseñanza de las matemáticas, pueda hacerse uso de recursos como la visualización, que permite facilitar este proceso de construcción de conocimientos. Éste no es el único método, existen muchos otros, que al igual que el planteado en el presente trabajo, tienen como finalidad fomentar el gusto y la motivación por el estudio de las matemáticas, por lo cual, en el aula de clase, es necesario que se haga uso de varios de ellos, ya que no todos los estudiantes aprenden de la misma manera ni al mismo ritmo.

4.2 Recomendaciones

Es necesario ser preciso a la hora de escoger aquello que se va a utilizar como material didáctico con enfoque en la visualización. En una ilustración, existen muchos conceptos que se pueden abordar y esto daría pie a la confusión o a navegar por la deriva. En el momento de dar las indicaciones, se debe mostrar a los estudiantes qué es lo que se quiere observar para construir el conocimiento requerido. Como se mencionó la visualización requiere ser abordada con otros elementos que ayuden a fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de diferentes temas. Esta propuesta puede ser muy útil, para aquellos estudiantes, que como su nombre lo indica, son más visuales, menos abstractos y este tipo de tratamiento de los temas se les puede facilitar.

El autor de este trabajo tuvo una buena experiencia al diseñar actividades con énfasis en la visualización para ser usadas con estudiantes de diferentes edades que realizaban su bachillerato en la noche por lo cual es deseable que este material, diseñado a manera de planeadores, pueda ser usado por los estudiantes del programa y ver si puede servir para cumplir los objetivos establecidos en cada actividad. Es posible que con base en este material se pueda diseñar otro trabajo que fortalezca los aspectos que puedan identificarse con base en su implementación.

REFERENCIAS

Anscombe F. (1973). Graphs in statistical analysis. The American Statistician, Pg 27, 17-21.

Arcavi, A. (2003), *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics,* Holanda.

Arcavi, A., Hadas, N. y Dreyfus, T. (1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. In Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics (2), (pp. 280–287). Portugal.

Arrieta, J. Álvarez, J. y Antonio, J. (1997), El Teorema de Pitágoras a partir de la manipulación de geoplanos, España.

Barreto. (2008), Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, Venezuela.

Berzunza, R. (2013), Estrategias para activar y usar los conocimientos previos, y para generar expectativas apropiadas en los alumnos, México.

Duval, R. (2005). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos, Francia.

Fischbein (1987), Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach, Holanda.

Godino, J. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Mason, J., Burton, L. &Stacey, K. (1982), Pensar matemáticamente (1ra edición). Madrid, España: Labor S.A.

Gutiérrez, Á. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial (Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría) Universidad de Valencia, Valencia, España.

Hernández, J. (2005). La visualización: un recurso didáctico para la enseñanza de la matemática, Cuba.

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia (2015), Derechos Básicos de Aprendizaje, Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia (2006), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperado en marzo 31, 2018, del sitio Web: www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia (1994), Lineamientos curriculares Áreas obligatorias y fundamentales, Bogotá.

Obando, G. (2006), Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, Medellín, Colombia.

Palacios, X.y Ruiz, L. (2007). La imagen como recurso didáctico en la apropiación de conceptos en el área de ciencias sociales, Medellín, Antioquia.

Palmer, C, y Bibb, S. (2003), Matemáticas prácticas, Barcelona España.

Piaget, J. (1983), Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje: El debate entre Jean Piaget y Noam Chomsky, Barcelona.

Piaget, J. (1994), Estudios sobre lógica y psicología Altaya. Barcelona.

Presmeg, N. (1986), *Visualization in High School Mathematics,* Quebec, Canadá.

Vygotsky, L. S. (1981), Pensamiento y Lenguaje. Buenos Aires: La Pléyade.

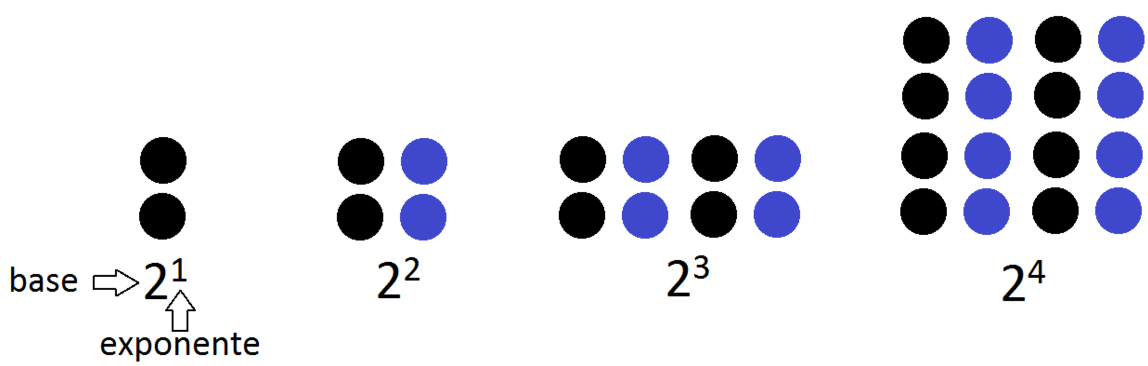
Vygotsky, L. S. (1979), El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Buenos Aires: Grijalbo

Anexo 1. Actividad 1, Exponentes negativos

Actividad 1: Exponentes negativos

El objetivo de esta actividad consiste en que el estudiante comprenda el concepto de los exponentes negativos con el fin de que construya correctamente las expresiones en la solución de ejercicios que lo requieran, mediante la representación con figuras geométricas.

Observemos: Se les enseña a los estudiantes la siguiente imagen:

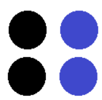


Tomando como referencia la imagen, se pregunta a los estudiantes acerca de los conceptos previos ya conocidos. Con base en sus respuestas y la orientación del docente, sabremos que se trata de un ejercicio de potenciación, ya que contamos con bases y exponentes, que la potenciación es una sucesión de multiplicaciones donde la base se multiplica por sí misma la cantidad de veces que indique el exponente, y que la cantidad de círculos representan la solución de las potencias expresadas en la imagen.

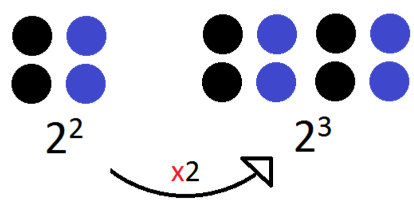
Construyamos: Se recalca cuáles son las partes de la potenciación (base y exponente) y se construirá el conocimiento de manera grupal mientras se pregunta a los estudiantes.

- Comenzamos teniendo 

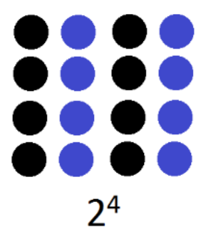
que significa que la base se multiplicará por sí misma una vez, y el resultado se encuentra representado por círculos que representan las unidades: .
- Al elevar la potencia al cuadrado 2^2, tenemos que la base se multiplica por sí misma 2 veces, haciendo que resulten dos unidades más: 2^2 =

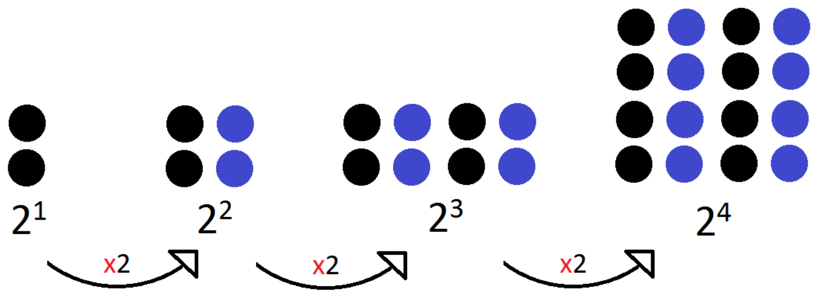
- Al elevar la potencia al cubo, se multiplica la base por sí misma tres veces, o se multiplica el anterior resultado por la misma base:

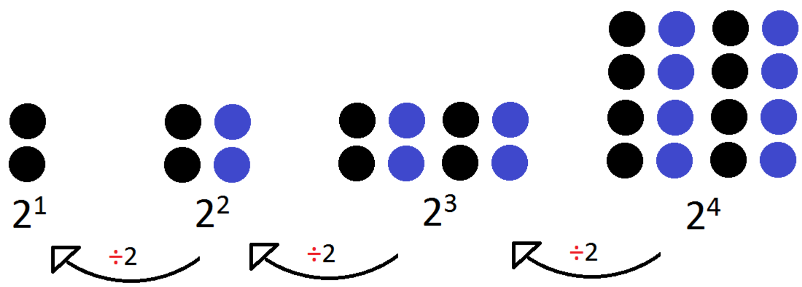


- Se realizará el mismo proceso hasta llegar a la siguiente potencia y así sucesivamente:

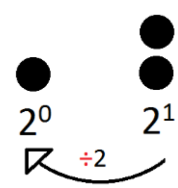


Contextualicemos: Construcción e introducción del nuevo tema. Se puede observar en la imagen que cada vez que aumenta la potencia de la base 2, el resultado va siendo el doble de la anterior potencia. De esta misma forma, podemos visualizar, que mientras la potencia va disminuyendo, el resultado va siendo la mitad de la anterior. Este concepto debe ser construido por los estudiantes mediante la orientación implícita del docente. Una vez lo hayan logrado, el docente lo representa visualmente:



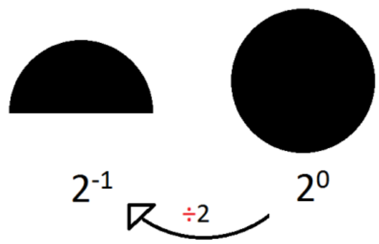


Mediante el constante cuestionamiento del docente, los estudiantes llegan a la conclusión de que, así como las potencias que van aumentando y aumentan hasta el infinito, las potencias que disminuyen, también lo hacen hasta el infinito. Es decir, podemos seguir dividiendo los resultados por la mitad y se representará visualmente de la siguiente manera:

Si continuamos la sucesión de las divisiones tendremos que 

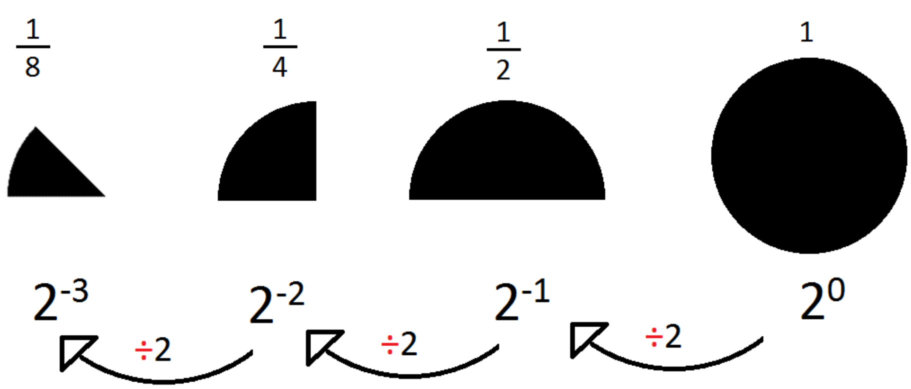
dada la propiedad (vista en temas anteriores) de que cualquier número elevado al exponente 0, da como resultado 1, representado visualmente con un solo círculo. Las potencias han disminuido y los resultados se han dividido por la mitad hasta llegar a 0, pero los números que representan los exponentes, como se mencionó anteriormente, se extienden hasta el infinito, lo que nos lleva a concluir que la siguiente potencia será -1, y que por lo tanto la unidad que representa 2^0, es decir

 será la que se divida a la mitad. Se presenta ahora la siguiente imagen:

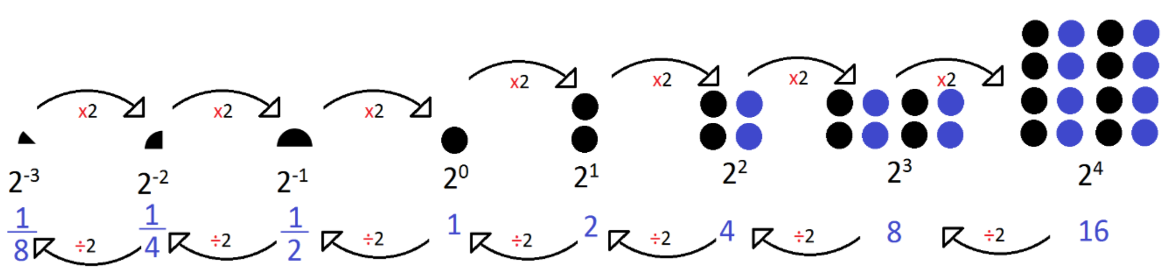


El docente va complementando gradualmente la aplicación de la teoría que van construyendo los estudiantes de manera visual. El resultado de la potencia negativa en base dos, divide la unidad representada por la potencia 0 en dos partes iguales, continuando la sucesión vista en el primer apartado. El resultado de 2^{-1} representa visualmente la mitad exacta de una unidad entera, es decir, un medio. Por lo tanto, decimos que: $2^{-1}=1/2$.

Si continuamos la sucesión, ¿Qué pasará a continuación? partiendo de las conclusiones y especulaciones dadas por los estudiantes, se construye la teoría que se encuentra representada a continuación visualmente:



Finalmente, la sucesión completa se representará visualmente de la siguiente manera:



El resultado de las bases cuyas potencias son negativas, se expresan en fraccionarios, y las figuras incompletas  son la representación gráfica de estos números.

A manera de generalización se concluye que, como se expuso previamente en los temas de desarrollo, Una forma más simple de manejar exponentes negativos consiste en calcular el exponente (a^n) y posteriormente utilizar su Inverso ($1/a^n$).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Apliquemos: Realicemos ejercicios haciendo uso de los exponentes negativos.

Cabe resaltar que esta representación sirve para explicar otras propiedades de la potenciación, por ejemplo, un exponente negativo fraccionario:

$2^{-\frac{2}{3}}$ Sería igual a representar 2^{-2} y posteriormente aplicarle su respectiva raíz cúbica.

Dado el concepto aprendido sabemos que $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ Por tanto $2^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

2^{-2}

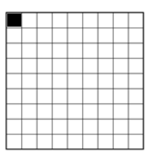
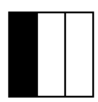
Este concepto se puede fortalecer con base en la representación visual, y complementar la explicación de esta o más propiedades. El objetivo de las actividades es que el estudiante tenga familiaridad en la aplicación de los conceptos y de allí pueda construir su propio conocimiento como se evidencia en el anterior ejemplo.

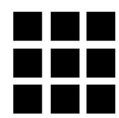
APLIQUEMOS: EXPONENTES NEGATIVOS CON FIGURAS

Representa con la figura indicada y completa cada tabla escribiendo las potencias según corresponda en cada ejercicio.

a) Completa la tabla y representa con cuadrados.

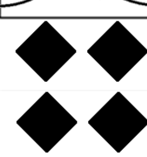
Potencia			**-1**	**0**			
Expresión		3^{-2}					3^3
Resultado	**1/27**				**3**	**9**	



b) Completa la tabla y representa con rombos.

Potencia			**0**			
Expresión	4^{-2}					4^3
Resultado		**1/4**				

c. Completa la tabla y representa con pentágonos.

Potencia	-2				
Expresión			5^0		
Resultado				5	

×5 ×5 ×5 ×5

÷5 ÷5 ÷5 ÷5

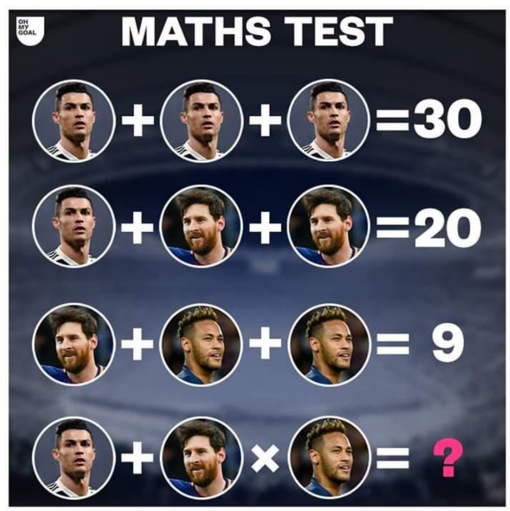
Anexo 2. Actividad 2, Expresiones algebraicas

Actividad 2: Expresiones algebraicas

El objetivo de la actividad, consiste en que el estudiante conozca y aplique las propiedades de las expresiones algebraicas con énfasis en el desarrollo de la visualización, haciendo uso de ejercicios matemáticos obtenidos en Facebook.

Observemos

Las siguientes imágenes tomadas de Facebook (Tomadas de las páginas *Gamology* & *Oh my Goal* respectivamente) enuncian los siguientes ejercicios matemáticos:



En ellas podemos observar que cada elemento, ya sea el ítem de un videojuego (En este caso Free Fire©) o un jugador de fútbol reconocido (Neymar, Messi, Cristiano Ronaldo, etc.) poseen un valor numérico determinado, el cual satisface el resultado final de la ecuación, y que este número puede ser cualquiera de los que conocemos. El docente pregunta acerca de las operaciones que se pueden evidenciar en estas imágenes y las propiedades de la aritmética que se deben utilizar, por ejemplo, que primero se hace la multiplicación antes de la suma, que la suma consecutiva de un mismo número es igual a la multiplicación del mismo por la cantidad de veces determinada, y que toda operación debe tener un resultado.

Construyamos

Se procede a analizar el ejercicio. Con base a la visualización, podemos evidenciar que ambos ejercicios tienen las mismas soluciones, por lo tanto, se trabajará en el que los estudiantes deseen. Los estudiantes analizarán el ejercicio y compartirán sus opiniones acerca del proceso mental del cuál harán uso para darle solución. El docente orientará y dará pistas para que los estudiantes logren este objetivo. Una vez pasado el tiempo determinado para la realización del ejercicio, se preguntará a los estudiantes sobre la solución del mismo. Al socializar la respuesta y demostrar su veracidad, los estudiantes han construido familiaridad con el ejercicio y el proceso adecuado para solucionarlo.

En este caso, tomaremos el ejercicio basado en ítems del videojuego. En la primera fila, la suma de tres armas SCAR (Referencia dada por los estudiantes) da como resultado 30, es decir, si cada una vale lo mismo y las tres suman 30, por lo tanto cada una vale 10.

Si 

entonces  =10, ya que 10+10+10=30

En la segunda fila, tenemos que 

Si  =10, por lo tanto, cada  =5 para que la ecuación sea cierta.

En la tercera fila, 

Si  =5, por lo tanto,  =2.

En la última fila dice que no podemos saber el resultado de la suma hasta que conozcamos el valor numérico de cada uno de los ítems. 

Partiendo del desarrollo del ejercicio tenemos que:

 =10  =5  =2

Por lo tanto, podemos reemplazar de la siguiente manera y dar con la solución del

ejercicio: 5 + 2 x 10 = 25 Teniendo en cuenta las propiedades de la aritmética, donde la multiplicación se realiza antes que la suma.

Contextualicemos: En el anterior ejercicio, asignamos valores numéricos a representaciones visuales (ítems de Free Fire). Es la teoría que se usa en las expresiones algebraicas, donde se asignan valores numéricos a las letras (algebra) y se les aplica las mismas propiedades que los números reales. Por ejemplo, el anterior ejercicio se puede expresar de la siguiente manera:

$$x + x + x = 30$$

$$x + y + y = 20$$

$$y + z + z = 9$$

$$x + y * z = 25$$

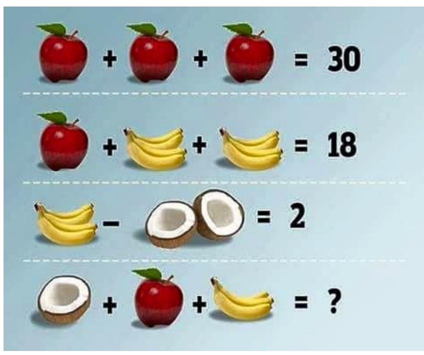
Donde $x = 10$, $y = 5$, y $z = 2$.

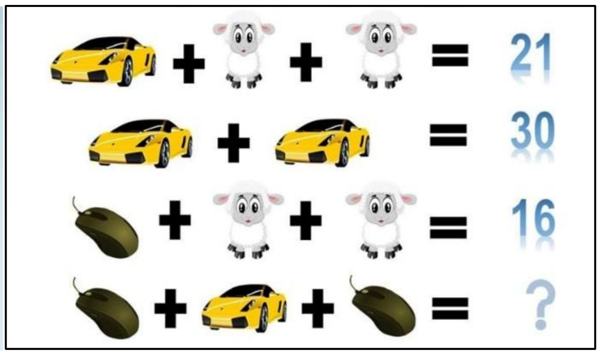
Se asignaron a las letras x, y & z valores numéricos reales. Estas letras se denominan variables porque su valor puede variar respecto al número que representen o incógnitas ya que, como al principio del ejercicio, no conocíamos su verdadero valor real. Estas expresiones pueden tomar el valor de cualquier número dentro del conjunto de los reales, ya sea, por tanto, naturales, enteros, racionales e irracionales. En cada una de las filas se aplican las propiedades de los reales respecto a las operaciones (Ejemplo de la fila 3: $x + y * z = 25$) y se toman las mismas operaciones que se aplican a los números: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, etc. Las variables, al representar números, se operan de la misma manera.

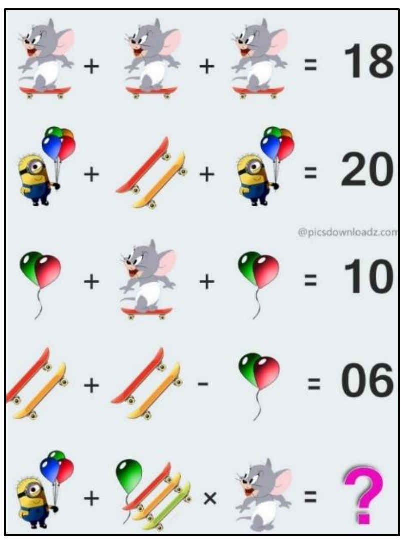
Apliquemos: Desarrollar ejercicios mediante la aplicación de las expresiones algebraicas.

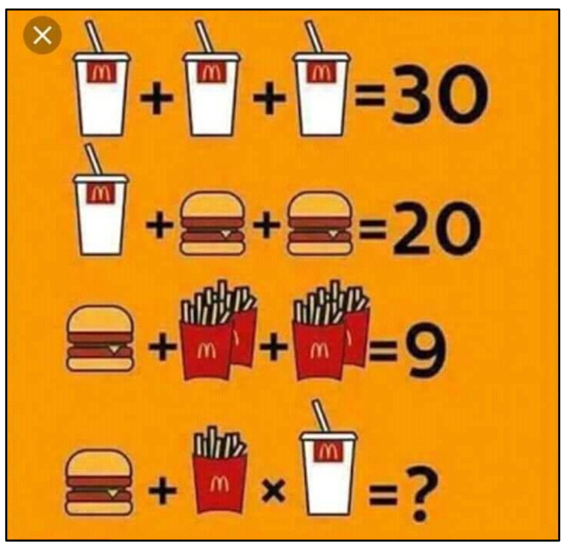
APLIQUEMOS: TEST ALGEBRÁICO DE FACEBOOK

En Facebook encontramos miles de cosas interesantes, como amigos, noticias del mundo, nuestros pasatiempos favoritos, memes, etc. ¿Pero alguna vez has visto retos matemáticos? A continuación, verás algunos de ellos, descubre y escribe el valor numérico de cada uno de los objetos:







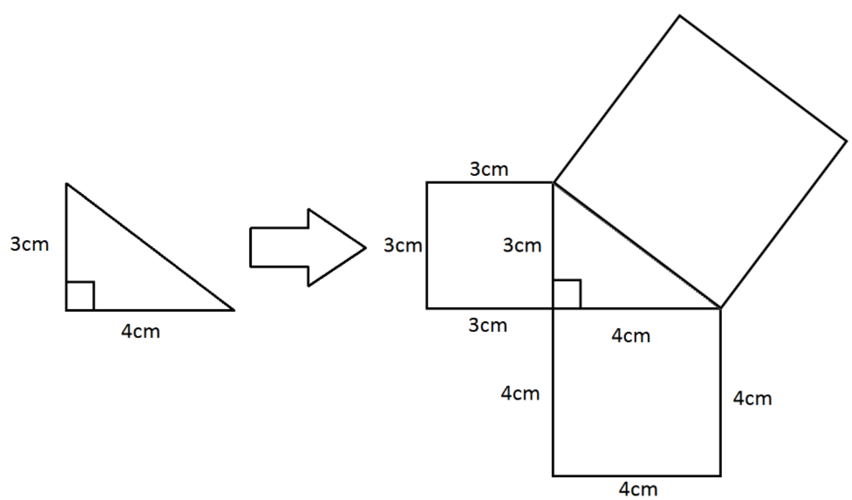


Imágenes tomadas de la siguiente página de Facebook: **Math Test.**

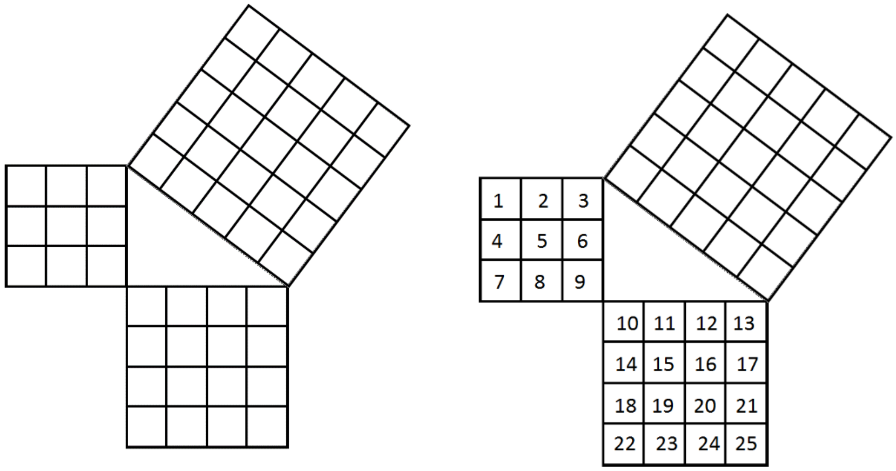
Actividad 3: Teorema de Pitágoras, demostración gráfica.

El objetivo de la actividad consiste en comprender y construir la demostración gráfica del Teorema de Pitágoras, haciendo uso de la visualización mediante el ejercicio de armar rompecabezas.

Observemos: Se ubica la siguiente imagen, ya sea de forma impresa o proyectada, para que los estudiantes la puedan observar. Se pregunta a los estudiantes acerca de las figuras que observan y las propiedades básicas que poseen. Por ejemplo: El triángulo es rectángulo porque posee un ángulo de 90º, el cruce de dos segmentos que forman un ángulo recto se denomina perpendicular, así como se pueden observar cuáles de los segmentos de los cuadriláteros regulares (de lados iguales) son paralelos, entre otras propiedades.



Construyamos: Los estudiantes construyen con lápiz y regla la figura observada de manera individual. Seguido de ello, se indica la partición en unidades de los cuadriláteros siguiendo la unidad de medida estándar utilizada, en este caso, los centímetros. Se indicará a los estudiantes enumerar en orden consecutivo comenzando desde el uno, los cuadros unitarios de las figuras menores, de la siguiente manera:



Finalmente, se recortarán los cuadros unitarios que tengan números escritos, y con ellos completaremos el cuadro mayor que no posee números, a manera de rompecabezas. Las estudiantes socializarán los resultados de manera grupal con el fin de complementar deducciones y deducir la teoría gráfica del Teorema de Pitágoras, que consiste en decir que la suma de las unidades que había en los cuadrados de los catetos es igual a las que caben en el cuadrado de la hipotenusa.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

En esta etapa, para esta actividad en particular, el objetivo es que los estudiantes deduzcan la demostración gráfica del Teorema de Pitágoras, con la guía implícita del docente, que va preguntando y orientando hasta llegar a ella. La actividad no termina aún, ya que se profundizará en la demostración gráfica del Teorema y la esencia propia para la construcción del concepto.

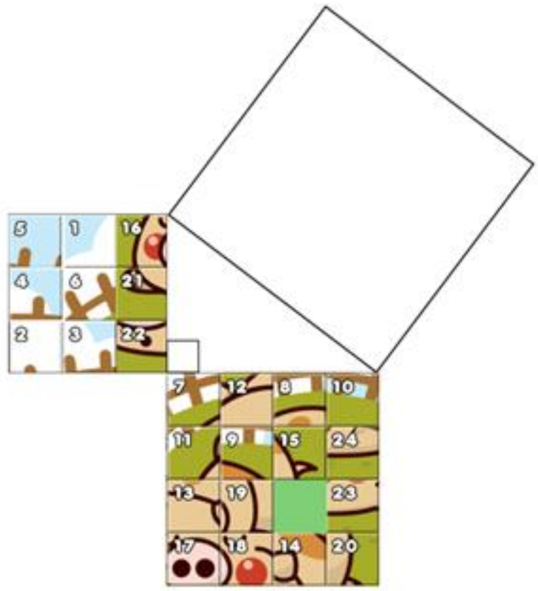
Gracias a la teoría del área de las figuras, los estudiantes puedes determinar el área de cada una de ellas:

a) Área del cuadrado = Lado al cuadrado.
b) Área del triángulo = Base por altura, dividido entre dos.

Por tanto, el área del cuadrado de 3cm es de $9cm^2$, el área del cuadrado de 4cm es de $16cm^2$, el área del cuadrado de 5cm es de $25cm^2$ y el área del triángulo es de $6cm^2$.

Hasta este punto, los estudiantes han repasado un concepto que se encuentra dentro del dominio. Se evidenciará que el área de los cuadriláteros, que es en el concepto en el que se es pertinente hacer énfasis para la construcción del Teorema de Pitágoras, corresponde al número de cuadros unitarios o de magnitud equivalente a un centímetro por lado. Es decir, el cuadrado de área $9cm^2$, posee en su interior 9 cuadros unitarios, el de área $25cm^2$ posee 25, y el de $16cm^2$ posee 16. Es probable que algún estudiante, a estas alturas realice la observación de que la suma de los cuadros unitarios de ambos cuadrados menores, sea mayor a los del cuadrado mayor. Si no es así, se buscará que los estudiantes lleguen a esta conclusión, siempre y cuando no se enuncie de forma explícita por parte del docente.

Se indicará a los estudiantes enumerar en orden consecutivo comenzando desde el uno, los cuadros unitarios de las figuras menores, de la siguiente manera:

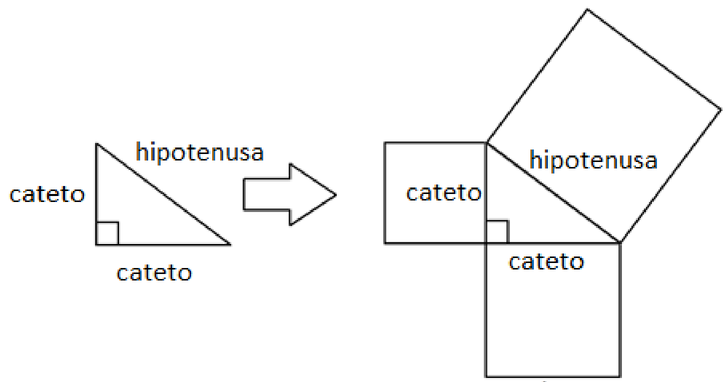


Finalmente, se recortarán los cuadros unitarios que tengan números escritos, y con ellos completaremos el cuadro mayor que no posee números, a manera de rompecabezas, hasta completar lo representado en la figura:

Nota: No es relevante que los cuadros unitarios se encuentren en estricto orden de menor a mayor, se pueden ubicar de mayor a menor, en desorden, etc.

Serán los estudiantes, contando con la orientación del docente, quienes lleguen por sí mismos a la conclusión de que la cantidad de cuadros unitarios de los cuadrados menores, es igual a los que se encuentran en el cuadrado mayor, y que por tanto la suma de las áreas de los cuadrados menores es igual al área del cuadrado mayor.

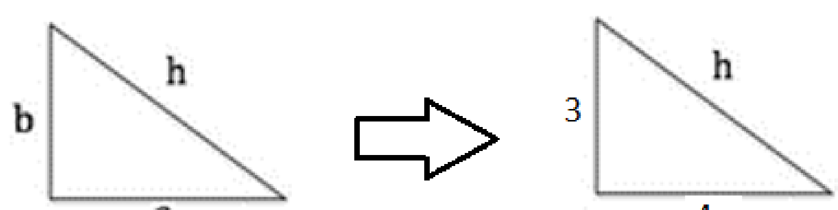
Contextualicemos: Se explica la teoría del Teorema de Pitágoras mediante la retroalimentación de la actividad realizada en los puntos 1 y 2. Los lados del triángulo se denominan catetos, el que es el más largo de los tres se denomina hipotenusa, y el objetivo final del Teorema de Pitágoras es saber cuánto mide este cateto y demostrar que la suma del área de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa.



Se explica que este Teorema se aplica únicamente en los triángulos que son rectángulos, como el del ejercicio, y se recalca donde se encuentran presentes las propiedades fundamentales de su desarrollo con el fin de poderlas determinar visualmente.

Es preciso hacer referencia al ejercicio previamente realizado, y se indica cuales son los catetos y la hipotenusa que se pueden observar.

La suma de los cuadrados de los catetos equivale al cuadrado de la hipotenusa:



$h^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $h^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$h = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad$ $h^2 = \sqrt{25}$

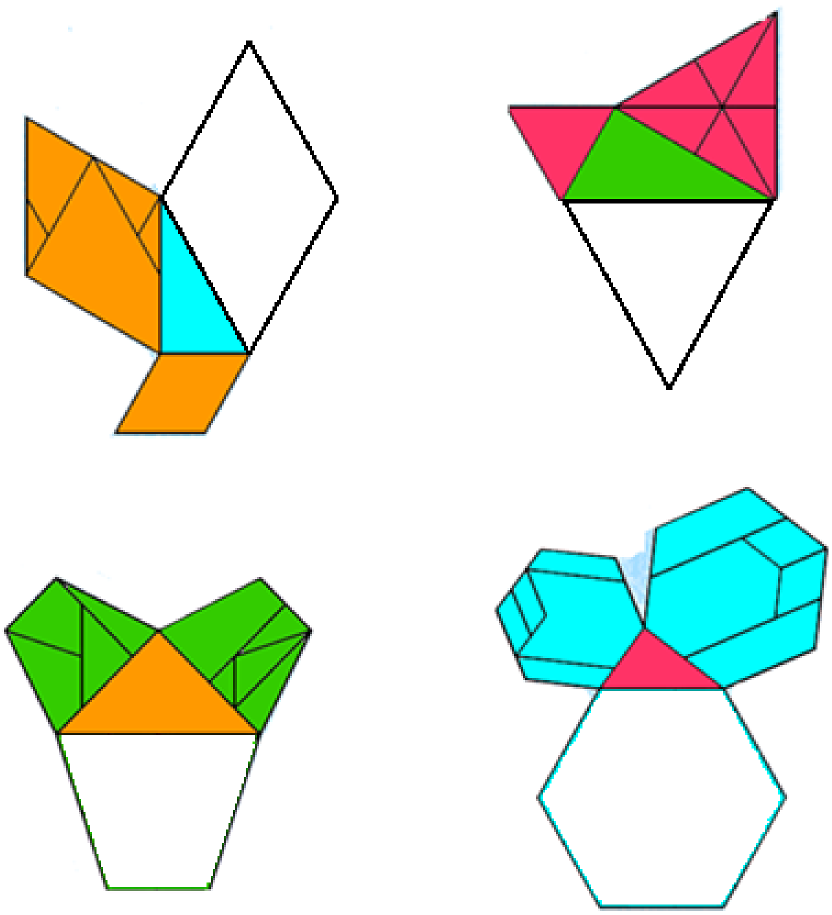
$h^2 = 5$

Apliquemos: Se refuerza la anterior explicación mediante ejercicios de aplicación en clase, donde se preguntará en cada avance de la construcción del mismo, acerca de las propiedades del Teorema ya contextualizadas. Incluye ejercicios de exploración inicial y de aplicación más formal del concepto.

Inicialmente se espera que los estudiantes estén en capacidad de hallar la hipotenusa de un triángulo y de realizar una demostración gráfica, haciendo uso del teorema de Pitágoras, concepto que, en este momento entra a hacer parte del conjunto de conocimientos que abarca el aprendizaje para el dominio. Se trabajará gradualmente la parte visual hasta el punto de llegar a resolver ejercicios formales como los que aparecen en las guías y libros de texto, los cuales exponen un enunciado y requieren para su realización de un procedimiento y respuesta específicos.

APLIQUEMOS: ROMPECABEZAS PITAGÓRICOS

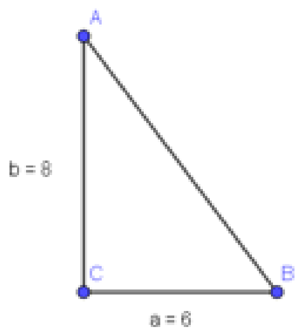
Observa las siguientes imágenes, recorta las figuras y arma los rompecabezas en la figura que no está coloreada.



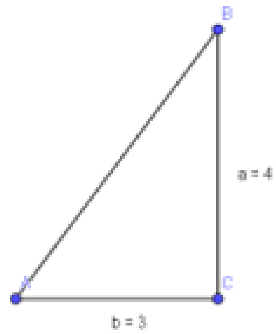
Tomado del sitio web: https://matelucia.wordpress.com/1-posicion-relativa-de-recta/5-2-paralelogramos-y-trapecios/

2. Hallar la hipotenusa de los siguientes triángulos y demostrar gráficamente.

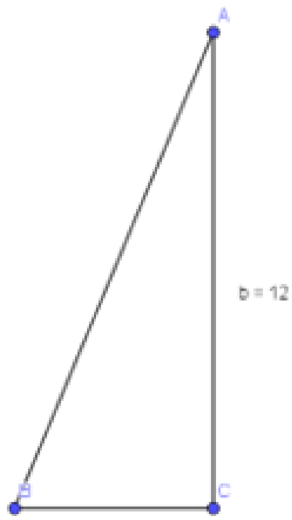
1.



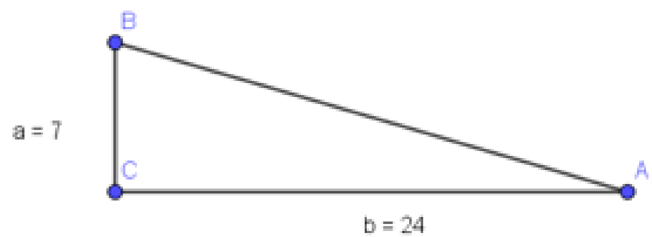
2.



3.



4.

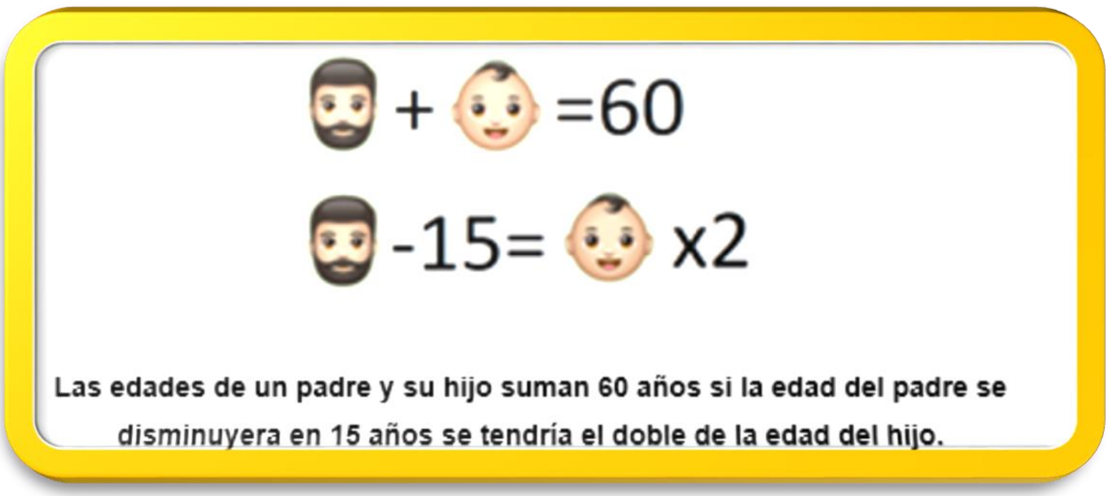


Anexo 4. Actividad 4, Sistemas de ecuaciones 2x2

Actividad 4: sistemas de ecuaciones 2x2

El objetivo de la actividad consiste en solucionar sistemas dos por dos aplicando las propiedades del método de sustitución, mediante la explicación por medio de la visualización.

Observemos: Se presenta el siguiente ejercicio a los estudiantes:



Se pregunta a los estudiantes acerca del objetivo de la actividad, que consiste en conocer las edades del padre y su hijo, haciendo uso de conceptos como las expresiones algebraicas, las operaciones que pueden observarse, y la representación que se le da a cada uno de los emoticones. Se pregunta acerca de las propiedades que se utilizan en el despeje de las variables, pasando los valores a cualquiera de los lados de la igualdad.

Construyamos: El objetivo de esta etapa, consiste en analizar correctamente las representaciones dadas, con el fin de saber qué operaciones vamos a realizar para darle solución al ejercicio. Por medio de preguntas, el docente irá construyendo la estructura del sistema mientras los estudiantes indagan acerca de qué variable representa cada dato y de tener precisión en la escritura de los signos y operaciones.

Se analizan cada uno de los datos:

🧔 + 👶 =60 Las edades de un padre y su hijo suman 60años.

🧔 -15= 👶 x2 Si la edad del padre se disminuyera en 15 años se tendría el doble de la edad del hijo.

Las edades que son valores numéricos, se encuentran representados por los emoticones del padre 🧔 y del hijo 👶. Es necesario hallar esos valores.

Procedemos a aplicar las propiedades de las expresiones algebraicas para solucionar el ejercicio. Comenzando por la ecuación 🧔 -15= 👶 x2 donde despejaremos la variable que prefieran los estudiantes. Si fuera el caso del padre quedaría de la siguiente manera: 🧔 = 👶 x2 + 15. Una vez obtenido este valor, podemos ver que ya sabemos a cuánto equivale el emoticón del padre, y podemos reemplazar en la segunda ecuación para que quede en términos del emoticón del hijo de la siguiente manera:

🧔 + 👶 =60

👶 x2 + 15

👶 x2 + 15 + 👶 =60

Operamos común y corriente aplicando propiedades de la aritmética y nos queda la siguiente expresión: 3👶 + 15 =60 procedemos a despejar 👶 y obtenemos que:

3👶 =45 ⇨ 👶 = $\frac{45}{3}$ ⇨ **[👶 =15]**

Una vez hallada una de las edades, se deduce la segunda; si 👶 =15 y 🧔 + 👶 =60 , por lo tanto:

👶
⇩
🧔 + 15 =60

[🧔 = 45]

Una vez sabiendo que 🧔 = 45 👶 =15 , concluimos que el padre tiene 45 años y el hijo tiene 15 años.

Contextualicemos: Dado el anterior ejercicio, podemos evidenciar que los emoticones que representan las edades del padre y del hijo se pueden representar con expresiones algebraicas, se puede hacer una trasposición de las palabras que hablamos a una connotación algebraica y que se puede solucionar el ejercicio haciendo uso de la teoría aplicada anteriormente.

x: Edad del padre.

y: Edad del hijo.

Dadas las variables se preguntará a los estudiantes acerca del método que utilizamos anteriormente para solucionar el ejercicio y denominamos las ecuaciones de la siguiente manera:

$x + y = 60$ Ecuación I

$x - 15 = 2y$ Ecuación II

Tenemos representada a manera algebraica la primera parte del ejercicio, donde las variables representan las edades del padre y su hijo. Se pregunta a los estudiantes acerca del paso a paso con el que se prosigue, teniendo como guía el desarrollo previo, y se deduce que se despeja una de las variables para dar solución al ejercicio de la siguiente manera:

$$x = 15 + 2y$$

Se reemplaza en la segunda ecuación el valor de x:

$$(15 + 2y) + y = 60$$

Se procede a dejar letras a un lado y números al otro:

$$15 + 3y = 60$$

$$3y = 60 - 15$$

$$y = \frac{45}{3}$$

Finalmente se encuentra el valor de la primera variable:

$$\boldsymbol{y = 15}$$

Sabemos (se pregunta primero) que esta *y* representa la edad del hijo, y que al sumarla con la de su padre nos da 60 como dice en la primera ecuación, por lo tanto:

$$x + 15 = 60$$

$$x = 60 - 15$$

$$\boldsymbol{x = 45}$$

Y encontramos la edad del padre y del hijo haciendo uso de las expresiones algebraicas.

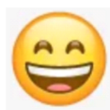
El concepto que hemos desarrollado se denomina sistema de ecuaciones 2x2 por el método de sustitución, y consiste en solucionar dos ecuaciones que comparten las mismas variables con operaciones y resultados distintos. El procedimiento que se utiliza radica en despejar una de las variables de una de las ecuaciones, y sustituir el valor encontrado en la otra ecuación de modo que quede expresada en términos de una única variable. Se despeja y se halla el valor de la variable enunciada, y posteriormente se resuelve el ejercicio, reemplazando el valor de la variable en cualquier ecuación para hallar el valor numérico de la segunda incógnita. Una vez halladas ambas variables, se escriben las respuestas y se da por concluida la aplicación del sistema.

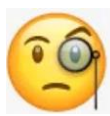
Apliquemos: Resolver los siguientes ejercicios haciendo uso de la teoría del sistema 2x2 por el método de sustitución:

APLIQUEMOS: ECUACIONES 2x2 CON EMOJIS

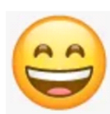
Ricardo y Manuel son dos hermanos, Ricardo se caracteriza por su gran sonrisa y su buen sentido del humor, Manuel es bastante metódico y considera que la seriedad es la base de la concentración. Si la diferencia de las edades de Ricardo y Manuel es 11 años y la suma de ambas edades es 25 años: ¿Cuál es la edad de cada uno?

Primero utiliza el método visual estudiado:

 **Edad de Ricardo: _________**

 **Edad de Manuel: _________**

¿cuántos años tenía Ricardo hace 5 años si se sabe, además, que es menor que Manuel?

 **- 5 años = ________**

Después representa de manera formal la situación y su solución.

Anexo 5. Evaluación docente 1

FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
JUICIO DE EXPERTOS

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Validación del material didáctico

Título del trabajo de grado:	Diseño de actividades con el uso de la visualización como herramienta para la enseñanza de las matemáticas
Estudiante:	Juan Sebastián Guerrero Rincón
Programa:	Licenciatura en Matemáticas
Modalidad:	Diseño de material

Para realizar la valoración de cada aspecto tenga en cuenta la siguiente escala de valoración: 5 (Excelente); 4 (Muy bueno); 3 (bueno); 2 (Regular) y 1 (Necesita Mejorar)

Criterios	Valoración	Observaciones
La estructura de las actividades responde a las etapas que se cumplen en la enseñanza matemática con base en la visualización.	5	
Las actividades tienen relación con los Derechos Básicos de Aprendizaje, Lineamientos Curriculares y Estándares de competencias que propone el MEN para grado octavo.	4	Aplicar los Conceptos matemáticos en situaciones reales.
Las actividades son apropiadas para ser usadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de los temas establecidos.	5	
Las imágenes usadas son pertinentes para ser trabajadas desde la visualización y promover el interés de los estudiantes	5	
Las sugerencias y ejemplos para abordar cada una de las actividades son claras y coherentes con el tema propuesto	5	
La presentación del material es pertinente y adecuado para el nivel de conocimiento de los estudiantes (diseño, tipo, formato de las imágenes)	5	
Las actividades son claras y promueven la creatividad y el trabajo colaborativo	5	
Las actividades son apropiadas para la población de estudiantes a la cual va dirigida (grado octavo)	4	Introducir el lenguaje algebraico como lenguaje Común.
El diseño de las actividades puede ayudar a despertar interés de los estudiantes por el aprendizaje de los temas propuestos	5	
La guía del docente es adecuada y permite usar el material de manera adecuada acorde con los referentes teóricos seleccionados (Visualización en las matemáticas)	5	
El material invita a ser implementado por otros docentes	5	

Observaciones generales que permitan mejorar el material:

UAN
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
JUICIO DE EXPERTOS

Introducir La historia de la matemática Como herramienta pedagógica.
Proyectar La matemática como defensa para el futuro

Nombre del docente que realiza la valoración: Edinson Alberto Lara Silva

Formación (pregrado y posgrado): Matemáticas

Experiencia Docente: 5 años

Fecha de diligenciamiento: 23/05/2019

Firma:

Anexo 5. Evaluación docente 2

Validación del material didáctico

Título del trabajo de grado:	Diseño de actividades con el uso de la visualización como herramienta para la enseñanza de las matemáticas
Programa:	Licenciatura en Matemáticas
Modalidad:	Diseño de material

Para realizar la valoración de cada aspecto tenga en cuenta la siguiente escala de valoración: 5 (Excelente); 4 (Muy bueno); 3 (bueno); 2 (Regular) y 1 (Necesita Mejorar)

Criterios	Valoración	Observaciones
La estructura de las actividades responde a las etapas que se cumplen en la enseñanza matemática con base en la visualización.	4	Son pertinentes, sin embargo, es importante desarrollar actividades de refuerzo y aplicación a la solución de problemas para que se logre el objetivo del material didáctico y la visualización en matemáticas.
Las actividades tienen relación con los Derechos Básicos de Aprendizaje, Lineamientos Curriculares y Estándares de competencias que propone el MEN para grado octavo.	5	Si son pertinentes al grado.
Las actividades son apropiadas para ser usadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de los temas establecidos.	5	Si son apropiadas para los temas, de sistemas de ecuaciones lineales, teorema de Pitágoras y potenciación.
Las imágenes usadas son pertinentes para ser trabajadas desde la visualización y promover el interés de los estudiantes	4	Si son pertinentes, pero se pueden relacionar más con la parte simbólica, grafica, y algebraica, que es el tópico del algebra en grado octavo.
Las sugerencias y ejemplos para abordar cada una de las actividades son claras y coherentes con el tema propuesto	4	Si son coherentes, falta hacer actividades de afianzamiento o refuerzo.
La presentación del material es pertinente y adecuado para el nivel de conocimiento de los estudiantes (diseño, tipo, formato de las imágenes)	5	Son apropiadas y muy lúdicas para los niños de grado octavo
Las actividades son claras y promueven la creatividad y el trabajo colaborativo	3	Si son acordes, pero faltan proponer mas actividades para trabajar de manera colaborativa entre estudiantes y poder afianzar los conceptos desarrollados en las

Criterios	Valoración	Observaciones
		etapas de observación y de construcción.
Las actividades son apropiadas para la población de estudiantes a la cual va dirigida (grado octavo)	4	Falta profundizar mas en actividades de afianzamiento y refuerzo.
El diseño de las actividades puede ayudar a despertar interés de los estudiantes por el aprendizaje de los temas propuestos	4	
La guía del docente es adecuada y permite usar el material de manera adecuada acorde con los referentes teóricos seleccionados (Visualización en las matemáticas)	4	Seria importante conocer la guía al estudiante para ver como quedaría el material a la vista de los estudiantes y si es coherente con lo que se quiere plasmar en la del docente
El material invita a ser implementado por otros docentes	4	Si puede ser empleado por otros docentes.

Observaciones generales que permitan mejorar el material:

Se puede profundizar mas en los conceptos, y en la solución de problemas para que el estudiante vea la aplicación de los temas de manera mas practica y llevarlos a que logren la representación algebraica que se necesita en grado octavo. Hay que hacer actividades de refuerzo o de practica a los estudiantes, porque en este documento no se ven reflejados.

Nombre del docente que realiza la valoración: Diana Patricia Cardenas Cuesta

Formación (pregrado y posgrado): Licenciada en Física, Especialista en Matematica Aplicada, Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

Experiencia Docente: 20 años de experiencia en Educación Básica, Media y Docencia universitaria.

Fecha de diligenciamiento: 24 de mayo de 2019.

Firma: 

c.c. 52542582 de Bogotá D.C.