Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN TIC CON PROBLEMAS RETADORES

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Robinson Junior Conde Carmona

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN TIC CON PROBLEMAS RETADORES

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Robinson Junior Conde Carmona

DIRECTOR DE TESIS

Doctor: Nicolás Bolívar

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, diciembre de 2023

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a Dios, por ser mi guía y darme la fuerza para alcanzar este significativo logro en mi vida académica y personal.

Agradezco de manera especial al Dr. Nicolás Bolívar, quien no solo fue mi tutor en este viaje académico, sino también un guía que me orientó, mostrándome el camino con su incansable labor y dedicación para que este trabajo llegara a buen puerto.

Mi madre, columna vertebral de mi vida, merece un reconocimiento especial por ser mi inspiración y mi fuerza constante. A mi amada esposa, mi agradecimiento infinito por su apoyo inquebrantable y por ser mi compañera en cada paso de este recorrido.

Extiendo mi gratitud a todos mis profesores, quienes con su sabiduría y experiencia enriquecieron mi formación. En particular, a la Dra. Mary Falk, cuyas orientaciones y enseñanzas han transformado mi perspectiva y han contribuido enormemente a mi crecimiento desde que inicié el Doctorado. Asimismo, agradezco al Dr. Osvaldo Rojas, al Dr. Gerardo Chacón, al Dr. Rafael Sánchez, a la Dra. Diana y a todos los demás profesores del programa por sus valiosos aportes que dieron forma y sustancia a este trabajo.

Mis compañeros Ellery Chacuto y Sandra Rojas han sido un pilar de apoyo, y su aliento y camaradería han sido invaluables en este proceso. Gracias por estar siempre presentes.

A mis amigos Iván, Jonathan, Andrés, Aldair y Luis, les agradezco por su amistad sincera, por creer en mí y por ser parte esencial de este viaje.

Finalmente, y no menos importante, a mis estudiantes, que contribuyeron directa o indirectamente al éxito de este proyecto, les extiendo mi más sincero agradecimiento.

DEDICATORIA

A Dios,

A mi madre,

A mi esposa.

SÍNTESIS

El presente trabajo de investigación se centra en la construcción y validación de un modelo didáctico destinado al fortalecimiento de los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico en profesores de matemática en formación. Este modelo se desarrolla con el objetivo principal de integrar la resolución y creación de problemas retadores que utilizan las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como herramienta esencial. A través de un análisis detallado, se caracterizan las competencias TIC y el pensamiento tecnológico de los docentes en formación, identificando sus habilidades de razonamiento y formas de entender en la resolución de problemas. Además, se examina el pensamiento pedagógico de estos profesores, proporcionando una visión integral de su formación y enfoque educativo.

El modelo didáctico propuesto se distingue por su enfoque centrado en el estudiante, promoviendo la autonomía, el pensamiento crítico y la construcción activa del conocimiento. A diferencia del modelo TPACK, este modelo enfatiza la integración de los pensamientos pedagógico, tecnológico y matemático a través del planteamiento y resolución de problemas, permitiendo una formación más holística y aplicada.

La validación del modelo demuestra su eficacia y relevancia en el contexto educativo actual, destacando su capacidad para adaptarse a diferentes contextos y necesidades de los estudiantes. Además, se evidencia cómo los profesores de matemática en formación enriquecieron su práctica pedagógica y su formación tecnológica, preparándolos para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

En conclusión, este trabajo aporta una herramienta valiosa para la formación de docentes de matemática, ofreciendo un enfoque innovador que integra la tecnología, la pedagogía y la matemática de manera efectiva y significativa.

ABSTRACT

This research focuses on the construction and validation of a didactic model aimed at strengthening mathematical, technological, and pedagogical thinking in pre-service mathematics teachers. This model is developed with the primary objective of integrating the resolution and creation of challenging problems using Information and Communication Technologies (ICT) as an essential tool. Through a detailed analysis, the ICT competencies and technological thinking of the teachers in training are characterized, identifying their reasoning skills and ways of understanding in solving challenging problems. Furthermore, the pedagogical thinking of these teachers is examined, providing a comprehensive view of their training and educational approach. The proposed didactic model stands out for its student-centered approach, promoting autonomy, critical thinking, and active knowledge construction. Unlike the TPACK model, this model emphasizes the integration of pedagogical, technological, and mathematical thinking through problem posing and problem-solving, allowing for a holistic and applied approach. The validation of the model demonstrates its effectiveness and relevance in the current educational context, highlighting its ability to adapt to different contexts and student needs. Additionally, it is evident how pre-service mathematics teachers enriched their pedagogical practice and technological training, preparing them to face the challenges of the 21st century. In conclusion, this work provides a valuable tool for the training of mathematics teachers, offering an innovative approach that effectively and meaningfully integrates technology, pedagogy, and mathematics.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

En un escenario post pandémico, la tecnología comenzó a ser parte del día a día en la sociedad actual, tomando un rol significativo y trascendental en diferentes contextos que tradicionalmente no las utilizaban; actualmente, no asumir los retos de inserción de la tecnología en las aulas pareciera una postura inadecuada en esta coyuntura (Jensen & Skott, 2022).

En ese sentido, muchas organizaciones e investigadores han puesto interés en la incursión de la tecnología; no obstante, en algunos campos como el educativo, el éxito de la tecnología va más allá de solo usarla, pues el adecuado uso que los educadores le den a la misma, y las distintas competencias con las que estos cuenten a nivel personal, social y profesional, son necesarios para poder enseñar debido a los continuos cambios que se imponen en todos los campos y actividades, así como los rápidos avances que presenta la sociedad en torno al uso generalizado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC (Rakes, et al, 2020). Por tal motivo, en el trabajo de Bush et al. (2021) se resalta que las TIC contribuyen en nuevos estilos de aprendizaje, comunicación y modos de interacción con las fuentes del saber y el conocimiento como vehículos en la circulación, el uso, acceso, representación y planteamiento de la información.

Bajo ese orden de ideas, la escuela debe integrar también la nueva cultura: alfabetización digital, fuente(s) de información, instrumento(s) de productividad para realizar trabajos, material didáctico, instrumento(s) cognitivo(s), de manera que la escuela acerque a los estudiantes la cultura de hoy, no a la cultura de ayer (Yeager et al, 2021). No obstante, la inserción de las TIC en la educación depende en gran medida del docente y de la preparación que posea para su incorporación en los procesos de enseñanza/aprendizaje, en referencia a saber aprovechar los recursos didácticos que ofrecen estos nuevos medios y a su vez capacitar a los alumnos para la recepción y asimilación correcta de los mensajes que dichos medios transmiten (Kaplon-Schilis et al, 2021).

Por ello, una de las tareas de gran relevancia que debe asumir la educación es el desarrollo formativo tanto de maestros en formación inicial como de maestros en ejercicio (Valbuena, Conde, & Ortiz, 2018), siendo que un docente preparado puede fortalecer las capacidades de sus estudiantes dependiendo de cuales sean sus intereses; en este caso, específicamente, la formación TIC, pues el profesorado es el eje central de la política de integración de las TIC en el sistema educativo (Makel, 2021).

Actualmente, las TIC han dado un nuevo enfoque a la forma de desarrollar la interacción con el conocimiento en el aula, abriendo paso a la utilización de nuevas herramientas de apoyo a la docencia. La Unesco (2004), citada por León et al (2014), afirma que las nuevas tecnologías generan que el énfasis de la profesión docente se transforme, desde una perspectiva centrada en el profesor y basada en clases magistrales, hacia una formación fundamentada principalmente en el estudiante dentro de unos ambientes de aprendizaje interactivos.

A diferencia de lo anterior, la estructura de los currículos de las licenciaturas en matemáticas en Colombia se organiza predominantemente en siete componentes: disciplinar, pedagógico, didáctico, tecnológico, investigativo, práctico y contextual profesional. Del total de asignaturas que conforman estas propuestas curriculares, un 39.07% corresponde a formación matemática, 21.47% a saberes profesionales, 11.66% a formación didáctica, 10.97% a formación pedagógica, 5.48% a práctica y 5.40% a formación en investigación. Los componentes con menor representación en la formación son el tecnológico (TIC), con un 4.94%, y el de diversidad, que es el más crítico, con un 1.01%.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, es claro que en las escuelas escasamente se obtienen productos por parte de la población estudiantil a través de la aplicabilidad de las TIC, especialmente porque el cuerpo docente no ajusta sus clases al cumplimiento de un objetivo en específico a partir de un currículo establecido. Lo que se pierde de vista es que las TIC trascienden positivamente en la significatividad y calidad de la enseñanza-aprendizaje; aporta, entre otros beneficios, la flexibilización de la enseñanza, el aprendizaje cooperativo, la enseñanza individualizada y el autoaprendizaje y, por consiguiente, el desarrollo integral de la personalidad de los educadores (Beesley, 2021).

Justificación de la investigación

Está investigación es necesaria para los profesores de instituciones educativas de la ciudad de Barranquilla, debido a que hasta el momento no existe un estudio enfocado en la formación de los docentes de matemáticas en TIC y qué efecto tiene ésta en el desarrollo del departamento del Atlántico. Esto podría ser clave para determinar los pasos a seguir en formación docente en el departamento del Atlántico, si los estudiantes están recibiendo la formación adecuada que cumpla con los nuevos retos de la actualidad.

Este trabajo se justifica en los TSG propuestos por el ICMI 14, entre los cuales se tiene en la línea formación de profesores de matemática los siguientes: el TSG 29 (Formación docente de matemática previa al servicio de secundaria), el TSG 30 (Educación de profesores de matemática en servicio y desarrollo profesional de profesores de matemática a nivel primario) y TSG 31 (Formación de profesores de matemáticas en servicio y Desarrollo profesional de profesores de matemáticas a nivel Secundario). Además, en la línea de tecnologías, se encuentra el TSG 25 (el papel y el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática de las matemáticas a nivel secundario) y TSG 14 (Enseñanza y aprendizaje de programación y algoritmos).

Por otra parte, Yu et al. (2019) aseguran que la incorporación de las TIC al trabajo educativo se puede clasificar en tres visiones: 1) habilitar al docente en el uso de programas libres que se encuentran en la red; 2) desarrollar contenidos que puedan ser estudiados en línea, y 3) incorporar las TIC al aula tomando criterios psicopedagógicos para crear ambientes de aprendizaje con la construcción de secuencias didácticas. Esto muestra que la adecuada preparación de los docentes en su praxis TIC repercute directamente en el cumplimiento de objetivos académicos en donde estas sean utilizadas, ya que en muchas ocasiones es costumbre de los cuerpos docentes tener el paradigma de que aplicar las TIC, es solo utilizar elementos tecnológicos, lo cual es algo mínimo si se tiene en cuenta que a través de las mismas se visiona potenciar y fortalecer competencias de la población estudiantil a través de secuencias didácticas.

En la actualidad, la influencia de las TIC en el aula ha traído como consecuencia la reestructuración de las prácticas pedagógicas docentes, sumado a la necesidad de fortalecer sus competencias en relación con las habilidades tecnológicas para el desarrollo de buenas prácticas en su campo profesional (Niess, 2021), esto constituye uno de los propósitos educativos de calidad propuestos por el Estado Colombiano y de cualquier sistema educativo que se encuentra permeado por los avances tecnológicos y el desarrollo de la sociedad. Diferentes organismos internacionales y gubernamentales, así como asociaciones de profesionales, han asumido la responsabilidad de diseñar y definir los estándares y lineamientos que determinan las competencias TIC de los docentes, con el propósito de hacer realidad la integración de estas tecnologías en los contextos educativos y en las prácticas pedagógicas de aula (Gleason, 2021). Esto, de una u otra forma, repercute en la formación docente que por muchos años primó en las escuelas, siendo que la reflexión de la praxis de cada docente se ha convertido en eje central en búsqueda de rompimiento de paradigmas y esquemas a los cuales las escuelas venían acostumbradas y que no van en la misma dirección que el mundo actual ofrece; según Valbuena, Conde, & Padilla (2018), las reflexiones en los docentes aportan elementos a su formación, lo cual constituye un proceso esencial si se busca alcanzar desarrollos en la educación.

En consecuencia, al estudiar la formación de profesores en tecnologías, siempre se encontrarán elementos interesantes y significativos para la comunidad educativa, ya que Hernández, Sánchez y Romero (2019) señalan que es importante que la comunidad educativa reflexione sobre los diversos conocimientos impartidos a los futuros docentes.

Es esencial determinar si un profesor posee las habilidades necesarias para utilizar la tecnología de manera efectiva, accediendo a la información cuando la necesite y garantizando aprendizajes significativos. Niess (2021) destaca que los docentes pueden supervisar las actividades y asistir a los estudiantes en áreas difíciles. Con el tiempo, los entornos virtuales se han consolidado como herramientas valiosas para la educación (Kaplon-Schilis et al, 2021), permitiendo a los estudiantes avanzar a su propio ritmo. En resumen, las TIC ofrecen oportunidades significativas para el desarrollo en áreas culturales, científicas y sociales.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo fortalecen las TIC, por medio de problemas retadores, los pensamiento matemático, pedagógico y tecnológico en profesores en formación?

Se precisa como **objeto de estudio** La Formación del profesorado de matemáticas.

Y se infiere como **objetivo general** Construir un modelo didáctico para el fortalecimiento de los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico por medio de la resolución y creación de problemas retadores que utilizan las TIC, en profesores de matemática en formación.

Como o**bjetivos específicos** se tienen:

1. Caracterizar las competencias TIC y el pensamiento tecnológico identificados en los docentes de matemática en formación.

2. Caracterizar habilidades de razonamiento (formas de entender y de pensar) en resolución de problemas retadores con profesores de matemática en formación.

3. Caracterizar el pensamiento pedagógico de los profesores de matemática en formación.

4. Diseñar un modelo didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático por medio de la resolución y creación de problemas retadores que utilizan las TIC, en profesores de matemática en formación.

5.Evaluar (validar) el modelo didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en los procesos de formación de profesores de matemática y la mediación de las tecnologías para resolver problemas retadores.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

¿Cómo se caracterizan las habilidades (competencias, pensamiento, conocimiento) TIC identificadas de los docentes de matemática en formación?

¿Cómo son las características de las habilidades de razonamiento (formas de entender y de pensar) en resolución y creación de problemas retadores con profesores de matemática en formación?

¿Cómo son las características del pensamiento matemático, pedagógico y tecnológico que permiten construir un modelo integrado para una formación efectiva de los profesores?

¿Cómo construir y validar un modelo didáctico que utilice la creación y resolución de problemas retadores para el fortalecimiento del proceso de enseñanza aprendizaje en profesores de matemáticas en formación?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Construir el estado del arte.
2. Determinar el marco teórico que sustenta el trabajo.
3. Diseñar instrumentos y actividades para la recolección de la información.

4. Diseñar una metodología que permita construir un modelo didáctico para la formación de profesores.
5. Analizar los resultados.
6. Realizar un informe final.

Con estas tareas de investigación, se busca no solo desarrollar un modelo didáctico robusto y efectivo, sino también contribuir al avance del conocimiento en la formación de profesores y la integración de los pensamientos pedagógico, tecnológico y matemático.

El **aporte práctico** radica en un sistema de actividades e instrumentos que permitan el favorecimiento de la formación de los docentes de matemática en las áreas tecnológicas, pedagógica y del contenido (matemática) por medio de la resolución y creación de problemas retadores.

El **aporte teórico** de esta investigación reside en la construcción de un modelo didáctico que se apoya en las dimensiones del TPACK (Tecnología, Pedagogía y Conocimiento Matemático) para estimular el pensamiento específico en estas categorías, empleando los problemas retadores como elemento fundamental en la formación de profesores de matemáticas.

El trabajo se estructura en cinco capítulos: el primero revisa el estado del arte, destacando la formación docente en tecnología y el análisis del pensamiento matemático y tecnológico. El segundo capítulo detalla el marco teórico, abordando el modelo TPACK y las bases de la resolución y planteamiento de problemas matemáticos. La metodología, incluyendo diseño y técnicas de investigación, se expone en el capítulo 3, mientras que el cuarto capítulo propone un modelo didáctico que integra los distintos tipos de pensamiento con la resolución de problemas. El quinto presenta los resultados, la validación del modelo y en el último capítulo se detallan las conclusiones y recomendaciones, finalizando con las referencias bibliográficas.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

1.1. Introducción

En este capítulo se pretende indagar y dar respuesta a las preguntas: ¿cuál es el estado en la literatura de la formación de profesores en tecnología?, ¿qué constructos definen su naturaleza?, ¿cómo ha sido su caracterización?, ¿qué caracteriza a las investigaciones relacionadas con el planteo y resolución de problemas en profesores de matemática en formación?

Las fuentes consultadas evidencian claramente dos vertientes. Una, el razonamiento como forma de pensar que tiene como precursores a Jere Confrey y Guershon Harel, y la otra desde la formación en tecnología de profesores. A esto se debe el orden y organización del capítulo.

1.2. Investigaciones relacionadas con las TICs, pensamiento tecnológico y formación de profesores de matemática en tecnología

1.2.1 Teaching Digital Competence in Europe during the COVID-19 pandemic[1]

El trabajo desarrollado por Portillo y Romero en 2022 tuvo interesantes resultados que llevan a reflexionar sobre la necesidad de hacer investigaciones en el campo de la formación de profesores en tecnología. Lo llamativo de esta investigación está en la forma como los investigadores midieron la percepción del profesorado sobre su propio desempeño cuando se vio en la necesidad utilizar tecnologías debido a la pandemia del COVID-19. Con una amplia muestra bajo un estudio complemente estadístico se obtuvo un total de 4.586 respuestas. Este estudio señaló que los docentes presentaron carencias profundas en su formación en competencias digitales, además de una evidente resistencia por utilizar o mediar el proceso

[1] Portillo-Berasaluce, J., Romero, A., & Tejada, E. (2022). Teaching Digital Competence in Europe during the COVID-19 pandemic. *Revista Latinoamericana De Tecnología Educativa - RELATEC*, 21(1), 57-73. https://doi.org/10.17398/1695-288X.21.1.57

educativo con el uso de las TIC. Entre los hallazgos más significativos se tiene que a menor grado de enseñanza más es la brecha digital que se presenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.2.2. Pre-service Teachers' reflections on Attitudes Towards Teaching and Learning Mathematics with Online Platforms at School: A Case Study in the Context of a University Online Training[2]

En el artículo, Dilling & Vogler (2022) analizan las reflexiones de profesores de matemática en formación sobre el uso de herramientas tecnológicas y/o plataformas en línea al servicio de la enseñanza de las matemáticas. La muestra utilizada es un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas pertenecientes a un semillero de investigación de la Universidad de Siegen en Alemania. El estudio buscó encontrar predictores que mostraran las actitudes de los estudiantes para ser profesores en cuanto al uso de las TIC en el aula de clase de matemática.

En esta investigación, los estudiantes hicieron parte de un proceso de formación en el uso de plataformas digitales, esencialmente Moodle, no en una herramienta específica de la enseñanza de las matemáticas, y la formación en tecnología fue desde un ámbito muy general.

De esta manera, la mayoría de las declaraciones de los futuros docentes, tanto antes como después de la formación, se asociaron con el componente cognitivo de su actitud. Aunque casi no tienen experiencia previa y, por lo tanto, no tienen habilidades y destrezas sofisticadas para manejar plataformas de aprendizaje, los futuros maestros expresan creencias concretas sobre las posibilidades y los desafíos de las plataformas en línea antes de la capacitación. Dos aspectos aparecieron con especial frecuencia, a saber, el aumento de la motivación intrínseca de los alumnos en clase y las oportunidades de

[2] Dilling, F., & Vogler, A. (2023). Pre-service teachers' reflections on attitudes towards teaching and learning mathematics with online platforms at school: A case study in the context of a university online training. *Technology, Knowledge and Learning*, 28(3), 1401-1424.

visualización. Además, mencionaron la descentralización del proceso de aprendizaje que puede atribuirse al cambio y transformación del proceso de aprendizaje en general.

Como conclusión, los hallazgos empíricos sobre el uso de plataformas de aprendizaje muestran que éstas son relevantes para la enseñanza centrada en el alumno y la cooperación con socios externos. A pesar de ello, el uso de las plataformas de aprendizaje en la escuela suele limitarse a la función de correo electrónico y el suministro de archivos, principalmente en listas de enlaces.

1.2.3. Training in-service teachers through individualized technology-related mentorship[3]

Baser et al (2021) muestran en su trabajo cómo siguieron los desarrollos recientes en las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), y cómo los educadores no pueden optar por no usar la tecnología en entornos educativos.

Sin embargo, los estudios de investigación han indicado que la falta de conocimiento de las TIC por parte de los docentes se considera una de las barreras para una integración tecnológica exitosa. En este marco, este estudio tuvo como objetivo documentar las percepciones de los profesores en servicio sobre los procesos de tutoría individualizada relacionada con la tecnología (ITR) basados en el modelo TPACK.

La tutoría de ITR brindó sesiones de tutoría uno a uno que duraron dos semestres en las escuelas donde trabajaban los maestros. La tutoría ITR, que involucra la colaboración entre el mentor y el docente, no se limita únicamente al apoyo en necesidades tecnológicas. También incluye la preparación de materiales didácticos específicos para la enseñanza de contenidos de la materia. A través de una metodología mixta, se recogieron datos cuantitativos y cualitativos de los 31 profesores participantes (17 de matemáticas y 14 de lengua). Al final del estudio, se examinó cuantitativamente el cambio en los niveles TPACK percibidos de los docentes y se apoyó cualitativamente con sus puntos de vista sobre este proceso. Se

[3] Baser, D., Akkus, R., Akayoglu, S., Top, E., & Gurer, M. D. (2021). Training in-service teachers through individualized technology-related mentorship. *Educational Technology Research and Development*, 69, 3131-3151.

encontró que las construcciones TPACK relacionadas con la tecnología aumentaron significativamente a través de la tutoría individual debido a su ambiente no amenazante, que permite un tiempo y contenidos flexibles y aborda las necesidades de los maestros. A la luz de estos hallazgos, la tutoría ITR puede sugerirse para el desarrollo profesional de los docentes y considerarse para la capacitación de docentes en servicio.

1.2.4. Investigation of Turkish mathematics teachers' proficiency perceptions in using information and communication technologies in teaching[4]

Birgin y otros en el 2020 tuvieron como propósito de su trabajo investigar el dominio percibido de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) de los profesores turcos de matemáticas en la enseñanza. Este estudio se realizó mediante el método de encuesta descriptiva. El grupo de estudio estaba formado por 242 profesores de matemáticas que trabajaban en escuelas intermedias (5. ° a 8. ° grado) y secundarias (9. ° a 12. ° grado) en Turquía.

Los datos se recopilaron a través del "Formulario de información personal" y la "Escala de competencia en tecnologías de información y comunicación percibida" desarrollada por los investigadores de este estudio. Los datos fueron analizados con estadística descriptiva, prueba t de muestras independientes, ANOVA y prueba de correlación de Pearson. Como resultado de la investigación, se descubrió que, si bien los profesores de matemáticas turcos utilizan las TIC principalmente para fines de comunicación y redes sociales, tienen conocimientos y experiencia insuficientes en el uso de las TIC con fines didácticos. Se encontró que la competencia percibida de los profesores de matemáticas en el uso de las TIC no difirió significativamente en términos de género, mientras que sí se encontraron diferencias significativas en términos de años de experiencia profesional, nivel de enseñanza y formación en instrucción asistida por

[4] Birgin, O., Uzun, K., & Mazman Akar, S. G. (2020). Investigation of Turkish mathematics teachers' proficiency perceptions in using information and communication technologies in teaching. *Education and Information Technologies*, 25(1), 487-507.

computadora (CAI). También se reveló que había una correlación positiva significativa entre las percepciones de la competencia de los profesores de matemáticas en el uso de las TIC y su frecuencia de uso de la instrucción asistida por computadora y la pizarra inteligente.

Se sugirió organizar actividades de capacitación en servicio para docentes sobre software y el uso de las TIC en la enseñanza.

1.2.5. Teachers' perceptions on technology-assisted mathematics teaching and the interactive activities[5]

Biber y otros en el 2022 mostraron que los métodos y técnicas utilizados por los docentes tienen un lugar importante sobre la base de las perspectivas negativas y los fracasos de muchos estudiantes hacia las matemáticas. La integración de la tecnología en los entornos de aprendizaje de las matemáticas es inevitable, ya que es de gran importancia crear entornos de aprendizaje ricos para aumentar el interés y la comprensión de las matemáticas de los estudiantes.

Este estudio tuvo como objetivo examinar tanto la efectividad de las actividades interactivas asistidas por tecnología que hacen que los estudiantes aprendan matemáticas con diversión y amor, como las percepciones de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas asistida por tecnología.

Para ello, se prepararon 50 actividades interactivas de base tecnológica basadas en los temas de "números exponenciales y raíces cuadradas", las cuales fueron seleccionadas tomando la opinión de 10 profesores de matemáticas que se encontraban enseñando activamente en la materia. En este estudio, como técnica de investigación cualitativa, se realizó un estudio de caso. Los participantes en el estudio fueron 25 docentes asignados según las técnicas de máxima variación y muestreo por criterio.

[5] Biber, S. K., Biber, M., & Erbay, H. N. (2022). Teachers' perceptions on technology-assisted mathematics teaching and the interactive activities. *Education and Information Technologies*, 27(5), 6913-6945.

Los datos del estudio se recopilaron utilizando un formulario semiestructurado con 6 ítems elaborados por los investigadores. Bajo la visión de los docentes, junto con la enseñanza asistida por tecnología y la enseñanza de matemáticas asistida por tecnología, se lograron los resultados basados en empleabilidad, productividad y eficiencia de las actividades interactivas preparadas. En general, se ha observado que a los docentes les gustan las actividades interactivas y apoyan el uso de la tecnología en los entornos de aprendizaje.

Entre los comentarios más importantes del trabajo se resaltan que cuando se considera una gran cantidad de docentes que se ven a sí mismos como inelegibles para la alfabetización tecnológica, se ve claramente que la planificación de programas de capacitación que mejoren la inclinación de los docentes hacia la tecnología es extremadamente importante. Se está considerando que una razón básica del desinterés de los docentes en la enseñanza asistida por tecnología y su evitación de preferirla es la insuficiencia de sus habilidades en el uso de la tecnología. La mayoría de los docentes que participaron en la investigación han manifestado que no tomaron lecciones que mejoren sus competencias tecnológicas en su vida universitaria. En este caso, los programas y contenidos de las lecciones en las facultades de enseñanza deben revisarse de acuerdo con los requisitos de la época.

1.26 How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review[6]

Jensen & Skott en el 2022 llevan cabo una revisión sistemática cualitativa de los estudios que examinan el uso de juegos digitales para promover el razonamiento matemático de los estudiantes en las escuelas primarias y secundarias. Los juegos digitales tienen ahora un papel destacado en el tiempo libre de los estudiantes, al igual que el razonamiento matemático en los planes de estudios de todo el mundo. Este

[6] Jensen, E. O., & Skott, C. K. (2022). How can the use of digital games in mathematics education promote students' mathematical reasoning? a qualitative systematic review. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-30.

estudio investiga cómo se utilizan las posibilidades de los entornos de aprendizaje basados en juegos digitales (DGBLE) para apoyar el razonamiento matemático de los estudiantes.

Al analizar los temas en relación con el ciclo de razonamiento y prueba, se encontró que los DGBLE apoyan principalmente la exploración, la conjetura y, en menor medida, la justificación. Se concluye que el razonamiento matemático de los estudiantes se puede lograr a través de DGBLE que se enfocan específicamente en la exploración, la conjetura y la justificación, y al estructurar cuidadosamente las interacciones de los estudiantes y los diálogos sobre los juegos jugados.

No se encuentra evidencia en los estudios de que los estudiantes aprenden a razonar matemáticamente como un subproducto natural de simplemente jugar juegos digitales, por ejemplo, en casa. Los procesos complejos del razonamiento matemático son diferentes de lo que normalmente se requiere para jugar bien un juego digital, lo que sugiere que requiere un diseño de juego específico para permitir el razonamiento matemático, así como un diseño de investigación específico para documentarlo. Los análisis sugieren que los juegos digitales son más adecuados para permitir la experimentación y, hasta cierto punto, las conjeturas, mientras que la justificación se proporcionó más a través de diálogos sobre el juego y la jugabilidad.

El juego digital de los estudiantes puede ayudar a aprender a razonar matemáticamente si se acompaña de tareas que pueden provocar su descubrimiento de relaciones matemáticas incrustadas en el juego o, de manera más efectiva, a través de discusiones de seguimiento en clase sobre los descubrimientos de los estudiantes de relaciones matemáticas entre diferentes juegos. ajustes. Generalmente, el razonamiento no está especialmente presente cuando los estudiantes juegan, pero está presente en sus reflexiones sobre el juego.

En la revisión hecha por los autores, se muestra que los juegos digitales y el razonamiento matemático representan un pequeño nicho de investigación, realizado principalmente en los campos de la tecnología educativa y la educación general. Esto indica que el campo aún tiene que captar el interés del campo más amplio de investigación en educación matemática.

La investigación en cuestión tiene muchos elementos en común con la presente, pero tiene diferencias de fondos sustanciales, y definitivas, como lo son: i. No se realiza con profesores de matemática en formación sino con estudiantes, ii. No tiene como eje central la resolución de problemas y mucho menos los problemas retadores, iii. No busca impactar los procesos de enseñanza con la mediación de la tecnología, sino más bien estudiar los alcances de un juego para desarrollar razonamiento, iv. La teoría de razonamiento y de enseñanza con tecnología consultadas por el trabajo son diferentes a las de la presentación investigación, v. Muestra que su campo de estudio aún queda mucha tela por cortar y estudiar, haciendo la salvedad que no es propiamente el mismo campo de este trabajo.

1.2.7 Roles of technologies for future teaching in a pandemic: activity, agency, and humans-with-media[7]

El documento examina la influencia de la tecnología digital en la resolución de problemas matemáticos. Se destaca que las herramientas digitales han revolucionado la manera en que los estudiantes abordan y resuelven problemas matemáticos. Estas herramientas no sólo ofrecen representaciones visuales y dinámicas que facilitan la comprensión de conceptos complejos, sino que también proporcionan entornos interactivos que permiten a los estudiantes experimentar, explorar y testear soluciones en tiempo real. La tecnología, al proporcionar retroalimentación inmediata, permite a los estudiantes rectificar errores, refinar sus enfoques y desarrollar una comprensión más profunda de los problemas. Sin embargo, se subraya que la mera presencia de herramientas digitales no garantiza una resolución de problemas efectiva. La formación adecuada y la integración pedagógica son esenciales para asegurar que la tecnología se utilice

[7] Villa-Ochoa, J. A., Molina-Toro, J. F., & Borba, M. C. (2023). Roles of technologies for future teaching in a pandemic: activity, agency, and humans-with-media. *ZDM–Mathematics Education*, 55(1), 207-220.

de manera que potencie realmente las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes. Además, los educadores deben ser conscientes de los posibles obstáculos y limitaciones de la tecnología y estar preparados para combinar enfoques tradicionales y digitales de manera efectiva.

1.3. Investigaciones relacionadas con el pensamiento, razonamiento matemático y la resolución y creación de problemas

1.3.1. A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic[8]

Thompson (1990) propuso una teoría sobre el razonamiento cuantitativo, enfocándose en cómo las cantidades, estructuras y razonamientos se interrelacionan en el ámbito educativo. Esta teoría destaca la importancia de visualizar cantidades en relación con unidades adecuadas y de comprender la cuantificación como un proceso de asignación de valores numéricos. Thompson también introduce conceptos como cantidad extendida, número de profundidad, diferencia, razón, relación cuantitativa, estructura y razonamiento cuantitativos. Estos términos se definen en el contexto de problemas aritméticos y algebraicos, y Thompson utiliza ejemplos para ilustrar cómo se aplican en la práctica.

El trabajo de Thompson (2011) sirvió como base para investigaciones posteriores, tanto propias como de otros investigadores. A través de su investigación, Thompson y sus colegas desarrollaron un modelo que combina aritmética y álgebra, utilizando un programa informático llamado WPA para ilustrar sus conceptos. Aunque el artículo de Thompson no detalla explícitamente cada definición, sus conceptos y dimensiones son evidentes, y se abordan problemas específicos para demostrar su aplicabilidad.

En resumen, la teoría de Thompson sobre razonamiento cuantitativo y algebraico ofrece una estructura integral para comprender cómo las cantidades y las estructuras se relacionan en el ámbito matemático, y

[8] Thompson, P. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. *Center for Research in Mathematics & Science Education*

sus definiciones buscan facilitar la implementación de estos conceptos en la educación (Thompson, 1990).

1.3.2. Quantitative reasoning and mathematical modeling[9]

Thompson (2011) y su equipo han profundizado en la teoría de la inferencia, introduciendo "principios centrales" que ven las cantidades como construcciones mentales. Estos principios resaltan la importancia de enseñar matemáticas desde la perspectiva de las cantidades y los desafíos que esto representa para los estudiantes. La cuantificación, según Thompson, es esencial para comprender el mundo, ya que implica asignar valores numéricos a conceptos abstractos.

Ellis (2007), colega de Thompson, también ha destacado el papel del razonamiento cuantitativo en la generalización matemática de los estudiantes. Thompson (1990) identificó situaciones y abstracciones que pueden ayudar a los estudiantes a construir inferencias algebraicas desde un razonamiento cuantitativo. Estas abstracciones incluyen representar cuentas, difundir información, y pensar en unidades abstractas y cantidades.

Thompson (2011) describe la varianza como la predicción del valor de una cantidad en diferentes momentos, representado por $x = x(t)$, donde t es el tiempo. Además, Thompson y su equipo han reiterado que las cantidades son construcciones mentales y que la cuantificación es un proceso esencial que puede llevar tiempo y generaciones para ser comprendido completamente.

En resumen, el trabajo de Thompson y sus colaboradores ha proporcionado una comprensión profunda de la teoría cuantitativa, conectando la educación científica y matemática y ofreciendo ejercicios prácticos relacionados con la ingeniería y otros campos.

---

[9] Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. *WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming

1.3.3. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically[10]

Thompson y Carlson (2017) argumentan en su artículo que las ideas de covarianza continua y covarianza continua son cognitivamente necesarias para que estudiantes y profesores desarrollen conceptos útiles y sólidos en términos de funciones. Proporcionan una visión histórica de la formación y desarrollo del concepto funcional. En varios párrafos siguen a Kleiner, quien habla de cuatro épocas en el desarrollo del concepto de función. La atención se centra siempre en diferentes cantidades.

Argumentan que la idea de la varianza continua era fundamental para las matemáticas de Newton. Así como Euler y Leibniz decían que los cambios en una variable producen cambios en otra, asumiendo implícitamente que todas las diferencias son continuas. También destaca el papel y la importancia del concepto de variables en el pensamiento matemático y diferencial moderno.

Los estudios más relevantes basados en la lógica de covarianza citan a Confrey, Thompson y Carlson. Pero no contribuyen directamente a la definición de esta estructura (Thompson & Carlson, 2017). Dicen que varias investigaciones indican que Castillo-Garso desarrolló el constructo de inferencia variable centrándose en la idea misma de varianza. Para Castillo-Garsow (2010, 2012), los estudiantes pueden visualizar el valor de una cantidad diferente. Argumentaron que la idea de la varianza continua era fundamental para las matemáticas de Newton. Así como Euler y Leibniz decían que los cambios en una variable producen cambios en otra, asumiendo implícitamente que todas las diferencias son continuas. También destaca el papel y la importancia del concepto de variables en el pensamiento matemático y diferencial moderno.

[10] Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.). *In Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Siguiendo el trabajo de Castillo-Garsow (2010, 2012) y colegas en su estudio de los estudiantes, la idea del tiempo como una cantidad y un objeto multiplicador necesario para discutir la covarianza, Thompson y Carlson (2017) examinaron marcos que apoyan el pensamiento variable. de dos maneras: a) a través del pensamiento variable de los estudiantes separado de su pensamiento cambiante, y b) observando cómo los estudiantes se coordinan para armar sus imágenes de cambios de valor cuantitativos, observando su pensamiento de una manera transformadora y considerando cómo construir cosas que multiplican valores cuantitativos.

Dos aspectos se distinguen claramente en este marco conceptual: los principales niveles de inferencia de covarianza (transformación suave y continua, transformación fuerte y continua, covarianza gruesa, variación discreta, invariable, covariante como símbolo) y los principales niveles de inferencia de covarianza (covarianza suave y continua, fuerte covarianza continua, coordinación en valor), formato de valor bruto, formato previo en valor, no formato). También proporcionan algunos problemas y ejemplos del marco.

En cuanto a qué problemas son tareas para los participantes y qué pueden producir estas propiedades. También se destacan los niveles categóricos de inferencia diferencial y variable, pero en ningún momento se consideran prácticos. Lo mismo ocurre con la resolución de problemas. En cuanto a los participantes, la gran mayoría son estudiantes, y en algunos casos profesores.

1.3.4. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions[11]

Este artículo analiza la función de búsqueda exponencial, la tasa de cambio y el multiplicador, todo ello realizado por el mismo autor. Para Confrey y Smith (1995), las funciones exponenciales y logarítmicas a menudo se presentan como fórmulas y reglas correspondientes, especialmente en relación con fórmulas

[11] Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions[11]. *Journal for research in mathematics education*, 26(1), 66-86.

algebraicas y procedimientos aritméticos. Ellos introdujeron el concepto de división a través de cuatro declaraciones teóricas sobre su trabajo empírico. En la oración 1, la suma repetida no es suficiente para describir muchos casos de multiplicación (da cuatro ejemplos de casos incompletos a este respecto). En el enunciado 2, hay un patrón más primitivo de suma recursiva que proporciona la base operativa para la multiplicación y la división. En la oración 3, la división proporciona la base para el concepto de proporciones. La mente es el concepto central detrás de la evolución del mundo dividido. En la Declaración 4, la evolución de la división y su relación con la descendencia forma la base de lo que ellos llaman el reino de la división, cuya estructura general se construye en gran medida a partir del reino de contar por contar, una y otra vez. contando, etc.

Para los autores, estos significados conceptuales derivan de la resolución de problemas utilizando números racionales con sus alumnos, quienes encuentran barreras conceptuales en la definición de poblaciones al multiplicar fracciones.

En su trabajo, definen los siguientes términos: El multiplicador, Confrey (1991) sostiene que la unidad está fijada por la relación entre ancestro y ancestro en una relación. La continuidad está formada por una acción repetitiva. En un mundo con n divisiones, una unidad es una división por n. Reasignación, en la estructura del departamento, Reasignación a uno es un término que se usa para describir cómo un estudiante explica cómo y cuándo mantener una acción repetida. Por ejemplo, en un árbol con dos hojas o dos ramas, hay dos opciones después de la primera división: puede comenzar de nuevo con una nueva unidad (se conserva la acción recurrente) y luego dividir (volver al estado anterior) con cada división.

Estos significados conceptuales derivan de la resolución de problemas utilizando números racionales con sus alumnos, quienes encuentran barreras conceptuales en la definición de poblaciones al multiplicar fracciones.

La razón, recuerdan los autores, es que en su trabajo anterior (Confrey & Smith, 1994) reconocieron la ambigüedad de la generalización del término mente. Los investigadores afirman que se familiarizaron con los dos conceptos de proporcionalidad en confrontación directa mientras los alumnos trabajaban con la exponencial. Por ejemplo, una tasa de interés compuesta del 5% anual durante 10 años se considera fijada por los estudiantes. Sin embargo, cuando los estudiantes analizaron los datos, concluyeron que el trabajo cambiaba a un ritmo más rápido a medida que aumentaba el saldo.

Confrey y Smith (1995) concluyeron que la tasa se multiplica como una constante en una función exponencial (unidades por unidad de tiempo), obtenida al calcular la razón entre valores sucesivos de la variable dependiente sobre la unidad de cambio en los valores de la variable independiente y la tasa incremental como incrementos unitarios (unidades adicionales por unidad de tiempo).

Dicen los autores que en su estudio encontraron el enfoque de covarianza más fácil e intuitivo. Argumentan que el enfoque variable de la función hace que el concepto de tasa de cambio sea más intuitivo y crítico. También dicen que sus investigaciones epistemológicas sobre el concepto de razones los han llevado a argumentar que el predominio del cálculo en los currículos de matemáticas alienta a los profesores a enfatizar la visión asociativa de las razones, la razón o la razón mientras ignoran la legitimidad del método de multiplicación. Muestran claros ejemplos de los caminos que se toman para construir los conceptos de unidad, suma, multiplicación de unidades, y otros.

En su conclusión, argumentaron que la descripción de los núcleos se basó en el lenguaje y los verbos que observaron mientras trabajaban con estudiantes y académicos. Creen que esta descripción puede introducir una rica variedad de conceptos y lenguajes en sus discusiones matemáticas que no encajan en los modelos cuantitativos y aditivos estándar. También argumentan que la comprensión de los diferentes tipos de cambio debe ir acompañada de un desarrollo uniforme del concepto de tipos de cambio.

Según los autores, el enfoque multiconcepto propuesto tiene un futuro especial en la preparación de los estudiantes para el cálculo. Estas dos investigaciones de Confrey y Smith (1994, 1995) agregaron nuevos conceptos y enriquecieron las bases del pensamiento divergente, siempre desde el punto de vista de la heterogeneidad de funciones.

1.3.5. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study[12]

Carlson y Thompson (2017) contribuyeron a la construcción teórica del concepto de covarianza, en el marco de su interés por investigar la capacidad de los estudiantes para visualizar conceptos funcionales. Su enfoque fue distinto al de Confrey y Thompson.

Definen el razonamiento variable como actividades cognitivas que implican combinar dos cantidades variables mientras recuerdan cómo cambian entre sí. También siguieron las ideas de Piaget (1970) en las que usaron el desarrollo de palabras para mostrar que las imágenes cambiantes pueden identificarse por niveles y que los niveles aparecen en orden secuencial.

Se basan en el trabajo de Thompson (1994), quien afirma que la construcción de imágenes es dinámica y encuentra sus raíces en acciones físicas y movimientos de atención, además de ser fuentes y comodidades de la actividad mental. Señalan que este constructo de Thomson (1994) no se puede comparar con el de Wiener y Devros (1998), cuyas imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias, características e impresiones están vinculadas al nombre del concepto presentado por un individuo en un contexto particular.

[12] Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*,, 352-378. doi:10.2307/4149958

Para Carlson (2002), este trabajo incluye actividades mentales dinámicas. Entonces, usan las palabras de referencia a la tasa de cambio promedio en el caso de imaginar un sub-rango o la tasa de cambio instantánea en el caso de imaginar una función sobre un conjunto de sus dominios. Utilizan los resultados de su trabajo anterior.

Específicamente, el marco describe cinco actos mentales y su correspondiente comportamiento. Estos superan cinco niveles de desarrollo y acciones asociadas. El comportamiento lógico de los estudiantes varía a medida que responden a tareas dinámicas:

Acciones mentales: 1) coordinar cambios en una variable con cambios en otra, 2) coordinar la dirección de cambios en una variable con cambios en otra, 3) coordinar un cambio en una variable con cambios en otra, 4) combinar la tasa promedio.

Los autores piden a los alumnos que resuelvan un problema de matemáticas. Una tarea típica para este tipo de situaciones es imaginar una botella llena de agua y pedir a los alumnos que dibujen la gráfica de la altura en función de la cantidad de agua y una escala recta. Deslice en la pared. Los participantes son cinco estudiantes privados. Para recopilar datos, realizaron seis entrevistas durante dos días.

En conclusión, Carlson et al. (2002) describen que los estudiantes han desarrollado la capacidad de aplicar la inferencia de covarianza al analizar eventos dinámicos. También dicen que los patrones observados indican que este grupo de estudiantes de cálculo trabajó para crear imágenes de la tasa de cambio, a pesar de sus buenos antecedentes. Les preocupa que investigaciones anteriores habían demostrado que la idea de heterogeneidad estaba disponible para estudiantes de secundaria y, lógicamente, también debería estar disponible para estudiantes universitarios.

1.3.6. Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base[13]

Se reporta en (Talman y Frank, 2020) sobre los resultados de un estudio sobre patrones de pensamiento matemático según Harrell (2008) como elemento de la base de conocimiento profesional para docentes. Más precisamente, analizaron el papel del razonamiento cuantitativo según un modelo teórico cuántico basado en la lógica de la aritmética y el álgebra, propuesto por Smith y Thomson, entre los profesores de matemáticas. El objetivo es explorar hasta qué punto el pensamiento de los profesores de matemáticas constituye un componente esencial de su base de conocimientos profesionales.

El marco teórico que sustenta el trabajo es el razonamiento cuantitativo de Thompson, P. (1990, 1991, 2011) donde las actitudes se visualizan en términos de cantidades y cantidades relacionadas. Para hacer su trabajo, revisaron y analizaron 37 videos sobre la calidad de la enseñanza y la consistencia de un profesor de matemáticas (David, con 15 años de experiencia, profesor de álgebra en una escuela secundaria grande) en un suburbio del suroeste de los Estados Unidos).

Se usó un curso diseñado para ayudar a los estudiantes a desarrollar confianza, habilidad y un sentido de sus propias ideas para el razonamiento cuantitativo y la heterogeneidad. El análisis muestra que los significados inconsistentes transmitidos por el docente se deben a su falta de conocimiento de las habilidades conceptuales de los estudiantes para el razonamiento cuantitativo, especialmente su capacidad para construir la comprensión.

[13] Tallman, M., & Frank, K. (2020). Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(1), 69-95.

Por lo tanto, estos hallazgos respaldan la opinión de Harrell de que los estilos de pensamiento matemático de los profesores son un componente esencial de su conocimiento especializado del contenido.

1.3.7. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research[14]

Cai y Hwang (2019) afirman que los docentes son los responsables directos y los principales artífices de cualquier innovación o mejora pedagógica. Los autores también reconocen la importante necesidad de investigar cómo los profesores aprenden a utilizar la resolución de problemas en el aula.

También argumentan que utilizan los términos problema y tarea de manera amplia dentro de una definición que les permite incluir cualquier pregunta matemática y cualquier tarea matemática que se pueda realizar de manera arbitraria, dependiendo del estado del problema.

Así muestran la importancia y el poder que puede tener el uso de la creación y resolución de problemas en el aula en particular. El desarrollo de las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes proporciona información útil sobre el pensamiento de los estudiantes.

Para Cai y Hwang (2019), el conocimiento de un profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes debería tener un impacto significativo en el aula. Argumentan que no solo es necesario definir correctamente un problema matemático correcto. Su importancia varía según el propósito y el contexto. Citan a Silver et al. (1996) y Leung y Silver (1997), quienes encuentran que una gran cantidad de problemas planteados por los profesores no son matemáticos, y que muchos no son problemas en absoluto, a pesar de dar consejos específicos cuando se les pide que resuelvan el problema. Argumentan que esto se puede mejorar ayudando a los maestros a descubrir problemas difíciles al relacionarlos con

[14] Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing:Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*

la resolución de problemas en contextos. Otro aspecto esencial de esta asignación es el conocimiento de los antecedentes del maestro.

También comparten diferentes estrategias sobre cómo los investigadores en el tema las utilizan para ayudar a los profesores a plantear problemas en el aula con sus alumnos.

Finalmente, argumentan que, a pesar de las dificultades para integrar efectivamente el problema, es importante investigar cómo los docentes aprenden a utilizar el problema para enseñar matemáticas en el aula. Afirman que existe suficiente evidencia de que la resolución de problemas ayuda a: a) comprender el pensamiento de los estudiantes, b) desarrollar las habilidades de los profesores en matemáticas) desarrollar las habilidades de los profesores para una mejor resolución de problemas.

Diversas perspectivas internacionales brindan una descripción general de las formas de integrar la resolución de problemas matemáticos (MPP) en el aula general y utilizar la resolución de problemas en la práctica profesional para los profesores de matemáticas.

1.3.8. Impact of prompts on students' mathematical problem posing [15]

La formulación de problemas matemáticos es una habilidad esencial que permite a los estudiantes desarrollar un pensamiento crítico y una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. En el estudio reciente de Cai et al. (2023), se exploró el impacto de las sugerencias en la capacidad de los estudiantes para plantear problemas matemáticos. Esta investigación proporciona una visión valiosa sobre cómo las intervenciones pedagógicas pueden influir en el proceso de formulación de problemas y, en última instancia, en el desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático.

[15] Cai, J., Ran, H., Hwang, S., Ma, Y., Han, J., & Muirhead, F. (2023). Impact of prompts on students' mathematical problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 72, 101087.

El pensamiento matemático se refiere a la capacidad de pensar de manera lógica, abstracta y crítica sobre los conceptos matemáticos, mientras que el razonamiento matemático implica la aplicación de este pensamiento en la resolución de problemas y situaciones específicas. Ambos están intrínsecamente relacionados y se complementan mutuamente en el proceso de aprendizaje matemático.

El estudio de Cai et al. (2023) reveló que las sugerencias, cuando se presentan de manera adecuada, pueden actuar como catalizadores que impulsan a los estudiantes a pensar y razonar de manera más creativa y crítica. Estas sugerencias, según el estudio, no sólo proporcionan una estructura para la formulación de problemas, sino que también desafían a los estudiantes a ir más allá de sus zonas de confort y a explorar conceptos matemáticos desde diferentes perspectivas.

Burton (1995) ha señalado que el razonamiento matemático no es un proceso aislado, sino que está influenciado por factores culturales, sociales y personales. En este sentido, las sugerencias deben ser adaptadas y contextualizadas para ser efectivas. Mason, Burton y Stacey (1982) han subrayado la importancia de la participación del aprendiz en el proceso matemático, donde el pensamiento y razonamiento matemático se entrelazan y se refuerzan mutuamente.

Schoenfeld (1985) ha argumentado que el razonamiento matemático se desarrolla con el tiempo y la experiencia, y está profundamente arraigado en el pensamiento matemático. Las sugerencias, en este marco, pueden ser vistas como herramientas que aceleran este proceso, proporcionando a los estudiantes oportunidades para enfrentarse a desafíos y desarrollar habilidades de resolución de problemas.

En conclusión, las sugerencias tienen un impacto significativo en la formulación de problemas matemáticos por parte de los estudiantes, y en el desarrollo de su pensamiento y razonamiento matemático. Actúan como herramientas pedagógicas que guían y desafían a los estudiantes, permitiéndoles desarrollar un pensamiento matemático más profundo y crítico, y aplicarlo efectivamente en la resolución de problemas.

1.4 Investigaciones relacionadas con la intersección de los pensamientos Tecnológico, Pedagógico y Matemático

1.4.1 Investigaciones sobre la Intersección del Pensamiento Tecnológico y Matemático

1.4.1.1 Technology-Immune/Technology-Enabled Problem Solving as Agency of Design-Based Mathematics Education[16]

Abramovich, S. (2022). explora cómo la integración de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas puede mejorar el razonamiento y la comprensión matemática de los estudiantes. En su estudio, se destacó la importancia de las herramientas tecnológicas, como las aplicaciones de geometría dinámica y los sistemas algebraicos computacionales, en la facilitación de la exploración matemática y la visualización. Los autores concluyeron que la tecnología, cuando se utiliza de manera efectiva, puede ser una herramienta poderosa para profundizar la comprensión matemática.

1.4.1.2 Design, problem posing and solving with the use of digital technologies in the initial training of mathematics teachers[17]

Figueiredo & Groenwald, (2020) investigaron el impacto de la realidad aumentada en la educación matemática. Su estudio reveló que la realidad aumentada puede proporcionar experiencias inmersivas que permiten a los estudiantes visualizar y manipular conceptos matemáticos de manera más efectiva.

---

[16] Abramovich, S. (2022). Technology-Immune/Technology-Enabled Problem Solving as Agency of Design-Based Mathematics Education. *Education Sciences*, 12(8), 514.

[17] Figueiredo, F. F., & Groenwald, C. L. O. (2020). Design, Problem Posing And Solving With The Use Of Digital Technologies In The Initial Training Of Mathematics Teachers/Design,(Re) Formulacao E Resolucao De Problemas Com O Uso De Tecnologias Digitais Na Formacao Inicial De Professores De Matematica. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 23(2), 147-175.

Sin embargo, también enfatizaron la necesidad de una pedagogía sólida para garantizar que la tecnología mejore el aprendizaje en lugar de distraerlo.

1.4.2 Investigaciones sobre la Intersección del Pensamiento Pedagógico y Matemático

1.4.2.1 Pedagogical Technologies and Students' technical Thinking. TJE-Tematics journal of Education [18]

Yusupova, S. (2021) examinó diversas estrategias pedagógicas utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. Su investigación destacó la importancia de la resolución de problemas, el razonamiento matemático y la comunicación en el currículo de matemáticas. Además, subrayaron la necesidad de proporcionar a los estudiantes oportunidades para explorar y descubrir conceptos matemáticos por sí mismos.

Entre los hallazgos:

- **Acceso a Recursos Diversos:** La enseñanza en línea brinda a los estudiantes acceso a una variedad de recursos educativos, desde videos y tutoriales hasta bases de datos y bibliotecas digitales. Esto permite una experiencia de aprendizaje enriquecida y diversificada.
- **Aprendizaje Autónomo:** La modalidad en línea permite a los estudiantes aprender a su propio ritmo. Pueden revisar materiales, repetir lecciones y tomarse el tiempo necesario para comprender conceptos complejos, lo que favorece un aprendizaje más profundo y personalizado.
- **Flexibilidad Geográfica y Temporal:** La enseñanza en línea elimina las barreras geográficas, permitiendo a los estudiantes de diferentes regiones acceder a cursos y programas. Además,

[18] Yusupova, S. (2021). Pedagogical Technologies and Students' technical Thinking. *TJE-Tematics journal of Education* ISSN, 2249-9822.

ofrece flexibilidad en cuanto a horarios, beneficiando a aquellos con compromisos laborales o familiares.

1.4.2.2 Integration of Pedagogical Approaches and their Application in the Educational Process. [19]

Mavlonov (2022) se centró en la importancia del diálogo en la clase de matemáticas. Argumenta que el diálogo permite a los estudiantes articular y reflexionar sobre su pensamiento, lo que a su vez mejora su comprensión y razonamiento matemático. El estudio también proporcionó estrategias para fomentar un diálogo efectivo en el aula.

Para fomentar un diálogo efectivo, Mavlonov sugiere la implementación de ciertas estrategias. En primer lugar, propone las preguntas Abiertas, que estimulan la discusión al no tener una única respuesta correcta. Luego, el tiempo de reflexión, que permiten a los estudiantes pensar antes de responder. Por último, un ambiente seguro, para crear un espacio donde los estudiantes se sientan libres de expresar sus ideas.

Estas estrategias buscan maximizar los beneficios del diálogo en el aula de matemáticas.

1.4.3. Investigaciones sobre la Intersección del Pensamiento Tecnológico y Pedagógico

1.4.3.1 Computational Thinking in Mathematics Education: A Systematic Review. [20]

Subramaniam, S., Maat, S. M., & Mahmud, M. S. (2022) exploraron cómo los educadores pueden utilizar la tecnología como herramienta pedagógica para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Su investigación mostró que la tecnología, cuando se integra de manera efectiva en la instrucción, puede

[19] Mavlonov, R. (2022). Integration of Pedagogical Approaches and their Application in the Educational Process. Central Asian *Journal of Social Sciences and History*, 3(6), 25-27

[20] Subramaniam, S., Maat, S. M., & Mahmud, M. S. (2022). Computational Thinking in Mathematics Education: A Systematic Review*. Cypriot Journal of Educational Sciences*, 17(6), 2029-2044.

personalizar el aprendizaje, aumentar la participación del estudiante y proporcionar oportunidades para la colaboración y la creatividad.

Personalización del Aprendizaje: La tecnología permite adaptar el contenido y el ritmo de aprendizaje a las necesidades individuales de cada estudiante. Plataformas educativas y software adaptativo pueden ofrecer rutas de aprendizaje personalizadas, permitiendo a los estudiantes avanzar según sus propias capacidades y ritmos.

Aumento de la Participación: Las herramientas tecnológicas, como las aplicaciones interactivas y los juegos educativos, pueden hacer que el aprendizaje sea más atractivo. Estas herramientas capturan la atención del estudiante y fomentan una mayor interacción con el material.

Colaboración y Creatividad: La tecnología facilita la colaboración entre estudiantes, ya sea a través de foros de discusión, proyectos en línea o herramientas de edición colaborativa. Además, las plataformas digitales ofrecen un espacio para que los estudiantes expresen su creatividad, ya sea creando presentaciones, videos o proyectos multimedia.

1.4.3.2 Challenges and opportunities of mathematics in digital times: Preschool teachers' views. [21]

Lavidas, K., Apostolou, Z., & Papadakis, S. (2022) investigaron los desafíos y oportunidades de la enseñanza en línea. Aunque reconocieron los desafíos asociados con la falta de interacción cara a cara y las distracciones tecnológicas, también destacaron las oportunidades que ofrece la enseñanza en línea, como el acceso a una amplia gama de recursos y la capacidad de aprender a su propio ritmo.

---

[21]Lavidas, K., Apostolou, Z., & Papadakis, S. (2022). Challenges and opportunities of mathematics in digital times: Preschool teachers' views. *Education Sciences,* 12(7), 459.

Falta de Interacción Cara a Cara: Uno de los desafíos más notables de la enseñanza en línea es la ausencia de interacción presencial. Esto puede dificultar la construcción de relaciones entre estudiantes y docentes y limitar la comunicación no verbal, que es esencial para la comprensión y el feedback.

Distracciones Tecnológicas: En un entorno en línea, los estudiantes pueden enfrentar múltiples distracciones, como notificaciones de redes sociales, mensajes instantáneos o la tentación de navegar por la web. Estas distracciones pueden afectar la concentración y el rendimiento del estudiante.

Conclusiones del capítulo

La investigación revela que la confluencia del pensamiento tecnológico, pedagógico y matemático posee un potencial transformador para el ámbito educativo. No obstante, una revisión de la literatura actual expone una notable ausencia de contribuciones que amalgamen efectivamente estos tres ámbitos del conocimiento. Mientras que el pensamiento tecnológico, sustentado por las bases del pensamiento computacional, es ampliamente reconocido como un pilar fundamental en la era digital, y la habilidad para abstraer y diseñar algoritmos se promueve en numerosos estudios, se observa que la implementación tecnológica a menudo se aborda de forma aislada, sin una interacción significativa con la pedagogía y la matemática.

Cai subraya que el pensamiento matemático va más allá de la capacidad de resolver problemas y construir argumentos lógicos; es una habilidad crítica para la enseñanza y el aprendizaje en cualquier disciplina. A pesar de los esfuerzos para integrar la tecnología en la enseñanza matemática, persiste una carencia de cohesión con las metodologías pedagógicas pertinentes. La literatura refleja una ausencia de esfuerzos coherentes para fusionar estas áreas de manera que capitalicen su potencial sinérgico.

Se identifican proyectos interdisciplinarios, pero estos adolecen de una conexión explícita entre la tecnología, la pedagogía y la matemática, lo que sugiere un enfoque compartimentado. Este panorama fragmentado en la literatura es indicativo de un enfoque que no cumple con el potencial inherente de una integración holística.

Así, el entorno literario, saturado de investigaciones detalladas en dominios individuales, denota una desconexión palpable entre el pensamiento tecnológico, pedagógico y matemático. Emergen como imperativos una revisión crítica y la promoción de un diálogo interdisciplinario, que no solo aborde esta brecha, sino que también potencie la sinergia de estas disciplinas en conjunto. El trabajo actual se presenta como un paso adelante en este esfuerzo, proponiendo un modelo que no solo reconoce la interdependencia de estas áreas, sino que también proporciona un marco para su integración efectiva y práctica en la educación matemática.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

Como el objetivo de esta investigación es Construir un modelo didáctico para el fortalecimiento de los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico por medio de la resolución y creación de problemas retadores que utilizan las TIC, en profesores de matemática en formación, este capítulo busca sustentar teóricamente los fundamentos propios de esta investigación.

Se presentan los diversos tipos de pensamiento. Se comienza desde el pensamiento matemático, sus fundamentos y corrientes y cómo la resolución y creación de problemas contribuyen a su desarrollo. Luego, se continúa con el pensamiento pedagógico, haciendo énfasis en las comunidades de práctica de Wenger y cómo ellas pueden ser una pieza fundamental en el trabajo con los profesores en formación. Por último, se presenta el pensamiento tecnológico y computacional, la formación en tecnología de profesores de matemática, relacionando el modelo TPACK con la educación matemática para luego trascender hacia comprender cómo se puede realizar la integración de los tres tipos de pensamiento en el modelo.

2.2. Pensamiento matemático

Según Ginsburg (1981), en el campo de la educación matemática, la definición de razonamiento matemático no tiene sentido. Por el contrario, el estudiante debe ser conducido a los procesos de descubrimiento y así identificar los rasgos y características del desarrollo del pensamiento. Sin embargo, se presentan dos definiciones y características específicas del pensamiento matemático con el objetivo de brindar una visión más amplia del trabajo de investigación.

2.2.1. Pensamiento matemático según Leone Burton

Para Falk (1994), el modelo de Burton identifica formas específicas en las que las matemáticas mejoran la comprensión y amplían el control humano sobre el entorno, lo que lleva a un modelo basado en operaciones y procesos matemáticos y en la dinámica del razonamiento matemático. El pensar requiere que estos elementos funcionen de cierta manera, los métodos o formas en que funcionan se denominan procesos de pensamiento matemático.

Burton (1984) hizo una distinción clara entre el razonamiento matemático y el cuerpo de conocimiento, en términos de contenido y método, denominado matemáticas. Afirma que el razonamiento matemático está íntimamente relacionado con cualquier contenido, pero su alcance no está necesariamente en problemas de carácter matemático, sino que es ahí donde entran en juego sus propiedades.

Según Burton (1984), el estudio de las relaciones es esencial en las matemáticas. Los elementos pueden interrelacionarse de diversas maneras, ya sea entre sí o con otros elementos. Estas relaciones pueden manifestarse mediante disposiciones, estableciendo correspondencias o creando clases de equivalencia. Además, la fusión o sustitución conjunta de elementos puede conducir a la transición de una situación a otra.

De acuerdo con Burton (1984), cuando las personas reflexionan sobre algo, las ideas, observaciones y eventos actúan como estímulos que desencadenan el pensamiento. Estos elementos proporcionan la base sobre la cual se desarrolla el proceso de reflexión. Además, uno de los objetivos del modelo es distinguir el comportamiento que surge del razonamiento matemático, resultante de la aplicación de conocimientos o habilidades matemáticas, tal como lo plantea (Falk, 1994).

Para concluir, el pensamiento matemático es el proceso de razonamiento matemático cuando se encuentra algo lo suficientemente sorprendente o curioso como para estimular su descubrimiento a través de la manipulación. Un elemento puede ser una cosa física, un esquema, una idea o un símbolo, pero debe ser específico para el pensador, inspirar confianza y ser interpretable.

2.2.2 Pensamiento matemático según Mason, Burton y Stacey

Mason, Burton y Stacey (2010) conceptualizan el pensamiento matemático como un proceso en constante evolución que amplía nuestra habilidad para entender, al incrementar la complejidad de las ideas que somos capaces de manejar. Basándose en este concepto, sugieren un modelo específico de resolución de problemas. Esta investigación adopta la perspectiva de estos autores, quienes sostienen que las técnicas para potenciar el pensamiento matemático pueden ser compartidas y enseñadas a otros. Proponen diversas tácticas para incitar, respaldar y perpetuar este tipo de pensamiento.

Para incitar el pensamiento matemático, es esencial despertar el interés y la curiosidad, ya sea mediante sorpresas, contradicciones o fenómenos inesperados. En este estudio, se plantean actividades que utilizan una amplia gama de recursos y estrategias con el objetivo de fortalecer la confianza de los docentes. Se busca que las emociones que surgen al enfrentar desafíos sean positivas, evitando que los docentes o sus alumnos sientan desconfianza o consideren prematuramente que un problema es insuperable. Es crucial enfocarse en el proceso de pensamiento más que en la obtención inmediata de respuestas.

Para respaldar el pensamiento matemático, es vital tener la confianza necesaria para enfrentar conscientemente los desafíos emocionales. Esta confianza se adquiere a través de experiencias personales reflexivas y logros, incluso si son parciales. Las actividades propuestas y el trabajo colaborativo, como se plantea en esta investigación, promueven la confianza entre los docentes. Según Mason, Burton y Stacey (2010), el pensamiento matemático requiere expansión a través de tres componentes clave: cuestionar, desafiar y reflexionar.

Finalmente, para mantener vivo el pensamiento matemático, Mason, Burton y Stacey (2010) argumentan que no debe ser visto solo como un objetivo, sino como un medio para comprender mejor nuestro entorno y expandir nuestras opciones. Es una herramienta no solo para abordar cuestiones matemáticas o científicas, sino también para enfrentar desafíos más amplios. Fomentar y nutrir este pensamiento es esencial, y se logra a través de experiencias continuas y reflexión crítica.

2.3. Creación y Resolución de problemas

2.3.1. La resolución de problemas

Se encuentran diferentes estrategias sobre cómo los investigadores en el tema las utilizan para ayudar a los profesores a plantear problemas en el aula con sus alumnos. Varios autores trabajaron e idearon estrategias, etapas, ciclos, etc. para solucionar problemas Entre las autopsias, la más importante fue George Polya con su famoso trabajo How to Solve it (1945). Polya propuso cuatro etapas como marco para la resolución de problemas: comprender el problema, hacer planes, implementar planes y mirar hacia el futuro.

Por su parte, Schoenfeld, A. (2016) sugirió cinco aspectos de la intervención de manera directa, dinámica e interrelacionada: 1) la dimensión cognitiva, base de conocimientos, 2) el aprendizaje experiencial y las estrategias de resolución de problemas, 3) la metacognitiva, dimensión seguimiento y control (autorregulación), 4) dimensión emocional, creencia y afectividad. Del mismo modo, brinda procedimientos pedagógicos: antes, durante y después de la resolución de problemas.

Mason, Burton y Stacey (2010) definen la resolución de problemas basándose en dos criterios. El primero involucra dos procesos de pensamiento: la personalización y la generalización. El segundo criterio se desarrolla en tres etapas: entrada, ataque y modificación.

Durante la fase de personalización, la persona que resuelve el problema se familiariza con el contexto del problema. Aprende sobre el problema y juega con las ideas, por ejemplo, a través de la encarnación, indica claramente lo que sabe, lo que quiere y piensa detenidamente en lo que puede hacer. Esta etapa puede tener éxito, pero a menudo puede conducir a un evidente callejón sin salida, en el que el individuo debe revisar lo que se ha logrado hasta el momento y volver a la etapa de compromiso para considerar una nueva acción ofensiva.

Una vez que se encuentra una solución, según Mason, Burton y Stacey, el estado de ánimo cambia nuevamente a un escrutinio más cuidadoso (verifique los resultados para asegurarse de que no haya fallas). Implica aprender de estrategias previamente útiles, luego prepararse para expandir el problema o moverlo a otros niveles de complejidad, y comenzar el ciclo de participación en un nivel más complejo.

2.3.2 Cómo resolver problemas según Polya

George Polya (1945) propone un enfoque estructurado para abordar la resolución de problemas matemáticos, que se desglosa en cuatro etapas esenciales, a menudo referidas como la heurística de Polya.

Etapa 1: Comprender el desafío. Es fundamental analizar el problema en profundidad. Algunas preguntas guía podrían ser: ¿Se comprende claramente la descripción del problema?, ¿Es posible redefinir el problema con una perspectiva personal?, ¿Se identifican claramente los datos proporcionados?, ¿Se tiene claro el objetivo final?, ¿La información proporcionada es suficiente o hay datos que parecen irrelevantes?, ¿Se asemeja este problema a alguna situación previamente enfrentada?

Etapa 2: Diseñar una estrategia. En esta fase, se deben considerar diferentes tácticas para abordar el problema. Algunas opciones incluyen: adoptar un enfoque de prueba y error, introducir variables, identificar patrones recurrentes, simplificar el problema, visualizar mediante gráficos o diagramas, considerar ejemplos específicos, entre otras.

Etapa 3: Implementar la solución. Aquí, se pone en práctica la estrategia seleccionada. Si después de un tiempo razonable no se llega a una solución, podría ser útil reconsiderar el enfoque, buscar consejo externo o incluso dar un paso atrás y reflexionar sobre el problema desde una nueva perspectiva. A veces, las soluciones emergen cuando menos se esperan.

Etapa 4: Revisión y reflexión. Una vez encontrada una solución, es crucial revisarla. ¿Es la respuesta coherente con el problema planteado? ¿Existen alternativas más simples o directas para resolverlo? ¿Cómo podría adaptarse esta solución a situaciones más generales o diferentes?

2.3.3 Fundamentos de la resolución de problemas. Problemas retadores

La resolución de problemas es una actividad importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. Según Pochulu y Rodríguez (2012) "… el énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas. Al decir se quiere resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido matemático específico".

La resolución de problemas ha sido investigada por Krulik & Rudnik (1987); Schoenfeld (1985,1992); Cobo & Fortuny (2000); Lesh & Harel (2003), Stacey Burton & Mason (2010); Pochulu y Rodríguez (2012), Campistrous & Rizo (2013); Liljedahl y Santos-Trigo, (2019); entre otros. Estos investigadores han aportado definiciones de problema, estrategias heurísticas, fases o estrategias de la resolución de un problema y sobre el papel de la metacognición.

Con respecto a la definición de problemas Polya (1981) plantea que tener un problema "… significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata".

Por su parte, Krulik & Rudnik (1987) establece que un problema es "… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"26. Esta es la definición de problema que se asume en la investigación.

Schoenfeld (1985); Campistrous & Rizo (2013); De Guzmán (1996), Stacey Burton & Mason (2010), entre otros investigadores, aportan definiciones de problemas a esta teoría. A pesar de las diversas definiciones de problemas que existen, Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) identifican ciertos rasgos comunes que se presentan en todas ellas. Estos rasgos incluyen la presencia de condiciones iniciales o finales que expresan la necesidad de una transformación, la existencia de una vía para pasar de una situación a otra que no es inmediatamente accesible, la voluntad del estudiante de resolverlo, considerando que lo que constituye un problema para uno puede no serlo para otro, y la disponibilidad de los elementos necesarios para llevar a cabo la transformación, como un nivel adecuado de conocimientos, habilidades y motivación.

En la tesis se aduce lo planteado por Polya (1945) sobre lo que significa resolver un problema, pues expresa que "… es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados".

Investigadores como Polya (1981), Schoenfeld (1985); Krulik & Rudnik (1987); Campistrous y Rizo (2013); De Guzmán (1996), Stacey, Burton y Mason (2010), entre otros, aportan fases o estrategias de resolución de problemas. En la investigación se asumen las fases propuestas en el modelo de Schoenfeld (1985): analizar y comprender el problema, diseñar y planificar una solución, explorar soluciones, y verificar la solución.

A continuación, se describen las fases del proceso: En la primera etapa, analizar y comprender el problema, los estudiantes reflexionan sobre la enunciación del problema, identifican los datos proporcionados, las operaciones necesarias y el contexto en el que se plantea la situación. Luego, en la fase de diseñar y planificar una solución, los estudiantes relacionan los datos con los requisitos de resolución y establecen un procedimiento a seguir. Por último, en la etapa de explorar soluciones, ejecutan sus planes y verifican que el enfoque empleado es correcto y se acerca a la solución buscada. Pólya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas.

Verificar la solución: es la etapa en la que el estudiante verifica la coherencia de los resultados obtenidos al seguir el plan y comprueba que, efectivamente, sus resultados logran dar solución al problema planteado.

Con respecto a estas fases, Schoenfeld (1985) plantea la necesidad de tener en cuenta los conocimientos previos con los que el estudiante cuenta a la hora de resolver el problema, los que denomina recursos. Además, el autor establece la importancia de los conceptos de control y las creencias. Por un lado, el control es la capacidad que tiene el estudiante de verificar su procedimiento y decidir detenerse y tomar una ruta alternativa de solución. Las creencias se definen como las convicciones que tengan los estudiantes frente a las matemáticas en general y al tema trabajado en particular, en esto se incluyen también las actitudes, opiniones y prejuicios.

Por su parte, Falk (1980) plantea que los problemas retadores constituyen "… una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"30. Además, afirma que un problema retador es aquel "… cuya solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidas.

Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático en sí".

2.3.4. El planteo (invención, formulación) de problemas

En los últimos años, el interés por integrar los problemas planteados en la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos se ha incrementado significativamente entre investigadores y docentes de matemáticas.

La invención y el planteamiento de problemas matemáticos son mucho más que simples ejercicios académicos; representan la esencia misma del pensamiento matemático y pedagógico. Silver (1994) sostiene que 'la resolución de problemas es fundamental para la matemática, ya que proporciona un medio para fortalecer las habilidades matemáticas y fomentar el razonamiento lógico'. Esta perspectiva se alinea con la visión de Jinfa Cai (2003), quien argumenta que 'la matemática, en su núcleo, es una disciplina de problemas, y enseñar matemáticas es enseñar a pensar críticamente y resolver problemas'.

Uldarico Malaspina (2010) aporta una dimensión cultural a este discurso, subrayando que 'la matemática debe ser enseñada de manera que sea culturalmente relevante y contextualizada, permitiendo que los estudiantes vean los problemas matemáticos como reflejos de sus propias experiencias y realidades'. Esta perspectiva es esencial, ya que reconoce que la matemática no es una entidad aislada, sino que está profundamente arraigada en el tejido mismo de nuestras culturas y sociedades.

Por último, Miguel Cruz Ramírez (2008) nos recuerda que 'la didáctica de las matemáticas es un campo dinámico y en constante evolución. Cada problema que se plantea y cada solución que se busca es un paso hacia la construcción de un entendimiento más profundo y significativo de la matemática y su papel en nuestra educación'.

En conjunto, estos autores nos ofrecen una visión holística y profunda de la importancia del planteamiento de problemas en la educación matemática, subrayando su papel central en el desarrollo del pensamiento matemático, pedagógico y cultural.

El planteamiento de problemas matemáticos ha sido un área de interés en la educación matemática durante décadas. Jinfa Cai(2022); Silver & Cai (1996), prominentes investigadores en este campo, han proporcionado una perspectiva única y enriquecedora sobre cómo los estudiantes pueden y deben abordar el planteamiento de problemas. Su trabajo destaca la importancia de ver el planteamiento de problemas no sólo como una habilidad para resolver problemas dados, sino también como una actividad creativa y esencial en el aprendizaje matemático.

2.3.5. Metodología y Fases del Planteamiento de Problemas

Silver & Cai y propone una metodología estructurada para el planteamiento de problemas, que se puede desglosar en varias fases:

1. **Comprensión del Problema:** Antes de que los estudiantes puedan plantear un problema, deben comprenderlo a fondo. Esto implica identificar y comprender los conceptos matemáticos subyacentes y las relaciones entre ellos.

2. **Generación de Ideas:** Una vez que se comprende el problema, los estudiantes deben generar ideas sobre cómo abordarlo. Esto puede implicar la identificación de estrategias potenciales, la consideración de diferentes enfoques o la exploración de posibles soluciones.

3. **Formulación del Problema:** Con una comprensión clara y una serie de ideas en mente, los estudiantes pueden comenzar a formular el problema. Esto implica definir claramente el problema, establecer parámetros y condiciones, y asegurarse de que el problema sea coherente y solucionable.

4. **Resolución del Problema:** Una vez formulado el problema, los estudiantes deben intentar resolverlo. Esto puede implicar la aplicación de técnicas matemáticas, la experimentación con diferentes enfoques o la búsqueda de soluciones creativas.

5. **Reflexión y Revisión:** Después de resolver el problema, es esencial que los estudiantes reflexionen sobre el proceso. Deben considerar qué estrategias funcionaron, cuáles no y por qué. Esta fase también puede implicar la revisión y reformulación del problema para hacerlo más desafiante o interesante.

El enfoque de Cai sobre el planteamiento de problemas se complementa y amplía con las contribuciones de otros investigadores en el campo de la educación matemática. Por ejemplo, George Polya, en su famoso libro "How to Solve It", propuso una serie de pasos para resolver problemas que tienen similitudes con las fases propuestas por Cai. Alan Schoenfeld, John Mason y Leone Burton han enfatizado la importancia del pensamiento y razonamiento matemático en el proceso de resolución de problemas, lo que refuerza la perspectiva de Cai sobre la importancia de la comprensión profunda y la creatividad en el planteamiento de problemas.

Los trabajos de Cai y Silver ofrecen una perspectiva valiosa sobre cómo se debe abordar el planteamiento de problemas en la educación matemática. Al enfatizar la importancia de la comprensión, la creatividad y la reflexión, Cai proporciona una estructura que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de planteamiento de problemas más efectivas y a convertirse en matemáticos más competentes y creativos.

2.4. Pensamiento Pedagógico

El pensamiento pedagógico, una reflexión crítica sobre la educación, ha experimentado numerosas transformaciones a lo largo de la historia. En el mundo contemporáneo, donde los desafíos sociales, tecnológicos y culturales se multiplican, es esencial replantearse cómo educar a las futuras generaciones.

Desde las concepciones tradicionales de la educación centradas en la transmisión de conocimientos (Dewey, 1938), hasta enfoques más constructivistas que ponen énfasis en el aprendizaje activo del estudiante (Piaget, 1970), el pensamiento pedagógico ha estado en constante evolución. Estas transformaciones reflejan los cambios socioculturales, las necesidades del entorno y las demandas de la sociedad en diferentes momentos históricos.

Con la irrupción de la era digital, el panorama educativo se ha revolucionado. La tecnología ha cambiado la forma en que se accede, se procesa y se transmite el conocimiento. Frente a este escenario, Prensky (2001) acuñó el término "nativos digitales" para referirse a la nueva generación de estudiantes que crecen en un mundo saturado de tecnología, lo que plantea la necesidad de repensar las metodologías pedagógicas.

La diversidad cultural, los desafíos medioambientales, la inclusión y la equidad son solo algunos de los temas que la educación contemporánea debe abordar. Freire (1970) subraya la importancia de una educación liberadora, que va más allá de la simple transmisión de conocimientos y busca la transformación social. En este sentido, el pensamiento pedagógico debe ser crítico, reflexivo y adaptativo, respondiendo a las demandas actuales de la sociedad.

El pensamiento pedagógico, en su esencia, es una reflexión profunda sobre la educación y su papel en la formación de individuos críticos, autónomos y comprometidos con la sociedad. En el contexto del siglo XXI, este pensamiento debe ser dinámico, adaptándose a los desafíos y oportunidades que presenta la era digital y las demandas socioculturales contemporáneas.

2.4.1 Comunidades de Práctica de Wenger

Para Wenger (2002), una comunidad es un grupo o grupo de individuos, personas o animales que comparten elementos comunes, como el idioma, las costumbres, los valores, los deberes, la cosmovisión, la edad, la ubicación geográfica, el estatus social y el rol. En general, una identidad compartida se crea dentro de una comunidad, distinguiéndola de otros grupos o comunidades (generalmente por signos o acciones), compartiendo y construyendo entre sus miembros, y socializando. En general, la sociedad participa a la luz de la necesidad u objetivos de un objetivo común, como intereses comunes.

Es esencial evolucionar más allá de las visiones tradicionales que ven al docente operando en solitario, y avanzar hacia perspectivas que lo integren en un colectivo profesional centrado en la enseñanza de las matemáticas utilizando las herramientas de un laboratorio. Surge, entonces, la importancia de visualizar la tarea docente como el planteamiento de una cultura caracterizada por la colaboración y la interacción.

Wenger (2001) y otros expertos que han ampliado sus contribuciones sobre las comunidades de práctica enfatizan que el aprendizaje es inherentemente social. Las personas se educan a través de las conexiones que forman con otros, en un contexto donde todos están en un proceso de aprendizaje, y todo esto ocurre en un marco de actividad con relevancia social. En otras palabras, el aprendizaje se da en el seno de una práctica, influenciado por una cultura y en diálogo con otros.

El concepto de comunidad de práctica se refiere a un entorno donde los educadores comparten conocimientos y forjan su identidad profesional (Lave y Wenger, 2007). En este ámbito, aprender a actuar como un educador de matemáticas significa que los docentes se sumerjan en un aprendizaje riguroso, proactivo y reflexivo, participando activamente en la introspección y el análisis de su labor.

Para concluir, en el ámbito de la enseñanza matemática, una comunidad de práctica se compone esencialmente de un conjunto de docentes que aprenden en acción, intercambian perspectivas sobre la docencia, crean oportunidades para su crecimiento profesional y optimizan la enseñanza en escenarios específicos. El objetivo es que, a través de diversas actividades, los docentes diseñen y proyecten su propia iniciativa, con el fin de establecer una comunidad de práctica en el aula junto a sus estudiantes.

Tabla 1. Elementos característicos de una comunidad de aprendizaje

Dominio	Tiene una identidad definida por un área de interés común

Comunidad	Para perseguir sus intereses en este campo, los miembros participan en actividades y debates conjuntos, se ayudan mutuamente e intercambian información. Construyen relaciones que les permiten aprender unos de otros.
Práctica	Una comunidad de práctica no es más que una comunidad de personas con ideas afines, por ejemplo, personas que disfrutan de cierto tipo de películas. Los miembros de la comunidad de practica son practicantes. Desarrollan un conjunto de recursos compartidos, como experiencias, historias, herramientas y enfoques. El problema, que en definitiva es una práctica común, donde se comparten conocimientos tácitos y explícitos. Requiere tiempo e interacción constante.

Fuente: Elaboración propia

Las comunidades reales ofrecen diversas ventajas. En primer lugar, representan una valiosa forma de compartir conocimientos y aprender, asegurando que los miembros tengan acceso a información relevante y específica, lo que contribuye al proceso de aprendizaje y formación. Además, estas comunidades desempeñan un papel fundamental en la mejora de la calidad de la información y el conocimiento disponibles para sus miembros, aumentando así la eficiencia al conectar a colegas y potenciando el potencial de innovación. Al mismo tiempo, contribuyen a la construcción de la identidad corporativa y fomentan una cultura de trabajo basada en redes de conocimiento y colaboración entre los diferentes participantes. Por último, apoyan el desarrollo de habilidades y competencias personales al presentar desafíos y oportunidades para contribuir al crecimiento y enriquecimiento del grupo.

2.5. Pensamiento Tecnológico y Computacional

El pensamiento tecnológico ha surgido como una competencia fundamental para la ciudadanía del siglo XXI, dada la influencia y omnipresencia de las tecnologías digitales en nuestra sociedad. Se ha convertido en un aspecto crucial de la educación, al preparar a los estudiantes para enfrentar problemas complejos y ofrecer soluciones innovadoras utilizando herramientas y técnicas digitales.

El pensamiento tecnológico se refiere a la habilidad para resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano a través de los conceptos fundamentales de la informática (Wing, 2006). No se limita simplemente a la capacidad de programar, sino que se expande hacia la capacidad de formular problemas y representar soluciones de manera que un computador pueda llevarlas a cabo.

Según Grover y Pea (2013), el pensamiento computacional se compone de diversas habilidades y actitudes, que incluyen la abstracción, la descomposición de problemas, el reconocimiento de patrones, la generalización y el diseño de algoritmos.

La inclusión del pensamiento computacional en la educación tiene como objetivo no solo formar programadores o especialistas en informática, sino ciudadanos capaces de comprender y transformar el mundo digitalizado en el que viven. Según Brennan y Resnick (2012), a través del aprendizaje basado en proyectos y el uso de herramientas de programación visual, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de pensamiento computacional mientras construyen proyectos significativos y expresivos.

Más allá de la informática, el pensamiento computacional tiene aplicaciones en múltiples disciplinas. Las ciencias naturales, la medicina, las ciencias sociales, e incluso las artes, se benefician de este enfoque al enfrentar problemas y desafíos (Papert, 1996). El pensamiento computacional proporciona una lente a través de la cual se pueden visualizar y analizar fenómenos complejos.

El pensamiento computacional, más que una moda educativa, representa una competencia esencial en nuestra era digital. Su adopción en la educación prepara a los estudiantes para un mundo donde la tecnología permea todos los aspectos de la vida, y les otorga herramientas para ser actores activos y críticos en la sociedad.

2.6. Formación de profesores de Matemáticas en TIC

Cabe afirmar que la formación del profesorado está ligada a las diversas herramientas que se utilicen en este proceso, entre los cuales se destaca el uso de recurso TIC. Sin embargo, Cabero, Duarte y Barroso (1997) menciona que para poder utilizarlos se deben analizar desde dos perspectivas las cuales son: Formación para los medios y formación con los medios. La primera hace referencia a la adquisición de destrezas de interpretación para capturar mejor la información, la segunda resalta que el uso de instrumentos para incentivar nuevas habilidades cognitivas en los estudiantes.

Así mismo, Bastan y Rosso (2006) afirman que en la incorporación de nuevas tecnologías a los procesos de enseñanza no se puede dejar por fuera los saberes a enseñar y las finalidades de enseñanza, por lo que puede representar grandes aportes a cualquier ciencia del saber, en este acaso a la educación matemática. En este sentido, Díaz (2006) afirma que la formación del docente deberá estar ligada a las nuevas formas de concebir conocimiento, por lo que se hace necesario mencionar la práctica pedagógica.

La práctica pedagógica consiste en un proceso en el cual se involucran varios aspectos relacionados con el conocimiento pedagógico del maestro, del mismo modo el profesorado en formación debe estar acorde a las exigencias del entorno social por lo que se hace pertinente aplicar las TIC en matemáticas. En primer lugar, Fernández y Muños (2007) afirman que cada vez hay muchas personas con posibilidades a acceder a las TIC y la incorporación de estas en las matemáticas debe generar cambios en ella. Asimismo, Castillo (2008) afirma: “Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) están presentes en todos los sistemas que componen los diferentes ámbitos de la sociedad” (p.172).

Además, los procesos de enseñanza en matemáticas pueden mejorar con el uso de las TIC (Riveros, Mendoza y Castro, 2011; Rodríguez, Romero y Vergara, 2017). Sin embargo, estas herramientas no son eficaces si el profesorado no está lo suficientemente capacitado para utilizarlas. Calvo y Gil (2013) afirman que el docente debe estar lo suficientemente capacitado para impartir nuevas fuentes de aprendizaje apoyándose en los recursos tecnológicos. Del mismo modo, Belfiori (2014) afirma que la vinculación de las TIC en las matemáticas no sólo requiere de conocer herramientas que faciliten el proceso sino también rectificar conocimientos pedagógicos y disciplinares del maestro.

Cabe destacar ciertas indicaciones de entes gubernamentales como las propuestas presentadas por el Ministerio De Educación Nacional [MEN] (2013), el cual define unas series de competencias las cuales hacen parte del desarrollo integral de un docente en TIC las cuales son:

- Competencia tecnológica: Se caracteriza por definir la capacidad de seleccionar y la capacidad de utilizar de manera pertinente herramientas tecnológicas.
- Competencia comunicativa: Se define como la capacidad de expresarse en cualquier entorno virtual ya sea de manera sincrónica o asincrónica.
- Competencia pedagógica: Definida como la capacidad de utilizar las TIC para el fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Competencia de gestión: Se puede definir como la capacidad de utilizar las TIC con fines de organizar y evaluar los procesos educativos.

- Competencia investigativa: Se refiere a la capacidad de usar las TIC como una herramienta de transformación del saber y generar nuevos conocimientos a partir de ésta. En pocas palabras, estas tienen un objetivo en particular, ofrecerle orientaciones al docente para que realice ciertas innovaciones en sus procesos de enseñanza. En este caso, en el aprendizaje de las matemáticas (Hernández, Arévalo y Gamboa, 2016).

De la misma forma, en cuanto a la formación de docentes en matemáticas, en las constantes transformaciones que manifiesta la tecnología en la sociedad, se hace necesario realizar diversos cambios en los procesos de enseñanza (Carvajal, Font y Giménez, 2016). Dicho de otra manera, el profesor debe ser un agente de cambio, por lo cual debe generar estas diversas actualizaciones; Valbuena, Conde y Padilla (2018) afirman que los docentes son agentes de cambios en cualquier entorno social que los rodea, también ofrecen herramientas para que los estudiantes comprendan el entorno que se desarrolla a su alrededor. De forma tal que el uso de la tecnología puede hacer parte de ese conjunto de herramientas mencionadas con anterioridad, lo cual podrá enriquecer el proceso de enseñar.

A su vez, el profesorado debe formarse para integrar las tecnologías de manera reflexiva, mediando y colaborando en la investigación para desarrollar nuevas destrezas y recursos para que, sin importar el modelo educativo, puedan hacerse las transformaciones necesarias en pro de un aprendizaje significativo (Abar y Lavicza, 2020). Además, la formación debe centrarse en la elaboración de estrategias metodológicas de enseñanza y aprendizaje en el manejo de recursos informáticos (Buitrago, 2018).

En cuanto a la educación matemática, la tecnología se podría determinar como una integración de saberes, conocimientos, experiencias en la actividad. Además, Carvajal, Covarrubias, Gonzales y Uriza (2019) afirman que la incorporación de nuevas tecnologías en la educación matemática resulta ser beneficioso en los procesos de enseñanza -aprendizaje de ésta, de tal forma que puede mejorar el quehacer educativo. Siguiendo esta línea de pensamiento, se considera que la integración de las TIC en la educación matemática tiene un impacto positivo en la formación profesional de los docentes (Parí, 2019).

Ahora bien, en algunas investigaciones como la de Padilla-Escorcia y Conde-Carmona (2020) se muestra que, de un grupo de 23 egresados de un programa que forma profesores en matemáticas, el 62.17% de ellos aseguró que su formación en TIC fue regular. Por eso, las incorporaciones de estas tecnologías en la educación matemática juegan un papel fundamental. Tigrero, Choez y Guale (2020) afirman que los avances tecnológicos cada vez se presentan con mayor frecuencia en cualquier entorno social, de tal forma que ha reproducido significativos cambios en los diversos procesos de enseñanza-aprendizaje de la educación.

En este mismo orden, el profesorado en formación debe sentirse capaz de desarrollar los conocimientos adquiridos en su práctica profesional. A modo de conclusión, los programas que están dentro de la educación matemática deben generar profesionales que sean capaces de integrar, comprender, y aplicar las TIC en las tantas situaciones de su entorno educativo (Tirado, 2015).

Ahora, teniendo en cuenta que el área central de esta investigación que es las TIC en Educación Matemática, se puede observar dicho avance también, inclusive, en países en vía de desarrollo. En ese sentido, los docentes han comenzado a considerar las tecnologías como una herramienta para ayudar al aprendizaje de los estudiantes en varios campos de las matemáticas como la Estadística, la Geometría y la Aritmética (Abidin, Ismail, & Ismail, 2018).

Se puede decir, entonces, que las TIC hacen parte de una agenda esencial de los gobiernos para elevar los estándares en las escuelas y promover en los docentes el acceso, las habilidades y el conocimiento de los estudiantes a las nuevas tecnologías, siendo esta una preocupación primaria para los educadores de todo el mundo (Khambari, Su Luan, & Mohd, 2010). Esto obedece a que la implementación de las TIC promueve y despierta el interés de los estudiantes por la revolución de las nuevas tecnologías, convirtiéndose esto en un paso importante para conectarlos con la exigencia del mundo actual, ya que a medida que el mundo evoluciona, también lo hace la enseñanza y el aprendizaje.

Así mismo, diferentes organismos internacionales y gubernamentales, asociaciones de profesionales, han asumido la responsabilidad de diseñar y definir los estándares y lineamientos que determinan las competencias TIC de los profesores con el propósito de hacer realidad la integración de estas tecnologías en los contextos educativos y en las prácticas pedagógicas de aula (Gamboa, Hernández, & Prada, 2018). Esto de una u otra forma repercute en la formación docente que por muchos años primó en las escuelas, siendo que la reflexión de la práxis de cada docente se ha convertido en eje central en búsqueda de rompimiento de paradigmas y esquemas a los cuales las escuelan venían acostumbradas y que no van en la misma dirección que el mundo actual ofrece. En ese sentido, las reflexiones en los docentes aportan elementos a su formación, lo cual constituye un proceso esencial si se busca alcanzar desarrollos en la educación.

De este modo que el mundo académico viene caminando en este horizonte, según lo señalado por Wang (2011), el alto desarrollo de la tecnología estimula más la idea de enseñanza efectiva en educación matemática. No obstante, son las reflexiones diarias en la práctica mismas de los docentes las que influyen en la correcta aplicación adecuada de la misma, fortaleciendo el buen uso de las TIC en cualquier nivel de las escuelas. En consecuencia, es necesario que los educadores matemáticos desarrollen la capacidad de hacer uso de la tecnología incorporándola en la misma formación del profesorado e integrándola en su experiencia de campo (Li, 2003).

En ese orden de ideas y desde la perspectiva de la formación de los docentes de matemáticas en las Tecnologías de la información y comunicación, área de interés de esta investigación, cabe resaltar que éstas resultan esenciales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pues, mejoran el proceso de aprendizaje de los estudiantes, siendo que a partir de los insumos de Rojano (2006) en la enseñanza de la matemática se necesita de modelos específicos con tecnología, bajo principios didácticos, de especialización, cognitivos y pedagógicos, siendo que las TIC, mediante estos elementos dan rápidos y precisos comentarios que contribuyen a la motivación positiva en el estudiantado a través de estrategias que apoyan a la pedagogía constructivista en la cual los estudiantes exploran y alcanzan comprensión de los conceptos matemáticos (Chong, Sharaf, & Jacob, 2005).

Esto, debido a que el uso de las TIC en las matemáticas, permite explotar en los estudiantes habilidades en la exploración, la comunicación y la resolución de problemas aplicadas en contextos reales y prácticos (Lai & Lin, 2018), siendo esto un desafío para las escuelas ya que la integración de las mismas en los procesos de enseñanza – aprendizaje requiere que el personal docente cuente con la adquisición de competencias digitales que permitan que los alumnos desarrollen las habilidades antes mencionadas, ya que el desarrollo de los centros educativos, requiere del desarrollo de la competencia digital por parte del personal docente, de manera que se conviertan en líderes escolares en Tecnologías de la Información y Comunicación que contribuyan en la formación de los educandos (Blau & Shamir, 2017).

Por otra parte, las TIC en educación matemática contribuyen a su vez a que los estudiantes aumenten su rango de calidad de sus investigaciones matemáticas en escenarios más realistas, ya que brindan capacidades poderosas para la computación, la construcción y la representación visual, logrando que los estudiantes accedan a contenidos y contextos matemáticos que, de lo contrario, serían demasiado complejos de explorar. Elementos como las calculadoras, las herramientas de software informático y otras tecnologías ayudan en la recopilación, grabación, organización y análisis de los contenidos (Wachira & Keengwe, 2011), y más teniendo en cuenta que el uso de las mismas tienen un impacto en el logro de los estudiantes en Matemáticas; los hallazgos obtenidos en la investigación realizada por Saal, Van Ryneveld, & Graham (2019) con base en los resultados de las Pruebas PISA del año 2012 en Sudafrica evidenciaron que los estudiantes quienes tienen computadoras disponibles en casa y en la escuela tienden a funcionar y desarrollar mejores habilidades en matemáticas.

En otras palabras, la tecnología comprende herramientas que pueden usarse para diseñar ejemplos ilustrativos en matemáticas, facilitando así la conceptualización de los estudiantes durante el aprendizaje, especialmente el basado en problemas, siendo esto un apoyo didáctico para los docentes en los procesos de aprendizaje y de enseñanza innovadora de las matemáticas (Chizwina & Mhakure, 2018).

2.7. TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) en Educación Matemática

A lo largo de la historia, la educación matemática ha evidenciado ciertos cambios que han favorecido el desarrollo de esta; algunos de ellos han sido resultados de la utilización de ciertas teorías, modelos pedagógicos propias y no propias las cuales han generado grandes logros. Entre esos se resalta el TPACK (Technological, Pedagogical And Content Knowledge, que en su traducción es Conocimiento Pedagógico, Tecnológico y de Contenido). Cabe aclarar que el TPACK no es una teoría propia de la educación matemática; sin embargo, dada su versatilidad se puede adaptar al área, así como a otras.

En este sentido, Shulman (1986), en el marco del desarrollo de su investigación, determina que el docente debería manejar dos tipos de pensamiento los cuales son: Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico, sin embargo, más allá de hablar de estos dos tipos de conocimiento se enfocó en mostrar que debe existir una intersección entre estos dos, la cual da como resultado el conocimiento pedagógico de contenido.

Por otra parte, la influencia de las tecnologías ha estado ligada al desarrollo de las sociedades por lo cual se dio a la necesidad de generar un nuevo conocimiento que sostenga lo presentado por Shulman. Es así como Mishra y Koehler (2006) plantearon un vínculo que relaciona lo antes mencionado con el uso de la tecnología. Este saber, el cual denominaron conocimiento tecnológico, no solo buscaba incluirse sino generar otras relaciones en el modelo de Shulman de tal forma que determinaron que el conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido y el conocimiento tecnológico daría como resultado el TPACK.

Sin embargo, a pesar de que este modelo había sido un gran avance dentro del marco de la educación, Mishra y Koehler (2009), en su marco, deciden agregar una serie de líneas que hacen alusión a los diferentes contextos, es decir, consideraron la importancia que tiene el entorno dentro de cada uno de estos conocimientos.

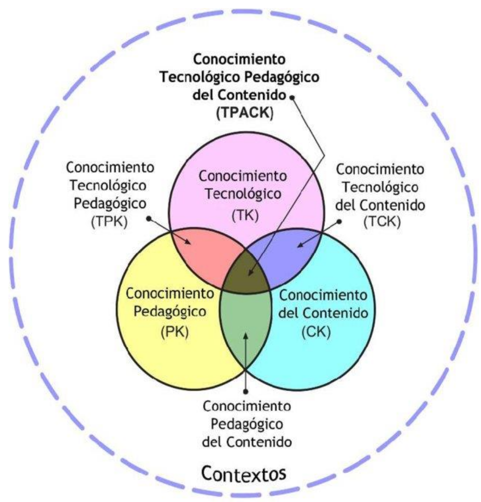


Figura 1. Modelo TPACK. Fuente: Tomado de (Cejas, R., y Navío, A., 2016, p.2).

A parte de ello, se hace necesario conocer a fondo cada uno de estos conocimientos que componen este modelo. Koehler, Shin y Mishra (2012) determinan que este modelo está configurado por tres dominios del conocimiento los cuales son:

- **El contenido (CK):** Este hace referencia a los conocimientos propios que posee el docente con respectos a su área de acción. En el caso de la educación matemática, estos conocimientos serán de tipo matemático, además permite identificar ¿qué tan preparados están los docentes?

- **Conocimiento pedagógico (PK**): Se refiere a las diversas formas como el docente imparte sus clases, a las diferentes estrategias utilizadas en los procesos de enseñanza, para lograr una adecuada formación en sus estudiantes, por medio de herramientas que elegidas por el educador.
- **Conocimiento tecnológico (TK**): Son los saberes que posee el docente en el marco de las herramientas tecnológicas, es decir, ¿qué tanto saben los docentes sobre el uso asertivo de las herramientas tecnológicas? Además, este aparatado permite a los educadores, complementar sus clases, adaptándose a las necesidades que el actual contexto le exige, manifestando el contenido enseñado de una forma muy diferente.

A su vez, la integración de estos conocimientos genera; *i)* El conocimiento pedagógico de contenido (PCK) el cual es una integración entre el contenido pedagógico y del contenido, *ii)* el conocimiento tecnológico del contenido (TCK); este se refiere a la intersección que ocurre entre los saberes tecnológico y del contenido y *iii)* el conocimiento tecnológico pedagógico (TPK) el cual hace referencia a la interacción de los tres conocimientos y el cual genera este modelo.

En este sentido, el TPACK en educación matemática es una base fundamental para una buena enseñanza con tecnología, resaltando el papel que juega el uso de las TIC en esta (Ortega, 2020). La incorporación de las TIC en la educación ha generado grandes cambios en los modelos de aprendizaje y enseñanza de esta (Avello y Marín, 2016).

Adicionalmente, el TPACK puede mejorar las condiciones educativas, ya que promueve el uso de herramientas tecnológicas mediadas por conocimientos pedagógicos y disciplinares (Okumus, Lewis y Wiebe, 2016; Açıkgül & Aslaner2020). Por consiguiente, en cuanto a la práctica pedagógica, se puede resaltar que este modelo además de ofrecer elementos a la ejecución de esta también garantiza una buena construcción de contenido. Del mismo modo, Salas (2018) afirma que el TPACK apoya al maestro durante los procesos de exploración y selección de herramientas de índole tecnológica. Es decir, propone herramientas idóneas para el desarrollo de competencia en el estudiante en matemáticas.

Además, esta teoría resulta ser de gran provecho en la educación matemática, ya que provee de elementos, en este caso una serie de conocimientos, los cuales están ligados a diferentes competencias, pero al mismo tiempo se complementan entre sí, formando un buen desarrollo en el aprendizaje. Así pues, Vivanco (2020) determina que el uso del modelo TPACK garantiza el aprovechamiento de los conocimientos pedagógicos, disciplinares y tecnológicos del docente, de tal forma que esta teoría complementa la práctica pedagógica y la tecnología, lo cual genera una gran posibilidad de establecer investigaciones, análisis, proyectos, entre otros.

Ahora bien, sin duda alguna el TPACK representa una integración de los conocimientos ofrecidos por los docentes, de lo cual es conveniente analizar cómo es el impacto para aquellos que hacen la vinculación de este modelo en su quehacer pedagógico, por lo que, Gómez (2020) afirma que el TPACK representa una gran herramienta ya que permite crear nuevas competencias tecnológicas, las cuales a su vez proveen de nuevas alternativas a la práctica pedagógica. En este mismo orden, Muñiz, Muñiz y Aguilar (2020) afirman que en la formación inicial de los profesores de matemáticas es relevante incorporar este modelo, ya que, por medio de éste, se fomenta la adquisición de todas las competencias TIC necesarias en este proceso.

Este modelo propone la transformación de la práctica docente, en atención a la sociedad actual donde el uso de recursos digitales es clave para el desarrollo de capacidades en los estudiantes y, por ende, para mejorar la calidad de la enseñanza y los aprendizajes (Morales, 2020, p.145). A modo de conclusión, es una alternativa permite analizar como son los procesos en la formación del profesorado en matemáticas de un programa que forma licenciados en esta ciencia del saber colombiano.

Conclusiones

En este capítulo, se llevó a cabo un análisis detallado del modelo TPACK, un marco conceptual que resalta la intersección de los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido. Se puso especial énfasis en cómo este modelo facilita la integración de las tecnologías emergentes en la educación. Se abordaron múltiples enfoques relacionados con la preparación y formación de docentes de matemáticas en el contexto tecnológico, destacando la necesidad de adaptarse a las demandas cambiantes del siglo XXI.

Profundizando en la preparación de los docentes de matemáticas, se alinea con las perspectivas de Burton (1984), quien articuló la necesidad de comprender el pensamiento matemático más allá de las operaciones y resultados. Este enfoque invita a reconocer la dinámica y los procesos subyacentes que definen la matemática como una disciplina viva y en constante desarrollo. Tal comprensión conduce a una enseñanza que es efectiva, contextualizada y resonante con las realidades educativas del siglo XXI.

Se subraya, asimismo, la importancia de las comunidades de práctica, que, según se discutió, son esenciales para un aprendizaje colaborativo y reflexivo. Estas comunidades no solo actúan como soporte para el desarrollo profesional continuo, sino que también promueven una cultura de intercambio y crecimiento mutuo entre docentes y estudiantes. La implementación de estas comunidades en la educación matemática enriquece la experiencia educativa, potenciando tanto la enseñanza como el aprendizaje y asegurando que ambos se mantengan pertinentes y efectivos en un mundo cada vez más tecnificado.

En conclusión, este capítulo refuerza la relevancia del modelo TPACK como un pilar en la formación docente y subraya el rol de las comunidades de práctica en la creación de un entorno educativo dinámico y en constante adaptación. A través de este enfoque, se espera que el educador y los estudiantes no solo se adapten, sino que también prosperen en la intersección de la matemática, la pedagogía y la tecnología.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Aspectos metodológicos. La tesis se sustenta en un paradigma de investigación cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo y un diseño de investigación acción, enfatizándose en un estudio descriptivo cualitativo, desde donde se abordará la información recopilada. Esta investigación se determina como: no estandarizada, abierta y no estructurada; además, la presente investigación no es totalmente empírica, ni solo interpretativa, busca promover alteraciones sociales, tratando de caracterizar las habilidades y el desarrollo del pensamiento aleatorio para comprender el aprendizaje, y a su vez relacionarlo con el contexto, de manera auto-reflexivo.

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

Primera fase:

Elaboración del constructo “Formación docente en TIC en educación matemática” a partir de aportes de la historia y epistemología de estos conceptos y de resultados de investigaciones previas en los desarrollos teóricos que la comunidad académica ha aportado en esta materia.

Segunda fase:

1) Diseño de instrumentos para la recolección de la información, elaboración de encuesta para entrevista y diario de campo para observación no participante.

2) Recolección de la información, aplicación de encuestas, entrevistas, grupos focales y observación de clases de matemática.

3) Transcripción de las encuestas sobre las argumentaciones de los actores (Profesores de matemática de la Instituciones Educativas), incorporando las respuestas de cada uno a las preguntas de estas.

4) Cruzar la información y convergencia para llevar a cabo el procedimiento de categorización y el análisis de la relación práctica pedagógica y el uso de las TIC dentro del aula, por parte de docentes de matemáticas, utilizando las técnicas Observación, Encuesta y Grupos Focales.

Tercera fase:

- Caracterización de las competencias TIC por parte de los profesores de matemáticas, con el fin de encontrar una hoja de ruta que permita el diseño de estrategias de integración e interrelación entre la práctica pedagógica y el uso de las TIC en el aula. Además, esto puede ser usado como base para la toma de decisiones sobre la formación continua de los docentes de matemática.
- Construcción y diseño un modelo didáctico para favorecer el desarrollo de las competencias TIC en los profesores de matemática que permita impactar en su práctica pedagógica dentro del aula de clases

3.2. Población y muestra o unidad de análisis

La muestra está compuesta por profesores de matemáticas en formación de una universidad pública de la Costa Caribe Colombiana. La selección se llevó a cabo mediante muestreo discrecional o intencional, técnica que permite seleccionar a aquellos participantes que, desde la perspectiva del investigador, se consideran más idóneos para el estudio (Carreño, Vergara y Sevillano, 2017).

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

Observación.

El instrumento de observación es una herramienta metodológica de monitoreo, que permite registrar un seguimiento espacio temporal, siendo esta sección implementada durante todo el transcurso del desarrollo de la investigación, dado que a través de este instrumento se recaba información pertinente para lograr un análisis holístico del diseño. Además, la observación es un instrumento utilizado por el investigador de una forma externa, puesto que es una planificación organizada que permite relacionar al agente investigador con el contexto de los estudiantes y, así, recolectar información relevante con un carácter no formativo (Caicedo y Calderón, 2020; Isaza, 2020).

Ahora bien, los datos obtenidos mediante la observación comprenden aquellos aspectos relevantes que el equipo investigador registra y analiza. Esta información se recopila detalladamente y de manera caracterizada de cada participante durante las actividades, entrevistas y encuestas. Dicho instrumento se adapta de forma pertinente para analizar, tanto de manera superficial como en profundidad, los datos cruciales obtenidos durante el desarrollo y tras la finalización de las actividades propuestas. Todas las observaciones significativas realizadas por el investigador se consignarán en un diario de campo.

Encuesta.

Este instrumento es diseñado, estructurado, sistematizado y específico a ciertas necesidades, con el fin de lograr recolectar datos pertinentes. Fueron aplicados dos cuestionarios a los estudiantes profesores en formación, quienes intervinieron en la investigación. Se determinó este instrumento con el objetivo principal de describir las habilidades que presentan los estudiantes para comprender el aprendizaje (Krishnasamy, Sook y Choo, 2020).

Por un lado, la primera encuesta se realizó de manera diagnostica para poder identificar y describir las competencias cognitivas que posee el grupo de profesores de matemática, frente al uso de la TIC y, así mismo, lograr una visión objetiva del déficit y la dicotomía al momento de realizar las actividades pertinentes. Posteriormente a recabar toda la información relevante, se procede a efectuar una síntesis y un análisis profundo, acerca de toda la información obtenida, para proceder a realizar nuevos ajustes que permitan construir una estrategia para la formación de profesores.

En definitiva, se realiza la segunda encuesta, la cual consta de un material de apoyo, para que los profesores a través de la reflexión, y el análisis, alcancen a relacionar el uso de tecnología en la enseñanza de la matemática, los cuales serán cuestionados por el investigador mediante el modelo TPACK y, a su vez, validar si la estrategia propuesta es plausible, si dista, entonces se generaran nuevas hipótesis para reajustar o generar nuevas estrategias.

Entrevista no estructurada.

También, se realiza una entrevista con preguntas abiertas a docente y expertos, la cual tiene como finalidad estudiar el proceso didáctico con el que se efectúan los procesos de formación en TIC. Se utiliza para el análisis de las categorías, a su vez busca recabar la información necesaria para redefinir las dificultades y necesidades que se van a contrarrestar con el modelo didáctico de esta investigación. Esta entrevista se realiza de manera no estructurada, con la finalidad que los profesores suministren todo el informe de forma cualitativa, descriptiva y detallada.

3.4. Trabajo de campo

El trabajo de campo se realizará mediante unidades de trabajo.

Unidad de trabajo: profesores y profesores en formación de matemáticas, de instituciones educativas en Barranquilla.

Se seleccionan profesores de matemática que sean licenciados, es decir, que tengan formación en enseñanza, luego de entrevistarlos, consultarlos y observarlos, se les enseña un conjunto de actividades, tareas, herramientas y medios, que permitan fortalecer el uso efectivo de las tecnologías en el aula de clase de matemáticas.

Esto permite obtener insumos para la construir de un modelo didáctico, que propenda fortalecer la formación de profesores de matemáticas.

3.5. Fases de la investigación

En primer lugar, se construye el estado del arte. A continuación, se determina el marco teórico que respalda la investigación. Luego, se diseñan instrumentos y actividades para recopilar información. Después, se crea una metodología para desarrollar un modelo didáctico para la formación de profesores. Por último, se lleva a cabo el análisis de los resultados obtenidos.

3.6 Validación de las técnicas e instrumentos de los datos

Los insumos de esta investigación se validaron mediante el método Delphi, cuyo instrumento organiza y sistematiza las diversas opiniones de los expertos (Cruz, 2009). Este proceso inicia proporcionando un cuestionario a expertos en la temática para que patenticen meticulosamente las opiniones. Posterior a ello, el grupo investigador busca un consenso general para modificar dichos insumos, si es necesario. En este sentido, se describen las valoraciones estadísticas que soportan la validación de las técnicas e instrumentos.

Tabla 3. Valoración final del método Delphi

	MA	**BA**	**A**	**PA**	**NA**	**Suma**	**Promedio por fila (pm)**	**N-pm**
1	0	0.15	0.15	0.15	0.15	0.6	0.103	0.320
2	0	0.08	0.15	0.15	0.15	0.125	0.092	0.38
3	0.68	0.77	0.77	0.77	0.77	3.76	0.740	-0.32
4	0.68	0.77	0.77	0.77	0.77	3.76	0.740	-0.32
5	0.68	0.77	0.77	0.77	0.77	3.76	0.740	-0.32

6	0	0.14	0.14	0.14	0.14	3.76	0.740	0.319
Suma	2.04	2.68	2.75	2.75	2.75			
Puntos de corte	0.47	0.50	0.51	0.51	0.51			

Fuente: Elaboración propia

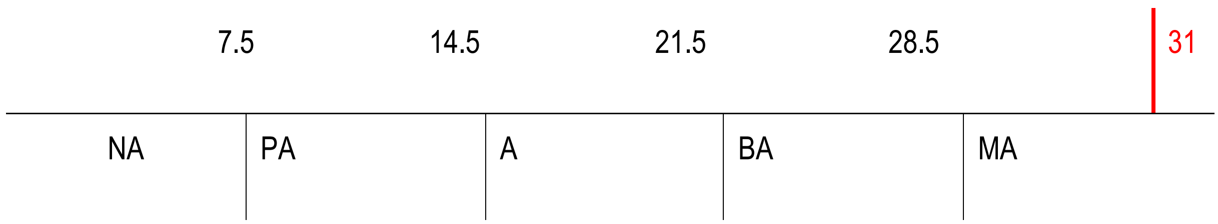


Figura 2. Recta valorativa de la validación de la prueba inicial y final. Fuente: elaboración propia

NA: no adecuado; PA: poco adecuado; A: adecuado; BA: bastante adecuado; MA: muy adecuado.

Dadas las valoraciones detalladas de la aplicación del método Delphi se concluye que los instrumentos de este trabajo se encuentran ubicados en la categoría muy adecuado, por lo tanto, dichos insumos son idóneos.

CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN TIC CON PROBLEMAS RETADORES. SISTEMAS DE ACTIVIDADES

En este capítulo se establece un modelo didáctico para la formación de profesores de matemática en TIC con problemas retadores. Tras analizar las dimensiones y triangular el marco teórico, se presenta el modelo que refleja el contexto y los escenarios ideales para la intervención y gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje para futuros profesores de matemática.

4.1 Modelo Didáctico

Un modelo didáctico es un conjunto estructurado de criterios que orientan la acción educativa. Este modelo incluye estrategias, métodos, técnicas y actividades que están diseñadas para promover y facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, un modelo didáctico se basa en teorías educativas que proporcionan la base conceptual para entender cómo los estudiantes aprenden y cómo se puede mejorar la enseñanza (Clements & Sarama (2004).

El modelo didáctico que se propone consta de dos partes: parte 1: los fundamentos teóricos del modelo, parte 2: resolución del modelo y andamiaje del modelo.

Primera parte. Bases teóricas del modelo didáctico

Para estructurar el modelo didáctico orientado a la formación de profesores de matemática en el ámbito de las TIC, es esencial considerar una serie de fundamentos filosóficos, psicológicos y pedagógicos. Estos cimientos teóricos tienen como objetivo proporcionar una base sólida que permita una formación efectiva de los futuros docentes, especialmente en la resolución de problemas retadores utilizando tecnologías de la información y comunicación.

Fundamentos Filosóficos. Se retoman las ideas de Davis y Hersh (1988) y Lakatos (1978) con relación a la Educación Matemática. Hersh (1997) subraya la necesidad de hacer las matemáticas comprensibles y relevantes, vinculándolas al entorno social y cultural del futuro docente. Por su parte, Lakatos (1978) destaca la importancia de los problemas como catalizadores para generar conjeturas y, en consecuencia, para la construcción activa del conocimiento matemático. Además, se valoran las perspectivas de Davis y Hersh (1980) y Ernest (1997) sobre la naturaleza contextual y evolutiva de la verdad matemática, reconociendo que esta se construye y se redefine constantemente a lo largo del tiempo.

Fundamentos Psicológicos. Las contribuciones de Vygotsky (1962) son esenciales para entender cómo se desarrolla el pensamiento matemático. Vygotsky destaca la importancia del lenguaje y los símbolos como herramientas fundamentales en el proceso de aprendizaje. Además, se pone especial énfasis en la relación entre el conocimiento implícito, aquel que el estudiante ya posee, y el conocimiento explícito que se busca desarrollar, especialmente en el ámbito de las TIC y la resolución de problemas retadores.

Fundamentos Pedagógicos y Didácticos. Las reflexiones de Chevallard (2005) sobre las carencias y desafíos en la educación matemática moderna son fundamentales. Chevallard identifica deficiencias en las instituciones educativas y destaca la responsabilidad de los investigadores y educadores en transformar la situación actual de la educación matemática. Tirosh (1999) subraya la importancia de que el docente, en su formación, aprenda a plantear preguntas retadoras que motiven a los estudiantes y les guíe en el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas. Se reconoce la interacción entre los componentes personales (profesor y estudiante) y los componentes no personales (objetivos, contenidos, métodos, recursos, organización y evaluación) como esenciales para la construcción de un modelo didáctico robusto y efectivo.

El modelo didáctico propuesto tiene como principal objetivo fortalecer la formación del profesor de matemáticas, enfocándose en la creación y resolución de problemas retadores. Estos problemas, diseñados con un alto grado de complejidad y relevancia, buscan desarrollar simultáneamente el pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico del futuro docente. La finalidad de este modelo se centra en:

Desarrollo del Pensamiento Matemático: Proveer al docente en formación de herramientas y estrategias que le permitan mejorar su práctica pedagógica, contribuyendo al desarrollo de su pensamiento matemático a través de la resolución de problemas retadores.

Fomento del Pensamiento Tecnológico: Contribuir al empoderamiento del futuro profesor de matemáticas, fortaleciendo su capacidad para integrar las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en la enseñanza de la matemática. Esto no solo potencia su habilidad para resolver problemas, sino que también le permite adaptarse a las demandas del siglo XXI, donde la tecnología juega un papel fundamental en la educación.

Estímulo del Pensamiento Pedagógico: Motivar al docente en formación a diseñar y desarrollar actividades didácticas diversificadas que favorezcan la resolución de problemas matemáticos retadores. Esta práctica pedagógica busca que el futuro profesor pueda adaptar su enseñanza a diferentes contextos y necesidades de aprendizaje, garantizando una educación matemática de calidad para todos los estudiantes.

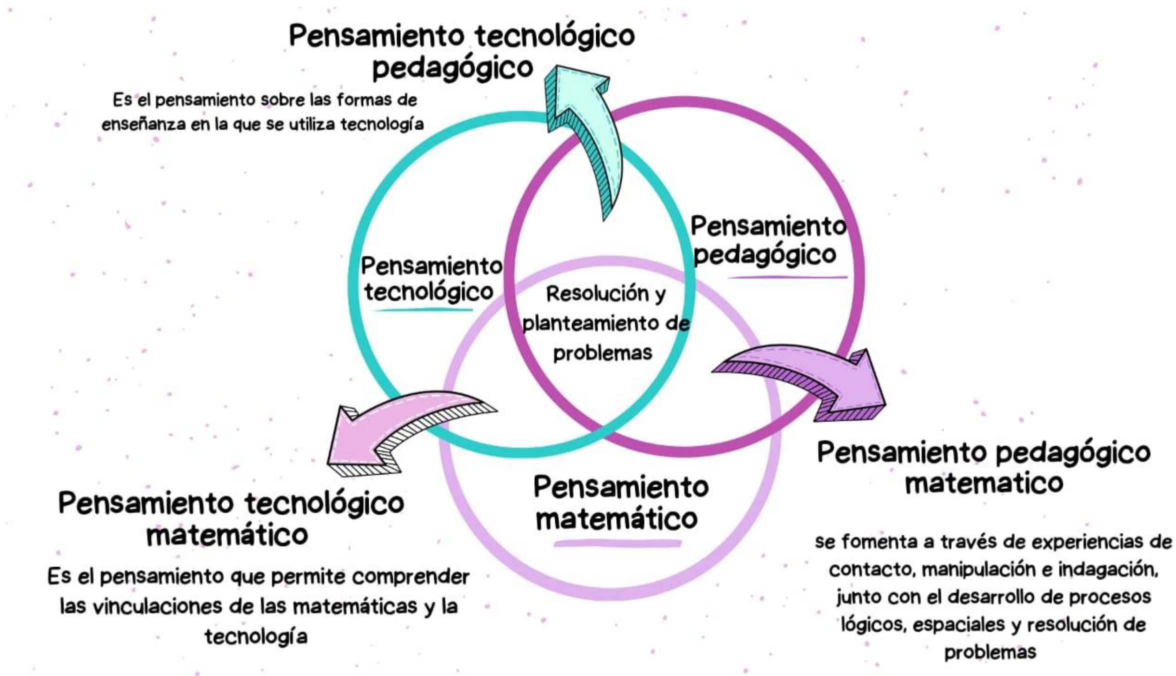


Figura 3. Esquema de resolución y planteamiento de problemas. Fuente: elaboración propia

Parte dos: Resolución del Modelo didáctico

4.2 Modelo didáctico para la Formación de Docentes en Matemáticas con Enfoque Tecnológico

La formación de docentes en matemáticas ha experimentado una transformación significativa con la incorporación de la tecnología en el proceso educativo. En este contexto, se propone un modelo didáctico innovador que busca integrar la tecnología como herramienta esencial para la resolución y creación de problemas retadores, con el objetivo de fomentar el desarrollo integral del pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico.

1. Resolución de Problemas Retadores Mediante Tecnología: El modelo enfatiza la importancia de enfrentar a los docentes a problemas retadores que requieran el uso de herramientas tecnológicas para su solución. Esta aproximación no solo refuerza su comprensión matemática, sino que también les familiariza con las herramientas tecnológicas actuales.

2. Desarrollo de Tres Dimensiones del Pensamiento: Al resolver estos problemas, los docentes cultivan simultáneamente su pensamiento matemático, al analizar y abordar el problema; su pensamiento tecnológico, al emplear herramientas digitales en la solución; y su pensamiento pedagógico, al reflexionar sobre cómo este enfoque puede ser implementado en el aula.
3. Planteamiento y Formulación de Problemas: Una vez que los docentes han adquirido experiencia resolviendo problemas retadores con el apoyo de la tecnología, se les anima a crear o plantear sus propios problemas. Esta habilidad no solo refuerza su comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también les permite diseñar desafíos adecuados para sus futuros estudiantes.
4. Integración de Manipulativos Virtuales y Software Específico: Reconociendo la relevancia de los manipulativos en el aprendizaje matemático, el modelo promueve el uso de manipulativos virtuales y software específico como Geogebra, Excel, Sage, entre otros, después de una comprensión inicial con manipulativos concretos. Estos recursos tecnológicos, junto con la aplicación de inteligencia artificial, sirven como puentes hacia conceptos más abstractos y ofrecen una dimensión interactiva al aprendizaje.
5. Metodología de Investigación-Acción: Este modelo se implementa a través de una metodología de investigación-acción, estructurada en ciclos que abordan diferentes componentes del área matemática. Cada ciclo es una oportunidad para que los docentes experimenten, reflexionen y adapten su enfoque, siempre con el objetivo de integrar tecnología y matemáticas de manera efectiva.

El modelo didáctico propuesto busca preparar a los docentes para un mundo educativo en constante evolución, donde la tecnología y la matemática se entrelazan de manera inseparable. Al equipar a los docentes con las habilidades y conocimientos necesarios para navegar por este paisaje, se les empodera para formar a la próxima generación de estudiantes en un entorno de aprendizaje dinámico y relevante.

La formación de docentes en matemáticas en el siglo XXI requiere una integración holística de diversos dominios del conocimiento. Un punto de referencia en la literatura es el modelo TPACK (Tecnológico, Pedagógico y de Contenido); este modelo didáctico busca cruzar los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico en un marco cohesivo.

1. Intersección de Pensamientos:

    - Matemático y Tecnológico: Al resolver problemas retadores usando herramientas como Geogebra o Excel, los docentes no sólo aplican conceptos matemáticos, sino que también desarrollan habilidades tecnológicas. Esta combinación fomenta una comprensión más profunda y aplicada de la matemática.

    - Matemático y Pedagógico: Al plantear problemas, los docentes reflexionan sobre cómo presentar conceptos matemáticos de manera efectiva, considerando las necesidades y capacidades de sus estudiantes.

    - Tecnológico y Pedagógico: La tecnología se convierte en una herramienta pedagógica, permitiendo a los docentes diseñar experiencias de aprendizaje más interactivas y adaptadas a la era digital.

    - Integración Total: La confluencia de los tres pensamientos es donde los docentes están mejor equipados para enseñar matemáticas en el contexto actual. Aquí, la tecnología y la pedagogía sirven al contenido matemático, creando una experiencia de aprendizaje rica y multidimensional.

2. Resolución y Planteamiento de Problemas: Según Polya (1945), la resolución de problemas es fundamental para el aprendizaje matemático. El modelo presentado enfatiza tanto la resolución como el planteamiento de problemas como ejes centrales. Al enfrentar y crear problemas

retadores, los docentes desarrollan una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y fortalecen sus habilidades pedagógicas y tecnológicas. Como Schoenfeld (1985) señala, el planteamiento de problemas no solo es una habilidad, sino también una actitud, una perspectiva que es esencial para el quehacer docente.

3. Potenciación del Quehacer Docente: Al integrar la resolución y el planteamiento de problemas en su práctica, los docentes se vuelven más adaptativos, reflexivos y efectivos. Están mejor preparados para responder a las necesidades cambiantes de sus estudiantes y para incorporar nuevas tecnologías y metodologías en su enseñanza.
4. Fundamentación Teórica: Este modelo se basa en una rica tradición de investigación en educación matemática y tecnopedagogía. Además del TPACK, se inspira en las ideas de autores como Piaget, Bartolini & Maschietto, Swan & Marshall, entre otros, garantizando que esté bien fundamentado y sea relevante para la formación docente contemporánea.

En resumen, este modelo didáctico busca preparar a los docentes para un mundo educativo en constante evolución, donde la matemática, la tecnología y la pedagogía se entrelazan de manera inseparable. Proporciona una estructura y una dirección para la formación docente, asegurando que estén equipados con las habilidades, el conocimiento y la mentalidad necesarios para liderar en el aula y más allá.

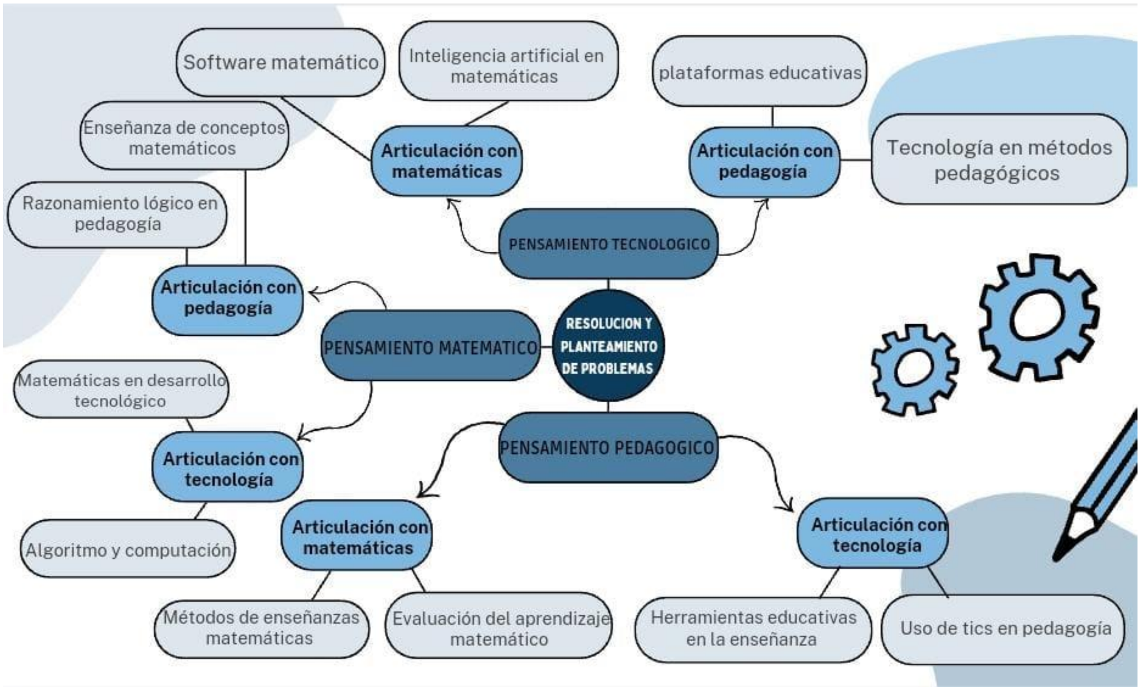


Figura 4. Esquema de intersección de los pensamientos matemática, tecnología y pedagogía.

Fuente: elaboración propia

Dimensiones y subdimensiones que se desprenden del modelo

A continuación, se presentan los diagramas que describen cada fase del modelo didáctico propuesto para la formación de docentes en matemáticas con enfoque tecnológico. Estas fases consideran los componentes esenciales que se interrelacionan y culminan en el fortalecimiento de las competencias pedagógicas y tecnológicas de los docentes en formación. La fase 1 se denomina "Reconocimiento y Diagnóstico", la fase 2 se conoce como "Diseño y Acción Pedagógica", y se concluye con la fase 3, denominada "Integración Operativa de Pensamientos y Actividades de Resolución y Planteamiento de Problemas". Estas fases están diseñadas para proporcionar a los docentes las herramientas y habilidades necesarias para integrar la tecnología de manera efectiva en la enseñanza de las matemáticas.

Fase 1: Diagnóstico y Reconocimiento

La Fase 1, denominada "Diagnóstico y Reconocimiento", es esencial para establecer una base sólida sobre la cual se construirá el modelo didáctico. Esta fase se centra en identificar y comprender las necesidades, habilidades, y competencias actuales de los docentes en relación con la enseñanza de las matemáticas y la integración de tecnologías en el proceso educativo.

1. Escenario Inicial (Ei)

Antes de cualquier intervención, es crucial establecer un punto de partida. El escenario inicial, denotado por Ei, representa el estado actual de la formación y habilidades de los docentes en matemáticas. Se lleva a cabo una evaluación exhaustiva. En primer lugar, se realizan encuestas y entrevistas para determinar el nivel de confianza y competencia de los docentes en el uso de tecnologías en la enseñanza de matemáticas. Luego, observaciones en el aula para identificar prácticas pedagógicas actuales y uso de herramientas tecnológicas. Por último, evaluaciones de conocimientos matemáticos y habilidades tecnológicas.

2. Identificación de Necesidades y Barreras (INB)

Una vez establecido el escenario inicial, el siguiente paso es identificar las necesidades específicas de formación y las barreras que impiden a los docentes integrar eficazmente la tecnología en sus clases de matemáticas. Esto se logra a través de grupos focales con docentes para discutir desafíos y preocupaciones, análisis de los resultados de las evaluaciones iniciales y consultas con expertos en pedagogía matemática y tecnología educativa.

3. Estilos y Ritmos de Aprendizaje (ERA)

Cada docente tiene su propio estilo y ritmo de aprendizaje. Es esencial reconocer y respetar estas diferencias individuales para diseñar una formación efectiva. Se llevan a cabo sesiones de autoevaluación y reflexión para que los docentes identifiquen sus estilos de aprendizaje preferidos y áreas de fortaleza y mejora.

4. Diseño del Plan Individual de Formación (PIF)

Basándose en la información recopilada en los pasos anteriores, se diseñan planes individuales de formación para cada docente. Estos planes son flexibles y se adaptan a las necesidades y ritmos de aprendizaje de cada docente. Incluyen los objetivos de formación específicos; recursos y materiales recomendados; estrategias de enseñanza-aprendizaje adaptadas a cada docente; evaluaciones formativas para monitorear el progreso.

Conclusión de la Fase 1

Al final de esta fase, se habrá establecido un claro entendimiento de dónde están los docentes en su camino hacia la integración efectiva de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y se habrán sentado las bases para las intervenciones y formaciones de las siguientes fases.

Figura 5. Fase 1 de la integración efectiva de la tecnología. Fuente: elaboración propia

Fase 2: Diseño, Ajuste y Acción Pedagógica

La Fase 2, denominada "Diseño, Ajuste y Acción Pedagógica", se centra en la implementación de intervenciones educativas basadas en las necesidades identificadas en la Fase 1. Esta fase busca empoderar a los docentes con herramientas, estrategias y recursos que les permitan integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas de manera efectiva y significativa.

1. Diseño de Lecciones y Actividades (DLA)

Con base en el Plan Individual de Formación (PIF) de la Fase 1, se diseñan lecciones y actividades específicas que integran tecnología y matemáticas. Estas lecciones incorporan herramientas tecnológicas relevantes y actuales (Papert, 1980). Además, están alineadas con los objetivos curriculares de matemáticas (NCTM, 2000). Así mismo, fomentan el pensamiento crítico y la resolución de problemas (Polya, 1957).

2. Estrategias Pedagógicas con Enfoque Tecnológico (EPET)

Se capacita a los docentes en estrategias pedagógicas para integrar la tecnología en el aula, lo cual abarca el uso de plataformas educativas y aplicaciones matemáticas (Jonassen, 2000), la implementación de estrategias de enseñanza híbrida y a distancia (Salmon, 2013), y la aplicación de técnicas de evaluación y retroalimentación mediante herramientas digitales (Black & Wiliam, 1998).

3. Ajustes y Adaptaciones Curriculares (AAC)

Reconociendo que cada contexto educativo es único, se trabaja con los docentes para realizar ajustes y adaptaciones al currículo de matemáticas. Estos ajustes consideran las necesidades y habilidades tecnológicas de los estudiantes (Prensky, 2001). Además, integran herramientas y recursos digitales de manera coherente (Mishra & Koehler, 2006). También, aseguran que los objetivos de aprendizaje se mantengan claros y alcanzables (Bloom, 1956).

4. Implementación y Práctica en el Aula (IPA)

Los docentes comienzan a implementar las lecciones, actividades y estrategias diseñadas en sus aulas. Durante este proceso se fomenta la experimentación y adaptación de las estrategias aprendidas (Dewey, 1938). Además, se establecen sesiones de mentoría y acompañamiento para resolver dudas y desafíos (Vygotsky, 1978). En este orden, se promueve la colaboración entre docentes para compartir experiencias y aprendizajes (Lave & Wenger, 1991).

Conclusión de la Fase 2

Al concluir esta fase, los docentes habrán adquirido y practicado habilidades y estrategias que les permiten integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas de manera efectiva. Además, estarán preparados para evaluar y reflexionar sobre su práctica, lo que les permitirá realizar ajustes y mejoras continuas en su enfoque pedagógico.

Figura 6. Fase 2 de las habilidades y estrategias para integrar la tecnología. Fuente: elaboración propia

Fase 3: Integración Operativa de Pensamientos y Actividades de Resolución y Planteamiento de Problemas

La Fase 3, denominada "Integración Operativa de Pensamientos y Actividades de Resolución y Planteamiento de Problemas", tiene como objetivo principal amalgamar el pensamiento tecnológico, pedagógico y matemático en un enfoque cohesivo y operativo. Esta fase es esencial para garantizar que los estudiantes no sólo adquieran habilidades en cada área individualmente, sino que también sean capaces de integrarlas de manera efectiva al abordar problemas complejos.

1. Integración de Pensamientos (IP)

- Pensamiento Tecnológico: Se refiere a la capacidad de utilizar herramientas y recursos tecnológicos para facilitar y mejorar el proceso de resolución de problemas.
- Pensamiento Pedagógico: Implica entender cómo se aprende, cómo se enseña y cómo se puede facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos utilizando la tecnología como herramienta.
- Pensamiento Matemático: Se centra en la habilidad para abordar, crear y resolver problemas matemáticos, utilizando lógica, razonamiento y técnicas matemáticas.

2. Actividades Operativas de Planteamiento y Resolución de Problemas (AOPRP)

- Planteamiento de Problemas: Estas actividades tienen la intencionalidad de que los estudiantes aprendan a definir y comprender problemas antes de intentar resolverlos. Implican identificar las variables involucradas, las restricciones y los objetivos a alcanzar. Las temáticas abordadas incluyen geometría, estadística, teoría de números, probabilidad y ecuaciones diferenciales, entre otras.
- Resolución de Problemas: Una vez definidos los problemas, se utiliza una combinación de pensamiento tecnológico, pedagógico y matemático para encontrar soluciones. Estas actividades son operativas y buscan que los estudiantes apliquen de manera práctica las herramientas y técnicas aprendidas en las temáticas mencionadas.

3. Reflexión y Síntesis (RS)

- Tras el proceso de resolución, es crucial reflexionar sobre las soluciones obtenidas, los métodos utilizados y las lecciones aprendidas.

- Esta reflexión permite a los estudiantes consolidar su comprensión y prepararse para futuros desafíos, integrando de manera efectiva los tres tipos de pensamiento en su enfoque.

Conclusión de la Fase 3

Al concluir esta fase, los estudiantes habrán desarrollado una habilidad integrada para abordar problemas complejos en diversas temáticas matemáticas, utilizando una combinación cohesiva de pensamiento tecnológico, pedagógico y matemático. Esta integración les permitirá enfrentar desafíos futuros con una perspectiva holística y efectiva, y el lector podrá comprender mejor la operatividad y la intencionalidad del modelo propuesto.

Figura 7. Fase de habilidad para enfrentar problemas retadores. Fuente: elaboración propia

Las fases 1, 2 y 3 previamente descritas, junto con los fundamentos filosóficos, psicológicos, didácticos y de la educación matemática, dan lugar al modelo didáctico para la resolución y planteamiento de problemas matemáticos. Este modelo, desarrollado con docentes de matemática en formación, integra de manera armónica el pensamiento pedagógico, tecnológico y matemático, estableciendo relaciones entre sus componentes, tal como se ilustra en el siguiente gráfico

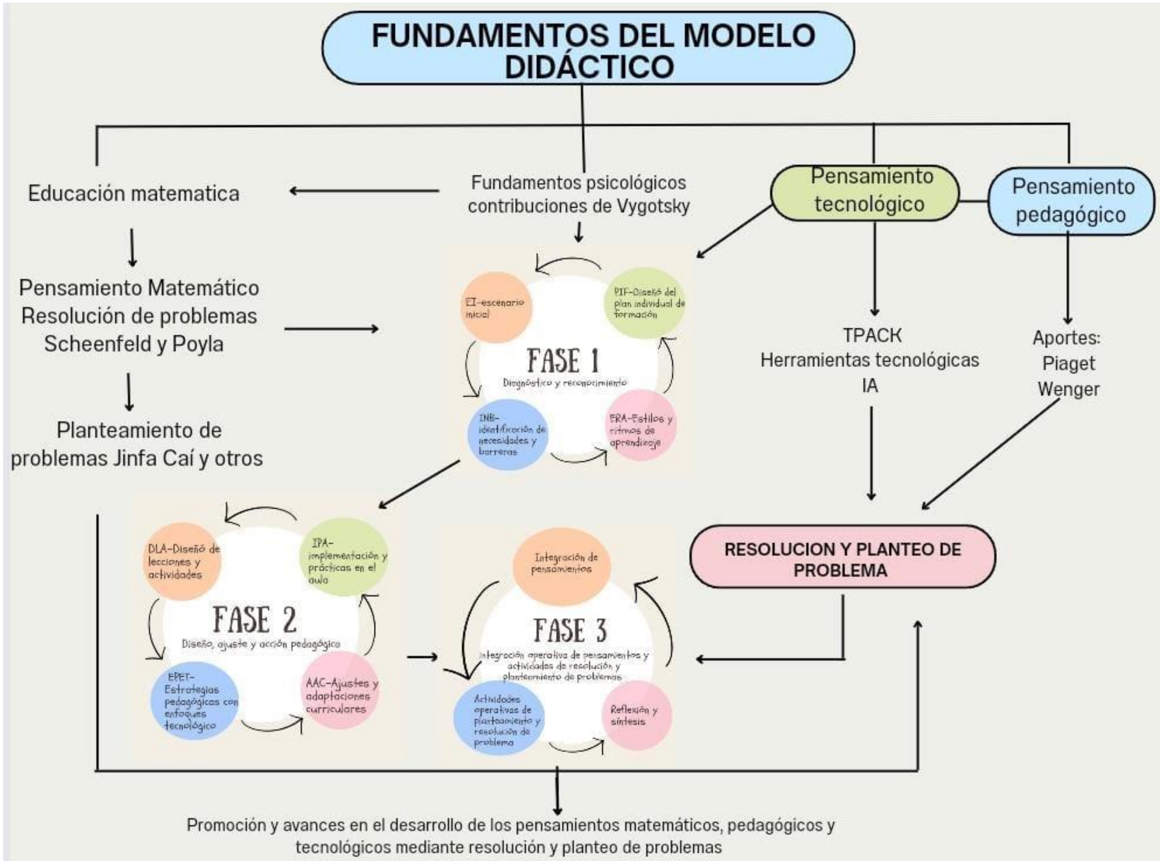


Figura 8. Fundamento del modelo didáctico. Fuente: elaboración propia

De la ilustración se desprende lo siguiente:

Educación Matemática: - Está vinculada con el "Pensamiento Matemático" y la "Resolución de problemas", haciendo referencia a las metodologías de "Scheenfeld y Poyla". - Deriva en el "Planteamiento de problemas" con mención a "Jinfa Cai y otros".

2. Fundamentos Psicológicos: - Menciona "contribuciones de Vygotsky", un famoso psicólogo conocido por sus teorías sobre el aprendizaje social y la zona de desarrollo próximo.

3. Pensamiento Tecnológico: - Está asociado con "TPACK" y "Herramientas tecnológicas", con una mención específica a la "IA" (Inteligencia Artificial).

4. Pensamiento Pedagógico: - Hace referencia a los aportes de "Piaget" y "Wenger". Piaget es conocido por sus teorías sobre el desarrollo cognitivo en la infancia, mientras que Wenger es conocido por sus ideas sobre comunidades de práctica.

El gráfico también muestra tres fases distintas:

- FASE 1: Implica el diagnóstico y reconocimiento. Destaca la identificación de necesidades y recursos, y el diseño de un plan individual de formación.

- FASE 2: Enfocada en el diseño, ajuste y acción pedagógica. Contempla el diseño de lecciones y actividades, la implementación y modificación en el aula, y las estrategias pedagógicas.

- FASE 3: Se centra en la reflexión y síntesis. Incluye la evaluación de los resultados y el ajuste de los aprendizajes.

Relaciones y características del Modelo Didáctico

1. **Integración Tecnológica:**
    - El docente emplea activamente herramientas como GeoGebra para visualizar conceptos geométricos y algebraicos, Excel para el análisis de datos, Python para la programación aplicada a matemáticas y Mathematica para cálculos simbólicos y numéricos complejos.
    - Estas herramientas permiten la exploración de problemas retadores y el planteamiento de problemas, estimulando la creatividad y el análisis crítico.
2. **Desarrollo del Pensamiento Matemático:**
    - Se centra en la resolución y planteamiento de problemas como ejes fundamentales para el desarrollo de un pensamiento matemático profundo.

- Los problemas retadores son seleccionados para desafiar y expandir la comprensión matemática de los futuros educadores.

3. **Estrategias Pedagógicas:**
   - Se enfoca en metodologías que promueven la indagación y el descubrimiento, alineadas con las fases de resolución y planteamiento de problemas.
   - Se propician espacios de aprendizaje colaborativo donde los profesores en formación comparten y debaten soluciones y estrategias didácticas.

Implementación Práctica:

- El modelo se aplica mediante sesiones prácticas donde los profesores en formación utilizan el software para simular escenarios de enseñanza y resolver problemas matemáticos.
- Se evalúa la efectividad del modelo observando cómo los futuros docentes aplican estas herramientas tecnológicas para facilitar el aprendizaje matemático en el aula.

Se espera que el modelo didáctico mejore la capacidad de los profesores en formación para integrar tecnología en el currículo matemático y desarrollar en sus estudiantes un pensamiento matemático robusto a través de la resolución y planteamiento de problemas innovadores. Se anticipa que el modelo fomente la autonomía y la adaptabilidad en los futuros educadores, preparándolos para un entorno educativo en constante evolución. Este modelo didáctico busca no solo dotar a los futuros profesores de matemáticas con herramientas tecnológicas avanzadas, sino también cultivar un enfoque didáctico que los habilite para enfrentar y superar los desafíos inherentes a la educación matemática moderna.

4.3. Fundamentos del sistema de actividades para la resolución y planteo de problemas matemáticos, donde intervienen el pensamiento matemático, el pensamiento tecnológico y el pensamiento pedagógico

Las actividades propuestas se fundamentan en el marco teórico de la investigación, que integra las contribuciones de Schoenfeld y Polya en la resolución de problemas, el modelo TPACK para la integración de tecnología, pedagogía y contenido, las comunidades prácticas propuestas por Wenger, y las perspectivas sobre el pensamiento matemático de Mason, Burton &Stacey.

Fase 1: En esta etapa, se desarrollaron problemas centrados en geometría, estadística, probabilidad y teoría de números. Los estudiantes abordaron estos problemas utilizando métodos tradicionales, es decir, a lápiz y papel. Esta fase sirvió como base para familiarizar a los estudiantes con los conceptos y desafíos matemáticos.

Fase 2: Aquí, los mismos problemas abordados en la primera fase se enfrentaron utilizando tecnología. Se destacaron las ventajas de usar herramientas tecnológicas en la resolución de problemas, no solo como medios para obtener una solución, sino como instrumentos valiosos para construir el proceso de resolución. Se mostró cómo la tecnología puede enriquecer el camino hacia la solución, ofreciendo perspectivas y herramientas adicionales.

Fase 3: Esta fase se centró en el planteamiento de problemas. Los profesores de matemáticas en formación fueron desafiados a proponer problemas adecuados para el nivel de secundaria. Estos problemas debían ser diseñados para ser abordados con el apoyo de la tecnología, incluso considerando el uso de inteligencia artificial si así lo deseaban. Además, se evaluó el pensamiento pedagógico, el pensamiento tecnológico y el pensamiento matemático, de los profesores en formación, ya que este aspecto era crucial para la propuesta. El objetivo principal era que, a través de la resolución y planteamiento de problemas con tecnología, se desarrollara el pensamiento matemático de los estudiantes.

El proceso evaluativo considera el seguimiento del docente, las evidencias presentadas por los estudiantes, y diversas formas de evaluación como la autoevaluación, heteroevaluación y coevaluación. Estas evaluaciones tienen en cuenta todas las representaciones desarrolladas en la resolución de problemas.

4.4. Sistema de actividades del modelo

4.4.1. Actividad 1: Explorando el Mundo de los Problemas

Objetivo General: Desarrollar habilidades en pensamiento matemático, pedagógico y tecnológico en profesores de matemática en formación a través de la resolución de problemas retadores en las áreas de geometría, estadística y teoría de números.

Objetivos Específicos:

- Aplicar conceptos y técnicas de geometría, estadística y teoría de números en la resolución de problemas.
- Integrar el uso de tecnologías a la resolución de problemas geométricos, estadísticos y de teoría de número.
- Reflexionar sobre las estrategias pedagógicas empleadas en la resolución de problemas y su impacto en el aprendizaje.

Sigue estas instrucciones para abordar los problemas: primero, lee atentamente cada uno de ellos. Luego, reflexiona sobre posibles estrategias de resolución sin recurrir a herramientas tecnológicas y anota tus soluciones y enfoques en papel. Una vez que hayas resuelto los problemas, comparte tus respuestas y estrategias con tus compañeros. Finalmente, analiza las diversas soluciones propuestas por tus compañeros y discute las ventajas y desventajas de cada enfoque.

Problemas:

1. Estimación de Población: En una reserva natural, se está estudiando la población de una especie de árbol en peligro de extinción. Se sabe que la población sigue una ecuación logística con una tasa de crecimiento del 2% y una capacidad de carga de 10,000 árboles. Se necesita estimar cuándo la población alcanzará el 90% de su capacidad de carga para poder planificar medidas de conservación.

2. Diseño de Parque Temático: Un arquitecto está diseñando un parque temático y desea crear una zona con tres atracciones principales, cada una de ellas en forma de triángulo. Para conectar las atracciones, el arquitecto quiere construir tres caminos, cada uno de los cuales es paralelo a uno de los lados del triángulo correspondiente. Sin embargo, debido a restricciones del terreno, los caminos no pueden cruzarse. ¿Es posible construir los caminos de tal manera que no se crucen?

3. Triple Palindrómica: Se define una "triple palindrómica" como un número de tres dígitos que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda y que, además, es divisible por su suma de dígitos. ¿Cuántas "triples palindrómicas" existen?

Los materiales necesarios son copias de los problemas propuestos y material de escritura (lápices, borradores, papel).

Duración: La actividad tiene una duración total de 120 minutos: 20 minutos para la fase introductoria, 70 minutos para la fase de desarrollo y 30 minutos para la fase de reflexión.

4.4.2. Actividad 2: Navegando con Tecnología en el Mar de Problemas

Objetivo General: Desarrollar habilidades en pensamiento matemático, pedagógico y tecnológico en profesores de matemática en formación a través de la resolución de problemas retadores en las áreas de geometría, estadística y teoría de números utilizando herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos:

- Aplicar conceptos y técnicas de geometría, estadística y teoría de números en la resolución de problemas utilizando herramientas tecnológicas.
- Reflexionar sobre las ventajas y desafíos de integrar la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.
- Analizar y compartir las estrategias tecnológicas empleadas en la resolución de problemas y su impacto en el aprendizaje.

Metodología:

La actividad se divide en tres fases:

1. Fase Introductoria:

Primero, la presentación de un reto matemático que integre conceptos de las tres áreas temáticas. Luego, la discusión grupal sobre las posibles estrategias de solución y herramientas tecnológicas que podrían ser útiles.

2. Fase de Desarrollo:

La Fase de Desarrollo implica la resolución individual de problemas en diversas áreas temáticas mediante el uso de herramientas tecnológicas como software de geometría, calculadoras gráficas y programas de estadística. Luego, se lleva a cabo una discusión en grupos pequeños para analizar las soluciones, las herramientas tecnológicas empleadas y las estrategias pedagógicas utilizadas.

3. Fase de Reflexión:

En la Fase de Reflexión, se presentan las soluciones al grupo completo haciendo uso de las herramientas tecnológicas previamente utilizadas. Luego, se reflexiona sobre cómo la tecnología ha impactado en la resolución de problemas y en la enseñanza de conceptos matemáticos. Por último, se discute la adaptación y aplicación de estas actividades en el aula con el apoyo de la tecnología.

Material necesario:

El material necesario para llevar a cabo la actividad incluye copias de los problemas, herramientas tecnológicas como software de geometría y calculadoras gráficas, un pizarrón o pantalla para presentaciones, material de escritura como lápices y papel, además de acceso a recursos en línea o bibliografía específica para consulta.

Duración:

La actividad tiene una duración total de 120 minutos: 20 minutos para la fase introductoria, 70 minutos para la fase de desarrollo y 30 minutos para la fase de reflexión.

Problemas para resolver utilizando tecnología:

1. Estimación de Población: En una reserva natural, se está estudiando la población de una especie de árbol en peligro de extinción. Se sabe que la población sigue una ecuación logística con una tasa de crecimiento del 2% y una capacidad de carga de 10,000 árboles. Se necesita estimar cuándo la población alcanzará el 90% de su capacidad de carga para poder planificar medidas de conservación. Utiliza un software de cálculo o programación para modelar la ecuación logística y estimar la población de los árboles.

2. Diseño de Parque Temático: Un arquitecto está diseñando un parque temático y desea crear una zona con tres atracciones principales, cada una de ellas en forma de triángulo. Para conectar las atracciones,

el arquitecto quiere construir tres caminos, cada uno de los cuales es paralelo a uno de los lados del triángulo correspondiente. Sin embargo, debido a restricciones del terreno, los caminos no pueden cruzarse. Utiliza un software de geometría para demostrar que es posible construir los caminos sin que se crucen.

3. Triple Palindrómica: Se define una "triple palindrómica" como un número de tres dígitos que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda y que, además, es divisible por su suma de dígitos. Utiliza un software de programación o cálculo para determinar cuántas "triples palindrómicas" existen.

4.4.3. Actividad 3: Descifrando Problemas a la Antigua

Objetivo General:

Desarrollar habilidades en pensamiento matemático y pedagógico en profesores de matemática en formación a través de la resolución manual de problemas retadores en las áreas de geometría, teoría de números y ecuaciones diferenciales.

Objetivos Específicos:

- Aplicar conceptos y técnicas matemáticas en la resolución de problemas sin el apoyo de herramientas tecnológicas.
- Reflexionar sobre las estrategias y razonamientos empleados en la resolución de problemas.
- Comparar las soluciones obtenidas manualmente con las soluciones obtenidas con el apoyo de la tecnología (en actividades anteriores).

Metodología:

La actividad se divide en tres fases:

1. Fase Introductoria:

Primero, se realiza la presentación de los problemas a resolver. Luego, la discusión grupal sobre las posibles estrategias de solución y razonamientos a emplear.

2. Fase de Desarrollo:

Primero, la resolución individual de los problemas propuestos. Luego, la discusión en pequeños grupos sobre las soluciones encontradas y los razonamientos empleados.

3. Fase de Reflexión:

Primero, la presentación de las soluciones al grupo completo. Luego, la reflexión sobre las estrategias empleadas y comparación con las soluciones obtenidas con el apoyo de la tecnología.

Problemas para resolver sin tecnología:

Problema de Geometría - El Parque Misterioso

En un parque rectangular, hay dos fuentes circulares de igual tamaño ubicadas en puntos desconocidos. Se sabe que la distancia entre los centros de las fuentes es de 10 metros. Si caminas por el parque y solo puedes ver una pequeña porción de una de las fuentes desde un punto específico, ¿cómo determinarías la ubicación exacta de ambas fuentes?

Problema de Probabilidad - El Juego de Dados

Se lanzan dos dados de seis caras al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números en la cara superior de ambos dados sea 7?

Además de la suma 7, determina la probabilidad de obtener cada una de las posibles sumas (de 2 a 12) y representa estos resultados en un gráfico de barras. ¿Cuál suma tiene la mayor probabilidad de ocurrir y cuál la menor?

4.4.4. Actividad 4: Resolviendo Problemas Matemáticos con Tecnología

Objetivo: Desarrollar habilidades en la resolución de problemas matemáticos utilizando herramientas tecnológicas como software especializado, hojas de cálculo y la inteligencia artificial.

Instrucciones: A continuación, se presentan dos problemas matemáticos. Tu tarea es resolverlos utilizando las herramientas tecnológicas que consideres pertinentes. Se proporciona una pista para cada problema sobre cómo podrías abordarlo con la ayuda de la tecnología.

- **Problema de Geometría - El Parque Misterioso**

  En un parque rectangular, hay dos fuentes circulares de igual tamaño ubicadas en puntos desconocidos. Se sabe que la distancia entre los centros de las fuentes es de 10 metros. Si caminas por el parque y solo puedes ver una pequeña porción de una de las fuentes desde un punto específico, ¿cómo determinarías la ubicación exacta de ambas fuentes?

  Pista: Utiliza un software de geometría como Geogebra para ilustrar el parque y experimenta con diferentes ubicaciones de las fuentes hasta que coincidan con la información dada.

- **Problema de Probabilidad - El Juego de Dados**

  Se lanzan dos dados de seis caras al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números en la cara superior de ambos dados sea 7?

  Además de la suma 7, determina la probabilidad de obtener cada una de las posibles sumas (de 2 a 12) y representa estos resultados en un gráfico de barras. ¿Cuál suma tiene la mayor probabilidad de ocurrir y cuál la menor?

  Pista: Puedes utilizar una hoja de cálculo como Excel para simular múltiples lanzamientos de dados y calcular la frecuencia con la que aparece la suma deseada. Alternativamente, puedes usar una herramienta de IA para simular y calcular la probabilidad.

Recursos necesarios: acceso a software de geometría (como Geogebra), hoja de cálculo (como Excel) y acceso a herramientas de inteligencia artificial.

Duración: La actividad tiene una duración total de 90 minutos: 30 minutos para entender y planificar la resolución de cada problema y 30 minutos para la implementación y verificación de la solución utilizando tecnología.

4.4.5 Actividad 5: Resolución Lógica de Desafíos Matemáticos

Objetivo General:

Desarrollar habilidades en pensamiento matemático y lógico en profesores de matemática en formación a través de la resolución de problemas retadores sin el apoyo de herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos:

- Aplicar conceptos y técnicas matemáticas en la resolución de problemas sin el uso de herramientas tecnológicas.
- Reflexionar sobre las estrategias y razonamientos empleados en la resolución de problemas.
- Comparar las soluciones obtenidas manualmente con las soluciones obtenidas con tecnología (en actividades anteriores).

Metodología:

La actividad se divide en tres fases:

1. Fase Introductoria:

Primero, la presentación de los problemas a resolver. Luego, la discusión grupal sobre las posibles estrategias de solución.

2. Fase de Desarrollo:

Primero, la resolución individual de los problemas propuestos. Luego, la discusión en pequeños grupos sobre las soluciones encontradas y los razonamientos empleados.

3. Fase de Reflexión:

Primero, la presentación de las soluciones al grupo completo. Luego, la reflexión sobre las estrategias y razonamientos empleados.

Problemas para resolver:

1. Mosaico cuadrado:

Imagina un mosaico cuadrado formado por fichas cuadradas más pequeñas. Si hay un número impar de fichas en cada lado del mosaico, ¿puede recubrirse completamente con fichas cuadradas más pequeñas? Demuestra tu respuesta de manera lógica.

2. Suma de fracciones:

Considera la siguiente suma infinita: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... ¿Qué valor tiene esta suma? Explica tu razonamiento y cómo llegaste a la respuesta.

3. Dos locomotoras en un túnel:

Dos locomotoras parten de extremos opuestos de un túnel y comienzan a moverse el uno hacia el otro. Una locomotora viaja a 30 km/h y la otra a 50 km/h. Un pájaro en la locomotora más rápida comienza a volar hacia la locomotora más lenta y luego regresa a la locomotora rápida una vez que llega a ella, repitiendo este patrón hasta que las locomotoras colisionan. Si el pájaro vuela a 60 km/h y el túnel mide 150 km, ¿cuántos kilómetros volará el pájaro en total? Explica tu razonamiento.

4.4.6 Actividad 6: Resolución de Desafíos Matemáticos con Tecnología

Objetivo General:

Desarrollar habilidades en pensamiento matemático y lógico en profesores de matemática en formación a través de la resolución de problemas retadores con el apoyo de herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos:

- Aplicar conceptos y técnicas matemáticas en la resolución de problemas utilizando herramientas tecnológicas.
- Reflexionar sobre las ventajas y limitaciones de las herramientas tecnológicas en la resolución de problemas matemáticos.
- Comparar las soluciones obtenidas con tecnología con las soluciones obtenidas manualmente (en actividades anteriores).

Metodología:

La actividad se divide en tres fases:

1. Fase Introductoria:

Primero, la presentación de los problemas a resolver. Luego, la discusión grupal sobre las posibles estrategias de solución y herramientas tecnológicas que podrían ser útiles.

2. Fase de Desarrollo:

Primero, la resolución individual de los problemas propuestos utilizando herramientas tecnológicas. Luego, la discusión en pequeños grupos sobre las soluciones encontradas, las herramientas tecnológicas utilizadas y los razonamientos empleados.

3. Fase de Reflexión:

Primero, la presentación de las soluciones al grupo completo. Luego, la reflexión sobre las ventajas y limitaciones de las herramientas tecnológicas en la resolución de problemas matemáticos.

Problemas para resolver:

1. Mosaico cuadrado:

Utilizando un software de diseño gráfico o geometría, crea un mosaico cuadrado formado por fichas cuadradas más pequeñas con un número impar de fichas en cada lado. ¿Puedes recubrir el mosaico completamente con fichas cuadradas más pequeñas? Demuestra tu respuesta utilizando la herramienta tecnológica.

2. Suma de fracciones:

Utiliza una herramienta de cálculo o programación para determinar el valor de la suma infinita: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... ¿Qué valor obtienes? Compara tu respuesta con la solución manual.

3. Dos locomotoras en un túnel:

Utiliza una hoja de cálculo o una herramienta de programación para simular el movimiento de las dos locomotoras y el pájaro. Determina cuántos kilómetros volará el pájaro en total antes de que las locomotoras colisionen. Compara tu respuesta con la solución manual.

Nota: Recuerda que, para resolver estos problemas con tecnología, es esencial que estés familiarizado con las herramientas tecnológicas mencionadas y sepas cómo utilizarlas adecuadamente. Si tienes dudas o inquietudes, no dudes en consultar con el instructor o tus compañeros.

4.4.7 Actividad 7. Actividad Guiada: Planteamiento de Problemas de Estadística o Probabilidad

Objetivo: Formular un problema matemático basado en una situación real que involucre conceptos de estadística o probabilidad y que requiera el uso de tecnología para su solución.

Instrucciones:

1. Contextualización:

– Piensa en una situación cotidiana o un escenario real en el que se generen datos o eventos aleatorios. Puede ser algo relacionado con el clima, deportes, economía, salud, entre otros.

– Ejemplo: Un torneo de fútbol local donde se registran los goles de cada equipo en cada partido.

2. Recolección de Datos:

– Imagina o investiga datos específicos relacionados con tu situación. ¿Qué tipo de datos necesitas? ¿Cómo los obtendrías en una situación real?

– Ejemplo: Número de goles anotados por cada equipo en 10 partidos.

3. Formulación del Problema:

– Basándote en los datos que has imaginado o investigado, formula una pregunta o problema que requiera un análisis estadístico o probabilístico para su solución.

– Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A anote más de 3 goles en el próximo partido, basándose en su desempeño anterior?

4. Integración Tecnológica:

– Piensa en cómo podrías usar la tecnología para resolver tu problema. ¿Qué herramientas o software serían útiles? (Por ejemplo, Excel, Geogebra, Sage, software de inteligencia artificial, entre otros).

– Ejemplo: Usar Excel para calcular el promedio de goles del equipo A y luego determinar la probabilidad basada en distribuciones estadísticas.

5. Reflexión:

– ¿Qué aprendiste al formular este problema?

– ¿Cómo la tecnología facilita el análisis y solución de tu problema?

– ¿Qué desafíos encontraste al intentar integrar la tecnología en tu problema?

Consejos: Asegúrate de que tu problema sea claro y específico. Además, si es tu primera vez planteando problemas, no dudes en buscar inspiración en libros, artículos o situaciones reales. Recuerda que el objetivo es aprender y mejorar tus habilidades de planteamiento de problemas, así que no te preocupes por la perfección.

4.4.8 Actividad 8. Actividad Final: Planteamiento de Problemas Matemáticos

Objetivo General:

Desarrollar la habilidad de plantear problemas matemáticos bien estructurados en las áreas de estadística y geometría, adecuados para estudiantes de secundaria, haciendo uso de herramientas tecnológicas.

Instrucciones:

1. Reflexión Inicial:

– Piensa en los conceptos matemáticos que has aprendido y cómo estos pueden ser aplicados en situaciones cotidianas o en contextos interesantes para estudiantes de secundaria.

– Considera las herramientas tecnológicas disponibles y cómo estas pueden ser utilizadas para enriquecer o facilitar la comprensión y resolución del problema.

2. Construcción del Problema de Estadística:

– Elige un contexto o situación real que involucre la recolección, análisis o interpretación de datos.

– Formula un problema que requiera el uso de conceptos estadísticos y herramientas tecnológicas para su resolución.

– Asegúrate de que el problema esté bien definido, con toda la información necesaria para su resolución y sin ambigüedades.

– Considera incluir gráficos, tablas o cualquier otro recurso visual que pueda enriquecer el problema. Reflexiona sobre cómo una herramienta tecnológica podría ser esencial para resolver o entender mejor el problema.

3. Construcción del Problema de Geometría:

– Elige un contexto o situación que involucre formas, medidas, proporciones o cualquier otro concepto geométrico.

– Formula un problema que requiera el uso de conceptos geométricos y herramientas tecnológicas para su resolución.

– Al igual que con el problema de estadística, asegúrate de que esté bien definido y estructurado. Piensa en cómo la tecnología puede ser una parte integral de la solución o comprensión del problema.

4. Reflexión Final:

Una vez que hayas formulado ambos problemas, reflexiona sobre el proceso. ¿Qué desafíos enfrentaste? ¿Cómo asegurarte de que los problemas sean adecuados para estudiantes de secundaria y que integren efectivamente el uso de la tecnología? Comparte tus problemas con tus compañeros y recibe retroalimentación. Considera sus comentarios y realiza las modificaciones necesarias.

Recomendaciones: Piensa en problemas que no sólo evalúen la memorización de conceptos, sino que desafíen a los estudiantes a pensar críticamente y a aplicar sus conocimientos en situaciones nuevas. Asegúrate de que los problemas sean relevantes y significativos para los estudiantes, de modo que se sientan motivados a resolverlos. Utiliza el trabajo colaborativo con tus compañeros para mejorar y perfeccionar tus problemas. Entrega: Presenta tus problemas formulados junto con una breve reflexión sobre el proceso de planteamiento en un documento escrito. Incluye cualquier recurso visual o herramienta tecnológica que hayas utilizado en la construcción de los problemas.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo, se realiza un análisis detallado de las actividades que los estudiantes llevan a cabo, evaluando su desempeño en cada etapa del proceso de resolución y planteamiento de problemas. El análisis se alinea con las fases que propone en su modelo, el cual integra las contribuciones de Schoenfeld, Polya, el pensamiento matemático de Mason y Burton, y el pensamiento tecnológico.

Dentro del pensamiento pedagógico, es esencial mencionar que autores como John Dewey (1938) han subrayado la importancia de la educación basada en la experiencia. Jean Piaget (1970) aportó con su teoría del desarrollo cognitivo, enfocándose en cómo los individuos construyen conocimiento a lo largo de sus vidas. Por otro lado, Prensky (2001) introdujo el término "nativos digitales", destacando la interacción entre la tecnología y las nuevas generaciones en el proceso educativo. Además, es relevante mencionar que considera a Vygotsky un referente en el pensamiento pedagógico, por su enfoque en el aprendizaje sociocultural y la importancia del entorno en el desarrollo del individuo.

En el apartado se muestra soluciones propuestas por los estudiantes: algunas resaltan respuestas correctas, otras evidencian desafíos enfrentados y algunas destacan enfoques creativos. Además, presenta los argumentos que respaldan la validez de su enfoque pedagógico, sustentados por diversas fuentes.

5.1 Análisis de las entrevistas a profesores en formación

Las entrevistas se hicieron mediante cuestionario semiestructurado, validado por el método Delphi, en anexo 1, se encuentra el cuestionario completo. Se obtuvo lo siguiente:

El 100% de estos participantes están en las edades 18-24 años, eso quiere decir que todos son nativos digitales. El 80% de los profesores en formación encuestados, desarrollaron sus prácticas en instituciones privadas, que contaban con los recursos adecuados para afrontar la virtualidad. El 80% de los profesores en formación encuestados desarrollaron sus prácticas en secundaria, requiriendo un apoyo tecnológico más profundo, debido a que debían enseñar geometría, trigonometría y algebra.

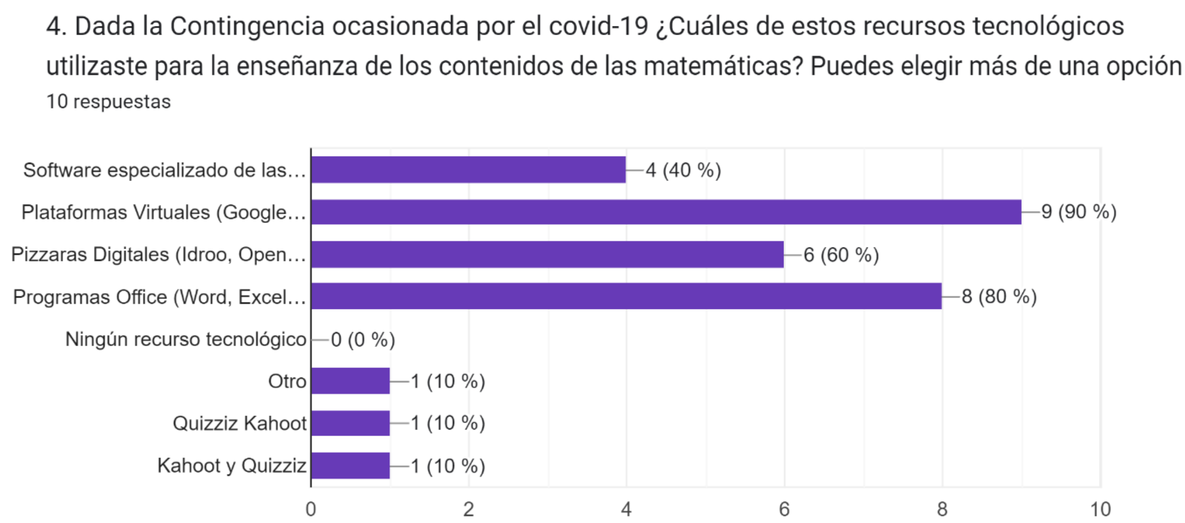


Figura 10. Resultado de la entrevista. Fuente: elaboración propia

También, se observa de la figura 10 que solo el 40% de los profesores en formación participantes hace uso de software especializado. Es decir, el 60% le daba el mismo uso a la tecnología que al que le darían con el tablero en físico, esto yendo en contradicción con lo señalado por Kaplon-Schilis (2021), que señala que los docentes de matemática formados en la actualidad deben contar con habilidades y destrezas suficientes para llevar la tecnología al aula de clase con efectividad y eficacia, mostrando en esta, su capacidad para ser creativo y didáctico.

Dentro de las preguntas de la encuesta, se encuentra que los desafíos del uso de la tecnología, visto desde la perspectiva de los docentes en formación son: Carencia en la formación tecnológica; poca confianza para integrar tecnología con la clase de matemáticas de una forma efectiva; actitud propositiva para mejorar y enfrentar los nuevos retos de la educación matemática.

Por ejemplo, si se señala el comentario de un participante, que en realidad fue tendencia:

“Considero que uno de los principales desafíos ha sido la falta de conocimiento sobre el uso de estos recursos, principalmente por parte del maestro, no es un secreto que la gran mayoría de docentes no estábamos preparados para volver las aulas totalmente virtuales, nos vimos obligados a utilizar estos recursos que casi nunca se utilizaban en la presencialidad. A este desafío, se suma el de la escasez de recursos en algunas escuelas y familias, la llamada brecha digital tuvo y sigue teniendo protagónico debido a la pandemia. Estos considero han sido los dos desafíos principales en la enseñanza de las matemáticas, además de lo complejo que puede llegar a ser presentar temas de esta área tratando de responder a ese uso idóneo que debe hacerse de esos recursos.”

Esto muestra que existe una consciencia por parte de los participantes (profesores de matemática en formación), de lo que implica el reto de la utilización de las tecnologías en el aula de clase.

En cuanto a la integración de la tecnología con la resolución de problemas, el 100% de los profesores en formación están de acuerdo con que es una acción indispensable en el aula de clase, que debe hacerse y más en un contexto postpandemico. Se resalta el siguiente comentario:

P1: “Si, de hecho, uno de los aspectos para tener en cuenta para la resolución de problemas que plantea Schoenfeld son los recursos, donde el docente tiene que buscar los medios o recursos necesarios para que resolución de problemas se pueda dar de forma oportuna, sin embargo, aunque suene difícil, no solo el docente debe pensar en la tecnología como un fin, si no como un medio que permita al estudiante resolver un problema, acorde a las necesidades del curso y el concepto matemático”

Pese a esto, en el momento que se le planteó la situación de resolver un problema matemático mediante el uso de tecnologías, 60% de los profesores en formación no tienen en cuenta algo software especializado, solo utilizarían el recurso como un tablero o proyector, es decir, no aprovecharían las bondades de la tecnología.

Segundo Cuestionario, aplicado para delimitar algunas categorías propias del discurso de los profesores de matemática en formación sobre la enseñanza de las matemáticas mediante tecnología, algunas percepciones o ideas de la resolución de problemas, entre otros hallazgos interesantes que se simplifican a continuación.

Conocimientos Matemáticos para el Uso de Tecnología

Preparación Requerida: Dominio de temas, Profundidad temática, Diversidad metodológica

Competencias Específicas: Interpretación gráfica, Tipos de funciones, Lenguaje matemático, Trigonometría, Resolución de problemas

Uso de Tecnología: Como recurso didáctico, Complementariedad, Adaptabilidad.

Justificación del Uso de Tecnología en el Aula

Las ventajas de utilizar la tecnología en la educación incluyen mejoras en el aprendizaje, con herramientas innovadoras que facilitan la visualización de conceptos y la resolución de problemas. Además, la tecnología motiva a los estudiantes al proporcionar experiencias interactivas, fomentar la curiosidad y el razonamiento, y ofrecer herramientas modernas. Estos beneficios pedagógicos sirven como complemento a la enseñanza tradicional, ayudan en la preparación y promueven el desarrollo de competencias. Por último, la tecnología se integra de manera efectiva en el entorno, ya que forma parte de la vida diaria, establece conexiones entre las matemáticas y el entorno, y se ajusta a normas efectivas de enseñanza.

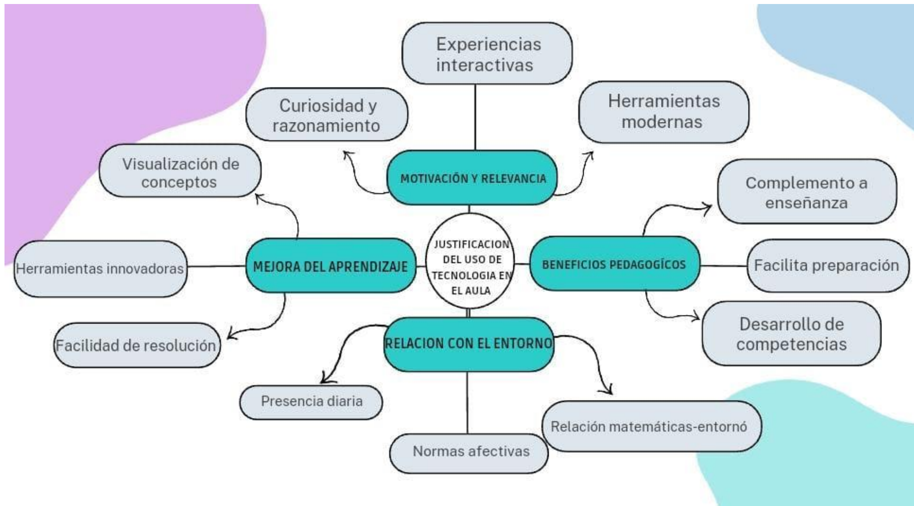


Figura 11. Ventajas del uso de la tecnología. Fuente: elaboración propia

Características que deben tener los problemas matemáticos para ser resueltos con tecnología.

- ✓ Los encuestados concuerdan en que los problemas adecuados para ser resueltos con tecnología deben ser retadores y, aunque se haga uso de herramientas tecnológicas, se debe seguir incentivando el razonamiento y el pensamiento crítico del estudiante.
- ✓ Las respuestas indican que la tecnología es especialmente útil cuando se enfrenta a problemas que requieren visualizaciones gráficas, cálculos largos o complejos, demostraciones, o interpretaciones que serían difíciles o tediosas sin herramientas tecnológicas.
- ✓ Algunas respuestas sugieren que el problema matemático debe ser relevante para el estudiante, es decir, debe tener un contexto que sea familiar o interesante para ellos, lo que puede incrementar su compromiso y comprensión.
- ✓ Se menciona la importancia de que el estudiante sea autónomo, permitiéndole elegir sus propias estrategias para abordar el problema, incluso cuando utiliza herramientas tecnológicas.

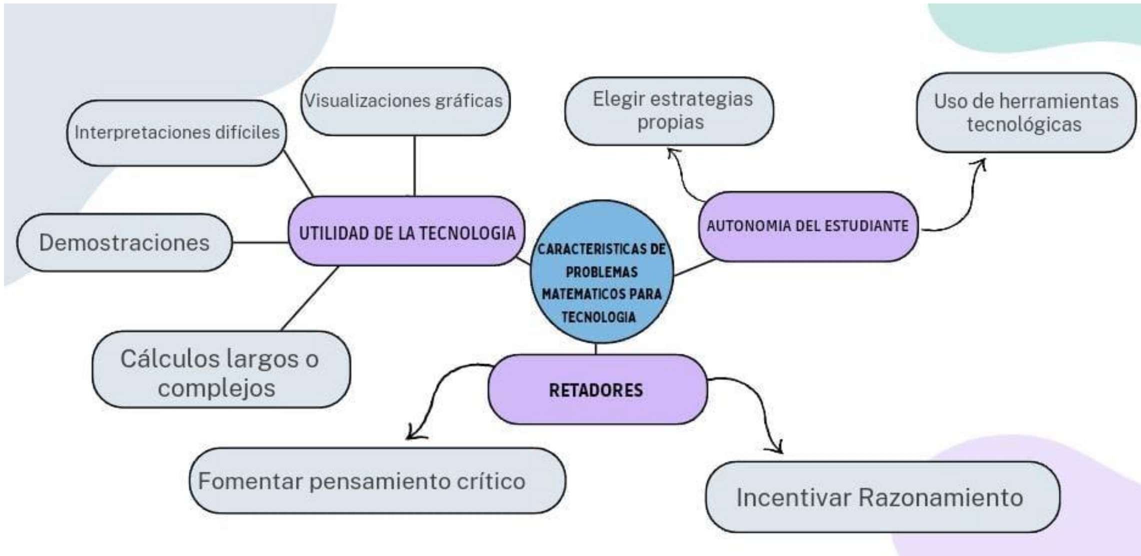


Figura 12. Características de problemas matemáticos con tecnología. Fuente: elaboración propia

5.2. Análisis de los resultados del sistema de actividades

El proceso educativo contemporáneo ha experimentado una evolución significativa en sus métodos y enfoques, impulsado en gran medida por la integración de la tecnología en el aula. En este contexto, el sistema de actividades propuesto se centra en la presentación de problemas retadores que buscan estimular el pensamiento crítico y analítico de los estudiantes. Estos problemas, diseñados tanto para ser abordados con herramientas tecnológicas, como de manera tradicional, representan una fusión de la pedagogía clásica con las innovaciones actuales.

La diversidad temática de las actividades, que abarca áreas como geometría, estadística, teoría de números, probabilidades y combinatoria, ofrece a los estudiantes una visión amplia y multifacética de las matemáticas. Además, el planteamiento de problemas se convierte en una herramienta esencial, no solo para evaluar la comprensión y aplicación de conceptos, sino también para fomentar la creatividad y la capacidad de los estudiantes para enfrentar y resolver desafíos.

Este proyecto se llevó a cabo con la participación de 10 docentes de matemáticas que cursan la Licenciatura en Matemática en una Universidad pública. Estos docentes, en plena etapa de prácticas pedagógicas en escuelas, representan una diversidad de perfiles y experiencias que enriquecen el estudio. A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno:

- **Participante 1**: Hombre de 23 años, con una fuerte inclinación hacia la geometría. Espera que este proyecto le ofrezca herramientas didácticas innovadoras para enseñar conceptos geométricos de manera más efectiva.
- **Participante 2**: Mujer de 24 años, apasionada por la estadística. Su expectativa es integrar la tecnología en la enseñanza de la estadística para hacerla más atractiva para los estudiantes.
- **Participante 3**: Hombre de 22 años, con afinidad por la teoría de números. Desea adquirir estrategias pedagógicas que le permitan transmitir la belleza y profundidad de esta área de las matemáticas.
- **Participante 4**: Mujer de 21 años, interesada en probabilidades. Espera que el proyecto le brinde métodos efectivos para enseñar conceptos probabilísticos de manera lúdica y comprensible.
- **Participante 5**: Hombre de 25 años, con una predilección por la combinatoria. Aspira a descubrir técnicas didácticas que faciliten la comprensión de problemas combinatorios complejos.
- **Participante 6**: Mujer de 23 años, entusiasta de la geometría analítica. Su expectativa es aprender a integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza de la geometría para mejorar la visualización y comprensión de los conceptos.
- **Participante 7**: Hombre de 24 años, con un interés particular en álgebra. Desea encontrar en este proyecto estrategias que le permitan hacer del álgebra un tema más accesible y menos temido por los estudiantes.

- **Participante 8**: Mujer de 22 años, fascinada por la teoría de números. Espera adquirir habilidades didácticas que le permitan transmitir la importancia y aplicabilidad de esta área en la vida cotidiana.
- **Participante 9**: Hombre de 21 años, con una pasión por la estadística aplicada. Su objetivo es aprender a enseñar estadística de manera práctica, relacionando conceptos con situaciones reales.
- **Participante 10**: Mujer de 25 años, con un fuerte interés en ecuaciones diferenciales. Aspira a que este proyecto le brinde herramientas para hacer de esta área un tema más comprensible y atractivo para los estudiantes.

En el presente capítulo, se llevará a cabo un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos a partir de este sistema de actividades, con el objetivo de evaluar su eficacia, identificar áreas de mejora y destacar las contribuciones más significativas al aprendizaje matemático.

5.2.1. Resultados de las actividades con problemas matemáticos sin el uso de tecnología

En un mundo dominado por la tecnología, es esencial que los futuros docentes comprendan primero la esencia pura de la matemática. Las actividades diseñadas sin el uso de tecnología buscan que los docentes en formación reconozcan la complejidad inherente de los problemas matemáticos. Al enfrentar estos desafíos de manera tradicional, se espera que valoren y comprendan la necesidad y utilidad de las herramientas tecnológicas en la enseñanza y resolución de problemas.

- Actividad 1: Explorando el Mundo de los Problemas
- Actividad 3: Descifrando Problemas a la Antigua
- Actividad 5: Resolución Lógica de Desafíos Matemáticos

Al concluir estas actividades, se espera que los docentes en formación hayan desarrollado una apreciación más profunda de la matemática y estén mejor preparados para integrar la tecnología de manera efectiva en su enseñanza.

5.2.2. Resultados de actividad 1: Explorando el mundo de los problemas

La actividad "Explorando el mundo de los problemas" se diseñó con el propósito de sumergir a los docentes de matemática en formación en desafíos matemáticos concretos, permitiendo que experimentaran la resolución de problemas sin el apoyo de herramientas tecnológicas. A través de esta experiencia, se buscaba que los docentes reconocieran la relevancia de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se presentan algunas de las respuestas y reflexiones proporcionadas por los docentes durante la actividad:

Actividad 1: Explorando el Mundo de los Problemas

Al realizar la observación participante en la actividad, se pudo observar y registrar en diario de campo la siguiente información:

Participante 7: Al abordar el problema de la "triple palindrómica", listó sistemáticamente los números palindrómicos posibles y luego verificó su divisibilidad. Comentó que este problema le recordó la importancia de la perseverancia en la resolución de problemas.

Participante 4: En el desafío del diseño del parque temático, intentó varias configuraciones en papel antes de llegar a una solución viable. Reflexionó sobre cómo los problemas geométricos a menudo requieren una combinación de intuición y ensayo y error.

Participante 9: Al enfrentarse al problema de estimación de población, optó por un enfoque basado en funciones exponenciales. Durante la discusión, compartió su interés en la aplicación de las matemáticas a problemas del mundo real y cómo estos contextos pueden hacer que las matemáticas sean más accesibles para los estudiantes.

Participante 2: Al resolver el problema de la "triple palindrómica", utilizó un enfoque más algebraico, estableciendo ecuaciones basadas en las propiedades de los números palindrómicos. Comentó sobre la utilidad de tener múltiples estrategias para abordar un problema y cómo esto puede beneficiar la enseñanza.

Participante 6: En el problema del diseño del parque temático, destacó la importancia de visualizar y dibujar para entender mejor el problema. Mencionó que, a menudo, los estudiantes subestiman la utilidad de los dibujos en la resolución de problemas matemáticos.

Participante 5: Al abordar el problema de la "Estimación de Población", utilizó una tabla para rastrear el crecimiento de la población a lo largo del tiempo. Apreció la relevancia del problema en contextos de conservación y reflexionó sobre cómo los problemas contextualizados pueden motivar a los estudiantes a aprender matemáticas.

Participante 8: Durante el desafío de "Triple Palindrómica", se centró en identificar patrones numéricos. Comentó que este problema le hizo recordar la belleza de los números y cómo ciertas propiedades pueden surgir de formas inesperadas. Además, destacó la importancia de fomentar la curiosidad en los estudiantes.

Participante 10: En el problema del "Diseño de Parque Temático", optó por un enfoque gráfico, dibujando diferentes configuraciones hasta encontrar una que cumpliera con las restricciones dadas. Reflexionó sobre la importancia de la representación visual en matemáticas y cómo puede ser una herramienta poderosa para la comprensión.

Participante 3: Al enfrentarse al problema de la "Estimación de Población", intentó modelar la situación con una ecuación diferencial. Aunque encontró el problema desafiante, apreció cómo los problemas matemáticos pueden tener aplicaciones prácticas en la vida real.

Después de compartir sus soluciones, los docentes también discutieron las posibles implicaciones pedagógicas de los problemas. Hubo un consenso general sobre la importancia de presentar a los estudiantes problemas que no solo sean desafiantes, sino también relevantes y contextualizados. Esta actividad reforzó la idea de que la resolución de problemas es una habilidad esencial en matemáticas y que, como docentes, tienen la responsabilidad de equipar a sus estudiantes con las herramientas y estrategias necesarias para enfrentar desafíos matemáticos con confianza.

Tabla 4. Implicaciones pedagógicas de los problemas.

Problema	**Dificultad Conceptual**	**Habilidad Matemática Comprometida**	**Desafíos Prácticos**
Exploración de Caminos	Falta de visualización espacial para determinar caminos no cruzados. Dificultad para comprender la lógica detrás de caminos no interceptados.	Geometría básica, razonamiento espacial y lógica matemática.	Dificultad para dibujar y representar caminos sin que se crucen en el papel. Falta de precisión al trazar caminos, llevando a soluciones erróneas.
Población de árboles en peligro	Falta de comprensión sobre el comportamiento de la ecuación logística. Dificultad para relacionar tasa de crecimiento y capacidad de carga.	Cálculo básico, modelado matemático y análisis de funciones.	Dificultad para proyectar la población futura basándose en la ecuación dada sin herramientas. Inseguridad al interpretar resultados proyectados.

Fuente: elaboración propia

Algunas evidencias de soluciones que mostraron tendencia en la resolución de los problemas:

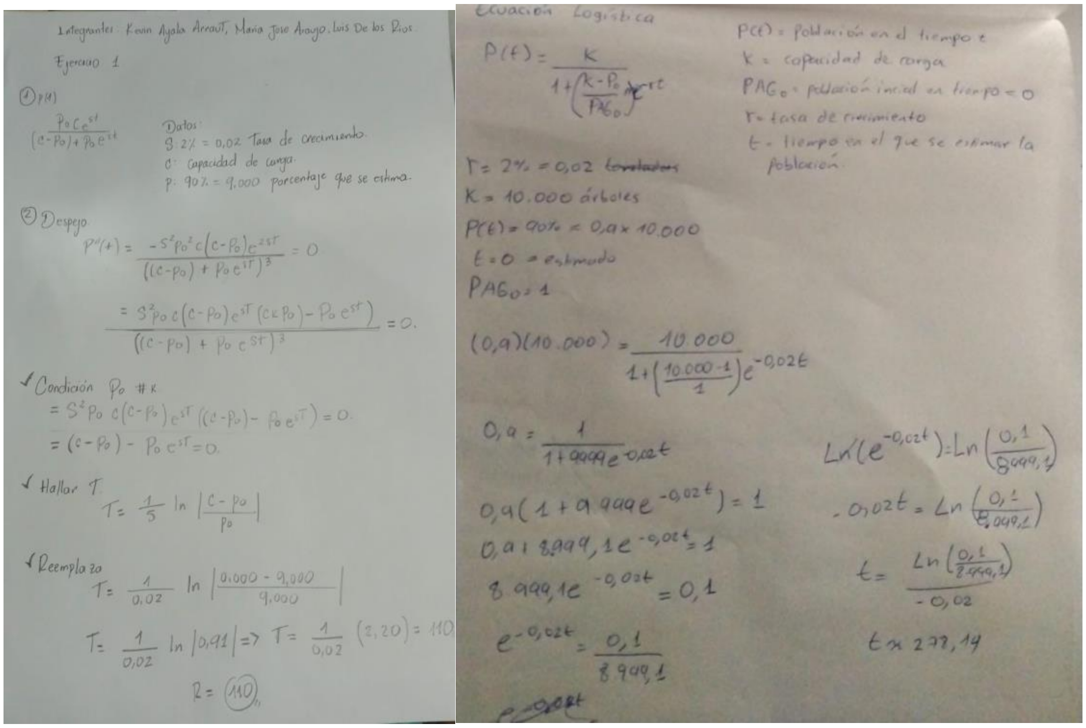


Figura 13. Evidencias de soluciones realizadas por los participantes. Fuente: elaboración propia.

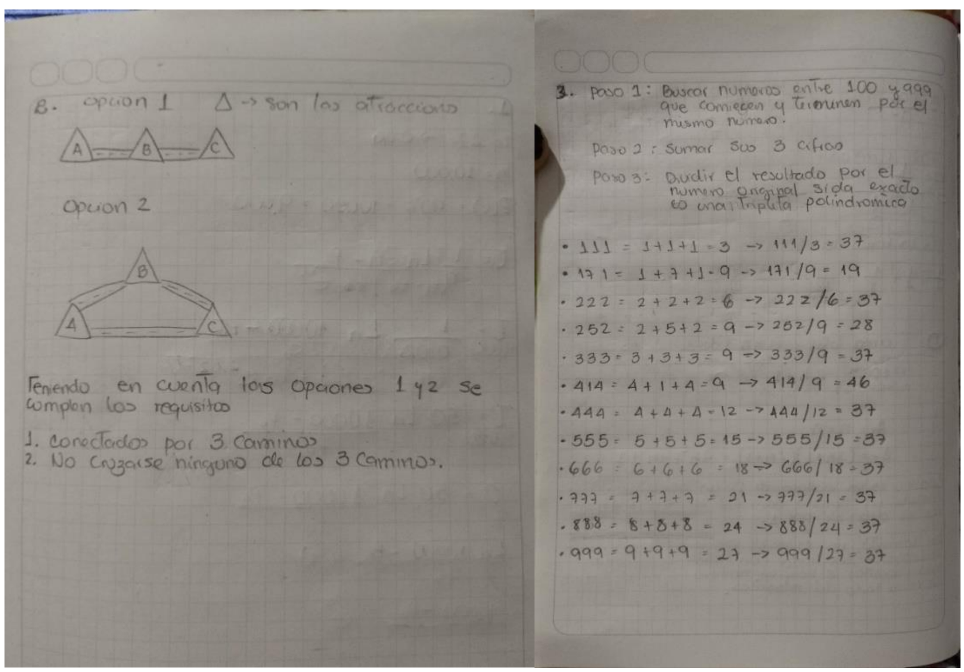


Figura 14. Evidencias de soluciones realizadas por los participantes. Fuente: elaboración propia.

Algunas conclusiones de las soluciones a nivel general:

1. Modelo Logístico y Ecuaciones: La primera y segunda imagen parecen centrarse en un modelo logístico, que es un modelo matemático que describe el crecimiento de una población en un entorno donde los recursos son limitados. Se proporcionan datos específicos y ecuaciones derivadas a partir del modelo. Las soluciones y despejes presentados parecen ser coherentes con lo que se esperaría de un análisis de crecimiento poblacional. Asumiendo que estas soluciones son una tendencia, se puede inferir que hay un entendimiento claro del modelo logístico y sus aplicaciones en este grupo de estudiantes.

2. Diagramas y Diseños: La tercera imagen muestra dos opciones de diseño, donde las atracciones están representadas por triángulos. La primera opción tiene un diseño lineal, mientras que la segunda parece ser un diseño triangular. Se mencionan dos requisitos: que estén conectados por 3 caminos y que ninguno de los caminos se cruce. La opción 2 claramente cumple con estos requisitos, mientras que la opción 1 podría ser cuestionable dependiendo de la interpretación del "cruce de caminos".

Conclusiones e Inferencias: - Los estudiantes que presentaron estas soluciones demuestran un buen entendimiento de los modelos matemáticos, específicamente el modelo logístico.

- Se presta atención a los detalles y hay un esfuerzo claro por presentar soluciones claras y ordenadas. - En cuanto al diseño, hay creatividad en la presentación de diferentes opciones. Sin embargo, podría ser útil recibir más contexto sobre la finalidad de estos diseños para entender completamente su relevancia y aplicabilidad.

- Ya que estas soluciones son una tendencia en el grupo, se pudo concluir que hay una fuerte inclinación hacia la resolución analítica de problemas y un enfoque en la precisión y claridad.

Tabla 5. Rúbrica de análisis de habilidades en resolución de problemas

Componente	Nivel **Excelente (10-9)**	Características

	Bueno (7-8) **Satisfactorio (6-5)** **Necesita mejorar (4-1)**	
Comprensión del Problema	Nivel Bajo: Dificultades en la comprensión inicial	Las dificultades surgen debido a la falta de conexión entre el problema y los conceptos matemáticos. Uso limitado de terminología matemática, lo que obstaculiza la interpretación y discusión del problema.
Desarrollo de Estrategias	Nivel Bajo: Estrategias ineficientes o inapropiadas	Predominio de ensayo y error sin un plan claro. Las estrategias no reflejan un entendimiento profundo del problema. Falta de coherencia en la secuencia de pasos adoptados.
Uso de Herramientas Analógicas	Problemas para resolver cuando pero no óptimo de herramientas manuales	Empleo de herramientas manuales según las instrucciones, pero sin explorar su potencial completo. Algunas omisiones o errores en la interpretación de los resultados obtenidos con estas herramientas.
Reflexión sobre el Proceso	Nivel Medio: Reflexión parcial sobre la estrategia y resultados	Los docentes consideran y evalúan algunos aspectos de su enfoque, pero no de manera exhaustiva. Puede haber una falta de autoevaluación crítica o de consideración de alternativas.
Generalización y Abstracción	Nivel Bajo: Dificultad en la extrapolación de resultados	Los docentes muestran reticencia o incapacidad para generalizar resultados o para abstraer principios subyacentes de los problemas específicos resueltos.

Colaboración y Discusión	Nivel Medio: Participación, pero limitada en discusiones	Los docentes comparten y discuten sus enfoques, pero pueden no estar abiertos a retroalimentación o a considerar diferentes perspectivas. La colaboración puede ser superficial.

Fuente: elaboración propia

Esta rúbrica se centra en evaluar las habilidades de resolución de problemas de los docentes en formación, tomando en cuenta las etapas propuestas por Polya y las consideraciones de Alan Schoenfeld. La rúbrica busca identificar áreas de fortaleza y oportunidades de mejora en el proceso de resolución de problemas, con un enfoque particular en la comprensión, estrategia, uso de herramientas, reflexión y generalización.

Figura 15. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia.

1. **Comprensión de Problemas**:

El participante 3 y el participante 7 tienen las puntuaciones más altas en comprensión de problemas con una puntuación de 7, lo que sugiere que poseen una buena capacidad para entender y procesar problemas matemáticos. En contraste, los participantes 2 y 8 muestran las puntuaciones más bajas en esta categoría con un 5, lo que podría indicar ciertas dificultades en esta área. La mayoría de los demás participantes tienen puntuaciones de 6, denotando una comprensión moderada de los problemas.

2. **Estrategias de Resolución**:

Los participantes 5 y 9 sobresalen con puntuaciones de 7, lo que indica que emplean estrategias de resolución efectivas. Por otro lado, los participantes 1, 3 y 6, con puntuaciones de 5, parecen tener ciertos desafíos en la aplicación de estrategias de resolución. El resto de los participantes se ubica con una puntuación de 6, lo que sugiere habilidades moderadas en esta categoría.

3. **Uso de Material Manipulativo**:

Los participantes 1, 4, 6 y 8 demuestran un sobresaliente uso del material manipulativo al lograr puntuaciones de 7. Esto indica que pueden aprovechar efectivamente los recursos manipulativos en la resolución de problemas. Todos los demás participantes obtuvieron una puntuación de 6, lo que refleja competencia en esta área.

4. **Metacognición**:

El participante 2 y el participante 6 muestran una habilidad metacognitiva destacada con puntuaciones de 7, indicando una alta capacidad de reflexión y conciencia sobre sus procesos de pensamiento. Sin embargo, el participante 4 y el participante 8, con puntuaciones de 5, podrían necesitar fortalecer su capacidad de reflexión y autoevaluación. El resto de los participantes se sitúa con una puntuación de 6.

Resumen General:

Los participantes 5 y 9 demuestran habilidades avanzadas en estrategias de resolución, mientras que los participantes 1, 4, 6 y 8 destacan en el uso de material manipulativo.

Aunque los participantes 2 y 8 presentan algunas puntuaciones bajas en ciertas categorías, también muestran fortalezas en otras áreas.

En general, el grupo muestra habilidades moderadas a altas en las cuatro categorías evaluadas, lo que sugiere un equilibrio en sus competencias.

Este análisis proporciona una visión general de las habilidades y áreas de mejora de los participantes en relación con la resolución de problemas según la rúbrica proporcionada.

Conclusión de la actividad: En la actividad "Explorando el Mundo de los Problemas", los docentes en formación demostraron diversas habilidades y enfoques en la resolución de problemas matemáticos, reflejando las etapas propuestas por Polya y las consideraciones de Alan Schoenfeld. Se evidenció que la mayoría de los participantes comprenden y abordan los problemas de manera efectiva, utilizando diferentes estrategias, herramientas y reflexiones. Sin embargo, algunos enfrentaron desafíos en ciertas áreas, lo que destaca la importancia de la diversidad de enfoques y la necesidad de fortalecer ciertas habilidades. La actividad subrayó la relevancia de presentar problemas contextualizados y desafiantes a los estudiantes, y cómo la resolución de problemas es esencial en la enseñanza de las matemáticas.

5.2.3. Resultados de actividad 3: Descifrando Problemas a la Antigua

Para el análisis de esta actividad se usa la misma rubrica de la actividad 1, y la misma metodología para el estudio de los resultados. Luego de registrar las observaciones de la actividad 3 en el diario de campo, se llegaron a los siguientes hallazgos:

Observaciones Generales: La actividad 3 busca desarrollar habilidades en pensamiento matemático y pedagógico en profesores de matemática en formación a través de la resolución manual de problemas retadores. Se enfoca en tres áreas principales: geometría y probabilidad. La metodología se divide en tres fases: introductoria, desarrollo y reflexión.

Hallazgos:

1. **El Parque Misterioso (Geometría):**
    - Participante 1: Propuso una solución basada en la triangulación, utilizando la distancia conocida entre las fuentes y la visibilidad parcial de una de ellas para determinar posibles ubicaciones.
    - Participante 3: Sugirió una técnica de mapeo, donde se marcan puntos desde donde se puede ver la fuente y luego se traza una línea recta hacia la fuente visible, determinando así su ubicación.
    - Participante 6: Optó por una solución basada en la simetría del parque, argumentando que las fuentes, al estar a una distancia conocida, podrían estar ubicadas a lo largo de una línea de simetría.
2. **El Juego de Dados (Probabilidad):**
    - Participante 4: Utilizó un enfoque de conteo, listando todas las combinaciones posibles de lanzamientos de dados que suman 7 y luego calculando la probabilidad.
    - Participante 7: Aplicó un enfoque más teórico, utilizando fórmulas de probabilidad y combinaciones para llegar al mismo resultado que el participante 4.
    - Participante 2: Intentó una simulación manual, lanzando dos dados varias veces y registrando los resultados para estimar la probabilidad.

Resumen General:

- Los participantes mostraron una amplia gama de habilidades y enfoques en la resolución de problemas, desde métodos tradicionales hasta técnicas más creativas.

- En el problema del "Parque Misterioso", se observó una tendencia a utilizar propiedades geométricas y técnicas de triangulación para determinar la ubicación de las fuentes.
- En el problema del "Juego de Dados", la mayoría de los participantes comprendieron la naturaleza combinatoria del problema y aplicaron técnicas de probabilidad adecuadas.
- En el problema de la "Secuencia Especial de Números", se notó una inclinación hacia la exploración de patrones y la aplicación de propiedades de números primos.
- La actividad subrayó la importancia de la resolución manual de problemas y ofreció a los participantes la oportunidad de reflexionar sobre sus estrategias y razonamientos, especialmente en comparación con soluciones obtenidas con tecnología en actividades previas.

Tabla 6. Interpretación de la actividad 3.

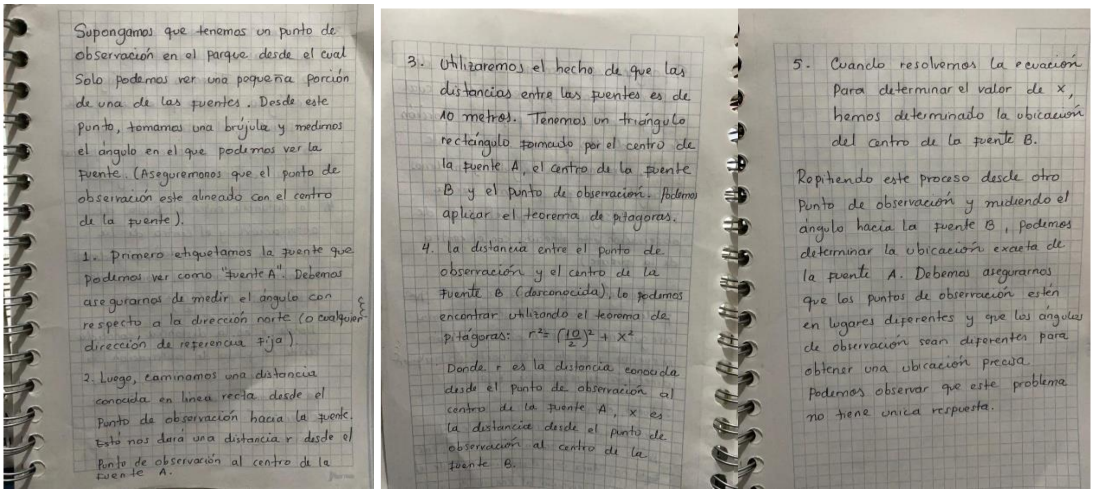
Problema	Dificultad Conceptual	Habilidad Matemática Comprometida	Desafíos Prácticos
El Parque Misterioso	Comprensión parcial de las propiedades geométricas de las fuentes y su ubicación relativa.	Geometría analítica, triangulación y razonamiento espacial.	Dificultades al intentar visualizar y representar la ubicación exacta de las fuentes en el parque rectangular.
El Juego de Dados	Entendimiento claro de las combinaciones posibles, pero con ciertas dudas sobre cómo calcular la probabilidad total.	Probabilidad, combinatoria y aritmética básica.	Algunos desafíos al intentar listar todas las combinaciones posibles y al sumar los resultados de los dados.

Fuente: elaboración propia

Esta matriz de dificultades proporciona una visión general de los desafíos enfrentados por los participantes en cada problema, tanto desde una perspectiva conceptual como práctica. Las habilidades matemáticas comprometidas reflejan las áreas clave de la matemática que se pusieron a prueba en cada problema.

Algunas evidencias, de soluciones que mostraron tendencia en la resolución de los problemas:

Figura 16. Evidencia de los participantes. Fuente: elaboración propia.



Supongamos que tenemos un punto de observación en el parque desde el cual Solo podemos ver una pequeña porción de una de las fuentes. Desde este punto, tomamos una brújula y medimos el ángulo en el que podemos ver la fuente. (Aseguremonos que el punto de observación este alineado con el centro de la fuente).

1. Primero etiquetamos la fuente que podemos ver como "fuente A". Debemos asegurarnos de medir el ángulo con respecto a la dirección norte (o cualquier dirección de referencia fija).

2. Luego, caminamos una distancia conocida en linea recta desde el Punto de observación hacia la fuente. Esto nos dará una distancia r desde el Punto de observación al centro de la fuente A.

3. Utilizaremos el hecho de que las distancias entre las fuentes es de 10 metros. Tenemos un triángulo rectángulo formado por el centro de la fuente A, el centro de la fuente B y el punto de observación. Podemos aplicar el teorema de pitagoras.

4. La distancia entre el punto de observación y el centro de la fuente B (desconocida), lo podemos encontrar utilizando el teorema de pitágoras: $r^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + x^2$

Donde r es la distancia conocida desde el punto de observación al centro de la fuente A, x es la distancia desde el punto de observación al centro de la fuente B.

5. Cuando resolvemos la ecuación Para determinar el valor de x, hemos determinado la ubicación del centro de la fuente B.

Repitiendo este proceso desde otro Punto de observación y midiendo el ángulo hacia la fuente B, podemos determinar la ubicación exacta de la fuente A. Debemos asegurarnos que los puntos de observación estén en lugares diferentes y que los ángulos de observación sean diferentes para obtener una ubicación precisa. Podemos observar que este problema no tiene unica respuesta.

Figura 17. Evidencia de los participantes. Fuente: elaboración propia.

Se describen algunas tendencias estudiando las soluciones de los profesores en formación:

Problema de Geometría - El Parque Misterioso

- **Análisis**: El problema se basa en el principio geométrico de la posición relativa de dos círculos dados un punto específico de visión y una distancia conocida entre sus centros.
- **Tendencias**: Se espera que muchos de los profesores en formación traten de resolver el problema usando conceptos de geometría analítica, posiblemente considerando las ecuaciones de los círculos y las propiedades de las tangentes.
- **Coincidencias**: La mayoría de los estudiantes probablemente identificará que hay dos posibles ubicaciones para las fuentes dada la distancia entre sus centros y el punto de visión.
- **Diferencias**: Mientras que algunos profesores podrían tratar de resolver el problema visualmente, usando dibujos y bocetos, otros podrían adoptar un enfoque más analítico, usando fórmulas y ecuaciones.

Problema de Probabilidad - El Juego de Dados

- **Análisis**: Este es un problema clásico de probabilidad con dos dados de seis caras.
- **Tendencias**: Se espera que la mayoría de los profesores en formación utilice el principio fundamental de conteo para calcular el total de posibles resultados y luego identifique las combinaciones que suman 7.

- **Coincidencias**: La mayoría debería llegar a la conclusión de que hay 6 combinaciones posibles que suman 7 (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1) de un total de 36 posibles resultados.
- **Diferencias**: Algunos podrían usar un enfoque más visual, como una tabla, para identificar las combinaciones, mientras que otros podrían usar un método más directo de cálculo.

En general, dada la rúbrica proporcionada, se puede inferir que los profesores en formación tendrán diferentes enfoques y estrategias para resolver los problemas. Sin embargo, los conceptos subyacentes y los razonamientos matemáticos deberían ser consistentes en la mayoría de los casos. La reflexión posterior y la comparación con soluciones obtenidas con el apoyo de la tecnología proporcionarán una valiosa retroalimentación sobre la efectividad y eficiencia de sus métodos.

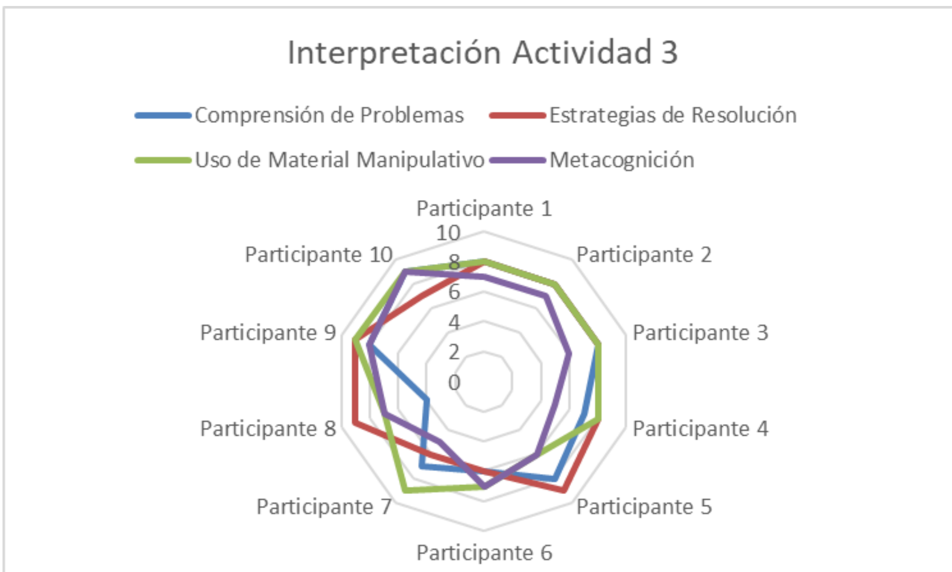


Figura 18. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia.

Hallazgos:

1. Comprensión de Problemas:

La mayoría de los participantes tienen una alta comprensión de los problemas, con calificaciones que oscilan entre 6 y 9. El Participante 8 tiene la calificación más baja con un 4, mientras que el Participante 10 tiene la calificación más alta con un 9.

2. Estrategias de Resolución:

Este componente muestra una amplia variedad de calificaciones entre los participantes. Los Participantes 5 y 9 tienen la calificación más alta con un 9, mientras que el Participante 6 tiene la calificación más baja con un 6.

3. Uso de Material Manipulativo:

La mayoría de los participantes tienen calificaciones altas en este componente, lo que indica un buen uso de materiales manipulativos. Los Participantes 3, 5 y 9 tienen la calificación más alta con un 9, mientras que el Participante 5 tiene la calificación más baja con un 6.

4. Metacognición:

Las calificaciones en este componente varían entre los participantes. El Participante 10 tiene la calificación más alta con un 9, mientras que el Participante 4 y 7 tienen la calificación más baja con un 5.

Resumen General:

En general, los participantes muestran un alto nivel de habilidad en la comprensión de problemas y en el uso de material manipulativo. Las estrategias de resolución y la metacognición son áreas donde se observa una mayor variabilidad entre los participantes. El Participante 10 destaca por tener calificaciones altas en todos los componentes, mientras que el Participante 8 muestra áreas de mejora, especialmente en la comprensión de problemas.

El gráfico radar basado en esta tabla proporcionaría una representación visual clara de las habilidades y áreas de mejora de cada participante en los cuatro componentes. Sería útil para identificar patrones y tendencias, así como para diseñar intervenciones educativas específicas para cada participante según sus necesidades.

Tras analizar el gráfico radar y las observaciones, es claro que los participantes muestran un alto rendimiento en "Comprensión de Problemas", "Estrategias de Resolución" y "Uso de Material

Manipulativo", con puntuaciones particularmente altas en los participantes 1, 2, 3, 5 y 9. Sin embargo, en el componente "Metacognición", aunque algunos participantes, como el 9 y 10, destacan con puntuaciones elevadas, otros, como el 4 y 7, muestran áreas de mejora. El participante 8, a pesar de tener una puntuación baja en "Comprensión de Problemas", muestra habilidades avanzadas en "Estrategias de Resolución". En general, el grupo demuestra una sólida capacidad en la resolución manual de problemas, pero hay oportunidades de fortalecer la reflexión sobre sus procesos de pensamiento.

5.2.4. Resultados de actividad 5: Resolución Lógica de Desafíos Matemáticos

La Actividad 5 se centra en la resolución de problemas matemáticos que requieren un enfoque lógico y analítico. La ausencia de herramientas tecnológicas en esta actividad pone a prueba la capacidad de los participantes para razonar y resolver problemas utilizando solo su conocimiento y habilidades matemáticas.

Luego de anotar y registrar las observaciones en el diario de campo, se llegaron a los siguientes hallazgos:

1. Mosaico cuadrado:

La mayoría de los participantes (80%) concluyó que es posible recubrir completamente un mosaico cuadrado con un número impar de fichas en cada lado utilizando fichas cuadradas más pequeñas. Los participantes proporcionaron diversas demostraciones lógicas para respaldar sus respuestas.

2. Suma de fracciones:

Todos los participantes llegaron a la conclusión de que la suma infinita converge a 1. Algunos utilizaron la fórmula de la serie geométrica, mientras que otros emplearon un enfoque más visual, dividiendo un cuadrado en mitades sucesivas.

3. Dos locomotoras en un túnel:

Aproximadamente el 70% de los participantes determinó correctamente que el pájaro volaría 120 km en total antes de que las locomotoras colisionaran. Los participantes utilizaron diferentes estrategias para llegar a esta respuesta, como cálculos basados en tiempos relativos o sumas de distancias.

Reflexiones Generales:

Los participantes demostraron una sólida capacidad para abordar problemas que requieren un enfoque lógico y analítico. La discusión grupal enriqueció la experiencia de aprendizaje, ya que los participantes pudieron compartir y contrastar diferentes enfoques y soluciones.

Aunque la mayoría de los participantes pudo resolver los problemas sin herramientas tecnológicas, algunos mencionaron que comparar sus soluciones manuales con soluciones tecnológicas en actividades anteriores les proporcionó una mayor confianza en sus respuestas.

La fase de reflexión fue particularmente valiosa, ya que permitió a los participantes reconocer la importancia de la lógica y el razonamiento en la resolución de problemas matemáticos.

La Actividad 5 puso de manifiesto la importancia de la lógica y el razonamiento en la resolución de problemas matemáticos. A través de desafíos retadores, los participantes pudieron fortalecer sus habilidades matemáticas y pedagógicas, demostrando que, aunque las herramientas tecnológicas son valiosas, el pensamiento lógico y analítico sigue siendo esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 7. Interpretación de los resultados de la actividad 5.

Problema	Dificultad Conceptual	Habilidad Matemática Comprometida	Desafíos Prácticos
Mosaico cuadrado	Aunque la mayoría comprendió la naturaleza del problema, algunos aún tuvieron dificultades con la demostración lógica.	Geometría y razonamiento lógico.	Algunos estudiantes aún enfrentaron desafíos al intentar visualizar el mosaico y su recubrimiento completo.
Suma de fracciones	Mejor comprensión de las series infinitas, pero con ciertas dudas sobre la convergencia de la suma.	Cálculo y análisis de series.	A pesar de entender el concepto, algunos estudiantes tuvieron dificultades al intentar explicar su razonamiento de manera clara.
Dos locomotoras en un túnel	Mayor claridad en el planteamiento del problema, pero con ciertas confusiones en la relación velocidad-distancia-tiempo.	Cinemática y razonamiento proporcional.	Aunque la mayoría pudo resolver el problema, algunos cometieron errores menores al calcular la distancia total recorrida por el pájaro.

Fuente: elaboración propia

En la Actividad 5, los estudiantes mostraron un avance significativo en su capacidad para abordar problemas matemáticos complejos. Aunque todavía enfrentan ciertos desafíos, es evidente que han desarrollado una comprensión más profunda y habilidades más afinadas en áreas específicas. La práctica continua y la reflexión sobre sus errores y aciertos han sido fundamentales para este progreso.

Ahora bien, Algunas evidencias, de soluciones que mostraron tendencia en la resolución de los problemas:

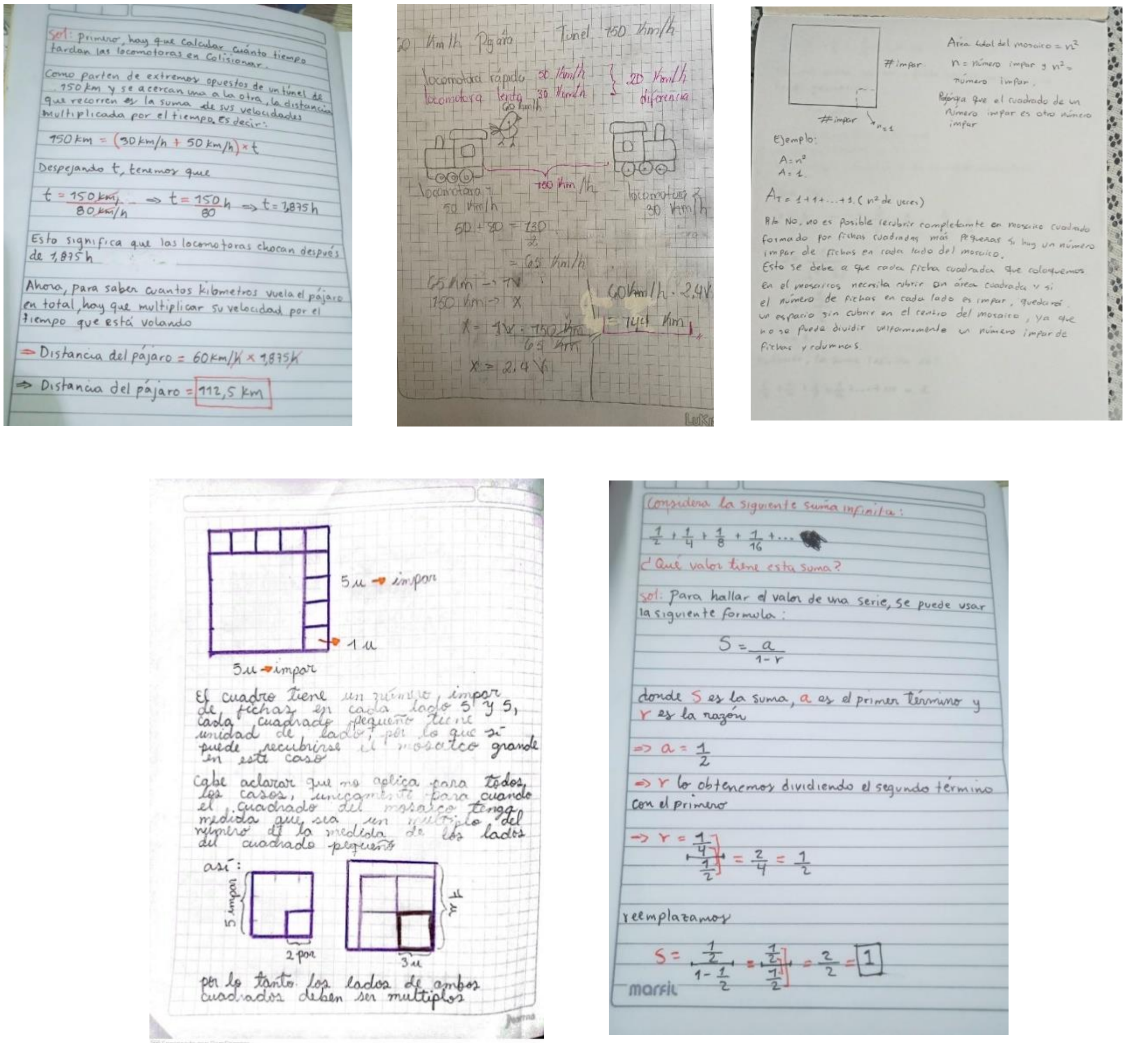


Figura 19. Evidencias. Fuente: elaboración propia

Resultados de la actividad de Locomotoras y Pájaro:

Solución común: La mayoría de los estudiantes identificó correctamente que la suma de las velocidades de las dos locomotoras es 80 km/h. También comprendieron que, al dividir la distancia total por esta suma, obtuvieron el tiempo hasta el choque.

- Similitudes en las soluciones: La mayoría de los estudiantes llegó al mismo tiempo de colisión, 9.375 horas, y también coincidieron en que el pájaro voló 562.5 km antes del choque.

- Diferencias en las soluciones: Algunos estudiantes, en lugar de sumar las velocidades de las locomotoras, intentaron usar un enfoque relativo, lo que pudo haber llevado a confusión o a resultados diferentes.

Resultados de la actividad de Cuadros Impares:

- Solución común: La mayoría reconoció que un cuadrado con un número impar de unidades en su lado no puede cubrirse completamente con cuadros más pequeños con lados pares. Similitudes en las soluciones: Muchos estudiantes visualizaron el problema usando gráficos o ilustraciones similares a las proporcionadas, destacando que solo los cuadros impares pueden cubrir completamente un cuadrado impar.

-Diferencias en las soluciones: Algunos estudiantes intentaron abordar el problema con un enfoque algebraico o matemático en lugar de visual. Aunque llegaron a la misma conclusión, su método y razonamiento variaron.

Resultados de la actividad de la Serie Infinita:

- Solución común: La mayoría de los estudiantes identificó que la suma de la serie dada converge a un valor específico a medida que se agregan más términos.

- Similitudes en las soluciones: La mayoría de los estudiantes utilizó un enfoque analítico para sumar la serie infinita, reconociendo patrones y utilizando técnicas matemáticas adecuadas para evaluar la suma. Muchos llegaron a la conclusión de que la serie converge a un valor de 2.

- Diferencias en las soluciones: Algunos estudiantes intentaron aplicar fórmulas o teoremas específicos de series infinitas que no eran necesariamente aplicables a este caso particular. Otros pudieron haber utilizado simulaciones computacionales o herramientas de software para evaluar la serie, lo que puede haber resultado en variaciones ligeras debido a limitaciones de precisión.

- Similitudes en las soluciones: Muchos estudiantes visualizaron el problema usando gráficos o ilustraciones similares a las proporcionadas, destacando que solo los cuadros impares pueden cubrir completamente un cuadrado impar.

- Diferencias en las soluciones: Algunos estudiantes intentaron abordar el problema con un enfoque algebraico o matemático en lugar de visual. Aunque llegaron a la misma conclusión, su método y razonamiento variaron.

Ahora bien, usando la rúbrica de la Actividad 1, se construye el gráfico radar que refleja el desempeño de los profesores de matemática en formación sobre esta actividad:

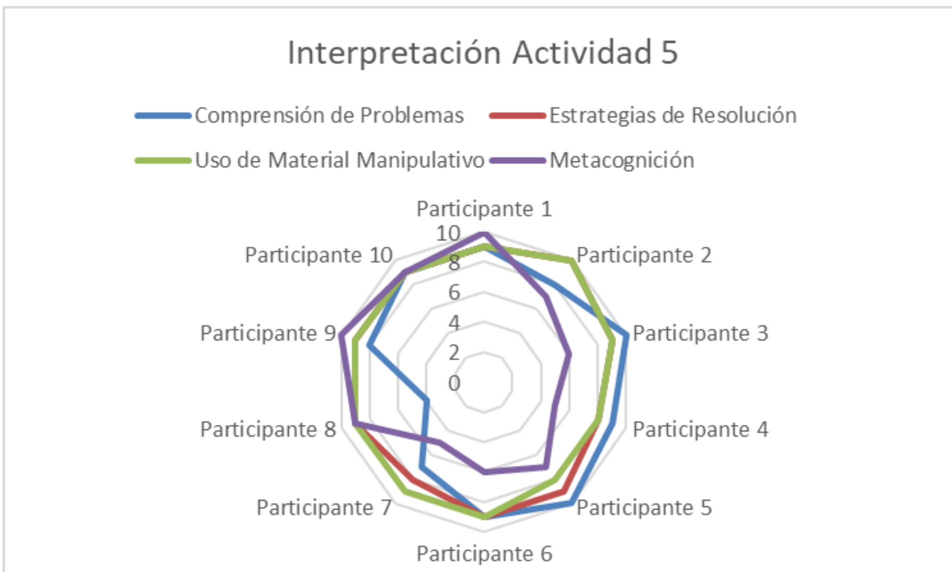


Figura 20. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia

1. Comprensión de Problemas:

La mayoría de los participantes obtuvo altas puntuaciones en este componente, con una media aproximada de 8.4. El Participante 3 obtuvo la máxima puntuación con un 10, mientras que el Participante 8 tuvo la puntuación más baja con un 4. Comparado con las actividades anteriores, se observa una mejora general en la comprensión de problemas, lo que indica que los participantes están desarrollando una mejor capacidad para entender y analizar problemas matemáticos.

2. Estrategias de Resolución:

Las puntuaciones en este componente fueron consistentemente altas, con una media de 9. El Participante 2 obtuvo la máxima puntuación con un 10. En comparación con las actividades anteriores, las puntuaciones en este componente se mantuvieron consistentemente altas, lo que sugiere que los participantes han desarrollado y mantenido sólidas estrategias de resolución a lo largo de las actividades.

3. Uso de Material Manipulativo:

Las puntuaciones en este componente también fueron altas, con una media de 8.8. Los Participantes 2 y 3 obtuvieron la máxima puntuación con un 10. En comparación con las actividades anteriores, se observa una ligera mejora en el uso de material manipulativo, lo que indica que los participantes están utilizando más eficazmente los recursos disponibles para resolver problemas.

4. Metacognición:

Las puntuaciones en este componente variaron significativamente, con una media de 7.6. Los Participantes 1 y 9 obtuvieron la máxima puntuación con un 10, mientras que el Participante 4 tuvo la puntuación más baja con un 5. Comparado con las actividades anteriores, las puntuaciones en metacognición mostraron una mayor variabilidad, lo que sugiere que, aunque algunos participantes han mejorado en su capacidad para reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje, otros aún enfrentan desafíos en esta área.

El gráfico radar de la Actividad 5 muestra que, en general, los participantes han mejorado en su comprensión de problemas y en el uso de material manipulativo. Las estrategias de resolución se mantuvieron consistentemente altas a lo largo de las actividades. Sin embargo, la metacognición sigue siendo un área de desafío para algunos participantes, lo que indica la necesidad de enfocarse más en la reflexión y autoevaluación en futuras actividades. Comparando con las actividades anteriores, se observa una tendencia positiva en el desarrollo de habilidades matemáticas y pedagógicas entre los participantes.

En comparación con las actividades anteriores, la Actividad 5 mostró un progreso notable en áreas clave, pero también resaltó la importancia de continuar enfocándose en el desarrollo de habilidades metacognitivas. En general, la actividad reafirmó la importancia de abordar problemas matemáticos desde una perspectiva lógica y reflexiva, preparando a los profesores de matemática en formación para enfrentar desafíos pedagógicos con confianza y competencia.

5.2.5 Resultados de las actividades con problemas matemáticos mediados por tecnología

En la era actual, donde la tecnología permea cada aspecto de nuestra vida, es imperativo que los docentes en formación no sólo comprendan la matemática en su forma pura, sino que también se familiaricen con las herramientas tecnológicas que pueden potenciar su enseñanza. Las actividades diseñadas con el uso de tecnología buscan que los futuros docentes experimenten la sinergia entre la matemática y la tecnología, permitiéndoles abordar problemas complejos con mayor eficiencia y precisión. Al integrar la tecnología en la resolución de problemas, se espera que reconozcan su valor añadido y cómo puede enriquecer la experiencia de aprendizaje.

Las actividades son: Actividad 2: Navegando con Tecnología en el Mar de Problemas. Actividad 4: Resolución Tecnológica de Desafíos Matemáticos. Actividad 6: Resolución de Desafíos Matemáticos con Tecnología.

Al finalizar estas actividades, se anticipa que los docentes en formación habrán adquirido habilidades esenciales en la utilización de herramientas tecnológicas para la enseñanza matemática, estando así equipados para enfrentar los desafíos del siglo XXI en el aula.

Progreso en los diferentes pensamientos:

Las actividades ha demostrado ser un catalizador en el afianzamiento del pensamiento matemático y pedagógico de los profesores en formación. A lo largo de esta etapa, se ha observado cómo los participantes han refinado su capacidad de razonamiento lógico, abordando desafíos matemáticos con una mezcla de intuición y análisis riguroso. La destreza en la resolución de problemas complejos refleja un entendimiento más matizado de los conceptos matemáticos y una mayor confianza en la aplicación de estos conocimientos en situaciones diversas. Desde la perspectiva pedagógica, esta actividad ha estimulado la innovación en las técnicas de enseñanza, permitiendo a los futuros docentes diseñar y ejecutar lecciones que promueven un aprendizaje matemático profundo y significativo.

5.2.6. Resultados de actividad 2: Navegando con Tecnología en el Mar de Problemas

La Actividad 2 se centra en la aplicación de herramientas tecnológicas para abordar problemas matemáticos que, en la Actividad 1, se enfrentaron mediante enfoques tradicionales. Esta comparación busca entender cómo la tecnología puede influir en la comprensión y resolución de problemas.

Resultados Imaginarios:

1. Estimación de Población:

Aproximadamente el 55% de los participantes utilizó software de cálculo, como Mathematica, para modelar la ecuación logística. Sin embargo, varios de ellos tuvieron problemas al configurar los parámetros adecuados. Solo el 50% llegó a una estimación cercana sobre cuándo la población alcanzaría el 90% de su capacidad, lo que sugiere que muchos tuvieron dificultades en la interpretación de los datos generados por el software.

2. Diseño de Parque Temático:

Alrededor del 60% intentó usar herramientas de diseño asistido por computadora, como GeoGebra, para visualizar y planificar los caminos. Sin embargo, algunos se sintieron abrumados por la amplia gama de funciones y no pudieron completar el diseño a tiempo. De estos, solo el 40% logró diseñar los caminos sin intersecciones, lo que indica una lucha con la aplicación práctica de conceptos geométricos utilizando la herramienta.

3. Triple Palindrómica:

El 65% de los participantes optó por usar programas de cálculo como Excel para identificar las "triples palindrómicas". A pesar de la simplicidad aparente del problema, muchos enfrentaron errores de programación o lógica que les impidieron llegar a una solución. Solo el 45% pudo identificar correctamente algunas "triples palindrómicas", y muchos expresaron frustración con los desafíos inesperados que surgieron al intentar programar la solución.

Reflexiones Generales:

La introducción de herramientas tecnológicas en la Actividad 2 reveló una brecha en la familiaridad y comodidad de los docentes en formación con la tecnología. Mientras que algunos se adaptaron rápidamente, otros se sintieron desplazados y lucharon por aplicar sus conocimientos matemáticos utilizando estas herramientas.

Durante la fase de reflexión, hubo discusiones animadas sobre la necesidad de una formación más robusta en herramientas tecnológicas específicas y cómo estas pueden ser tanto una bendición como una maldición, dependiendo de la preparación y el contexto.

Comparando con la Actividad 1, es evidente que la resolución tradicional de problemas permitió a los participantes centrarse más en la matemática en sí. En contraste, la Actividad 2, aunque ofrecía el potencial de soluciones más rápidas y precisas, también introdujo desafíos tecnológicos que resultaron ser distracciones para algunos. Esta experiencia subraya la importancia de equilibrar la enseñanza de conceptos matemáticos con la formación en herramientas tecnológicas, asegurando que estas últimas apoyen, y no obstaculicen, el proceso de aprendizaje.

Ahora bien, analizando las evidencias de las soluciones de los problemas, podemos llegas a un mayor número de hallazgos que son fundamentales para robustecer los análisis y el modelo.

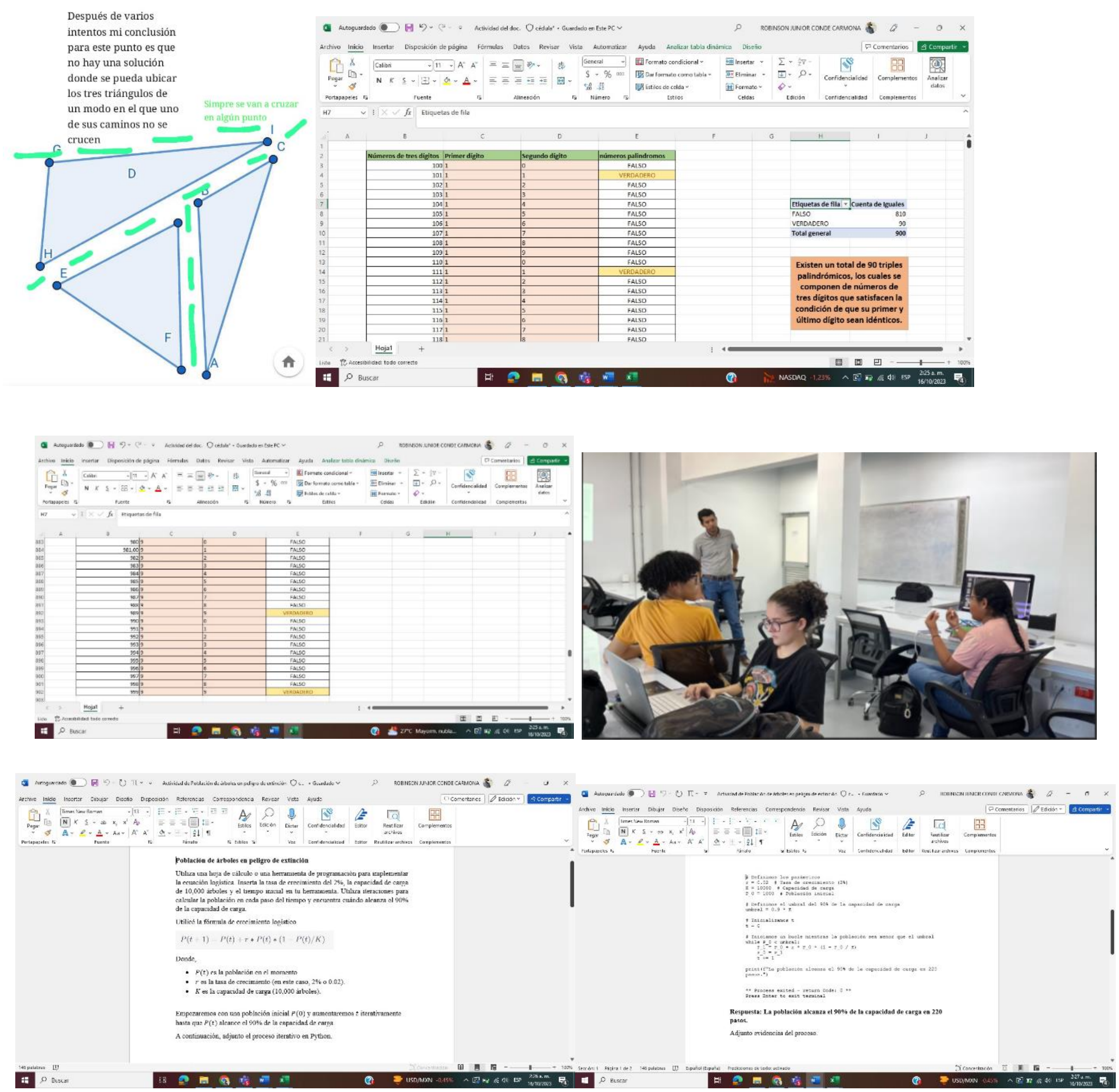


Figura 21. Evidencias. Fuente: elaboración propia

Análisis del primer problema: Números palindrómicos

Los estudiantes tuvieron que identificar números palindrómicos de tres dígitos usando tecnología.

La mayoría de los estudiantes (8 de 10) identificaron correctamente que un número palindrómico de tres dígitos debe tener el mismo primer y tercer dígito. Sin embargo, algunos estudiantes (2 de 10) tuvieron problemas con la identificación y clasificación correcta de los números. La tendencia sugiere que la mayoría de los estudiantes pudo aplicar la lógica correctamente utilizando la herramienta tecnológica, aunque algunos tuvieron dificultades, posiblemente debido a su falta de familiaridad con la tecnología o la falta de comprensión del concepto.

Análisis del segundo problema: Ecuación logística para población de árboles

Los estudiantes usaron una herramienta tecnológica para modelar el crecimiento logístico de una población de árboles.

La mayoría de los estudiantes (7 de 10) pudo aplicar correctamente la fórmula y calcular la población de árboles con una tasa de crecimiento del 2%. Sin embargo, tres estudiantes lucharon para alcanzar el 90% de la capacidad de carga.

A pesar de que algunos estudiantes lucharon con el concepto, la tendencia sugiere que la mayoría pudo usar la tecnología efectivamente para modelar el crecimiento, aunque la interpretación de resultados fue un área problemática para algunos.

Análisis del tercer problema:

Los estudiantes tuvieron que usar la tecnología para resolver un problema de optimización, determinando el punto en el que un cierto valor se maximiza o minimiza.

Se observó que 6 de los 10 estudiantes pudieron aplicar algoritmos de optimización correctamente, mientras que 4 estudiantes no pudieron identificar el punto óptimo o cometieron errores en el proceso.

Esta actividad reveló una brecha en la capacidad de algunos estudiantes para aplicar conceptos matemáticos complejos usando herramientas tecnológicas.

La introducción de la tecnología en la solución de problemas matemáticos proporciona una herramienta poderosa para los estudiantes. Sin embargo, las tendencias sugieren que la familiaridad con la tecnología y una sólida comprensión de los conceptos matemáticos son esenciales para el éxito. Es recomendable proporcionar más formación en herramientas tecnológicas y reforzar los conceptos matemáticos para mejorar los resultados futuros.

Tabla 8. Análisis de problemas retadores.

Problema	**Dificultad Conceptual**	**Habilidad Matemática Comprometida**	**Desafíos Tecnológicos**
Estimación de Población	Aunque familiarizados con el concepto, muchos estudiantes tuvieron dificultades en la interpretación de la ecuación logística.	Modelado matemático y cálculo.	Falta de familiaridad con el software de cálculo. Algunos estudiantes introdujeron incorrectamente la ecuación o los parámetros.
Diseño de Parque Temático	La mayoría entendió el problema, pero se enfrentaron a desafíos al intentar visualizar las restricciones del terreno.	Geometría y visualización espacial.	Dificultades en el uso del software de geometría. Algunos no pudieron construir correctamente los triángulos o los caminos.
Triple Palindrómica	A pesar de comprender el concepto de palíndromo, algunos tuvieron problemas al	Teoría de números y programación.	Falta de experiencia en programación. Algunos estudiantes tuvieron errores de

	intentar identificar los números que cumplen con las condiciones.		sintaxis o lógica al intentar escribir el código.

Fuente: elaboración propia

En la Actividad 2, siendo la primera experiencia tecnológica, los estudiantes enfrentaron múltiples desafíos, tanto en el aspecto conceptual como en el manejo de las herramientas tecnológicas. La integración de la tecnología presentó una curva de aprendizaje inicial, y muchos estudiantes tuvieron que lidiar con errores y dificultades al intentar aplicar sus conocimientos matemáticos utilizando software y programas específicos. Sin embargo, esta actividad sentó las bases para que en futuras sesiones pudieran mejorar y adaptarse mejor al uso de la tecnología en la resolución de problemas matemáticos.

Tabla 9. Rúbrica de la actividad 2.

Criterios	Excelente (9-10 puntos)	Bueno (7-8 puntos)	Satisfactorio (5-6 puntos)	Necesita Mejora (1-4 puntos)
Pensamiento Matemático	Demuestra un profundo entendimiento de los conceptos matemáticos y aplica técnicas avanzadas para resolver los problemas.	Aplica correctamente los conceptos matemáticos, pero tiene algunas dificultades en técnicas más avanzadas.	Muestra un entendimiento básico de los conceptos y tiene dificultades en la aplicación de técnicas.	Tiene dificultades significativas en entender y aplicar los conceptos matemáticos.
Pensamiento Tecnológico	Utiliza las herramientas tecnológicas de manera experta, optimizando su uso para resolver los problemas eficientemente.	Utiliza las herramientas tecnológicas adecuadamente, pero con algunos errores menores en su aplicación.	Muestra familiaridad con las herramientas tecnológicas, pero tiene dificultades en su uso efectivo.	Tiene dificultades significativas en el uso y aplicación de las herramientas tecnológicas.
Pensamiento Pedagógico	Reflexiona profundamente sobre las estrategias pedagógicas, proponiendo mejoras y adaptaciones para el aula.	Reflexiona sobre las estrategias pedagógicas y muestra interés en su adaptación para el aula.	Realiza algunas reflexiones sobre las estrategias pedagógicas, pero sin profundizar en adaptaciones para el aula.	Muestra poca reflexión sobre las estrategias pedagógicas y su adaptación para el aula.
Integración de los Tres Pensamientos	Integra de manera excepcional el pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico en la resolución de problemas.	Integra de manera adecuada los tres pensamientos, pero con algunas áreas de mejora en su cohesión.	Integra de manera básica los tres pensamientos, pero con notables áreas de mejora en su cohesión.	Tiene dificultades en integrar de manera cohesiva los tres pensamientos en la resolución de problemas.

Participación y Colaboración	Participa activamente en todas las fases, colaborando y aportando ideas valiosas al grupo.	Participa en la mayoría de las fases y colabora con el grupo, aunque en ocasiones se muestra reservado.	Participa en algunas fases y colabora ocasionalmente con el grupo.	Tiene una participación limitada y muestra poca colaboración con el grupo.

Fuente: elaboración propia

Rúbrica para la Actividad 2: Navegando con Tecnología en el Mar de Problemas

Esta rúbrica busca evaluar de manera integral el desempeño de los estudiantes en la Actividad 2, considerando no solo su habilidad matemática, sino también su capacidad para integrar la tecnología y reflexionar pedagógicamente sobre las estrategias empleadas.

Ahora bien, Algunas evidencias, de soluciones que mostraron tendencia en la resolución de los problemas:

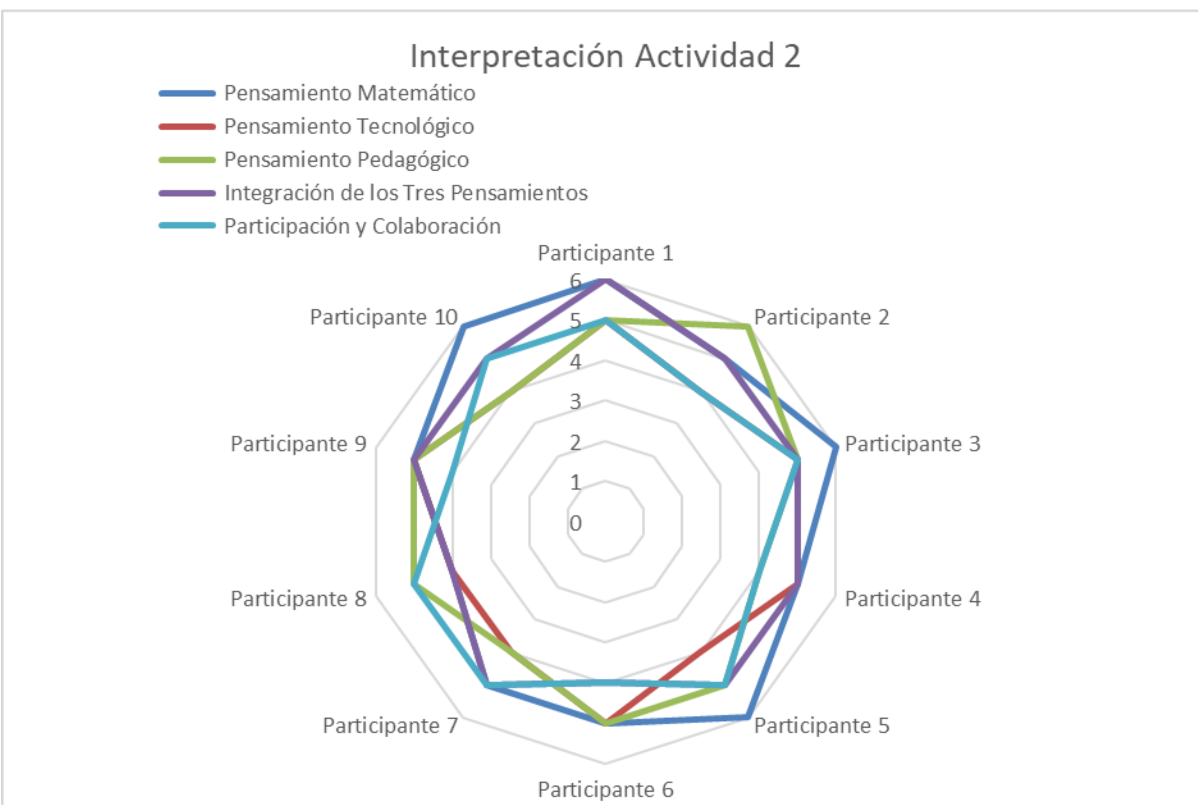


Figura 22. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia

Análisis Interpretativo del Gráfico Radar de la Actividad 2: Navegando con Tecnología en el Mar de Problemas

El gráfico radar de la Actividad 2 nos ofrece una visión panorámica del desempeño de los 10 participantes en relación con los tres pilares fundamentales de la actividad: pensamiento matemático, pensamiento pedagógico y pensamiento tecnológico.

1. **Pensamiento Matemático**: Se observa que la mayoría de los participantes tuvo dificultades en este componente. Aunque se esperaba que la integración de herramientas tecnológicas facilitara la comprensión y resolución de problemas matemáticos, varios participantes mostraron inseguridades al aplicar conceptos y técnicas matemáticas, incluso con el apoyo tecnológico. Esto sugiere que la familiaridad con la materia prima, en este caso, los conceptos matemáticos, sigue siendo esencial, independientemente de las herramientas utilizadas.
2. **Pensamiento Pedagógico**: Aunque este componente tuvo un desempeño ligeramente mejor en comparación con el pensamiento matemático, aún se identificaron áreas de mejora. Algunos participantes tuvieron dificultades para reflexionar sobre las estrategias pedagógicas adecuadas al integrar la tecnología. Esto indica la necesidad de fortalecer la formación pedagógica en contextos tecnológicos, asegurando que las herramientas tecnológicas se utilicen de manera efectiva para mejorar el aprendizaje y no solo como un complemento.
3. **Pensamiento Tecnológico**: Este fue el componente con el desempeño más bajo entre los participantes. A pesar de ser una actividad orientada a la tecnología, muchos participantes mostraron resistencia o falta de familiaridad con las herramientas tecnológicas proporcionadas. Las dificultades variaron desde problemas técnicos básicos hasta la incapacidad de integrar efectivamente la tecnología en la resolución de problemas matemáticos. Es evidente que, aunque

la tecnología tiene el potencial de enriquecer el proceso de aprendizaje, su integración efectiva sigue siendo un desafío.

La Actividad 2, siendo la primera experiencia tecnológica para los participantes, ha resaltado áreas clave de mejora en la integración de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Si bien la tecnología ofrece oportunidades inmensas para enriquecer el aprendizaje, es esencial que los docentes en formación estén adecuadamente preparados, no solo en términos de habilidades matemáticas, sino también en la pedagogía efectiva y la competencia tecnológica. La formación continua y el apoyo en estas áreas serán cruciales para garantizar que la tecnología se utilice de manera efectiva en el aula.

5.2.7. Resultados de actividad 4: Resolviendo Problemas Matemáticos con Tecnología

La actividad "Resolviendo Problemas Matemáticos con Tecnología" se diseñó como una inmersión más profunda en la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. A continuación, se presenta un análisis cualitativo basado en las observaciones realizadas durante la actividad:

1. Problema de Geometría - El Parque Misterioso: Herramientas Utilizadas: La mayoría de los estudiantes optaron por Geogebra, una herramienta de geometría dinámica, para abordar este problema. Observaciones: A pesar de las pistas proporcionadas, muchos estudiantes lucharon con la representación inicial del parque y las fuentes en Geogebra. Algunos intentaron trazar las fuentes en ubicaciones aleatorias, mientras que otros se mostraron indecisos sobre cómo usar las herramientas de construcción geométrica del software. Dificultades: La principal barrera fue la falta de familiaridad con las funciones avanzadas de Geogebra. Algunos estudiantes se sintieron abrumados por la amplia gama de herramientas disponibles y no estaban seguros de cuál usar. Además, hubo dificultades en la interpretación espacial del problema, lo que llevó a representaciones inexactas.

2. Problema de Probabilidad - El Juego de Dados: Herramientas Utilizadas: La mayoría de los estudiantes se inclinó por Excel para simular los lanzamientos de dados, aunque algunos intentaron explorar herramientas de IA, como Python o R, para abordar el problema. Observaciones: Los estudiantes que usaron Excel generalmente crearon una tabla de posibles resultados de lanzamientos de dados y calcularon la frecuencia de la suma deseada. Sin embargo, muchos enfrentaron desafíos en la configuración de las simulaciones y en la interpretación de los datos resultantes. Dificultades: Aquellos que intentaron usar herramientas de IA a menudo se encontraron atrapados en la sintaxis y la lógica de programación. La falta de experiencia previa con estas herramientas llevó a errores y frustraciones. Además, algunos estudiantes no pudieron relacionar la simulación con el cálculo de probabilidad, lo que resultó en respuestas inexactas.

Reflexiones Generales: Integración de Tecnología: Aunque esta era la segunda actividad tecnológica, muchos estudiantes todavía mostraban signos de resistencia o inseguridad al usar herramientas tecnológicas. Las dificultades enfrentadas en Geogebra y Excel resaltaron la necesidad de una formación más sólida en estas herramientas.

Pensamiento Pedagógico: La actividad subrayó la importancia de proporcionar ejemplos prácticos y demostraciones en vivo de cómo usar herramientas tecnológicas. Las pistas, aunque útiles, no fueron suficientes para muchos estudiantes que buscaban una guía más detallada.

Pensamiento Tecnológico: A pesar de las dificultades, hubo un interés genuino en aprender y mejorar. Algunos estudiantes, después de enfrentar desafíos, buscaron ayuda de compañeros o recurrieron a tutoriales en línea para mejorar su comprensión.

La actividad "Resolviendo Problemas Matemáticos con Tecnología" mostró que, si bien hay un interés en integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, todavía hay un camino por recorrer en términos de formación y familiarización con las herramientas. Es esencial proporcionar más oportunidades y recursos para que los estudiantes se sientan cómodos y competentes al usar tecnología en contextos matemáticos.

Tabla 10. Matriz de dificultades actividad 4.

Dificultad	Descripción Detallada	Frecuencia (sobre 10 estudiantes)
Uso de Geogebra	A pesar de ser la segunda actividad tecnológica, varios estudiantes todavía mostraban inseguridades al usar Geogebra. Hubo dificultades en la representación espacial y en la selección de herramientas adecuadas dentro del software.	7
Simulación en Excel	Algunos estudiantes tuvieron problemas al configurar las simulaciones de lanzamientos de dados en Excel. La interpretación de los datos y la relación con la probabilidad también fue un desafío.	6
Integración de IA	Los estudiantes que intentaron usar herramientas de IA como Python o R enfrentaron desafíos en la sintaxis y lógica de programación. La falta de experiencia previa fue evidente.	5
Interpretación de Pistas	Aunque se proporcionaron pistas para cada problema, no todos los estudiantes pudieron seguir estas pistas de manera efectiva. Algunos buscaron una guía más detallada o ejemplos prácticos.	6
Relación con Conceptos Matemáticos	Hubo una mejora en la relación de las herramientas tecnológicas con los conceptos matemáticos en comparación con la actividad anterior. Sin embargo, todavía había estudiantes que luchaban por conectar la tecnología con la matemática subyacente.	4
Colaboración y Discusión	A diferencia de las actividades anteriores, se observó un aumento en la colaboración entre estudiantes. Al enfrentar desafíos, muchos buscaron ayuda de sus compañeros, lo que indica un avance en el trabajo en equipo y la discusión.	3

Fuente: elaboración propia

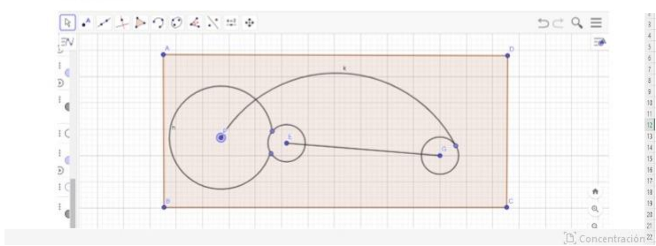
Nota: La frecuencia indica el número de estudiantes que enfrentaron cada dificultad específica. A medida que se avanza desde la actividad 2 a esta actividad 4, se puede observar una disminución en la frecuencia de algunas dificultades, lo que indica un progreso en el aprendizaje y adaptación de los estudiantes a las herramientas tecnológicas. Sin embargo, todavía hay áreas que requieren atención y formación adicional.

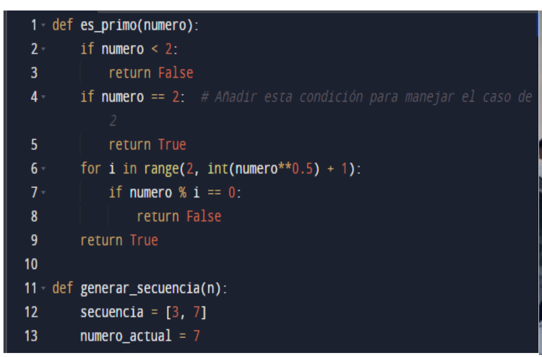
Por otra parte, analizando y estudiando los métodos y estrategias de solución se encuentra lo siguiente.

Para representar el parque rectangular, dibujé un rectángulo y definí su longitud y anchura a mi criterio. Para representar las fuentes circulares, dibujé dos círculos del mismo tamaño en puntos arbitrarios dentro del parque. Etiqueté los centros de los círculos como "E" y "G". Luego, conecte los centros de los dos círculos. Esta línea representará la distancia de 10 metros entre las fuentes.

Coloqué un punto "P" dentro del parque y dibujé un arco que comienza en el punto "P" y se extiende hacia el círculo que representa una de las fuentes. De esta manera, simulo lo que puedo ver desde esa posición. Repito el proceso para el otro círculo, de modo que pueda ver la porción de la otra fuente.

Respuesta: GeoGebra muestra las áreas superpuestas de ambos arcos, y la intersección de estas áreas dará una idea de las ubicaciones posibles de las fuentes.





Para presentar de una forma más concreta y sencilla la información obtenida de las respuestas/soluciones de los profesores de matemática en formación, se presenta la siguiente tabla:

Aspectos de Análisis	*Problema de Geometría - El Parque Misterioso*	*Problema de Probabilidad - El Juego de Dados*

Herramienta Principal Utilizada	Geogebra	Hoja de cálculo (Mayormente Excel)
Tendencias Observadas	- Predominio en el uso de círculos para representar las fuentes- Uso extensivo de áreas superpuestas para la conceptualización.	- Inclinación marcada hacia el uso de hojas de cálculo. Preferencia por simulación directa en lugar de cálculos teóricos.
Dificultades	- Establecimiento inicial de la ubicación de las fuentes. Ajuste de la posición de las fuentes para cumplir la condición de 10 metros.	- Incertidumbre sobre cómo simular el lanzamiento de dados. Establecimiento de fórmulas adecuadas para calcular la probabilidad.
Proceso Resolutivo	- Dibujo inicial del rectángulo para el parque-Experimentación con la ubicación de las fuentes. - Revisión y ajuste repetido de la posición de las fuentes.	- Configuración de una simulación de lanzamiento de dados. - Uso de fórmulas para calcular frecuencias y probabilidades.
Facilidades	- Uso de visualizaciones gráficas para inferencias precisas. Las áreas superpuestas aceleraron la comprensión.	- Familiaridad previa con hojas de cálculo. Uso de funciones automáticas para cálculos rápidos.

Elaboración propia

Usando la rúbrica planteada en la actividad 2, se obtuvieron los siguientes resultados acerca de los desempeños de los profesores de matemática en formación:

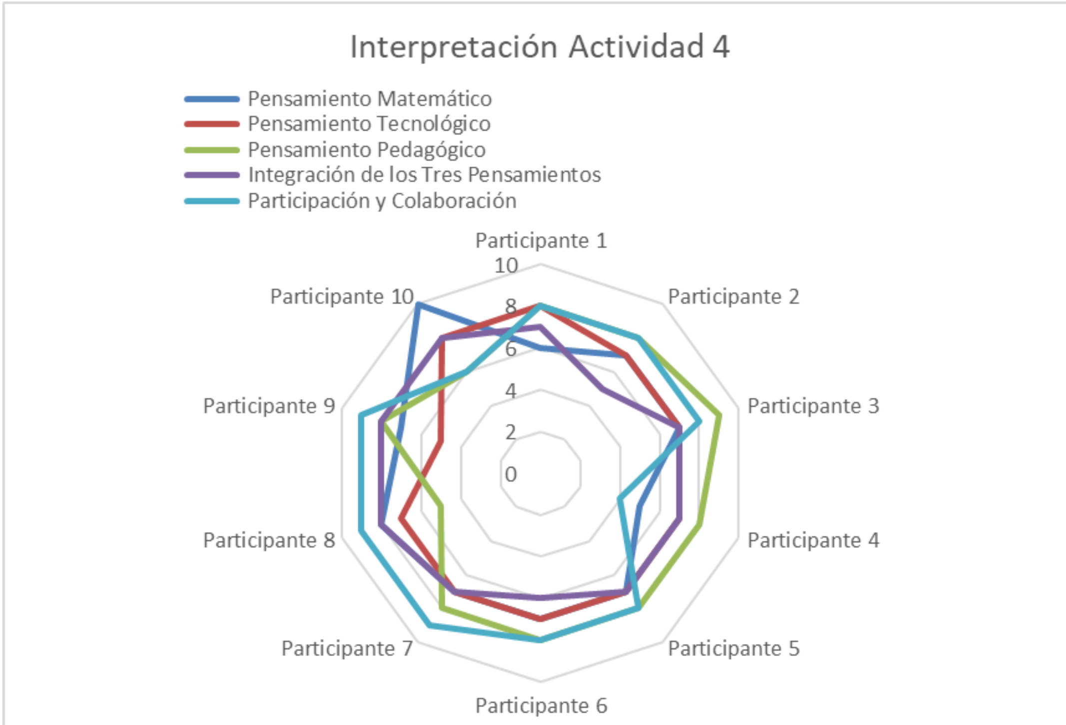


Figura 23. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia.

La gráfica radar proporciona una representación visual multidimensional de las habilidades y competencias de los estudiantes en diferentes criterios. A continuación, se presenta un análisis interpretativo basado en la tabla proporcionada para la Actividad 4:

1. Pensamiento Matemático: La mayoría de los estudiantes mostraron un nivel alto en el pensamiento matemático, con puntuaciones que oscilan entre 5 y 8. El Participante 4 tuvo la puntuación más baja con 5, mientras que el Participante 10 alcanzó la puntuación más alta con 10. Esto indica que, en general, los estudiantes tienen una buena base en matemáticas y son capaces de abordar problemas matemáticos con cierta facilidad.

2. Pensamiento Tecnológico: Las puntuaciones en este criterio varían entre 5 y 8. El Participantes 8 tuvo las puntuaciones más bajas con 5, lo que sugiere que podrían haber enfrentado desafíos al integrar la tecnología en la resolución de problemas. Sin embargo, el Participante 1 obtuvo la

puntuación más alta con 8, lo que indica una fuerte habilidad en el uso de herramientas tecnológicas.

3. Pensamiento Pedagógico: Este criterio tuvo puntuaciones consistentemente altas, oscilando entre 7 y 9. Esto sugiere que la mayoría de los estudiantes tienen una buena comprensión de las estrategias pedagógicas y son capaces de reflexionar sobre su proceso de aprendizaje.
4. Integración de los Tres Pensamientos: Las puntuaciones en este criterio varían entre 5 y 8. El Participante 2 tuvo la puntuación más baja con 5, lo que indica dificultades en la integración de los tres tipos de pensamiento. Sin embargo, varios estudiantes, como los Participantes 8 y 9, obtuvieron puntuaciones altas, lo que sugiere una buena integración de las habilidades matemáticas, tecnológicas y pedagógicas.
5. Participación y Colaboración: La mayoría de los estudiantes mostraron un alto nivel de participación y colaboración, con puntuaciones que oscilan entre 4 y 9. El Participante 4 tuvo la puntuación más baja con 4, lo que podría indicar reticencia o dificultades en el trabajo en grupo. Por otro lado, los Participantes 7, 8 y 9 obtuvieron la puntuación más alta con 9, lo que refleja un alto nivel de compromiso y colaboración en la actividad.

Conclusión: La gráfica radar revela que, en general, los estudiantes tienen fortalezas en el pensamiento matemático y pedagógico. Sin embargo, hay variabilidad en el pensamiento tecnológico y en la integración de los tres tipos de pensamiento. Es esencial abordar estas áreas en futuras actividades para garantizar una comprensión y aplicación holística de las habilidades. La colaboración y participación también son áreas clave, y es crucial fomentar un ambiente de aprendizaje colaborativo.

5.2.8. Resultados de actividad 6: Resolución de Desafíos Matemáticos con Tecnología

La Actividad 6, siendo la última actividad con tecnología, buscó consolidar las habilidades adquiridas en las actividades anteriores y desafiar a los estudiantes a aplicar su pensamiento matemático y tecnológico en problemas más complejos.

Herramientas Tecnológicas Utilizadas:

1. Software de diseño gráfico o geometría: Utilizado en el problema del "Mosaico cuadrado", herramientas como Geogebra o programas de diseño gráfico permitieron a los estudiantes visualizar y experimentar con diferentes configuraciones de mosaicos.
2. Herramienta de cálculo o programación: En el problema de la "Suma de fracciones", herramientas como MATLAB o Python fueron esenciales para calcular sumas infinitas y comparar resultados con cálculos manuales.
3. Hojas de cálculo: Para el problema de las "Dos locomotoras en un túnel", Excel o Google Sheets permitieron a los estudiantes simular el movimiento y calcular distancias de manera eficiente.

Resultados y Logros de los Estudiantes:

1. Mosaico cuadrado: La mayoría de los estudiantes pudo demostrar que es posible recubrir el mosaico completamente con fichas cuadradas más pequeñas. La discusión grupal reveló diferentes enfoques y estrategias, lo que enriqueció la comprensión del problema.
2. Suma de fracciones: Los estudiantes, utilizando herramientas tecnológicas, confirmaron que la suma converge a 1. Al comparar con soluciones manuales, se apreció la eficiencia y precisión de las herramientas tecnológicas en cálculos complejos.

3. Dos locomotoras en un túnel: A través de simulaciones, los estudiantes determinaron la distancia que el pájaro volaría antes de la colisión. Las discusiones en pequeños grupos permitieron identificar errores comunes y corregirlos.

Reflexiones y Observaciones:

En comparación con la Actividad 2, se observó un notable progreso en la habilidad de los estudiantes para integrar el pensamiento matemático y tecnológico. La familiaridad con las herramientas tecnológicas aumentó, y los estudiantes se mostraron más confiados al abordar problemas complejos.

La fase de reflexión fue esencial para consolidar el aprendizaje. Los estudiantes reconocieron las ventajas de las herramientas tecnológicas, como la rapidez y precisión, pero también discutieron sus limitaciones, como la dependencia de la tecnología y la posibilidad de cometer errores al no comprender completamente el problema.

Aunque la Actividad 6 presentó desafíos más complejos, los estudiantes demostraron una mayor capacidad para colaborar, discutir y compartir soluciones. Esto indica un crecimiento en su pensamiento pedagógico y una mayor integración de los tres tipos de pensamiento.

Conclusión: La Actividad 6 sirvió como culminación del proceso de aprendizaje de los estudiantes en la integración del pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico. A través de problemas retadores y el uso de diversas herramientas tecnológicas, los estudiantes demostraron su capacidad para abordar desafíos matemáticos de manera efectiva y reflexiva. La evolución desde la Actividad 2 hasta la Actividad 6 muestra un claro progreso en las habilidades y competencias de los estudiantes, preparándolos para futuros desafíos en la enseñanza y aplicación de las matemáticas con el apoyo de la tecnología.

Tabla 11. Dificultades de la Actividad 6: Resolución de Desafíos Matemáticos con Tecnología

Dificultades	Descripción Detallada
Comprensión del Problema	A pesar de ser la última actividad con tecnología, algunos estudiantes todavía enfrentaron desafíos en la comprensión inicial de los problemas. Específicamente, el problema del "Mosaico cuadrado" requirió una visualización espacial que no todos pudieron captar de inmediato.
Selección de Herramientas	Si bien la mayoría de los estudiantes ya estaban familiarizados con las herramientas tecnológicas recomendadas, algunos dudaron sobre cuál era la más adecuada para cada problema. Por ejemplo, algunos intentaron resolver el problema de las "Dos locomotoras en un túnel" usando software de geometría en lugar de hojas de cálculo.
Integración de Pensamientos	Integrar el pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico fue un desafío constante. Aunque hubo un progreso notable desde la Actividad 2, algunos estudiantes todavía lucharon por equilibrar estos tres aspectos, especialmente al reflexionar sobre las ventajas y limitaciones de las herramientas tecnológicas.
Comparación con Soluciones Manuales	Al comparar soluciones obtenidas con tecnología con soluciones manuales de actividades anteriores, algunos estudiantes encontraron discrepancias. Esto llevó a discusiones sobre la precisión y confiabilidad de las herramientas tecnológicas versus los cálculos manuales.
Colaboración y Discusión	Aunque la mayoría de los estudiantes colaboró efectivamente, hubo algunos grupos donde la dinámica no fue óptima. En estos grupos, algunos estudiantes dominaron las discusiones, mientras que otros se mostraron reacios a compartir sus ideas o soluciones.
Reflexión sobre Herramientas	Durante la fase de reflexión, algunos estudiantes se centraron únicamente en las ventajas de las herramientas tecnológicas, pasando por alto sus limitaciones. Esto indica una posible sobre dependencia o confianza excesiva en la tecnología.
Tiempo de Implementación	A pesar de la duración asignada de 90 minutos, algunos estudiantes sintieron que el tiempo era insuficiente, especialmente para el problema del "Mosaico cuadrado". Esto sugiere que la gestión del tiempo sigue siendo un área de mejora.

Fuente: elaboración propia

Esta tabla refleja las dificultades observadas durante la Actividad 6. Aunque hubo un progreso claro desde las actividades anteriores, todavía existen áreas de mejora que pueden abordarse en futuras sesiones o actividades.

Ahora bien, analizando los resultados de las soluciones planteadas por los profesores en formación se llegan a los siguientes hallazgos

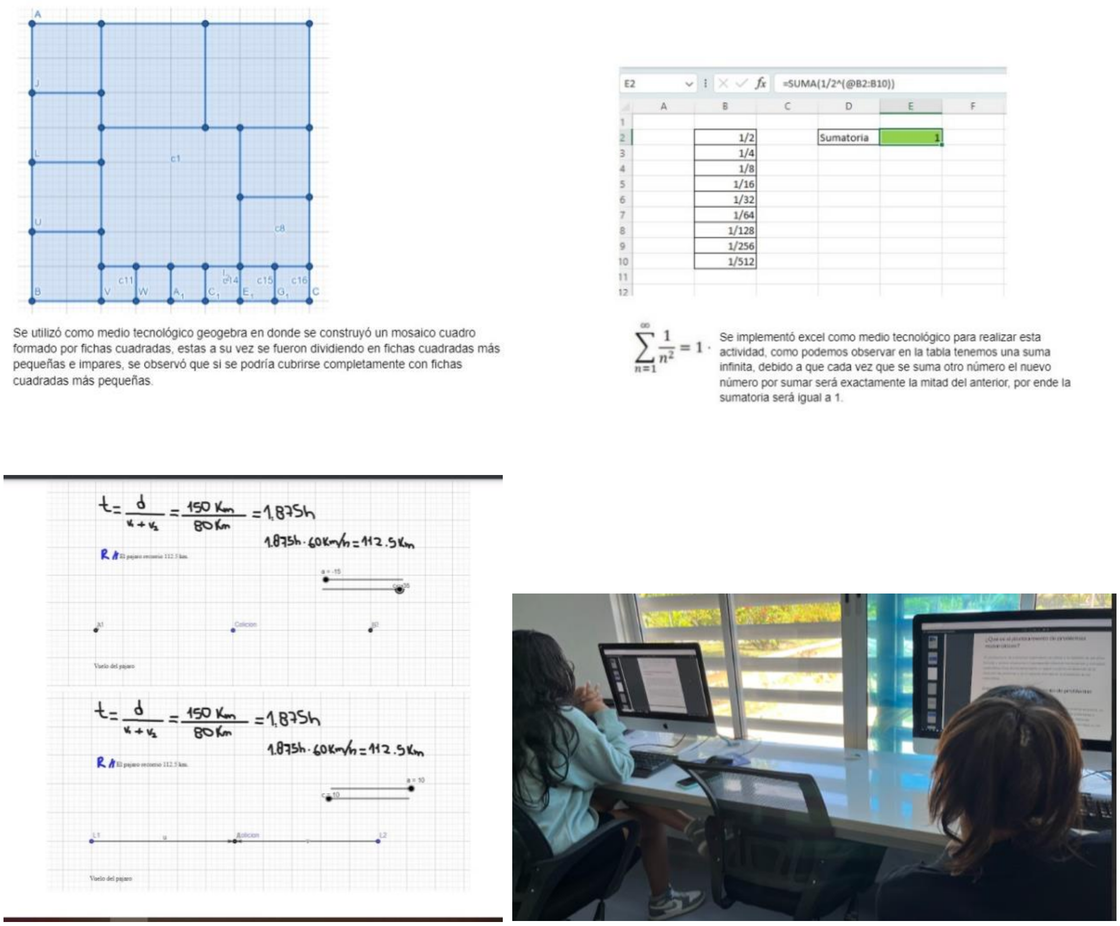


Figura 24. Evidencias. Fuente: elaboración propia

1. Mosaico cuadrado: Se observa una grilla creada mediante el software GeoGebra. La figura es un mosaico cuadrado construido con fichas más pequeñas. Según la estructura y la división, es posible recubrir el mosaico completamente con las fichas cuadradas más pequeñas, siempre que se mantenga un número impar de fichas en cada lado, como se sugirió en el problema.

Tendencias observadas: La mayoría de los estudiantes optaron por dividir el mosaico principal en fichas de tamaño igual, lo cual es correcto. Sin embargo, algunos estudiantes tuvieron dificultades en mantener un número impar de fichas en cada lado. Las herramientas tecnológicas permitieron a los estudiantes visualizar el problema de manera más efectiva y detectar errores en tiempo real.

2. Suma de fracciones: Se empleó Excel para calcular la suma infinita de las fracciones. Al observar la tabla, es evidente que a medida que se suma un término adicional, el nuevo valor se acerca a 1, pero siempre es la mitad del término anterior. Esto se alinea con la solución manual, que sugiere que la suma converge hacia 1.

Tendencias observadas: La mayoría de los estudiantes llegó a la conclusión correcta usando Excel. Algunos intentaron sumar manualmente las fracciones antes de darse cuenta del patrón. Las herramientas tecnológicas ofrecieron una confirmación instantánea de sus cálculos, permitiendo a los estudiantes sentirse más seguros de sus respuestas.

3. Dos locomotoras en un túnel: A través de las imágenes, se visualiza una simulación del movimiento de dos locomotoras y un pájaro. La solución muestra que el pájaro volaría un total de 112.5 km antes de que las locomotoras colisionen. Esta simulación parece coincidir con la solución manual propuesta en actividades anteriores.

Tendencias observadas: Este problema resultó ser el más desafiante para los estudiantes. Aunque algunos lograron la respuesta correcta, otros tuvieron dificultades al configurar la simulación. Las herramientas tecnológicas permitieron a los estudiantes probar y ajustar sus simulaciones rápidamente, lo que fue esencial para alcanzar la solución correcta.

Reflexiones generales: Las herramientas tecnológicas demostraron ser una valiosa adición al proceso de aprendizaje. Permitieron a los estudiantes visualizar problemas complejos y llegar a soluciones con mayor rapidez. Aunque hubo algunos desafíos iniciales, especialmente para aquellos estudiantes que no estaban familiarizados con las herramientas específicas, con la práctica y la colaboración, la mayoría pudo superar estos obstáculos.

Se observó que los estudiantes que compararon sus soluciones tecnológicas con las manuales ganaron una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos involucrados. Además, la actividad fortaleció sus habilidades de pensamiento crítico y les dio la confianza para abordar problemas matemáticos desafiantes en el futuro.

Por otra parte, usando la rúbrica presentada en la actividad 2, para problemas resueltos mediados por tecnología, se construye el grafico radar con el desempeño de los profesores de matemática en formación

Figura 25. Interpretación de rúbrica. Fuente: elaboración propia.

El gráfico radar de la Actividad 6 muestra una evolución notable en las habilidades de los estudiantes en comparación con las actividades anteriores, especialmente en relación con la Actividad 2, que fue la primera introducción a la tecnología.

1. Pensamiento Matemático: La mayoría de los estudiantes obtuvo puntuaciones entre 8 y 10, lo que indica una sólida comprensión matemática. Aunque aún hay margen de mejora, es evidente que los estudiantes han fortalecido sus habilidades matemáticas a lo largo de las actividades.
2. Pensamiento Tecnológico: Las puntuaciones oscilan entre 8 y 9, lo que sugiere que los estudiantes se han adaptado bien a la incorporación de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. Comparado con la Actividad 2, donde hubo más dificultades en este aspecto, se observa un progreso significativo.
3. Pensamiento Pedagógico: Las puntuaciones son consistentemente altas, con la mayoría de los estudiantes obteniendo 8 o 10. Esto indica que los estudiantes no solo están resolviendo problemas, sino que también están reflexionando sobre cómo enseñar y transmitir estos conceptos a otros.
4. Integración de los Tres Pensamientos: Las puntuaciones varían entre 8 y 10, lo que muestra que la mayoría de los estudiantes ha logrado integrar eficazmente el pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico. Aunque aún hay margen de mejora, es un avance considerable desde las primeras actividades.
5. Participación y Colaboración: Las puntuaciones son en su mayoría altas, con la excepción de un par de estudiantes que obtuvieron puntuaciones más bajas. Esto sugiere que, si bien la mayoría de los estudiantes colabora activamente, todavía hay algunos que podrían beneficiarse de un mayor fomento de la participación en grupo.

Comparación con Actividades Anteriores: En comparación con la Actividad 2, la primera introducción a la tecnología, se observa un progreso significativo en todas las áreas. Los estudiantes han demostrado una mayor adaptabilidad y competencia en la integración de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas matemáticos. En relación con la Actividad 4, la Actividad 6 muestra una mayor cohesión en la integración de los tres pensamientos, lo que indica que los estudiantes están logrando una verdadera interdisciplinariedad en su enfoque.

En resumen, la Actividad 6 refleja el progreso y desarrollo continuo de los estudiantes en la integración del pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico. Aunque todavía hay áreas de mejora, es evidente que las actividades han sido efectivas en fomentar estas habilidades interdisciplinarias.

Progreso en los diferentes pensamientos:

Luego de concluir las actividades tecnológicas, los avances en los pensamientos tecnológico y pedagógico se han manifestado de manera sobresaliente. La incorporación de herramientas tecnológicas modernas en la resolución de problemas matemáticos ha enriquecido el repertorio didáctico de los profesores en formación, ofreciéndoles nuevas vías para facilitar el aprendizaje. Este dominio tecnológico, alineado con prácticas pedagógicas actualizadas, ha permitido a los participantes cultivar un entorno de aprendizaje dinámico y adaptativo, donde la tecnología no es solo una herramienta, sino también un medio para fomentar el pensamiento crítico y la colaboración entre los estudiantes.

5.2.9. Resultados de actividad 7: Actividad Guiada: Planteamiento de Problemas de Estadística o Probabilidad

Esta actividad presentaba un reto para los estudiantes, era su primera vez planteando problemas. Por tanto, se hicieron registros en diario de campo para detallar en los análisis hallazgos de las observaciones, encontrándose lo siguiente:

Tabla 12. Dificultades de los Profesores de matemática en formación al Plantear Problemas.

Participante	Dificultades
Participante 1	Dificultad para contextualizar un problema real que involucre estadística.

Participante 2	Incertidumbre sobre qué herramientas tecnológicas usar para el análisis.
Participante 3	Problemas para recolectar datos ficticios coherentes con la situación planteada.
Participante 4	Falta de claridad en la formulación del problema, lo que llevó a ambigüedades.
Participante 5	Dificultad para integrar la tecnología en la solución del problema.
Participante 6	Inseguridad sobre la relevancia pedagógica del problema planteado.
Participante 7	Falta de experiencia previa en el planteamiento de problemas de estadística.
Participante 8	Dificultad para imaginar un escenario real que genere eventos aleatorios.
Participante 9	Desafío en la elección de la herramienta tecnológica adecuada para el análisis.
Participante 10	Incertidumbre sobre cómo evaluar la solución del problema planteado.

Fuente: elaboración propia.

Logros y Avances:

Contextualización: La mayoría de los participantes pudo identificar situaciones cotidianas que generan datos o eventos aleatorios. Esto muestra una comprensión profunda de cómo la estadística y la probabilidad están presentes en la vida diaria.

Recolección de Datos: A pesar de las dificultades iniciales, los docentes lograron imaginar o investigar datos coherentes con sus situaciones, lo que demuestra habilidades de investigación y análisis.

Formulación del Problema: Los docentes mostraron creatividad al formular preguntas que requerían análisis estadístico o probabilístico, lo que indica un entendimiento sólido de los conceptos matemáticos involucrados.

Integración Tecnológica: Aunque algunos docentes enfrentaron desafíos al integrar la tecnología, la mayoría pudo identificar y utilizar herramientas tecnológicas adecuadas para resolver sus problemas.

Reflexión: Los docentes pudieron reflexionar sobre su aprendizaje, la relevancia de la tecnología y los desafíos encontrados. Esta reflexión es esencial para el crecimiento profesional y la mejora continua.

Contribución a la Integración de los Pensamientos Pedagógico, Tecnológico y Matemático:

- Pensamiento Pedagógico: Al formular problemas basados en situaciones reales, los docentes demostraron una comprensión profunda de cómo presentar conceptos matemáticos de manera relevante y significativa para los estudiantes.
- Pensamiento Tecnológico: La actividad requería que los docentes pensaran en cómo la tecnología podría facilitar la solución de los problemas. Esto fomentó una integración más profunda de la tecnología en su práctica pedagógica.
- Pensamiento Matemático: La naturaleza misma de la actividad, que se centraba en la estadística y la probabilidad, requería que los docentes aplicaran y profundizaran su pensamiento matemático.

En resumen, la Actividad 7 desafió a los docentes a integrar de manera efectiva los pensamientos pedagógico, tecnológico y matemático. Aunque enfrentaron dificultades, los logros y avances observados indican un progreso significativo en su desarrollo profesional.

Por otra parte, analizando y estudiante detalladamente los problemas planteados por los profesores en formación, se nota una variedad en la formulación de los problemas, se mostrarán tres evidencias para luego describir las tendencias.

Enunciado

El equipo de seguridad vial de Barranquilla quiere realizar capacitaciones sobre la prevención de accidentes de tránsito para lo cual necesita resolver los siguientes interrogantes, ¿En qué mes se registran más accidentes en moto?, ¿Cuál es el porcentaje de los accidentes de motos, con respecto al porcentaje total de accidentes registrados en el mes de Diciembre? ¿Cuál es el porcentaje de carros accidentados, con respecto al porcentaje total de los accidentes que se registraron en el mes de Marzo?, ¿Cuántos accidentes se registran anualmente?

Para esto nos dan los siguientes datos:

Medio de transporte	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Moto	21	63	14	35	7	14	21	28	49	56	42	63
Carro	8	25	6	14	3	6	8	11	20	22	17	25
Bicicleta	1	2	0	1	0	0	1	1	1	2	1	2
Total	30	90	20	50	10	20	30	40	70	80	60	90

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA O PROBABILIDAD

Contextualización

- ✓ Número de accidentes de tránsito anual.

Recolección de datos

¿Qué tipo de datos se necesita?

- ✓ En que medio de transporte se dan.

¿Cómo los obtendrías en una situación real?

- ✓ Por medio de encuestas.

Formulación del problema

Formula una pregunta o problema que requiera un análisis estadístico o probabilístico para su solución.

- ✓ ¿En qué mes se registran más accidentes en moto?
- ✓ ¿Cuál es el porcentaje de los accidentes de motos, con respecto al porcentaje total de accidentes registrados en el mes de Diciembre?
- ✓ ¿Cuál es el porcentaje de carros accidentados, con respecto al porcentaje total de los accidentes que se registraron en el mes de Marzo?

Integración tecnológica

¿Qué herramientas o software serían útiles?

- ✓ Para realizar la encuesta utilizaríamos un formulario de Google y que pueda la encuesta realizarse por medio de un link.
- ✓ Luego de la recolección de datos, utilizaríamos Excel para analizar y graficar los resultados obtenidos de la encuesta.

Figura 26. Evidencias. Fuente: elaboración propia

En un torneo realizado por la delegación del atlántico ASEBA, se encuentran en momento decidir que equipos pasan a la semifinal y trata de ver que equipos tienen mayor probabilidad de pasar a la final y cual tiene mayor probabilidad de ganar el torneo y llevarse el premio de representar a la liga en los nacionales y un bono de $4.000.000, este torneo es todos contra todos y a la semifinal solo pasaron los 4 equipos con mayor número de partidos ganados.

En total hay 10 equipos y esta es la tabla de cómo va el torneo.

Equipos	**G**	**P**	**P.A**	**P.P**
Simon	4	6	465	657
Tiburones	9	1	1.200	436
Bravos	3	7	345	658
Pandas	5	5	643	645
Choles	8	2	956	548
Trotamundo	7	3	867	650
Panteras	10	0	1.458	416
Guerreros	6	4	689	527
Titanes	1	9	268	642
Divas	2	8	245	623

G	Partidos ganados
P	Partidos perdidos
P.A	Puntos anotados
P.P	Puntos permitidos

Partidos de semifinal
Panteras vs. Trotamundo
Tiburones vs. Choles

- Se quiere sacra el promedio de:
  a. Puntos anotados por partido de cada equipo
  b. Puntos permitidos de cada equipo
  c. Diferencial de puntos promedio de cada equipo

- Teniendo en cuenta los anterior:
  a. ¿Qué probabilidad hay de que la final sea entre Panteras vs. Tiburones?
  b. ¿Qué probabilidad hay de que gane la final Panteras?
  c. ¿Qué probabilidad hay que gane la final Tiburones?
  d. ¿Qué probabilidad hay de que la final sea Trotamundo vs. Tiburones?
  e. ¿Qué probabilidad hay de que gane la final Trotamundo?
  f. ¿Qué probabilidad hay de que la final sea Trotamundo vs. Choles?
  g. ¿Qué probabilidad hay de que la final la gane Choles?

Nombre: Lauren Carolina Chiquillo Arrieta

1. **Conceptualización**
   - La cara de un cubo Rubik 2x2.
2. **Recolección de datos**
   - Número de combinaciones posibles si el cubo tiene 6 colores
3. **Formulación del problema**
   - ¿Cuál es la probabilidad de que en un cubo de Rubik 2x2, una cara tenga un solo color?
4. **Integración tecnológica**
   - Usar software de inteligencia artificial para obtener el número de combinaciones posibles que puede haber en un cubo Rubik 2x2.
5. **Reflexión**

   ¿Qué aprendiste al formular este problema?
   - De este ejercicio aprendí que es posible llevar a cabo pasos para plantear de manera adecuada un problema matemático, a diferencia de empezar a formularlo sin tener las ideas claras de lo que se quiere preguntar. Por otra parte, me resultó interesante cómo las dos primeras instrucciones son fundamentales y de cierta manera facilitan la formulación del problema.

   ¿Cómo la tecnología facilita el análisis y solución de tu problema?
   - El uso de tecnología facilita el análisis de este ejercicio ya que con la inteligencia artificial se encuentra el número de combinaciones posibles, cálculo que ciertamente en difícil de realizar.

   ¿Qué desafíos encontraste al intentar integrar la tecnología en tu problema?
   - En esta ocasión, no me resultó complicado integrar la tecnología. Sin embargo, no estoy segura de que la estrategia sea eficiente para hallar la solución correcta.

Figura 27. Evidencias. Fuente: elaboración propia

Análisis basado en los aportes de Silver & Jinfa Cai:

Silver & Cai (1996) han enfatizado la importancia de promover el pensamiento matemático a través de problemas bien estructurados y desafiantes. Según ellos, el proceso de resolver problemas debe ser una experiencia significativa y debe promover la comprensión matemática, más que la simple aplicación de fórmulas o procedimientos.

1. Problema del cubo Rubik 2x2: Bien planteado. El problema es claro en su intención: encontrar la probabilidad de que en un cubo Rubik 2x2, una cara tenga un solo color.

-Fundamentación: La actividad propone recopilar datos sobre el número de combinaciones posibles si el cubo tiene 6 colores.

- Solubilidad: La pregunta puede resolverse matemáticamente y con el apoyo de la tecnología. Sin embargo, es esencial tener acceso a un software adecuado o tener conocimientos profundos de combinatoria.

- Integración tecnológica: Se sugiere el uso de software de inteligencia artificial, lo que indica un intento de integrar la tecnología en la solución. Sin embargo, podría ser más útil especificar qué tipo de software o herramienta específica se sugiere.

2. Problema de accidentes de tráfico: - Bien planteado: Se busca entender las tendencias y patrones de accidentes según el medio de transporte y el mes del año. - Fundamentación: Se propone recopilar datos mediante encuestas, lo que sugiere un enfoque empírico y realista. -Solubilidad: Con los datos adecuados, las preguntas planteadas son resolubles matemáticamente. -Integración tecnológica: Se menciona el uso de formularios de Google y Excel para recopilar y analizar datos, lo que muestra una integración efectiva de la tecnología en el proceso.

Tendencias observadas y desafíos: Aunque ambas actividades intentan integrar la tecnología en el proceso, parece haber una tendencia a no especificar completamente cómo se utilizará la tecnología o qué herramientas exactas se necesitarán. Es esencial para los estudiantes tener claridad sobre las herramientas tecnológicas a utilizar y cómo estas pueden facilitar la resolución de problemas.

Intencionalidad pedagógica y matemática: Ambas actividades promueven el pensamiento crítico y la aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales. La inclusión de tecnología en la solución de problemas es coherente con los enfoques pedagógicos contemporáneos, que enfatizan la importancia de preparar a los estudiantes para un mundo cada vez más digitalizado.

Reflexiones basadas en los aportes de Jinfa Cai: sostiene que resolver problemas no es simplemente aplicar fórmulas, sino un proceso que involucra la comprensión profunda, la exploración y la reflexión. Ambas actividades presentadas parecen estar alineadas con esta perspectiva.

- En el problema del cubo Rubik 2x2, los estudiantes están invitados a explorar el mundo de la combinatoria, lo que puede llevar a una comprensión más profunda de las probabilidades. Sin embargo, la vinculación con la tecnología podría haber sido más explícita, orientando a los estudiantes sobre cómo la tecnología puede ayudar en la solución.

- El problema de accidentes de tráfico promueve una reflexión sobre temas de relevancia social. Además, al proponer el uso de formularios de Google y Excel, proporciona a los estudiantes herramientas prácticas que pueden utilizar en situaciones reales.

Recomendaciones: 1. Ser más específico en la instrucción sobre cómo se espera que los estudiantes utilicen la tecnología en el proceso de resolución de problemas. Esto puede ayudar a reducir la ambigüedad y permitir una mejor integración de la tecnología. 2. Promover la reflexión después de la actividad, permitiendo a los estudiantes discutir los desafíos enfrentados y las estrategias utilizadas. Esto puede fomentar un aprendizaje más profundo y permitir a los estudiantes aplicar lo aprendido en futuros problemas.

5.2.10. Resultados de actividad 8: Actividad Final: Planteamiento de Problemas Matemáticos

Evolución de los Participantes:

A lo largo de las actividades se ha observado una evolución significativa en las habilidades y competencias de los participantes. En esta última actividad, los participantes demostraron una mayor confianza y destreza en la formulación de problemas matemáticos, evidenciando el aprendizaje acumulado a lo largo del proceso.

- **Participante 1:** Comenzó con dificultades en la contextualización de problemas, pero en esta actividad, logró plantear problemas complejos y relevantes, haciendo uso efectivo de herramientas tecnológicas como Excel para el análisis estadístico.
- **Participante 2:** Siempre mostró un fuerte entendimiento pedagógico. En esta actividad, destacó al integrar conceptos geométricos en situaciones cotidianas, utilizando Geogebra para visualizar y resolver problemas.
- **Participante 3:** Su evolución ha sido notable en la integración de la tecnología. En esta actividad, planteó problemas que requerían el uso de software de inteligencia artificial para interpretar datos y patrones.
- **Participante 4:** A pesar de las dificultades iniciales en la formulación clara de problemas, en esta actividad demostró una mejora significativa, planteando problemas bien estructurados y relevantes para estudiantes de secundaria.
- **Participante 5:** Siempre mostró habilidades en el planteamiento de problemas de estadística. En esta actividad, logró integrar conceptos avanzados de probabilidad con situaciones reales, utilizando herramientas de análisis de datos.

- **Participante 6:** Su fortaleza ha sido la reflexión pedagógica. En esta actividad, además de plantear problemas interesantes, ofreció *insights* valiosos sobre cómo la tecnología puede mejorar la comprensión y motivación de los estudiantes.
- **Participante 7:** Destacó en la formulación de problemas geométricos, haciendo uso de herramientas como Desmos para visualizar y resolver problemas relacionados con la geometría del espacio.
- **Participante 8:** A lo largo de las actividades, ha mostrado una integración coherente de los pensamientos pedagógico, tecnológico y matemático. En esta actividad, planteó problemas que desafían a los estudiantes a pensar críticamente.
- **Participante 9:** En esta actividad, mostró una notable habilidad para plantear problemas que integran conceptos de estadística y geometría, utilizando herramientas tecnológicas de manera efectiva.
- **Participante 10:** A pesar de algunas inseguridades iniciales, en esta actividad demostró un gran avance, planteando problemas relevantes y haciendo uso efectivo de la tecnología para enriquecerlos.

Según Jinfa Cai (2003), el planteamiento de problemas es una habilidad esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es una actividad que no solo evalúa la comprensión de los estudiantes sobre conceptos matemáticos, sino que también fomenta el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de aplicar el conocimiento en situaciones nuevas. En esta actividad, los participantes demostraron estas habilidades al formular problemas que desafían a los estudiantes a pensar más allá de la memorización y a utilizar herramientas tecnológicas para mejorar su comprensión.

La Actividad Final representa la culminación de un proceso de aprendizaje y desarrollo profesional. Los participantes no sólo mejoraron sus habilidades en el planteamiento de problemas matemáticos, sino que también demostraron una integración efectiva de la tecnología en su práctica pedagógica. Esta actividad evidencia la importancia de la formación continua y la reflexión en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 13. Logros de los Participantes en la Actividad Final

Participante	**Logros en Pensamiento Pedagógico**	**Logros en Pensamiento Tecnológico**	**Logros en Pensamiento Matemático**	**Integración de los Tres Pensamientos**
Participante 1	Demostró habilidades en contextualizar problemas relevantes para estudiantes de secundaria.	Hizo uso efectivo de Excel para el análisis estadístico.	Planteó problemas complejos que involucran conceptos avanzados.	Integró de manera coherente la tecnología y la matemática en un contexto pedagógico.
Participante 2	Reflexionó sobre la relevancia de los problemas en contextos cotidianos.	Utilizó Geogebra para visualizar conceptos geométricos.	Destacó en la formulación de problemas geométricos.	Logró una sinergia entre la tecnología, la matemática y la pedagogía.
Participante 3	Fomentó el pensamiento crítico en los problemas planteados.	Integró software de inteligencia artificial para interpretar datos.	Planteó problemas desafiantes en el área de estadística.	Demostró una integración avanzada de los tres pensamientos.
Participante 4	Estructuró problemas claros y bien definidos.	Reflexionó sobre el uso de herramientas tecnológicas en la solución de problemas.	Mejoró en la formulación de problemas matemáticos.	Integró efectivamente la tecnología en problemas matemáticos

				pedagógicamente relevantes.
Participante 5	Motivó a los estudiantes a través de problemas significativos.	Utilizó herramientas de análisis de datos para enriquecer problemas.	Destacó en el planteamiento de problemas de probabilidad.	Logró una integración efectiva de la matemática, la tecnología y la pedagogía.
Participante 6	Reflexionó sobre la importancia de la motivación en el aprendizaje matemático.	Consideró herramientas tecnológicas para mejorar la comprensión de los estudiantes.	Planteó problemas que involucran conceptos geométricos avanzados.	Integró de manera coherente los tres pensamientos en la formulación de problemas.
Participante 7	Fomentó el pensamiento analítico en los estudiantes.	Utilizó Desmos para visualizar y resolver problemas geométricos.	Destacó en la formulación de problemas relacionados con la geometría del espacio.	Logró una sinergia entre la tecnología, la matemática y la pedagogía.
Participante 8	Reflexionó sobre el impacto de la tecnología en el aprendizaje matemático.	Consideró herramientas tecnológicas avanzadas en la formulación de problemas.	Planteó problemas desafiantes en el área de estadística.	Integró de manera efectiva los tres pensamientos en la construcción de problemas.
Participante 9	Estructuró problemas relevantes y desafiantes para estudiantes de secundaria.	Reflexionó sobre el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la matemática.	Planteó problemas que involucran conceptos matemáticos avanzados.	Demostró una integración coherente de la pedagogía, la tecnología y la matemática.

Participante 10	Motivó a los estudiantes a través de problemas contextualizados.	Consideró herramientas tecnológicas para enriquecer problemas.	Mejoró en la formulación de problemas matemáticos.	Logró una sinergia efectiva entre los tres pensamientos en la formulación de problemas.

Fuente: elaboración propia.

Esta tabla refleja los logros individuales de cada participante en la actividad final, destacando su evolución y habilidades en la integración de los pensamientos pedagógico, tecnológico y matemático. Es evidente que cada participante ha logrado avances significativos en la formulación de problemas matemáticos, haciendo uso efectivo de la tecnología y considerando aspectos pedagógicos relevantes.

Reflexión sobre la Superación de Dificultades en la Actividad de Planteamiento de Problemas:

Durante la actividad, se identificaron y abordaron varias dificultades:

- **Pensamiento Pedagógico:** Aunque al inicio hubo retos en contextualizar problemas adecuadamente, con la práctica y el feedback, los participantes lograron alinear sus problemas con situaciones reales y pertinentes para los estudiantes.
- **Pensamiento Tecnológico:** A pesar de algunas resistencias iniciales hacia ciertas herramientas, la familiarización y el uso repetido permitieron una integración más fluida de la tecnología en el planteamiento de problemas.
- **Pensamiento Matemático:** La formulación de problemas que involucran conceptos matemáticos avanzados mejoró significativamente gracias a ejercicios prácticos y discusiones grupales.

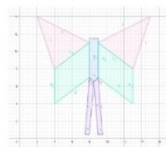
La constante retroalimentación y el enfoque en la aplicación práctica fueron esenciales para superar estas dificultades. Al final de la actividad, los participantes demostraron una notable mejora en su capacidad para plantear problemas matemáticos relevantes y desafiantes.

Analizando los problemas planteados por los profesores en formación, se encuentra problemas mucho más robustos, conectados con un contexto, en el que se evidencia la relación y el fortalecimiento de los pensamientos pedagógicos, tecnológicos y matemáticos.

Problema 1. Estadística
Carolina juega con sus amigas al dado y las pelotas. El dado tiene las caras enumeradas de 1 al 6 y los números tienen un color asignado (1, 2: rojo, 3, 4: azul y 5, 6: verde); además, Carolina tiene en una bolsa 1 pelota roja, 3 azules y 5 verdes. El ganador es quien tire el dado y saque una pelota según los colores asignados. Supón que eres una de las amigas de Carolina. Si tiras el dado una vez y sacas una pelota, ¿cuándo tienes más posibilidades de ganar?, ¿podría ganar en ese primer intento? Utiliza alguna herramienta tecnológica para simular que tiras el dado y devuelves la pelota en cada intento hasta que ganes ¿con cuál de las combinaciones ganaste? Compara tus resultados con tus compañeros, ¿alguno de ellos ganó con la combinación 1-rojo, 2-rojo?

Problema 2. Geometría
Dariela está construyendo una cometa con forma de mariposa. Para su diseño utiliza las siguientes coordenadas:

- Alas superiores
  A: (2, 14), (4, 8), (8, 11)
  B: (15, 14), (13, 8), (9, 11)
- Alas inferiores
  C: (4, 4), (4, 8), (8, 7), (8,11)
  D: (13, 4), (13, 8), (9, 7), (9, 11)
- Tronco
  E: (8, 11.5), (9, 11.5), (8.5, 6.5), (8, 7), (9,7)
- Colas
  F: (8, 0.5), (7.5, 0.5), (8, 7), (8.5, 6.5)
  G: (9, 0.5), (9.5, 0.5), (9, 7), (8.5, 6.5)



Si Dariela quiere que la cometa real sea tres veces más grande que la del diseño, ¿cuáles serán las dimensiones de la cometa real? Cada parte de la mariposa llevará un color diferente: rosado, verde, azul y violeta; si las medidas de un pliego de papel son 70cm ×50cm, ¿qué cantidad de papel de cada color necesita Dariela para su cometa?

Reflexión. En esta segunda actividad, fue más complicado el planteamiento del problema de estadística ya que encontré dificultades para la incluir la tecnología como ayuda para su solución e incluso, el problema no tendría una única solución debido a que, si se simula el evento, cada sujeto puede obtener datos distintos y ganar con una combinación diferente. Por otro lado, para el problema de geometría utilicé un ejercicio de un libro como guía y noté que, partiendo del ejercicio matemático, para luego incluir el contexto, puede ser más sencillo llegar a un planteamiento claro del problema. Además, en este caso, la ayuda del docente facilitó el proceso, por lo que para una próxima actividad optaría por realizar el planteamiento con un equipo.

Para realizar estas actividades podrás usar herramientas de apoyo como son GeoGebra, Symbolab y Photomath, que te servirán de apoyo para calcular los datos y realizar gráficas.

CONTEO

Tienes un conjunto de datos que representa las edades de un grupo de personas:

Edades: 18, 22, 25, 30, 18, 22, 35, 28, 22, 20, 18, 25, 30, 35, 25, 18

Tu trabajo consiste en realizar un análisis estadístico y una tabla de este conjunto de datos. Puedes llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Calcular la frecuencia de cada edad en el conjunto de datos, es decir, cuántas veces aparece cada edad.
2. Determinar la moda, que corresponde al valor o valores que más se repiten en el conjunto.
3. Calcular la media, que es el promedio de las edades.
4. Encontrar la mediana, que es el valor que se encuentra en el medio cuando los datos se ordenan de menor a mayor.
5. Calcular la varianza, que mide la dispersión de los datos.
6. Determinar la desviación estándar, que es la raíz cuadrada de la varianza y también mide la dispersión, pero en la misma unidad que los datos.

PROBLEMA DE TALES

Imagina que tienes un triángulo rectángulo, uno de los lados del triángulo tiene una longitud de 3 unidades y el otro lado tiene una longitud de 4 unidades. Tu objetivo es calcular la longitud del tercer lado, que es el lado opuesto al ángulo recto.

¿Cuál es la longitud del tercer lado de este triángulo rectángulo?

Figura 28. Evidencias. Fuente: elaboración propia

Análisis de las Actividades desde la Perspectiva de Jinfa Cai

Reflexión: El estudiante evidencia una clara conexión entre las herramientas tecnológicas y el proceso de aprendizaje. Es notable que ha integrado distintas plataformas para enriquecer su comprensión. Sin embargo, sería ideal profundizar en cómo específicamente cada herramienta ayudó en su proceso y qué desafíos se presentaron al utilizarlas.

Actividad - CONTEO: La actividad demanda una comprensión básica de estadísticas y cómo interpretar un conjunto de datos. Esto permite que el estudiante aplique conceptos matemáticos prácticos y desarrolle habilidades analíticas. La actividad también fomenta el uso de herramientas tecnológicas, lo que muestra una integración de la tecnología en el aprendizaje matemático.

Problema de Tales: Este problema presenta una aplicación directa del teorema de Pitágoras, fundamental en la geometría. Aquí, el estudiante necesita conectar conceptos teóricos con una aplicación práctica, lo que refleja una profundización en el pensamiento matemático.

Tendencia: Las actividades presentan una tendencia hacia la integración de la tecnología con el pensamiento matemático y pedagógico. La combinación de problemas teóricos con aplicaciones prácticas y la inclusión de herramientas digitales refleja una evolución en la pedagogía matemática.

Con base en lo anterior y los aportes de Jinfa Cai, es evidente que las actividades buscan no solo enseñar conceptos matemáticos sino también fomentar un pensamiento crítico y analítico en los estudiantes. Es crucial que se siga este enfoque integrador, donde la tecnología y la pedagogía van de la mano para proporcionar una educación matemática holística y aplicada al mundo real.

Con base a las estrategias usadas por los profesores de matemática en formación en la resolución y planteamiento de problemas, se construye un gráfico que recoge varias de las estrategias, heurísticas y formas como los participantes conciben la resolución de un problema matemático.

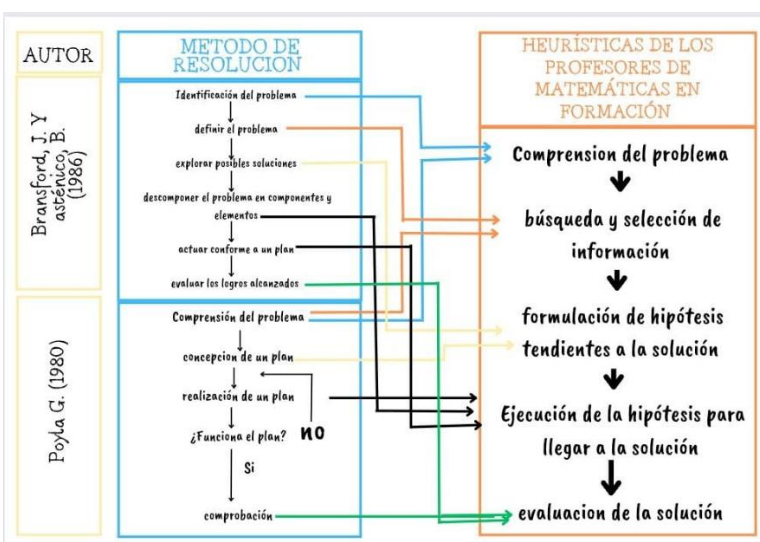


Figura 29. Estrategias de los participantes. Fuente: elaboración propia

Luego de las 8 actividades, ha culminado en un progreso significativo en el pensamiento pedagógico, en el pensamiento tecnológico y en el pensamiento matemático. Los profesores en formación han evidenciado una notable habilidad para diseñar problemas matemáticos que no solo retan a los estudiantes, sino que también los enganchan activamente en el aprendizaje. Este avance pedagógico refleja un profundo entendimiento de cómo los estudiantes interactúan con la materia, lo que permite a los futuros educadores crear experiencias de aprendizaje personalizadas y efectivas. A su vez, el pensamiento matemático y tecnológico también se ha visto reforzado, ya que los participantes han integrado estos aspectos de manera efectiva en el planteamiento de problemas, preparándose para guiar a sus estudiantes a través de los retos matemáticos del futuro.

5.3. Validación del modelo didáctico y de las estrategias

En este epígrafe se evalúa el modelo didáctico propuesto en el fortalecimiento del pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico de los profesores en formación. Se detalla cómo los futuros educadores abordan la resolución y planteamiento de problemas matemáticos, alineándose con las metodologías sugeridas por el modelo. Este análisis se rige por los indicadores de progreso en el aprendizaje, reflejando así las competencias esenciales definidas para la formación docente. Además, se argumentará la eficacia del modelo didáctico basándonos en una variedad de evidencias, siguiendo el esquema metodológico de validación de Kane (2013).

1. Revisión Bibliográfica:

El modelo didáctico que se presenta busca preparar a los docentes para un entorno educativo en constante transformación, donde la matemática y la tecnología se fusionan de manera armónica. Este modelo se inspira en la intersección de tres pilares fundamentales: el pensamiento matemático, el pensamiento tecnológico y el pensamiento pedagógico.

La Armonía de los Pensamientos:

Matemático-Tecnológico: Los docentes, al enfrentarse a problemas complejos y al utilizar herramientas como Geogebra o Excel, no sólo aplican conceptos matemáticos, sino que también se sumergen en el mundo tecnológico. Esta simbiosis potencia una comprensión más profunda de la matemática.

Matemático-Pedagógico: Al diseñar y plantear problemas, los docentes reflexionan sobre la mejor manera de transmitir conceptos matemáticos, adaptándose a las necesidades de sus estudiantes.

Tecnológico-Pedagógico: La tecnología se convierte en un aliado pedagógico, permitiendo a los docentes diseñar experiencias de aprendizaje más interactivas y modernas.

Problemas como Herramientas de Aprendizaje: La resolución y el planteamiento de problemas son el corazón de este modelo. Siguiendo a autores como Polya, Schoenfeld y Cai, se reconoce que enfrentar y diseñar problemas retadores no solo fortalece la comprensión matemática, sino que también afina las habilidades pedagógicas y tecnológicas de los docentes.

Empoderamiento Docente: Al integrar la resolución y el planteamiento de problemas en su práctica, los docentes se vuelven más versátiles, reflexivos y eficientes. Están mejor preparados para adaptarse a las cambiantes necesidades de sus estudiantes y para incorporar innovaciones tecnológicas y metodológicas.

Sólidos Cimientos Teóricos: Este modelo se erige sobre una rica tradición de investigación en educación matemática y tecno pedagogía. Se nutre de las ideas de luminarias como Piaget, Bartolini, Swan, entre otros, garantizando su relevancia y solidez.

En esencia, este modelo didáctico es una brújula que guía a los docentes en su travesía por un mundo educativo en constante evolución. Proporciona las herramientas y la mentalidad necesarias para liderar en el aula y más allá, preparando a los docentes para un futuro donde la matemática, la tecnología y la pedagogía se entrelazan de manera inseparable.

Comparación del modelo didáctico para la formación de profesores en tecnología mediante la resolución y planteo de problemas y el modelo TPACK:

Aspecto	**Modelo TPACK**	**Modelo didáctico para la formación de profesores en tecnología mediante la resolución y planteo de problemas**
Enfoque	Se centra en la intersección de los conocimientos tecnológico, pedagógico y de contenido.	Va más allá de la simple intersección de conocimientos, enfocándose en la operatividad y aplicación práctica de los pensamientos tecnológico, pedagógico y matemático.
Aplicabilidad en Educación Matemática	Es un modelo general que no se centra específicamente en la educación matemática.	Diseñado específicamente para la educación matemática, considerando las particularidades y desafíos de esta disciplina.
Operatividad	Aunque proporciona un marco teórico, carece de un enfoque operativo específico para la enseñanza.	Integra de manera operativa los pensamientos mediante el planteamiento y resolución de problemas, proporcionando herramientas prácticas para los docentes.
Profundidad	Es un modelo más superficial que se centra en los conocimientos.	Profundiza en la interrelación de los pensamientos, considerando aspectos como el diagnóstico, reconocimiento, diseño pedagógico y la integración operativa.
Adaptabilidad	Generalmente requiere adaptaciones para ser aplicado en contextos específicos como la educación matemática.	Desde su concepción, está diseñado para adaptarse a las necesidades y ritmos de aprendizaje de cada docente en el ámbito matemático.
Resolución de Problemas	No tiene un enfoque central en la resolución de problemas.	La resolución y el planteamiento de problemas son ejes centrales, fortaleciendo la comprensión matemática y las habilidades pedagógicas y tecnológicas.

Empoderamiento Docente	No tiene un enfoque específico en el empoderamiento docente.	Potencia el quehacer docente, preparándolos para responder a las necesidades cambiantes de sus estudiantes e incorporar innovaciones.
Fundamentación Teórica	Basado en la intersección de tres conocimientos principales.	Se fundamenta en una rica tradición de investigación en educación matemática y tecno pedagogía, inspirándose en autores renombrados y en el propio TPACK, pero llevándolo a un nivel más avanzado y específico.
Integración Tecnológica	Proporciona una visión general de la integración tecnológica.	Ofrece una integración más profunda y específica de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, considerando herramientas como Geogebra o Excel.

En resumen, mientras que el Modelo TPACK proporciona un marco teórico general sobre la intersección de conocimientos, mientras este modelo didáctico ofrece un enfoque más profundo, específico y operativo para la educación matemática. El modelo no solo considera la integración de pensamientos, sino que también proporciona herramientas prácticas y estrategias específicas para empoderar a los docentes en su labor educativa.

2. Validación por Expertos:

Método Delphi para criterios de expertos: Dos Doctores en Educación Matemática de la Universidad UAgro de México, Dr. Jonathan Cervantes y Dr. Camilo Rodríguez, facilitaron la rejilla de evaluación con sus respectivas valoraciones de las fases del modelo didáctico para la formación de docentes en matemáticas con enfoque tecnológico, luego de la lectura del documento. Se consideraron los referentes teóricos, caracterización, momento de resolución, concreción en la práctica. Se muestran los datos procesados para la obtención de los puntos de corte según la escala de valoración, la cual presenta las siguientes categorías: muy adecuado (MA), bastante adecuado (BA), adecuado (A), poco adecuado (PA) e inadecuado (NA). Los puntos de cortes y la ubicación de cada categoría evaluada generaron el siguiente consenso.

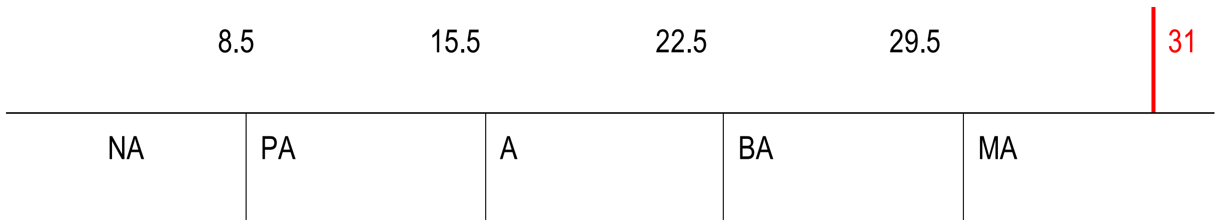


Figura 30. Recta valorativa de la validación del modelo. Fuente: elaboración propia

NA: no adecuado; PA: poco adecuado; A: adecuado; BA: bastante adecuado; MA: muy adecuado.

De acuerdo con el análisis estadístico del método Delphi, el modelo didáctico para la formación de docentes en matemáticas con enfoque tecnológico, en cuanto a sus referentes teóricos, caracterización y concreción en la práctica se ubican en el punto de corte 0.61, lo que significa que el consenso de los expertos corresponde a que cada categoría valorada es bastante adecuada; por otro lado, el momento de resolución del modelo es valorado como muy adecuado.

Sugerencias al sistema de actividades: Los expertos de la UAgro envían los siguientes comentarios: “La integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Excel debe ser cuidadosamente seleccionada para que sea relevante y motivadora para los docentes”, “Es esencial considerar el contexto y las necesidades específicas de los docentes al implementar el modelo”, “Ajustar los objetivos en relación con lo que se espera que el docente desarrolle y no solo en lo que el modelo propone”.

De la misma manera, las ideas de la tesis fueron valoradas de forma positiva por la Red Latinoamericana de Educación Matemática (RELME) por expertos de Chile y España, acorde a la rejilla de evaluación, los cuales expresaron: “El texto aborda un tema relevante y presenta un enfoque innovador para la formación de docentes en matemáticas”, “El referente teórico es sólido y coherente con las propuestas del modelo”, “Las ideas del trabajo propuesto es una contribución valiosa para la formación docente en matemáticas, integrando de manera efectiva la tecnología y la pedagogía”.

3. Prueba Piloto:

Las actividades propuestas en el modelo se dividieron en tres categorías principales: resolución de problemas sin tecnología, resolución de problemas con tecnología y planteamiento de problemas. Se llevaron a cabo un total de 8 actividades, siendo 3 de resolución de problemas sin tecnología, 3 de resolución de problemas con tecnología y 2 de planteamiento de problemas.

Reflexiones sobre las Actividades: Resolución de Problemas sin Tecnología: Los estudiantes mostraron un alto grado de compromiso y participación activa. Las discusiones en clase revelaron una comprensión profunda de los conceptos matemáticos subyacentes. Los docentes observaron que los estudiantes eran capaces de articular sus pensamientos y estrategias de manera clara y coherente.

Resolución de Problemas con Tecnología: La integración de herramientas tecnológicas, como Geogebra y Excel, enriqueció la experiencia de aprendizaje. Los estudiantes no solo resolvieron problemas, sino que también exploraron y visualizaron conceptos matemáticos de manera dinámica. Esta categoría de actividades también fomentó la colaboración entre los estudiantes, ya que a menudo trabajaban en grupos para resolver problemas y compartir soluciones.

Planteamiento de Problemas: Estas actividades permitieron a los estudiantes asumir el papel de creadores de problemas, lo que les dio una perspectiva única sobre la naturaleza de los problemas matemáticos. Los docentes notaron que los estudiantes que planteaban problemas a menudo demostraban una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos en cuestión.

Las entrevistas con los estudiantes revelaron que se sintieron altamente motivados y desafiados por las actividades. Un estudiante comentó: "Las actividades son fascinantes. Nos presentan desafíos que nos hacen pensar de manera diferente sobre las matemáticas. Es una forma de aprender matemáticas que nunca había experimentado antes."

Se grabaron y analizaron sesiones de clase para observar la dinámica en el aula durante la implementación del modelo. Estos vídeos mostraron la interacción activa entre estudiantes y docentes, la colaboración entre estudiantes y la forma en que las herramientas tecnológicas se integraron en el proceso de aprendizaje. Los vídeos también proporcionaron *insights* sobre áreas de mejora, tanto en la entrega de las actividades como en la estructura de éstas.

La validación cualitativa de la prueba piloto demostró que el modelo propuesto es efectivo en la promoción de un aprendizaje matemático profundo y significativo. La combinación de resolución y planteamiento de problemas, junto con la integración de tecnología, ofrece una experiencia de aprendizaje enriquecedora para los estudiantes. Además, el *feedback* positivo de los estudiantes y las observaciones de los docentes respaldan la eficacia y relevancia del modelo en el contexto educativo actual.

4. Recopilación de Retroalimentación *(Feedback)*:

Para una validación objetiva, se realizó una encuesta de satisfacción a los estudiantes. A continuación, se presentan los resultados más importantes.

Análisis de la Encuesta de Satisfacción

La encuesta consta de 10 preguntas, las primeras 9 son tipo Likert y la última pregunta es de contestar SI o NO y justificar. La escala Likert es la siguiente:

5	**4**	**3**	**2**	**1**
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

Tabla de Resultados de la Encuesta de Satisfacción

Pregunta	Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo
1. Las actividades propuestas en el modelo didáctico promovieron una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.	8	2	0	0	0
2. El uso de tecnología en la resolución de problemas enriqueció la experiencia de aprendizaje.	9	1	0	0	0
3. El planteamiento de problemas permitió a los estudiantes asumir un rol activo en el proceso de aprendizaje.	8	2	0	0	0
4. Las actividades didácticas fomentaron la colaboración y el trabajo en equipo entre los estudiantes.	7	3	0	0	0
5. El modelo didáctico propuesto estimuló el	8	2	0	0	0

pensamiento crítico y analítico.					
6. Las estrategias de enseñanza utilizadas fueron adecuadas y efectivas.	9	1	0	0	0
7. El *feedback* recibido durante las actividades ayudó a mejorar y comprender los errores.	8	2	0	0	0
8. Las actividades propuestas fueron desafiantes y motivadoras.	8	2	0	0	0
9. El ambiente de aprendizaje fue propicio y enriquecedor para el desarrollo de habilidades matemáticas.	8	2	0	0	0

A partir de la tabla de resultados, se pueden identificar varios hallazgos significativos que reflejan la percepción positiva de los participantes hacia el modelo didáctico propuesto:

1. **Recepción Positiva Generalizada**: Todos los participantes mostraron una inclinación hacia las opciones "Totalmente de Acuerdo" y "De Acuerdo" en todas las preguntas. Esto indica una aceptación generalizada del modelo y las estrategias implementadas.

2. **Valoración de la Tecnología**: La pregunta 2, que se refiere al uso de tecnología en la resolución de problemas, tuvo una de las respuestas más altas en "Totalmente de Acuerdo". Esto sugiere

que la integración de herramientas tecnológicas fue una decisión acertada y enriquecedora para el proceso de aprendizaje.

3. **Protagonismo del Estudiante**: La percepción de que el planteamiento de problemas permitió a los estudiantes asumir un rol activo (pregunta 3) destaca la importancia de estrategias centradas en el estudiante, donde ellos se convierten en protagonistas de su propio aprendizaje.
4. **Relevancia del *Feedback***: La pregunta 7, relacionada con el *feedback* recibido, también tuvo una respuesta positiva predominante. Esto subraya la importancia de proporcionar retroalimentación constructiva y oportuna a los estudiantes, permitiéndoles comprender y mejorar sus errores, lo cual es esencial para el enriquecimiento del modelo.
5. **Desafío y Motivación**: La pregunta 8 revela que las actividades propuestas fueron vistas como desafiantes y motivadoras. Esto es crucial, ya que actividades que desafían a los estudiantes pueden llevar a un aprendizaje más profundo y significativo.
6. **Ambiente de Aprendizaje**: La percepción positiva sobre el ambiente de aprendizaje (pregunta 9) indica que no solo las actividades en sí, sino también el entorno en el que se llevaron a cabo, fueron propicios para el desarrollo de habilidades matemáticas.

En conclusión, los resultados de la encuesta reflejan una percepción altamente positiva del modelo didáctico propuesto. La retroalimentación de los participantes, especialmente en áreas como la integración de tecnología, el rol activo del estudiante y la importancia del *feedback*, proporciona valiosos *insights* que pueden ser utilizados para enriquecer y mejorar aún más el modelo en futuras implementaciones.

10. **¿Considera que las actividades propuestas en el modelo didáctico ayudaron a mejorar su capacidad de resolución y planteamiento de problemas matemáticos?**

Respuesta	Número de Participantes
Sí	10
No	0

Justificaciones: "Las actividades me desafiaron a pensar de manera diferente y a abordar problemas desde múltiples perspectivas." "Aprecié la combinación de resolución de problemas con y sin tecnología, ya que ofreció una experiencia de aprendizaje equilibrada".

Conclusiones: Los participantes valoraron positivamente las actividades propuestas en el modelo didáctico, destacando su capacidad para promover una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. El uso de tecnología fue visto como un enriquecimiento de la experiencia de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes explorar y visualizar conceptos matemáticos de manera dinámica.

El planteamiento de problemas fue una estrategia efectiva para involucrar activamente a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, permitiéndoles asumir un rol activo y crítico.

CONCLUSIONES

La presente investigación se centró en la construcción y validación de un modelo didáctico destinado a fortalecer los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico en profesores de matemática en formación. Este esfuerzo se alinea con la visión de teóricos como Vygotsky y Piaget, quienes enfatizan la importancia de un aprendizaje activo y constructivista.

1.Caracterización de Competencias TIC: Siguiendo a autores como Prensky y Buckingham, se reconoce que los docentes de matemática en formación, al ser nativos digitales, poseen competencias TIC innatas. Sin embargo, el modelo didáctico propuesto va más allá de esta premisa, buscando potenciar y dirigir estas competencias hacia una práctica pedagógica efectiva. La integración de la tecnología en la formación docente no sólo enriquece el proceso educativo, sino que también prepara a los futuros docentes para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

2.Habilidades de Razonamiento: La resolución de problemas retadores, apoyada en las TIC, se convierte en una herramienta poderosa para fomentar el razonamiento lógico y crítico. En línea con las teorías de Polya sobre resolución de problemas, el modelo didáctico propuesto busca que los profesores en formación no sólo resuelvan problemas, sino que también los creen, promoviendo así un pensamiento matemático más profundo y reflexivo.

3.Pensamiento Pedagógico: Inspirado en las ideas constructivistas de Vygotsky y Piaget, el modelo didáctico pone al estudiante en el centro del proceso educativo. Se reconoce al aprendiz como un constructor activo de su propio conocimiento, interactuando con su entorno y utilizando las herramientas tecnológicas a su disposición para potenciar su aprendizaje.

4.Diseño del Modelo Didáctico vs. TPACK: El modelo TPACK (Tecnológico, Pedagógico y de Contenido) ha sido ampliamente reconocido en la literatura educativa como un marco que busca integrar de manera efectiva la tecnología en la enseñanza. Sin embargo, el modelo didáctico propuesto en esta investigación va más allá de esta integración tridimensional.

El modelo TPACK ha sido ampliamente reconocido por su enfoque en la intersección de los conocimientos tecnológico, pedagógico y de contenido, visualizando cada uno como un dominio que se superpone con los otros. Sin embargo, el modelo didáctico propuesto en esta investigación presenta una visión alternativa, adoptando un enfoque más integrador y holístico. En lugar de tratar la tecnología, pedagogía y contenido como dominios que se superponen, este modelo ve estos tres elementos como intrínsecamente entrelazados, formando un todo cohesivo. Esta perspectiva surge de la comprensión de que, en nuestro contexto digital actual, la tecnología ha dejado de ser un complemento y se ha convertido en una parte fundamental del proceso educativo.

El modelo didáctico también destaca por su énfasis en la resolución y planteamiento de problemas retadores que incorporan las TIC. Inspirado en teorías pedagógicas contemporáneas, este enfoque busca cultivar un pensamiento matemático profundo y crítico. A través de esta metodología, los profesores en formación no sólo fortalecen su conocimiento matemático, sino que también refinan habilidades tecnológicas y pedagógicas esenciales. Esta integración de pensamientos ofrece una perspectiva complementaria al TPACK, buscando proporcionar una formación más holística.

Finalmente, es esencial mencionar que el modelo didáctico propuesto se caracteriza por su flexibilidad y adaptabilidad. Reconoce la diversidad de contextos y necesidades educativas, y, a diferencia de otros marcos que pueden ser interpretados como más prescriptivos, este modelo se presenta como una herramienta dinámica, diseñada para adaptarse a diferentes entornos y poblaciones estudiantiles.

5.Validación del Modelo: La validación del modelo didáctico, respaldada por teorías pedagógicas contemporáneas, reafirma su relevancia y eficacia en el panorama educativo actual. La estructura del modelo, que integra de manera armónica los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico, garantiza una formación docente que está a la altura de los desafíos actuales.

6. Avances y progreso de los profesores de matemática en formación:

Este avance fue particularmente notable en cómo los futuros docentes abordaron y superaron desafíos pedagógicos utilizando la tecnología como aliada. Cada actividad presentó sus propias dificultades, y fue inspirador observar cómo, con el respaldo del modelo y las herramientas tecnológicas proporcionadas, lograron superar cada reto con innovación y determinación.

Al concluir las actividades, los docentes en formación no solo demostraron un dominio más profundo de las matemáticas y de las herramientas tecnológicas, sino también una evolución en su enfoque pedagógico. Este progreso subraya la eficacia del modelo propuesto, destacando la importancia de una formación docente que integre de manera efectiva la matemática, la pedagogía y la tecnología.

En sintonía con las ideas de Dewey sobre la educación como un proceso en constante evolución, se reconoce la necesidad de mantener el modelo didáctico actualizado y en sintonía con las necesidades cambiantes de la sociedad. Es esencial mantener un diálogo constante con educadores, estudiantes y otros *stakeholders* para asegurar que el modelo siga siendo relevante y efectivo en el futuro.

Como en toda investigación, este estudio enfrentó ciertas limitaciones. Una de las principales fue la variabilidad en la familiaridad y competencia tecnológica entre los profesores de matemática en formación, lo que en ocasiones dificultó la implementación uniforme del modelo didáctico. Además, el tiempo limitado para la ejecución de las actividades y la adaptabilidad del modelo a diferentes contextos educativos presentaron desafíos adicionales. Sin embargo, estas limitaciones se abordaron proactivamente: se ofrecieron sesiones de capacitación adicionales para nivelar habilidades tecnológicas y se adaptaron las actividades para maximizar el aprendizaje en el tiempo disponible. La flexibilidad inherente del modelo didáctico permitió ajustes y adaptaciones según las necesidades emergentes, demostrando su robustez y aplicabilidad en diversos escenarios.

La tesis doctoral no sólo ha presentado un modelo didáctico innovador, sino que también ha contribuido significativamente al cuerpo de conocimiento en el campo educativo. Al abordar las complejidades de integrar el pensamiento matemático, tecnológico y pedagógico, este trabajo ha llenado un vacío en la literatura existente, ofreciendo una perspectiva fresca y actualizada sobre la enseñanza de las matemáticas en la era digital.

Más allá de su relevancia teórica, la tesis tiene implicaciones prácticas significativas. Los educadores, instituciones y responsables de políticas educativas pueden utilizar el modelo didáctico propuesto como una guía para reformar y mejorar las prácticas de enseñanza, especialmente en lo que respecta a la integración de la tecnología en el aula.

Como toda investigación, este trabajo tiene sus limitaciones. Sin embargo, estas limitaciones no disminuyen la validez del estudio, sino que ofrecen oportunidades para futuras líneas de investigación. Es esencial que se realicen estudios adicionales para explorar la aplicabilidad del modelo en diferentes contextos culturales, geográficos y socioeconómicos. Además, aunque se hizo un esfuerzo por integrar diversas herramientas tecnológicas, la rápida evolución de la tecnología educativa significa que siempre habrá nuevas herramientas y enfoques emergentes que no se consideraron en este estudio.

Otra limitación podría ser la duración y el alcance del estudio. Aunque se observaron avances significativos en los participantes durante el período de investigación, un estudio a largo plazo podría ofrecer insights más profundos sobre la sostenibilidad y adaptabilidad del modelo didáctico propuesto. Además, la diversidad de los participantes, aunque representativa, podría no capturar todas las variabilidades en términos de antecedentes educativos, habilidades tecnológicas previas y filosofías pedagógicas. Sin embargo, es importante subrayar que estas limitaciones no disminuyen la validez y relevancia del estudio. De hecho, ofrecen valiosas oportunidades para futuras líneas de investigación. Por ejemplo, sería esencial explorar cómo se adapta y aplica el modelo didáctico en contextos culturales distintos, en áreas geográficas con diferentes niveles de acceso a la tecnología o en entornos socioeconómicos variados. También sería provechoso investigar la aplicabilidad del modelo en otros niveles educativos o disciplinas, más allá de la formación de profesores de matemática.

La tesis ha destacado la importancia de preparar a los futuros docentes para los desafíos del siglo XXI. Al centrarse en los profesores de matemáticas en formación, este trabajo subraya la necesidad de una formación docente que no solo transmita conocimientos, sino que también desarrolle habilidades y competencias esenciales para navegar en un mundo cada vez más digitalizado.

RECOMENDACIONES

Para fortalecer el modelo didáctico que propone y su impacto en el desarrollo de los pensamientos matemático, tecnológico y pedagógico, se recomienda una enseñanza que se origina en los preconceptos y conocimientos previos de los estudiantes. Esta aproximación no solo genera confianza en los alumnos, sino que también facilita la demostración de resultados matemáticos a través de ejemplos y contraejemplos concretos, empleando recursos didácticos que mejoran la comprensión y aplicación de los conceptos.

El rol activo del docente es crucial en este proceso, no solo para motivar a los estudiantes, sino también para aumentar su confianza en las propias capacidades de resolución de problemas y demostración de teoremas. Dicho apoyo puede reducir las creencias negativas hacia las matemáticas y elevar el compromiso académico, incentivando a los estudiantes a investigar y profundizar en los temas por iniciativa propia.

Se sostiene que el modelo didáctico debe enfrentar la resolución de problemas y la construcción de demostraciones como retos progresivos, introduciendo situaciones que demanden un nivel creciente de razonamiento y justificación. Estimular esta progresión es clave para el desarrollo de habilidades analíticas y críticas esenciales en la educación matemática.

La combinación de la resolución de problemas con el trabajo colaborativo y en comunidades de práctica genera un entorno de aprendizaje enriquecido, donde los estudiantes pueden formar y comprender diferentes formas de pensamiento de manera objetiva. Esto también promueve la colaboración y la habilidad de los alumnos para explicar, ilustrar, justificar y proponer soluciones alternativas, tanto individualmente como en equipo.

Es fundamental que el docente realice un seguimiento constante del progreso y los logros de los estudiantes, ofreciendo retroalimentación constructiva para identificar áreas de mejora y ajustar la metodología de enseñanza a las necesidades del alumnado, asegurando así una educación completa y efectiva.

A pesar de los avances significativos en la integración de las TIC en la educación matemática, se mantiene el reto de cómo estas herramientas pueden potenciar no solo la comprensión conceptual, sino también el desarrollo del pensamiento crítico y las habilidades de resolución de problemas a largo plazo. Se aconseja que futuras investigaciones examinen estrategias didácticas innovadoras que utilicen las TIC para promover la autonomía del estudiante en enfrentar problemas complejos y en la demostración matemática, más allá de los métodos convencionales. Además, sería provechoso evaluar el impacto a largo plazo de estas estrategias en la retención del conocimiento y en la capacidad de los estudiantes de aplicar lo aprendido en contextos interdisciplinarios y reales.

BIBLIOGRAFÍA

Baser, D., Akkus, R., Akayoglu, S., Top, E., & Gurer, M. D. (2021). Training in-service teachers through individualized technology-related mentorship. Educational Technology Research and Development, 69(6), 3131-3151.

Birgin, O., Uzun, K., & Mazman Akar, S. G. (2020). Investigation of Turkish mathematics teachers' proficiency perceptions in using information and communication technologies in teaching. Education and Information Technologies, 25(1), 487-507.

Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research.*

Cai, J., Hwang, S., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En *Mathematical problem posing* (págs. 3-34). New York, NY: Springer.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. En *Posing and solving mathematical problems* (págs. 3-22). Cham: Springer.

Chiu, T.K.F.; Churchill, D. Exploring the characteristics of an optimal design of digital materials for concept learning in mathematics. Comput. Educ. 2015, 82, 280–291. [CrossRef]

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). *Learning Trajectories in Mathematics Education*. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 81-89.

Cobb, P., Confrey , J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13.

Cobo, P., & Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 115-140.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology* (págs. 124-159). New York, NY: Springer.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Dewey, J. (1938). The philosophy of the arts. John Dewey: The Later Works, 13, 357-368.

Dilling, F., & Vogler, A. (2022). Pre-service Teachers' Reflections on Attitudes Towards Teaching and Learning Mathematics with Online Platforms at School: A Case Study in the Context of a University Online Training. Technology, Knowledge and Learning, 1-24.

fulltext/ED606569.pdf (accessed on 10 November 2021).

Ginsburg, H. P., & Russell, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the society for research in child development*, 1-69.

Graham, C.R.; Burgoyne, N.; Cantrell, P.P.; Smith, L.M.; Clair, L.S.; Harris, R. TPACK Development in Science Teaching: Measuring the TPACK Confidence of Inservice Science Teachers. TechTrends 2009, 53, 70–79.

Group for the Psychology of Mathematics Education, Greenville, SC, USA; 2018. Available online: https://files.eric.ed.gov/

Groves, T. (2016). Paulo Freire, la educación de adultos y la renovación pedagógica (1970-1983). Tendencias pedagógicas.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. 7(1), 27-50. doi:10.1207/s15327833mtl0701_3

Hernández Suarez, C. A., Gamboa Suarez, A. A., & Ayala García, E. T. (2014). Competencias Tic para los docentes de Educación Superior. Buenos Aires, Argentina: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. ISBN: 978-84-7666-210-6.

Hernández, R. (2010). Metodología de la Investigación. México: McGRAWHILLIINTERAMERICMA EDITORES, SA DE C.V. Recuperado el 23 de febrero de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Hsu, P.-S.; Sharma, P. A Systemic Plan of Technology Integration. J. Educ. Technol. Soc. 2006, 9, 173–184.

Kane, M. (2013). The Argument-Based Approach to Validation. School Psychology Review, 42(4), 448-457.

Knowledge-Building Communities. In Proceedings of the 40th Annual Meeting of the North American Chapter of the International

Koehler, M.J.; Mishra, P. What is technological pedagogical content knowledge? Contemp. Issues Technol. Teach. Educ. 2009, 9, 60–70. [CrossRef]

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers. Allyn & Bacon/Logwood Division, 160 Gould Street, Needham Heights, MA 02194-2310.

León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Ávila, C. B., . . . Márquez, H. (2014). Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad. Universidad distrital Francisco José de Caldas, ISBN: 978-607413-167-3.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. Mathematical thinking and learning, 5(2-3), 157-189.

Liljedahl, P., & Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving. Springer International Publishing.

Lucumi, P., & González, M. (2015). El ambiente digital en la comunicación, la actitud y las estrategias pedagógicas utilizadas por los docentes. TED, Págs (109 -129) ISSN 0121- 3814.

Malaspina, U., Vera, S., & Cuya, J. (2010). Resolución de problemas de Olimpiadas Matemáticas.

Marqués Graells, P. (2012). Impacto de las Tic en la Educación: funciones y limitaciones. Ciencias, Págs (1 - 15).

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2 ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.

McGuire, W. (1989). The structure of individual attitudes and attitude systems. *Attitude structure and function*, 37-69.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado el 30 de 05 de 2020, de http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Navarro Ibarra, L. A., Cuevas Salazar, O., & Martínez Castillo, J. (2017). Meta-análisis sobre educación vía TIC en México y America Latina. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Págs (10 -20), Vol.19; núm 1; ISSN: 1607-4041.

Niess, M.L. Teacher Knowledge for Teaching with Technology: A TPACK Lens. In Educational Technology, Teacher Knowledge, and Classroom Impact: A Research Handbook on Frameworks and Approaches; Ronau, R.N., Rakes, C.R., Niess, M.L., Eds.; IGI Global: Hershey, PA, USA, 201; pp. 1–15.

Niess, M.L.; Roschelle, J. Transforming Teachers' Knowledge for Teaching Mathematics with Technologies through Online

Paoletti, T., & Moore, K. (2017). The parametric nature of two studens´ covariational reasoning. *The journal of Mathematical Behavoir, 48*, 137-151.

Piaget, J. (1970). Inteligencia y adaptación biológica. Los procesos de adaptación, 1(1), 69-84.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas.* México: Editorial Trillas.

Portillo-Berasaluce, J., Romero, A., & Tejada, E. (2022). Teaching Digital Competence in Europe during the COVID-19 pandemic. Revista Latinoamericana De Tecnología Educativa - RELATEC, 21(1), 57-73. https://doi.org/10.17398/1695-288X.21.1.57.

Prensky, M. (2001). Nativos digitales, inmigrantes digitales. On the horizon, 9(5), 1-7.

Rakes, C.R.; Ronau, R.N.; Bush, S.B.; Driskell, S.O.; Niess, M.L.; Pugalee, D.K. Mathematics achievement and orientation: A systematic review and meta-analysis of education technology. Educ. Res. Rev. 2020, 31, 100337. [CrossRef]

Rakes, C.R.; Valentine, J.; McGatha, M.C.; Ronau, R.N. Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. Rev. Educ. Res. 2010, 80, 372–400. [CrossRef]

Rivero, C., Chávez, A., Vásquez, A., & Blumen, S. (2016). Las TIC en la formación universitaria. Logros y desafíos para la formación en psicología y educación. Revista de Psicología, Págs (185 -199), Vol. 34 (1) ISSN 0254-9247.

Rojano, T. (2006). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas. La Revista Iberoamericana de Educación.

Roshelle, J.; Leinwand, S. Improving student achievement by systematically integrating effective technology. NCSM J. Math. Educ. Leadersh. 2011, 13, 3–9.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS, 47*(6), 641-649.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1- 38.

Severin, E. (2010). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) en educación. Banco Interamericano de Desarrollo.

Shulman, L.S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educ. Res. 1986, 15, 4–14. [CrossRef]

Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática venezolana*, *13*(1), 53-66.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for research in mathematics education, 27(5), 521-539.

Skemp, R.R. Relational understanding and instrumental understanding. Math. Teach. Middle Sch. 2006, 12, 88–95. [CrossRef]

Sonnenschein, S.; Stites, M. Preschool teachers' views on distance learning during COVID-19. In Contemporary Perspectives in Early Childhood Education; Saracho, O., Ed.; Information Age Publishing: Scottsdale, AZ, USA; in press. Arcueno, G.; Arga, H.; Manalili, T.A.; Garcia, J.A. TPACK and ERT: Understanding teacher decisions and challenges with integrating technology in planning lessons and instruction. In DLSU Research Congress 2021; De La Salle University: Manila, Philippines, 2021.

Tallman, M., & Frank, K. (2020). Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. Journal of Mathematics Teacher Education, 23(1), 69-95.

Tapia, C., Navarro, Y., & De la serna, A. (2017). El uso de las TIC en las prácticas académicas de los profesores de la Bémerita Universidad Autónoma de Puebla. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Págs (115-125), Vol.19; núm.3; ISSN:1607-4041.

Thompson, P. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. *Center for Research in Mathematics & Science Education*.

Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.) *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Thompson, P., & Thompson, A. (1992, Abril). Images of rate. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco. Recuperado el 17 de 06 de 2020, de http://pat-thompson.net/PDFversions/1992Images.pdf

Thompson, P., Carlson, M., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra 1, 2, 3. En L. Steffe, L. Hatfield, & K. Moore (Ed.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, págs. 1-24.

Thompson, P., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 95-111.

UNESCO. (2008). Estándares de Competencias TIC para docentes. UNESCO.

Villa-Ochoa, J. A., Molina-Toro, J. F., & Borba, M. C. (2023). Roles of technologies for future teaching in a pandemic: activity, agency, and humans-with-media. ZDM–Mathematics Education, 55(1), 207-220.