Programa de Doctorado en Educación Matemática

COMPETENCIA COMUNICATIVA EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS EN UN AMBIENTE DE AULA INVERTIDA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Angela Goretti Perdomo Mosquera

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

COMPETENCIA COMUNICATIVA EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS EN UN AMBIENTE DE AULA INVERTIDA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Autor: Angela Goretti Perdomo Mosquera

Director de tesis:

Gerardo Chacón Guerrero

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C., diciembre 02 del 2023

Agradecimientos

Expreso mi sincero agradecimiento a las personas esenciales en mi vida que han posibilitado este logro. En primer lugar, agradezco a mis padres, Jorge Alfonso Perdomo y Celmira Mosquera, así como a mi hermana, Diana Marcela Perdomo, por su apoyo incondicional y constante inspiración. Mi esposo, Fredy Andrade, merece mi agradecimiento por su comprensión, paciencia y apoyo constante durante este proceso. Reconozco a mi hijo, Emiliano Andrade Perdomo, por ser mi mayor motivación y por su amor inquebrantable. Además, extiendo mi gratitud a la institución educativa Ángel María Paredes por proporcionar el ambiente propicio para el desarrollo de esta investigación. Un agradecimiento especial a los estudiantes de grado 8, cuya disposición y responsabilidad fueron fundamentales para llevar a cabo este proyecto de manera exitosa.

Finalmente, agradezco a Dios y al Espíritu Santo por brindarme fortaleza, dirección y ánimo para perseverar y alcanzar este logro significativo en mi vida. A los distinguidos docentes del doctorado, agradezco sus enseñanzas y vastos conocimientos, y de manera especial, quiero reconocer y agradecer a mi asesor, el doctor Gerardo Chacón Guerrero, cuya orientación experta y compromiso han sido fundamentales para este logro. Su sabiduría y guía han sido un faro que ha iluminado cada paso de mi trayectoria académica. Este logro no hubiera sido posible sin la influencia positiva de estos excepcionales educadores y mentores.

SÍNTESIS

La competencia comunicativa es la habilidad de comunicarse eficazmente en un lenguaje específico, y va más allá de la gramática y el vocabulario, incluyendo un conjunto de habilidades para interactuar de forma adecuada en comunicaciones orales y escritas. El objetivo principal de esta investigación consistió en desarrollar una teoría local que describa y explique el uso de la competencia comunicativa en el proceso de aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, específicamente en un entorno de aula invertida, dirigido a estudiantes de grado octavo. Para llevar a cabo este estudio, se adoptó un enfoque cualitativo y se implementó una metodología basada en la teoría fundamentada. En términos de instrumentación, tres guías de aprendizaje conformada por 23 problemas tanto de exploración como de profundización, y una entrevista semiestructurada fueron utilizados, y tres fases de codificación y análisis de datos fueron realizados, utilizando el método de comparación constante. Este proceso condujo al muestreo y a la saturación teórica. A partir de los datos recopilados, una teoría local fue construida cuyos procesos incluyen la comprensión de conceptos, la comunicación de ideas y la resolución de problemas. Uno de los hallazgos de esta investigación fue la sinergia entre las competencias comunicativas y la metodología de aula invertida que enriquece la comprensión y el aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, tanto en modalidades escritas como orales. Esto se logra a través de la interacción de las competencias lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica, que contribuye significativamente al logro de un aprendizaje más significativo y efectivo en el contexto de las matemáticas.

ABSTRACT

Communicative competence is the ability to communicate effectively in a specific language, and it goes beyond grammar and vocabulary, including a set of skills to interact appropriately in oral and written communications. The main objective of this research was to develop a local theory that describes and explains the use of communicative competence in the learning process of solving linear and quadratic equations, specifically in a flipped classroom environment, aimed at eighth-grade students. To carry out this study, a qualitative approach was adopted, and a methodology based on grounded theory was implemented. In terms of instrumentation, three learning guides, made up of 23 problems for exploration and in-depth study, were utilized. Additionally, a semi-structured interview was conducted, followed by three phases of coding and data analysis using the constant comparison method. This process led to sampling and theoretical saturation. From the data collected, a local theory was constructed whose processes included understanding concepts, communicating ideas, and solving problems. One of the most notable findings of this research was the synergy between communicative competencies and the flipped classroom methodology that enriches the understanding and learning of linear and quadratic equations, both in written and oral modalities. This is achieved through the interaction of linguistic, discursive, sociolinguistic, and strategic competencies, which contribute significantly to the achievement of more meaningful and effective learning in the context of mathematics.

TABLA DE CONTENIDO

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El crecimiento acelerado de los medios de comunicación en todo el mundo, así como la creciente demanda de su uso y la constante actualización de los mismos, plantea desafíos en la educación en la formación de estudiantes que sean capaces de relacionarse fácilmente con otros y desenvolverse en su entorno de acuerdo a las condiciones históricas y culturales que les rodean. Por lo tanto, el proceso de comunicación adquiere una gran importancia en la educación de cada estudiante, con el objetivo de convertirlos en comunicadores competentes, capaces de desempeñarse como sujetos sociales, disfrutando de relaciones interpersonales y logrando un buen rendimiento académico y profesional.

Vygotsky (1982) para entender el papel de la educación en el desarrollo de los sujetos sociales, considera el lenguaje un factor clave, pues tiene una estrecha relación con el desarrollo del pensamiento y del conocimiento, por lo tanto, plantea:
"*El desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje, es decir por las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia sociocultural del niño… El crecimiento intelectual del niño depende del dominio de los medios sociales del pensamiento, esto es, del lenguaje".*[1] Además, Platón afirmaba que el pensamiento es una comunicación consigo mismo, un diálogo intrínseco en el que se argumenta, se reflexiona, se hacen preguntas y se dan respuestas internas antes de ser comunicadas a través del discurso matemático como parte de la competencia comunicativa.

Por otro lado, investigadores más recientes consideran el lenguaje desde tres dimensiones, según Duval (2004):

- "*La ética, que vincula sujeto discursivo y aspectos de tipo normativo, axiológico y actitudinal de la comunicación y de la significación compartidas socialmente.*

[1] Vigotsky, L. S. (1982). Pensamiento y lengua e. *La Habana: Editorial Pueblo y Educación*, p.31.

- *La psicológica, considerando el lenguaje como acción humana, que pone en juego aspectos de tipo cognitivo y de tipo semiótico e informativo; es decir, el desarrollo de procesos de significación que exigen el permanente proceso de semiotización.*
- *La social, que destaca las funciones comunicativa e interactiva del lenguaje*"[2].

Estas dimensiones están presentes en la producción narrativa y ayudan a comprender los diferentes aspectos expresados en el discurso del hablante.

En el contexto educativo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) reconoce la importancia de la comunicación en el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas. Señala que todas las profesiones en ciencias e ingenierías requieren que las personas sean capaces de expresar ideas de diversas formas, comprender, interpretar, evaluar, demostrar, describir, conectar, conjeturar, hacer preguntas, recopilar y evaluar información, y argumentar de manera convincente. Además, destaca que varios estudios "*han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problem*as".[3]

En el aula de matemáticas, los docentes enfrentan la preocupación de que algunos estudiantes son más competentes que otros en actividades de comunicación, como conversaciones informales en lenguaje natural o la explicación escrita u oral de soluciones a problemas. Estas diferencias se reflejan en el bajo rendimiento académico en matemáticas y en los resultados de las pruebas, ya que los estudiantes a menudo no expresan claramente su pensamiento matemático, lo que dificulta su aprendizaje y resolución de problemas.

---

[2] Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

[3] Schmidt, Q. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden, P.54.

En este contexto, Niss (2002) ubica la comunicación en relación con las matemáticas como una de las competencias que describen acciones, habilidades y destrezas en la actividad matemática. Destacando que en la comunicación matemática es importante:

- *"Entender lo que otros escriben, en cuanto a textos orales o escritos, en una variedad de registros lingüísticos acerca de materias que tienen un contenido matemático.*
- *Expresarse en diferentes niveles de precisión teórica y técnica de forma oral, visual y escrita acerca de tales materias".*[4]

Por lo tanto, desarrollar la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas permite a los estudiantes resolver problemas algebraicos utilizando los diferentes lenguajes (natural, simbólico, gráfico, icónico y gestual), tecnología, símbolos y el conocimiento. Esto también les permite socializar en grupos de manera autónoma y adquirir habilidades entre el saber; el saber hacer; y el saber ser. Aquel estudiante que no es capaz en las actividades de aprendizaje expresar qué se dice, como se dice y para que se dice, en el marco de la resolución de problemas presenta dificultad en la comunicación.

El estudio del proceso de comunicación matemática y el desarrollo de las competencias comunicacionales específicamente en el aprendizaje de las matemáticas, se ha llevado a cabo alrededor de diferentes reuniones y congresos: Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en las reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), entre otros. En estas reuniones se ofrecen cursos, conferencias y se presentan ponencias que reflejan dificultades y avances de la temática de la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas, desde diferentes teorías.

[4] Niss, M. (2003, January). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

En el ICME 13 y 14, se proponen al menos diez TSG que resaltan la pertinencia de esta investigación. Entre ellos, el Topic Study Group (TSG) 11 y (TSG) 7 respectivamente, fomentan la discusión de las cuestiones conceptuales y teóricas relacionadas con el pensamiento algebraico temprano de los niños, su naturaleza y sus conexiones con el álgebra posterior, además del papel del lenguaje y la comunicación. Estos grupos también abordan el pensamiento algebraico desde los rasgos característicos, las tareas curriculares que promueven la comprensión algebraica, los ambientes de aprendizaje que fomentan el razonamiento, y los problemas de representación, simbolización, manipulación, conjetura, demostración y generalización, todos estos aspectos contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico.

El acta TSG (19) ICME 13 y el acta TSG (17) ICME 14 se centran en la resolución de problemas, no solo analiza los factores cognitivos, sociales y afectivos que influyen en el desarrollo de la competencia en resolución de problemas, sino también en su papel como medio para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, utilizando un enfoque semiótico.

En las actas TSG (31) Y TSG (39), respectivamente, sobre el lenguaje y la comunicación en el aula de matemáticas, se investigan temas relacionados con el lenguaje multimodal y la naturaleza multisemiótica de la actividad matemática y la comunicación. Estos grupos se centran en todos los modos de comunicación, incluyendo el oral, escrito, gestual, visual, entre otros, y adoptan una variedad de perspectivas teóricas y metodológicas.

La tecnología digital ha adquirido una gran relevancia en la sociedad actual, y por esto se refleja en las actas TSG (42) y TSG (25), que tienen como objetivos principales:

- Establecer una visión general del estado actual del arte en el uso de la tecnología en educación matemática, incluyendo tanto experiencias orientadas a la práctica como evidencia basada en investigaciones vistas desde una perspectiva internacional.

- Sugerir tendencias importantes para la educación matemática rica en tecnología en el futuro, incluida una agenda de investigación y la implementación de estrategias a nivel escolar.

Estos grupos también abordan temas relacionados con la integración de herramientas digitales en la educación matemática de secundaria, tanto por parte de los docentes en experiencias presenciales como virtuales, promoviendo así una mejor comprensión de las matemáticas y fomentando la comunicación y el trabajo colaborativo entre estudiantes y docentes.

En las actas del TSG (54) y TSG (60) sobre semiótica en la educación matemática, se exploran aspectos relacionados con la naturaleza de la semiótica y su importancia para la educación matemática. Se discuten teorías influyentes de la semiótica, aplicaciones de la semiótica en la educación matemática y varios tipos de signos en este contexto. Cabe destacar investigaciones, que examina la ética de la semiosis y la construcción de objetos matemáticos en el aula, explorando cómo los niños, a través de una amplia gama de signos, se posicionan como sujetos matemáticos y dan sentido a las matemáticas y las reglas de los juegos aritméticos.

En el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11 y 12), con Thematic Working Group (TWG 3), se investiga el pensamiento algebraico, así como la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Se plantean diversos temas como:

- La naturaleza del pensamiento algebraico (p. ej.: el papel y la importancia de la estructura; cómo los estudiantes perciben y usan los conceptos y signos algebraicos).
- Tareas matemáticas utilizadas como instrumentos para enseñar y desarrollar el pensamiento algebraico.
- Nuevos conocimientos sobre temas de investigación establecidos, como objetos algebraicos fundamentales y procesos (por ejemplo, simbolización, generalización, prueba y justificación).
- Desarrollar nuevos enfoques novedosos del pensamiento algebraico.

- Considerar el papel de la tecnología u otros materiales didácticos.
- Proporcionar información sobre los vínculos entre la aritmética y el pensamiento algebraico.
- Considerar la naturaleza y la influencia de la cultura del aula que apoya el pensamiento algebraico.

En las actas de TWG (9) sobre las matemáticas y el lenguaje, se destacan las investigaciones relacionadas con los discursos sobre matemáticas y lenguaje. Se otorga importancia al lenguaje como medio para construir conceptos matemáticos, comunicar matemáticamente y permitir la evolución del pensamiento matemático en interacción con otros en diversas situaciones.

Por último, en las actas de TWG (15 Y 16) sobre los recursos tecnológicos en matemáticas dentro del contexto del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, se presentan investigaciones relacionadas con la toma de decisiones de los docentes en la selección y el uso de herramientas digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, se teoriza sobre el papel de la colaboración del docente con las comunidades dentro y fuera de las instituciones para respaldar la implementación y el uso de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

En las reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME 33, año 2019 y 34, año 2021), se presentan conferencias que abordan temas relacionados con el análisis del discurso matemático escolar, el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, incluyendo la calculadora y GeoGebra, así como la importancia del lenguaje y la comunicación en la actividad matemática.

Vinculado a lo anterior, este trabajo considera que investigar en el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas tiene múltiples beneficios:

- Facilita la identificación y comprensión de las tendencias en el uso de la competencia comunicativa en el proceso de enseñar y aprender matemáticas. Esto abarca sus componentes lingüísticos, discursivos, sociolingüístico y estratégicos, proporcionando una visión integral de cómo se aplica en la comunicación matemática.
- Proporciona una transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico al abstraer lo general a partir de los objetos matemáticos en la resolución de problemas algebraicos. Esto implica la capacidad de expresar conceptos matemáticos de manera precisa y concisa.
- Permite reconocer la importancia de la comunicación, ya sea verbal o no verbal, a través de diferentes sistemas semióticos en el proceso de aprendizaje del álgebra. Esto incluye la interpretación de gráficos, tablas, símbolos y otros elementos visuales en el contexto algebraico.
- Ofrece la oportunidad de profundizar en la competencia comunicativa al argumentar, justificar y demostrar el pensamiento algebraico a través del discurso. Esto promueve una comprensión más sólida de los conceptos matemáticos y fomenta el razonamiento lógico.
- Facilita la creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos por la cultura, donde el trabajo colaborativo y la interacción social son fundamentales. Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar no solo habilidades matemáticas, sino también habilidades sociales y emocionales relacionadas con el "saber ser" en matemáticas.
- Reconoce la importancia de utilizar recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente en la resolución de problemas algebraicos. La tecnología puede ser una herramienta poderosa para visualizar conceptos matemáticos y promover la comprensión.

- Favorece la búsqueda de alternativas formativas para fortalecer el pensamiento matemático y la resolución de problemas no rutinarios en el álgebra. Esto implica la exploración de enfoques pedagógicos innovadores y estrategias educativas efectivas.

El avance en el desarrollo de la competencia comunicativa en el aprendizaje del álgebra conduce a la expresión efectiva de ideas matemáticas a través del lenguaje matemático. Esto se logra mediante la lectura y comprensión de diferentes objetos matemáticos y actividades mediadas por la interacción social y cultural, lo que enriquece significativamente el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Dada las valoraciones en cuanto la naturaleza, pertinencia y potencialidades de las habilidades comunicacionales, surge el siguiente **problema de investigación** ¿Cómo describir y explicar el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas de los estudiantes de grado octavo (8°) en un ambiente de aula invertida?

Esta tesis se lleva a cabo en las siguientes líneas de investigación del Programa de Maestría y Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño:

1. Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.
2. Desarrollo del pensamiento matemático y avances en su caracterización.
3. Uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El **objeto** de la investigación es el proceso del uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida, por lo tanto, de esta investigación se propone el siguiente **objetivo general:**

Construir una teoría local que describe y explique el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida.

Para cumplir el objetivo general se han propuesto los siguientes objetivos específicos:

- Analizar y comparar las formas de uso de la competencia comunicativa en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida.
- Caracterizar la teoría emergente de los datos generando categorías y relaciones entre ellos, que posibiliten el muestreo y saturación teórica para avanzar en la determinación de las dimensiones de la competencia comunicativa en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida.
- Interpretar, dar sentido y significado a los datos emergentes durante el proceso, que permitan describir y explicar el uso de la competencia comunicativa en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida.

De acuerdo con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida de los estudiantes de grado octavo (8°) de la Institución Educativa Ángel María Paredes de la ciudad de Neiva.

Para responder el problema, así como el objetivo general y los objetivos específicos se plantean las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Cómo es el proceso emergente de las formas de uso de la competencia comunicativa en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida?
- ¿Cómo es el proceso cuando la competencia comunicativa se utiliza en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida?
- ¿Cómo interpretar y dar sentido a los datos para describir y explicar el uso de la competencia comunicativa, en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un ambiente de aula invertida?

El **aporte práctico** consiste en un sistema de actividades diseñado para integrar la competencia comunicativa en el proceso de resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, con el fin de promover el desarrollo del pensamiento algebraico. Este sistema se implementa a través de una metodología de aula invertida a estudiantes de grado octavo.

Y el **aporte teórico** se basa en una teoría local que describe y explica el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas mediante una metodología de aula invertida.

La investigación se enfoca en describir y explicar el uso de la competencia comunicativa a través de la comunicación escrita y oral en la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas en un entorno no convencional. En este caso, gran parte del tiempo de clase se lleva a cabo fuera del aula tradicional, utilizando videos y guías que contienen actividades exploratorias y problemas que requieren el uso de herramientas tecnológicas. El tiempo en el aula se utiliza principalmente para que los estudiantes realicen actividades de profundización, que incluyen problemas desafiantes, de manera guiada e independiente, en grupos colaborativos. Todo esto contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico y al logro de un aprendizaje significativo.

El documento está estructurado por la introducción, seis capítulos, las conclusiones y anexos. El primer capítulo hace referencia al estado del arte, un recorrido por las investigaciones hechas en los últimos años. Este capítulo se divide en tres secciones: la competencia comunicativa matemática y resolución de problemas en la educación básica secundaria, comunicación matemática y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el aula invertida y el aprendizaje de las matemáticas.

El segundo capítulo se enfoca en el marco teórico para el diseño del sistema de actividades. Analiza la relación entre la competencia comunicativa y aprendizaje de las matemáticas, vinculada hacia los diferentes modelos del pensamiento algebraico y la teoría de resolución de problemas matemáticos como actividad discursiva de Koichu (2018), en el contexto del aprendizaje de aula invertida Cevikbas y Kaiser (2020).

El tercer capítulo, explica detalladamente el enfoque metodológico basado en la teoría fundamentada, que se caracteriza por el proceso y la interrelación de la recopilación de datos, el análisis de datos y el desarrollo de la teoría.

En el cuarto capítulo se analizan los datos, mediante el proceso de codificación abierta, axial y selectiva, muestreo teórico y el alcance de la saturación teórica.

El quinto capítulo presenta la teoría emergente de los datos como resultado de los ciclos de intervención, codificación y análisis de datos.

Finalmente, el sexto capítulo presenta los hallazgos y posterior las conclusiones y recomendaciones y anexos.

CAPÍTULO I. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se realiza un recorrido principalmente en investigaciones relacionadas con el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas y su desarrollo en la resolución de problemas algebraicos en un ambiente de aula invertida. Para llevar a cabo la triangulación de los diferentes artículos e investigaciones consultadas, provenientes de revistas indexadas y bases de datos como Scopus, Spingerlink, Taylor and Francis Journals, Dialnet, ZDM- Mathematics Education, entre otras, se utilizó la herramienta del programa ATLAS. ti para codificar y relacionar las categorías.

Dentro de esta red semántica, se identificaron tendencias en la investigación, lo que llevó a la distinción de tres aspectos fundamentales. En primer lugar, se establece una relación con investigaciones de competencia comunicativa matemáticas y resolución de problemas en la educación básica secundaria. En segundo lugar, se consideran investigaciones realizadas sobre la comunicación matemática y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el mundo y Colombia y en tercer lugar se recogen investigaciones con el aula invertida y aprendizaje de las matemáticas.

1.1. Investigaciones sobre la competencia comunicativa matemática y resolución de problemas en la educación básica secundaria.

1.1.1. Mathematical communication skills (MCS) in solving mathematics problems: A case in Indonesian context[5]

En este artículo se analiza la competencia comunicativa matemática de los estudiantes para resolver un problema matemático a partir de la discusión grupal, donde se investiga la forma en la que el estudiante

[5] Rohid, N., & Rusmawati, R. D. (2019). Students' Mathematical Communication Skills (MCS) in Solving Mathematics Problems: A Case in Indonesian Context. Anatolian Journal of Education, 4(2), 19-30.

identifica los hechos y datos para resolver un problema matemático cambiando preguntas narrativas en símbolos matemáticos y notaciones.

Esta investigación es de corte cualitativo y empleó un diseño de estudio de caso con la participación de tres estudiantes de grado octavo de la secundaria de East Java, Indonesia. Las técnicas utilizadas para la recogida de los datos fueron la observación directa en el momento en que los estudiantes llevaron a cabo la discusión grupal para resolver los problemas matemáticos permitiendo a los investigadores centrarse en cómo los estudiantes expresan ideas matemáticas, entienden, interpretan y responden a problemas matemáticos. También se analizaron los documentos de la prueba de matemáticas para conocer la comunicación escrita de los estudiantes en cuanto al uso de términos, notaciones y símbolos para mostrar el pensamiento matemático. Y se aplicó una entrevista, para obtener datos más completos sobre la competencia comunicativa matemática de los estudiantes.

Uno de los referentes teóricos utilizados en este estudio y que también se utilizaran en la presente investigación son los indicadores de la competencia comunicativa por el consejo nacional de docentes de matemáticas (NCTM 2000) como: (1) Comprender las ideas matemáticas que se presentan por escrito u oralmente, (2) Revelar las ideas matemáticas por escrito u oralmente, (3) Usar el enfoque del lenguaje matemático (notación, término y símbolo) para representar información matemática y (4) usar representaciones matemáticas (fórmula, diagrama, tablas, gráficos, modelo) para representar información matemática.

Este estudio determinó que los estudiantes que tienen buenas competencias comunicativas matemáticas también tienen una buena comprensión de las matemáticas. La forma en que los estudiantes convirtieron los problemas matemáticos en símbolos y notaciones, realmente afecta la capacidad de los estudiantes para resolver los problemas matemáticos, la comunicación y el discurso en el aula posibilitando a que los docentes evalúen el aprendizaje de los estudiantes y puedan crear un ambiente seguro para explorar ideas y generar un diálogo.

En consideración, este estudio no profundiza el desarrollo de la competencia comunicativa en cuanto al uso diverso del lenguaje (natural, simbólico, gráfico, icónico, gestual, etc.) en el discurso en el momento de expresar ideas matemáticas y además, en el uso de las diversas representaciones semióticas en resolver el problema a partir de la pregunta narrativa. Por otra parte, seleccionan los estudiantes con características específicas que influyen en los resultados de manera positiva y no tienen en cuenta la diversidad e interacción social y cultural de los estudiantes en el aula de clase.

1.1.2. Communication Skills and mathematical problem-solving ability among junior high school's students through problem-based learning[6]

El objetivo de este estudio fue examinar la competencia comunicativa y la capacidad de resolución de problemas matemáticos entre estudiantes de secundaria a través del aprendizaje basado en problemas y aprendizaje convencional.

Esta investigación es de tipo cuantitativa, se utilizó un diseño cuasiexperimental, seleccionaron dos colegios públicos, en cada uno se tomaron 60 estudiantes, donde un colegio es calificado como de buen nivel y el otro de nivel medio, según las categorías del Departamento de Educación de Jambi. En cada uno de los colegios se eligieron dos aulas homogéneas, una se convirtió en el aula experimental, entonces, el aprendizaje de las matemáticas se llevó a cabo con un enfoque de aprendizaje basado en problemas y la otra se utilizó como aula de control, luego el aprendizaje fue convencional. Los instrumentos utilizados en esta investigación fueron dos pruebas, una

[6] Syaiful, S., Muslim, M., Huda, N., Mukminin, A., & Habibi, A. (2019). Communication skills and mathematical problem-solving ability among junior high schools' students through problem-based learning. *International Journal of Scientific & Technology Research*, *8*(11).

prueba de competencias de comunicación y resolución de problemas matemáticos y otra prueba de escala de actitud sobre las actividades de aprendizaje.

Los resultados de las pruebas estadísticas en función de los factores: aprendizaje, calificaciones escolares, y diferencias de género, determinaron que la interacción entre los factores de aprendizaje con las calificaciones escolares no tiene un efecto significativo en mejorar las competencias de comunicación matemática de los estudiantes en la resolución de problemas. En cuanto a los factores de aprendizaje y las diferencias de género se concluyó que el aprendizaje basado en problemas tuvo una influencia significativa en mejorar las competencias de comunicación y la capacidad de resolución de problemas, tanto en estudiantes hombres como mujeres. Por lo tanto, el factor de género no proporciona un efecto directo significativo en mejorar las competencias de comunicación y la capacidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes.

Las apreciaciones que se tiene en este estudio es que los tipos de aprendizaje utilizados en cada aula determina el mejoramiento de la competencia comunicativa y la capacidad para resolver problemas, pero no analizan factores que inciden en el acto de comunicar las ideas matemáticas de los estudiante en cuanto al lenguaje escrito u oral, el uso de símbolos, expresiones, gestos, fórmulas y mucho menos, el proceso de argumentar, justificar y demostrar, las soluciones de problemas a través de la comunicación en el aula.

Es de resaltar de este estudio los resultados en la prueba de significancia en los factores de aprendizaje y el género ya que no interesa si es hombre o mujer el desarrollo de la competencia comunicativas en la resolución de problemas, a partir del aprendizaje basado en problemas se obtiene una actitud positiva hacia el proceso por aprender, por lo tanto, en la presente investigación se trabajara con estudiantes del ambos sexo, pero con el aprendizaje parcialmente basado en el aula invertida.

1.1.3. Profile of mathematical communication skills junior high school students in problem solving[7]

En este artículo los investigadores consideran que las competencias de comunicación matemática de los estudiantes es la capacidad de comprender, expresar e interpretar ideas matemáticas utilizando lenguaje y representaciones matemáticas ya sea de manera oral o escrita.

Esta investigación tiene como objetivo determinar la capacidad de comunicación de los estudiantes de secundaria en la resolución de problemas basado en los pasos de Polya.

Uno de los referentes teóricos fueron los indicadores establecidos por el consejo nacional de docentes de matemáticas (NCTM 2000), en cuanto:

A. Comunicación matemática oral: Expresar el lenguaje matemático (símbolo y notación), interpretar y evaluar ideas matemáticas (símbolos, términos e información matemática), presentar la resolución de un problema y explicar las conclusiones obtenidas.

B. Comunicación matemática escrita: Usar lenguaje matemático (símbolos y notación) apropiadamente, ilustrar la situación del problema visualmente, usar una representación completa para expresar los conceptos matemáticos y soluciones y declarar el resultado en forma escrita.

Además, para resolver problemas se basaron en los indicadores, según Polya (1945):

1. "*Comprenda el problema: El alumno repite la pregunta, explica la parte más importante de la pregunta, lo que se sabe y cómo se dan las condiciones.*

2. Planificación de la resolución de problemas: Cree un plan de resolución de problemas, conecta datos o información con algunos hechos relacionados y se ha estudiado antes.

[7] Puspa, S., Riyadi, R., & Subanti, S. (2019, February). Profile of mathematical communication skills junior high school students in problem solving. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 3, p. 032125). IOP Publishing.

3. Implementación del plan: Resuelva los problemas según lo planeado.

4. Vuelva a comprobar los resultados obtenidos'[8].

La metodología es de tipo descriptivo y exploratorio con enfoque cualitativo, las técnicas usadas fueron dos pruebas escrita u oral, además una entrevista.

El resultado de la capacidad de comunicación matemática de los estudiantes para resolver problemas muestra que hay algunas diferencias en cada estudiante donde, hay estudiantes que tienen más detalles al hacer y también pueden recordar las cosas que se enseñan mientras que otros lo realizan brevemente, se concluye que cada estudiante tiene diferentes habilidades de comunicación matemática para la resolución de problemas.

Sin duda, los indicadores de la comunicación oral y escrita y los pasos de Polya para resolver problemas son pertinentes en los referentes teóricos a utilizar en esta investigación y para las actividades en la resolución de problemas algebraicos y comunicativas a saber: hablar, escuchar, leer y escribir, desde los diferentes objetos matemáticos expresados mediante un lenguaje en el proceso de comunicación matemática efectiva y adecuada, aspectos que serán tratados en la presente investigación a mayor profundidad.

1.1.4. Mathematical communication process of junior high school students in solving problems based on APOS theory[9]

Los investigadores de este estudio motivados por, Rosidin, Suyatna y Abdurrahman, (2019) y Sastrawati, Rusdi y Syamsurizal, (2011) argumentan que el pensamiento es un proceso de operación

[8] Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton university press.p. 21-38.
[9] Sumaji, S., Sa'dijah, C., Susiswo, S., & Sisworo, S. (2020). Mathematical Communication Process of Junior High School Students in Solving Problems based on APOS Theory. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, *8*(1), 197-221.

mental como clasificar, inducir, deducir y razonar. Sukoriyanto, Nusantara, Subanji y Chandra, (2016) afirmaron que el razonamiento es un proceso que permea la información al tener un diseño de esquema dentro del cerebro humano. Por ello, quisieron conocer el proceso de comunicación matemática de los estudiantes en la resolución de problemas basados en la teoría APOS.

Esta investigación es de enfoque cualitativa, se llevó a cabo en un colegio público de secundaria en la población de Rembang, ubicado en Indonesia, con 30 estudiantes de octavo grado, se agruparon de acuerdo a los siguientes criterios: (1) estudiantes en proceso de comunicación matemática por tener comunicación a través del dibujo y (2) estudiantes por tener criterios de comunicación de expresión matemática. Los instrumentos utilizados fueron, una actividad de resolución de problemas y una entrevista para confirmar las respuestas de los estudiantes de lo escrito de la resolución de problemas.

Con base en los resultados se concluye:

1. El proceso de comunicación matemática con criterio de comunicación de dibujo ocurrió cuando los estudiantes resuelven problemas y lo expresan de manera escrita en figuras. Sin embargo, tras ser investigada a través de la comunicación oral en forma de entrevista no hubo adecuación entre la comunicación escrita y oral.

2. El proceso de comunicación matemática con expresión matemática ocurrió cuando los estudiantes resolvieron los problemas y los llevaron en forma escrita usando lenguaje de símbolos algebraicos o numéricos. Luego de ser investigados a través de la comunicación oral en forma de entrevista, los estudiantes brindaron diferentes explicaciones. Se revisó el proceso de pensamiento crítico de los estudiantes en la resolución de problemas con base en la teoría APOS, donde los estudiantes podían construir un concepto y luego expresarlo en comunicaciones orales y escritas.

A partir de esta investigación se observa que algunos estudiantes se les facilita comunicarse de manera oral y otros de manera escrita, por lo tanto, se considera analizar el desarrollo del pensamiento matemático en la resolución de problemas en el uso de la competencia comunicativa desde lo lingüístico, discursivo, estratégico en la comunicación oral y escrita al expresar las soluciones de los problemas que evidencie las formas de pensar que va más allá de razonar.

1.1.5. Mathematical communication skills in solving block and cube problems[10]

Esta investigación tiene como objetivo explicar y describir las competencias de comunicación matemática escrita de los estudiantes para resolver problemas de bloques y cubos. La investigación fue descriptiva, con un enfoque cualitativo y los instrumentos para obtener los datos fueron entrevistas, observación directa y una prueba de capacidades de comunicación matemática.

En este estudio, se analiza la comunicación en matemáticas a partir de tres aspectos:

1. El texto escrito es para responder a un problema de imagen o modelo en forma matemática según su idioma.

2. El dibujo es para reflejar imágenes, gráficos y diagramas.

3. Las expresiones matemáticas son para expresar situaciones, imágenes u objetos naturales en lenguaje o símbolos matemáticos.

Los resultados mostraron que los problemas que enfrentan los estudiantes de competencias bajas se relacionan con aspectos de la escritura y el dibujo y se les dificulta comunicar el lenguaje de símbolos y el modelo del problema por lo tanto, afectó la resolución del problema; por otro lado, los estudiantes altamente calificados habían cumplido todos los aspectos de las habilidades de comunicación matemática, como escritura, dibujo y expresión matemática al presentar ideas matemáticas, en cuanto

[10] Zulhelmi and Anwar, "Mathematical communication skills in solving block and cube problems," J. Phys. Conf. Ser., vol. 1882, no. 1, p. 012065, 2021.

al lenguaje simbólico y el modelo para resolver problemas matemáticos. Además, se evidencia que en general las ideas matemáticas de los estudiantes no se habían comunicado bien, sobre todo cuando se enfrentan a un problema matemático relacionado con la imagen y el uso de símbolos o modelos matemáticos incluidos con la geometría.

Esta investigación estudia las competencias lingüísticas, a través de las aplicaciones geométricas dejando a un lado las competencias discursivas y poniendo a prueba las competencias estratégicas de los estudiantes en el acto de comunicar para expresar su pensamiento matemático, entre sus pares y resolver problemas no rutinarios.

Es importante resaltar que uno de los indicadores que utilizaron en el estudio relacionado con los modelos, estrategias y enfoques para desarrollar competencias de comunicación matemática, son pertinentes para plantear una de las actividades de la presente investigación desde la aplicación de la geometría.

1.1.6. Analysis mathematical communication skills students in the matter algebra based NCTM [11]

El objetivo de este estudio fue analizar la competencia comunicativa de los estudiantes para resolver problemas de álgebra. El enfoque utilizado es de corte cualitativo con análisis descriptivo. La recopilación de datos se realizó mediante un conjunto de pruebas escritas para resolver ecuaciones de una variable. Los resultados se analizan con base en los indicadores de desempeño de los estudiantes establecidos por la NCTM (2000) y lo establecido por Sumarmo (2013) en lo referente a las capacidades de comunicación matemática de los estudiantes que incluyen: "*conectar los objetos reales, dibujos y diagramas en la idea de las matemáticas; además, explicar ideas, situaciones y*

[11] Paridjo, P., & Waluya, S. B. (2017). Analysis mathematical communication skills students in the matter algebra based NCTM. *IOSR Journal of Mathematics*, *13*(01), 60-66.

relaciones matemáticas oralmente o por escrito con objetos reales, imágenes, gráficos y álgebra; escuchar, discutir y escribir sobre matemáticas; leer con comprensión o escribir una presentación matemática; hacer una conjetura, hacer argumentos, formular definiciones y generalizaciones y describir e indagar sobre las matemáticas que han aprendido"[12].

Los investigadores analizaron la capacidad de los estudiantes para resolver un problema utilizando los pasos Polya entonces, resolvieron cuatro problemas cotidianos de ecuaciones lineales. Esta investigación aborda los componentes del pensamiento algebraico, según Kriegler, y Shelley (2008):

- *"Álgebra como aritmética general: Estrategias de cálculo basadas en conceptos y proposiciones.*
- *Álgebra como lenguaje matemático: El significado de variables y expresión variable; solución de significado; comprender y usar las propiedades del sistema numérico; leer, escribir, manipular números y símbolos usando reglas algebraicas. Usar representaciones simbólicas para manipular fórmulas, expresiones, ecuaciones y desigualdades.*
- *Funciones algebraicas y modelos matemáticos: Encontrar, expresar y generalizar patrones y reglas en el contexto del mundo real; representar ideas matemáticas con ecuaciones, tablas, gráficos o palabras; trabajar con el patrón de entrada y salida"*[13].

Este estudio no evidencia de manera precisa el uso de la competencia comunicativa de los estudiantes en la resolución de problemas en las ecuaciones lineales, iniciando por la formulación de los problemas que son muy algorítmicos y no conducen a heurísticas que potencialicen el desarrollo del pensamiento algebraico según lo planteado por Polya, es decir, las soluciones son en una sola dirección y por lo

---

[12] Qohar, A., & Sumarmo, U. (2013). Improving Mathematical Communication Ability and Self-Regulation Learning of Junior High Students by Using Reciprocal Teaching. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(1), 59-74.

[13] Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. *Retrieved September*, *10*, 2008.p.1-3.

tanto, afecta el proceso de comunicación en el aula de clase; sin embargo tiene unos referentes teóricos muy relevantes que potencializan la investigación deberían realizar un cambio en los problemas propuestos y transformarlos a ser retadores.

1.1.7. Analysis of students' mathematical communication skill for algebraic factorization using algebra block[14]

En esta investigación se analizó las competencias de comunicación matemática de los estudiantes en la factorización algebraica utilizando la herramienta Álgebra block. Los autores de esta investigación consideran que las competencias de comunicación matemática de los estudiantes es la capacidad para comprender, interpretar, expresar, responder y usar símbolos matemáticos que permitan a los estudiantes comunicar las ideas en forma oral y escrita. Ellos relacionan esta capacidad con los aspectos cognitivos y psicomotores. Por ello, el aspecto cognitivo en este estudio es el conocimiento de la factorización algebraica. Mientras que para el aspecto psicomotor se trata de la destreza del estudiante en la aplicación de conocimientos sobre factorización algebraica utilizando la herramienta Álgebra block.

Esto se basa en la Teoría Cognitiva de David Ausubel. Según Ausubel (1983) el tipo de aprendizaje puede ser: "*aprender con descubrimientos significativos, aprender con invención no tiene sentido y aprender a recibir una exposición significativa*"[15]. De los tres tipos de aprendizaje, este estudio toma el tipo de aprender por descubrimiento significativo al combinar el conocimiento que se posee con los materiales de aprendizaje aprendidos. En este caso, los estudiantes entendieron primero la factorización algebraica, luego el conocimiento se combinó con el uso de la herramienta Álgebra block para factorizar de manera más fácil y sin el uso de métodos convencionales.

[14] Disasmitowati, C. E., & Utami, A. S. (2017). Analysis of Students' Mathematical Communication Skill for Algebraic Factorization Using Algebra Block. In *International Conference on Research in Education* (Vol. 20, No. 2, pp. 72-84).
[15] Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*(1-10), 1-10.

Si bien es cierto la factorización es la manipulación algorítmica de operaciones repetitivas y monótonas, por lo tanto, se puede considerar al estudiante en un escenario donde de lo concreto con el uso de la herramienta Álgebra block realiza representaciones, modelos y desde la visualización poder resolver los ejercicios de factorización de manera significativa. Sin embargo, se presenta la dificultad en el proceso operativo de manipulación de las piezas de la herramienta al expresar los objetos matemáticos en diferentes entornos y desde luego al resolver problemas de aplicación del álgebra. De acuerdo con esto, utilizan poco el uso de la competencia comunicativa al comunicar el pensamiento matemático en forma oral o escrita. Es importante que, a partir de herramientas concretas se realicen actividades para el desarrollo del proceso de comunicación en el aula de clase y además al resolver problemas no sólo se interprete, exprese y usen símbolos matemáticos, también que, a través del desarrollo del pensamiento matemático argumente, justifique y demuestre las soluciones de los problemas.

1.1.8. Students' mathematical communication skills in solving STEM problems[16]

Este estudio tiene como objetivo descubrir la competencia comunicativa matemáticas en la resolución de problemas STEM, se llevó a cabo mediante una metodología de enfoque cualitativo, con 20 estudiantes de grado octavo de la región de Sumatra del sur de Indonesia, se aplicaron pruebas de resolución de problemas de sistema de ecuaciones lineales con dos variables relacionados en contextos con la tecnología e ingeniería, además se realizaron entrevistas a cada uno de ellos, con preguntas relacionadas al desarrollo de los problemas, por ejemplo : *"¿Cómo lee, entiende y explica la historia? , ¿Cómo conviertes el problema de la historia en matemáticas?, ¿Por qué usas un símbolo para ese problema matemático?, Después de obtener información de la*

[16] Ardianti, N., Kusmayadi, T. A., & Fitriana, L. (2021, November). Students' Mathematical Communication Skills in Solving STEM Problems. In *International Conference of Mathematics and Mathematics Education (I-CMME 2021)* (pp. 195-202). Atlantis Press.

pregunta, ¿qué hacer?,¿Cuáles son los pasos para resolver el problema?,¿Qué conclusiones sacas con base en las respuestas obtenidas?".[17]

Para facilitar la dimensión de la competencia comunicativa los investigadores tomaron tres categorías de ellas como comunicación simbólica, visual y textual, y a partir de estas se analizaron los datos obteniendo que para aquellos estudiantes que resolvieron problemas simbólicos expresan las situaciones reales dadas en símbolos matemáticos. Mientras tanto, los que resolvieron problemas visuales tienden a expresar la situación de las ideas matemáticas en forma de gráficos, tablas u otras formas. En cuanto a los estudiantes que resolvieron problemas textuales, es más fácil expresar situaciones en lenguaje o símbolos matemáticos.

En conclusión, la metodología de resolver problemas matemáticos por medio STEM, facilita el desarrollo de la competencia comunicativa no solo en la Dimensión, sino también en la caracterización y más a fondo el uso a través de los diferentes lenguajes y utilización de los recursos semióticos y sus representaciones de objetos matemáticos para lograr aprendizajes significativos y una comunicación matemática eficiente.

En este artículo, los investigadores resaltan que aprender de la educación STEM tiene una influencia positiva en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas matemáticos y es relevante en el desarrollo de la comunicación matemática, por lo tanto, es un campo aún por descubrir que posiblemente se usará en la presente investigación para alguna actividad del aporte práctico.

[17] Ardianti, N., Kusmayadi, T. A., & Fitriana, L. (2021, November). Students' Mathematical Communication Skills in Solving STEM Problems. In *International Conference of Mathematics and Mathematics Education (I-CMME 2021)* (pp. 198-199). Atlantis Press.

1.1.9. ¿Cómo influye la habilidad explicativa en la resolución de problemas?[18]

"Un individuo competente en matemáticas será capaz de dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos, de argumentar, de dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz"

MEN (2006)[19]

En este artículo se diseñan experiencias que desarrollan la competencia comunicativa según los indicadores del Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas (NCTM 2000) y algunas habilidades para interpretar, explicar, justificar y argumentar, en especial la competencia explicativa a través de la resolución de problemas de ecuaciones con una, dos o tres variables, en diferentes contextos. Para la resolución de problemas se enfocan en el modelo de Polya (1945) en cuanto al entendimiento del problema; el diseño de un plan; la ejecución del plan y en examinar la solución obtenida.

Los participantes del estudio fueron estudiantes del grado once de una institución pública de Colombia, donde se les aplicó dos instrumentos, una prueba diagnóstica y luego unas actividades de acuerdo al plan de intervención, teniendo como importancia la habilidad explicativa, definida por los investigadores de este estudio como "*La aptitud que tiene un estudiante para exponer la Dimensión del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando él por qué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento"*[20].

Los datos del estudio llevan a determinar que algunos estudiantes realizan análisis equivocados, siendo explicados, sin embargo, a través de la socialización entre sus compañeros lo llevan a corregir

---

[18] Cáliz, S. R. S., Sepúlveda, S. J. R., & Rico, S. E. P. (2015). ¿Cómo influye la habilidad explicativa en la resolución de problemas? *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1*(1), 359-363.
[19] Ministerio de Educación Colombia (2006) Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, Colombia.
[20] Cáliz, S. R. S., Sepúlveda, S. J. R., & Rico, S. E. P. (2015). ¿Cómo influye la habilidad explicativa en la resolución de problemas? *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1*(1), p.31.

esa mala interpretación del problema, entonces una buena explicación implica una adecuada interpretación.

Se resalta en esta investigación el trabajo colaborativo en el aula de clase, sin embargo, de manera implícita no se evidencia ese momento en el que el estudiante encadenadamente argumenta, justifica y demuestra, a través de la explicación consigo mismo y en grupo para comunicar los objetos matemáticos, y así facilitar la resolución de problemas mediante el uso de la competencia comunicativa.

1.2. Comunicación matemática y enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el mundo y Colombia.

1.2.1. How communicative teaching strategies create opportunities for mathematics learning[21]

El objetivo principal de este estudio son las estrategias de enseñanza comunicativa que se utilizan en el aula de matemáticas y lo que pueden ofrecer en términos de oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas.

El marco teórico de este estudio se basa en la teoría de la actividad, propuesta por Engeström (1987); según Rezat & Sträßer (2012) señala que cualquier encuentro con las matemáticas está mediado a través de herramientas materiales como, por ejemplo, texto y reglas, o herramientas no físicas como el lenguaje, las representaciones visuales y los gestos. Además, plantean que una característica importante del modelo de Engeström es que el contexto se ha ampliado con algunos factores mediadores adicionales como comunidad y división del trabajo, para permitir un mejor análisis. Sin embargo, esta investigación se centra en el lenguaje verbal tal como lo utilizan los docentes y los

[21] Engvall, M., Samuelsson, J., & Forslund Frykedal, K. (2015). How communicative teaching strategies create opportunities for mathematics learning. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic* (pp. 1368-1373). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

estudiantes en algunas clases de matemáticas, es decir el lenguaje utilizado para demostrar, explicar y ejemplificar conexiones matemáticas.

Los investigadores tomaron como referencia el instrumento de Löwing (2000) para el análisis de la comunicación en el aula de matemáticas. Löwing hace una distinción entre lenguaje formal e informal para la enseñanza, donde este último se usa, por ejemplo, junto con manipulativos o cuando se toma una situación cotidiana como punto de partida para explicar un cálculo. De acuerdo a lo anterior, este estudio se centró en el lenguaje formal donde Löwing (2000), lo distingue en dos categorías principales de estrategias del lenguaje verbal en el lenguaje de enseñanza formal, el lenguaje descriptivo y conceptual, referente a los procedimientos de cálculo para sumas y restas con números superiores a 20.

El estudio se realizó en cinco aulas entre 24 y 25 estudiantes, las cuales pertenecían a cuatro instituciones de básica primaria con la particularidad que el nivel socioeconómico eran distinto en cada una de ellas. La técnica utilizada fue la observación directa, donde un docente llevaba a cabo toda la actividad en cada aula usando estrategias como preguntas claves o frases que permitieron a los estudiantes crear estructuras al momento de resolver los cálculos, además la escritura en el tablero de las operaciones, el tono de voz, las repeticiones y la reformulación, para facilitar la comprensión y desde luego poner a flote las estrategias de comunicación en el aula.

Los resultados obtenidos, es que las estrategias comunicativas de enseñanza generan oportunidades para desarrollar el lenguaje procedimental o conceptual. Además, del lenguaje formal se observó que los estudiantes utilizaban con más frecuencia el lenguaje descriptivo para desarrollar el lenguaje procedimental que el lenguaje conceptual.

Se considera a partir de este estudio la dificultad del estudiante para el desarrollo del lenguaje conceptual dejando de un lado el uso de los recursos semióticos, simbología y representaciones en el manejo de significados. Se observa que en las estrategias de enseñanza comunicacionales juegan un papel importante el docente, pero falta resaltar en esta investigación también el papel que juega la cultura y el contexto de los estudiantes.

1.2.2. Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU[22]

Este artículo utiliza el marco analítico L-TRU, que fue desarrollado para evaluar cuantitativamente las prácticas de enseñanza que responden al lenguaje. El marco L-TRU se basa en el marco de enseñanza de Schoenfeld (2018) para una comprensión robusta (TRU) de las matemáticas al adaptar las aulas en sus cinco dimensiones que responden al lenguaje, las cuales son: riqueza matemática, demanda cognitiva, acceso equitativo, agencia e identidad y evaluación formativa, luego se extendió con dos dimensiones más, la demanda discursiva y los registros de conexión.

El marco L-TRU se aplicó a 41 clases, las cuales fueron grabadas en video en compañía de 26 maestros que usaron el mismo material con problemas relacionados a porcentajes. Se utilizó una unidad didáctica sensible al lenguaje destinada a fomentar la comprensión conceptual de los porcentajes en el grado séptimo, no obstante, el diseño de la unidad didáctica sigue los principios de estructuras, donde el docente ofrece un tipo particular de apoyo a los estudiantes a medida que aprenden y desarrollan un nuevo concepto o habilidad, la conexión de los registros y las representaciones.

Este estudio es de corte cuantitativo, por lo tanto, la confiabilidad y las correlaciones entre evaluadores confirman que las distintas dimensiones se capturan con confiabilidad. Luego, las dos trayectorias de la unidad didáctica son:

[22] Prediger, S., & Neugebauer, P. (2021). Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 289-304.

1.El aprendizaje conceptual de la unidad didáctica es una adaptación de la Educación Matemática Realista (van den 2003) que se inició con las experiencias y cotidianidad de los estudiantes y se procedió a construir significados para los porcentajes. Luego, se obtuvieron las estrategias informales de los estudiantes para elaborar estrategias de cálculo en problemas estándar. Por último, se terminó con aplicaciones flexibles de conceptos y estrategias aprendidas en contextos más complejos.

2.El aprendizaje conceptual que se entrelaza sistemáticamente con una trayectoria de aprendizaje de idiomas, que comenzó con la vida cotidiana de los estudiantes, luego se discutieron los recursos de las ideas intuitivas para la práctica del discurso que explicó los significados apoyados en el vocabulario (por ejemplo, precio antiguo, precio nuevo, tarifa a pagar) , utilizando marcos de lenguaje , bancos de palabras e indicaciones repetidas del docente en el aula que se conectaron con un vocabulario formal (por ejemplo, cociente, base, cantidad, tasa), logrando informar y justificar los procedimientos. Finalmente se amplío la lectura extendida mientras resuelven problemas de porcentaje más complejos.

Resaltar en esta investigación la diferencia entre el vocabulario formal y el relacionado con el significado es crucial, ya que el vocabulario formal a menudo no es suficiente para la práctica del discurso de explicar los significados. Mientras que los estudiantes que dominan el idioma a menudo encuentran sus propias palabras para explicar los significados, se ha demostrado que los estudiantes con un bajo dominio del lenguaje matemático necesitan compartir vocabulario relacionado con el significado.

Las calificaciones de los episodios muestran que, a pesar del material curricular compartido, se promulgaron una gran variedad de prácticas de orientación, por lo tanto, se encontró una calidad consistentemente alta en las dimensiones Demanda Cognitiva y Acceso Equitativo y una calidad media en los Registros de Conexión. Las dimensiones Agencia, Demanda Discursiva y Evaluación Formativas, muestran la mayor variación entre los estudiantes, siendo la Demanda Discursiva la que más se separa, debido al manejo de vocabulario, donde se tendrá en cuenta en esta investigación desde la competencia discursiva en conjunto con el lenguaje matemático, y la representación de los objetos en la resolución de problemas algebraicos.

1.2.3. Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: a review of the state of development and research[23]

En este artículo se presentan seis principios de diseño de actividades para mejorar el lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas, los cuales se transversalizan con investigaciones de una base empírica sobre las prácticas de enseñanza involucradas en la promulgación de aquellos entornos de aprendizaje, que contribuya al desarrollo de la comunicación matemática en el aula de clase.

El marco teórico abordado en el papel del lenguaje y la interacción de aprendizaje de las matemáticas se resume en cuatro encuestas con respecto al Estudio ICMI de Educación Matemática y la diversidad lingüística (Barwell et al 2016), la encuesta ERME, la encuesta PME sobre el lenguaje en la investigación en educación matemática (Planas, Morgan y Schütte 2018; Radford y Barwell 2016), y la edición de ZDM sobre enfoques teóricos para la investigación del lenguaje en la educación matemática (Planas y Schütte 2018). Los supuestos sobre el papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas dependen de la perspectiva teórica adoptada.

Desde la perspectiva de la educación matemática este artículo se enfoca en aquellas prácticas discursivas, características léxicas y sintácticas, que son medios para comunicar, pensar y aprender temas matemáticos. Esta perspectiva incluye prácticas discursivas propias de la actividad matemática a través, de temas como la discusión, las prácticas del discurso y temas específicos al describir la generalidad de un modelo algebraico o explicar el significado de un concepto matemático.

[23] Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 245-262.

Los investigadores han extraído los siguientes principios para diseñar actividades, tareas y unidades que mejoren el lenguaje para aprender matemáticas como:

1. Para mejorar las habilidades discursivas de los estudiantes en matemáticas, es recomendable diseñar actividades centradas en la escucha, lectura, escritura y habla. Estas deben incluir prácticas como explicar significados, construir argumentos y justificar procedimientos.

2. Se sugiere establecer rutinas de lenguaje matemático que vayan más allá de la escritura de oraciones. Estas rutinas pueden apoyar la retroalimentación del docente y permitir a los estudiantes revisar y perfeccionar su producción lingüística.

3. Diseñar actividades que conecten variedades lingüísticas y representaciones multimodales, relacionando el lenguaje cotidiano, académico, técnico y representaciones gráficas para una comprensión más flexible.

4. Incluir la lengua materna de los estudiantes multilingües en el aprendizaje, aprovechando y ampliando los recursos matemáticos con la repetición de explicaciones en su idioma.

5. Utilizar el macro-andamiaje para secuenciar y combinar oportunidades de aprendizaje de lenguaje y matemáticas, coordinando de manera deliberada en unidades de enseñanza para una comprensión conceptual.

6. Comparar piezas del lenguaje, como forma y función, para aumentar la conciencia lingüística de los estudiantes. La comparación de explicaciones o argumentaciones mejora la comprensión de las especificidades del lenguaje en las aulas de matemáticas.

Estos principios, permiten diseñar actividades, para evidenciar el uso de la competencia comunicativa matemáticas de los estudiantes facilitando la resolución de problemas, a través del lenguaje y el proceso de comunicación en el aula de clase.

1.2.4. La comunicación: eje en la clase de matemáticas[24]

La comunicación es primordial en el conocimiento de las cosas y en las relaciones humanas; por lo tanto, es importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En ese sentido, el artículo desarrolla los aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con un enfoque en la comunicación, entendida como un proceso de interacción social que favorece la negociación de significados, el consenso, el diálogo, la discusión y actividades a través de los cuales se logran importantes procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento matemático, tales como la conjetura y la argumentación en compañía de la competencia comunicativa al hablar, escribir, leer y escuchar.

En este artículo se resalta el trabajo en grupo que permite a cada estudiante demuestre a través de la argumentación si su conjetura es válida o no, y al escuchar los argumentos de sus compañeros, es posible llegar a un consenso repitiendo sus afirmaciones y conjeturas o simplemente estando de acuerdo con la propia conjetura. Lo importante aquí es el proceso que se lleva a cabo para validar una hipótesis hasta convertirla en proposición.

Por otro lado, relacionan algunas teorías del aprendizaje para llevar a cabo la comunicación matemática como, la constructivista, enfocada desde la escuela Piagetiana, donde el docente es el receptor y cuestionador, orientando las diversas interpretaciones de los estudiantes en el aula de clase con el recurso del lenguaje. Otra teoría, la socio- histórica, en donde el docente es el emisor y el estudiante es el receptor atento a la escucha, se encuentra inspirada esta teoría a partir de Vigotsky, por lo tanto, el aprendizaje es una enculturación sobre estructuras sociales preexistentes, siendo el lenguaje una manera de desarrollar el conocimiento, a través de la cultura. Finalmente, la perspectiva interaccionista

[24] Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S., & Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, *1*(2), 173-202.

de la comunicación en la clase de matemáticas, en donde el docente y estudiantes están en diálogo; en esta perspectiva, tanto en los procesos individuales como en los procesos sociales, se da mediante la participación en la negociación de las normas y los significados en clase.

En resumen, este artículo, analiza las diferentes estrategias que hacen de la interacción en el aula un ambiente activo, desde algunos tipos de aprendizaje donde el sujeto está en relación con la cultura; estas estrategias se basan en el uso de espacios de trabajo grupal, discusión y comparación de interpretaciones y narraciones medidas por un lenguaje, aspectos que se tendrá en cuenta en la presente investigación ya que permite evidenciar el desarrollo de la competencia comunicativa en el aula de clase , además es de resaltar el papel que juega el docente en el proceso de enseñanza, con el empleo de la pregunta facilitando el proceso de comunicación, porque en forma rápida puede hacer retroalimentación; es una forma de buscar en los argumentos que se plantean producto de un análisis, que lleva a una eficaz y adecuada comunicación matemática.

1.2.5. Comunicación y argumentación en las clases de matemáticas[25]

El propósito de este artículo es exponer la importancia que tiene el desarrollo de la argumentación, en un ambiente centrado en las estrategias de comunicación como el trabajo en grupo y la heurística solucionador-escucha en el desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas, por lo tanto analizar su uso considerando los elementos de comunicación que se dan en el aula, como la planificación de actividades con esas estrategias y la evaluación de la interacción discursiva en el desarrollo de los procesos argumentativos que ahí se plantean.

Esta investigación surge a partir del problema presente en la enseñanza de cualquier disciplina que es el proceso de *transmisión,* donde el estudiante es el receptor del conocimiento y este a su vez memoriza

[25] Jiménez, A., & Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, *16*, 101-116.

ideas, técnicas y procedimientos, llevando a que en las clases el docente se limite a exponer conceptos y algoritmos que los estudiantes deben aprender y repetir, dejando de lado la argumentación y otros procesos que son esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otro lado, al enseñar matemáticas se deben considerar las actividades de la clase, donde el estudiante puede discutir, pensar, comprender, reflexionar y analizar; pero no puede hacerlo solo, necesita comunicación con los demás y con el docente, de esta manera, la argumentación puede aparecer como un intento de los estudiantes por comprender y hacerse comprender, entonces el docente, es responsable de planificar actividades encaminadas a fortalecer la participación, la discusión y la reflexión a partir de una buena comunicación.

Reflexionado acerca de las estrategias de comunicación, donde se considera que el trabajo en grupo bien utilizado, fomenta la participación de todos los estudiantes a expresar sus opiniones e intercambiar las ideas y la discusión. Cabe destacar que esta estrategia favorece el desarrollo del pensamiento crítico, se vuelve fundamental el hecho de que ellos puedan refutar una afirmación y ofrecer argumentos sólidos. Es precisamente en el aula donde se puede crear un espacio para que los estudiantes desarrollen prácticas de comunicación y argumentación, a través de las cuales no solo expresan sus pensamientos, sino que alcancen un consenso significativo teniendo siempre en cuenta el aporte del otro. Es así cómo se forma y crea una cultura de argumentación y un aula donde el ambiente de aprendizaje se diferencia del aula tradicional de matemáticas.

La segunda estrategia heurística solucionador escucha, consiste en que los estudiantes trabajan en parejas y a cada uno se le asignan tareas específicas, uno como solucionador y el otro como oyente, la función del solucionador es leer un problema o situación dada y resolverlo en voz alta, decir lo que pensó y lo que hizo, para que el oyente tenga la oportunidad de entender lo que hizo; el oyente también puede intervenir para que el solucionador explique, justifique y discuta con claridad durante el proceso de resolución de un problema o presentación de una proposición matemática. El éxito se mide no solo por obtener la respuesta correcta, sino también por explicar lógicamente cada paso para resolver el problema.

Cabe señalar que este método también se puede utilizar para analizar las demostraciones matemáticas, como fortalezas que requieren evidenciar la competencia comunicativa, debido a que exige la interacción y la comunicación a través el uso del lenguaje.

En conclusión, las estrategias como el trabajo en grupo y la heurística solucionadora escucha en actividades de aula, lleva la interacción social, lo que significa negociación, reflexión y regulación del aprendizaje, juegan un papel importante a desarrollar la argumentación en el aula como una práctica discursiva basada en el razonamiento natural y el lenguaje cotidiano para justificar argumentos, defender o refutar ideas.

1.2.6. La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación [26]

Este artículo analiza cómo se entiende la comunicación en el aula de matemáticas. Considerando la comunicación como proceso que permite comprender y crear relaciones de comunicación entre sujetos, con el objetivo de dar un sentido común a lo que se comunica.

Los estudios sobre la dinámica del aula de matemáticas utilizan términos que describen las características de las diferentes formas de comunicación que se dan en el aula, los cuales son:

- Categorías de comunicación:

Brendefur y Frykholm (2000) define cuatro categorías de comunicación en el aula de matemáticas: unidireccional, contributiva, reflexiva e instructiva. La comunicación unidireccional se enfoca en el

[26] Jiménez-Espinosa, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, *10*(1), 121-134.

maestro, lo que hace que las matemáticas parezcan una colección estática de información. En las actividades contributivas, la interacción entre los estudiantes y entre estos y el docente ayuda a encontrar resultados y soluciones a los problemas; la comunicación es informal y de naturaleza correcta. La categoría de comunicación reflexiva comienza con el participante, los estudiantes comparten sus estrategias y soluciones con los compañeros y el docente, quien es claramente el objeto de la discusión. En la categoría de comunicación instructiva la comunicación estudiante-docente, al igual que en la categoría de reflexión, el docente anima a los estudiantes a reflexionar continuamente para cambiar su comprensión imprecisa de un concepto matemático o una interpretación, que le permita al docente comprender mejor los procesos de pensamiento matemático.

- Patrones de comunicación en el aula de matemáticas:

Voigt (1995), este autor identifica dos patrones de comunicación en el aula de matemáticas a los que denomina extracción y discusión. En la extracción el docente ofrece una actividad y espera que los estudiantes encuentren la respuesta y los guíen a la solución; en otras palabras, espera que los estudiantes recopilen pequeñas dosis de información. En el modelo de discusión, los estudiantes resuelven el problema, el docente hace preguntas, hace observaciones y reformula hasta encontrar la solución correcta. En el modelo de discusión, los estudiantes resuelven el problema presentado, hay un lugar para la socialización de las soluciones, la discusión y argumentación sobre lo realizado. En el modelo de extracción la solución al problema es el final, mientras que en el modelo de discusión la solución es el punto de partida.

- Modelos de comunicación en el aula de matemáticas:

Wood (2003), establece dos modelos en el aula de matemáticas con dos formas de comunicación: convencional y reporte de estrategias. En la comunicación convencional el docente suele plantear una pregunta o problema, pide al estudiante que responda, evalúa la respuesta o proceso como correcta o incorrecta, y si es incorrecta, pregunta a otro estudiante; no hay espacio para discutir por qué la respuesta es incorrecta o en qué punto del proceso falló. Wood afirma, que aquí solo hay una interacción escasa y trivial, ya que sigue un patrón típico de evaluación de respuesta del estudiante y es una interacción que se enfoca en el docente y la naturaleza del tema y los estudiantes solo tienen que llenar un espacio; es decir, dar una respuesta, o por el contrario, si el estudiante no contesta, el profesor llena el vacío con la respuesta que tenía en mente.

Wood (2003) identifica en el modelo de reporte estratégico que el motivo de la razón crítica es el espacio para soluciones detalladas, experiencias, hechos y procesos para resolver un problema o encontrar una respuesta. En esta forma de comunicación hay corresponsabilidad, reconocimiento, comprensión, implementación y construcción colectiva. Aquí, la evaluación se trata como un proceso de preguntar y dar respuestas razonadas a diferencia del modelo tradicional de simplemente hacer preguntas, dar respuestas y luego calificar.

- Ambientes de aprendizaje:

Bauersfeld (1995) identifica tres ambientes de aprendizajes: individualista, interaccionista y colectivista. En un ambiente individualista, el sujeto (el estudiante) es el único actor responsable de su propio aprendizaje, y los significados se crean en su mente, individualmente. En un ambiente colectivista, el aprendizaje es la enculturación de estructuras sociales ya existentes, y los significados son atributos de la mente colectiva de una sociedad históricamente formada y se crean a través del lenguaje. En un ambiente interaccionista, los significados se constituyen en la interacción de los individuos como manifestación de la cultura.

- Espacios de comunicación en el aula de matemáticas:

Sierpinska y Lerman (1996), identifican tres modos de comunicación en el aula de matemáticas vinculados a tres escuelas de pensamiento y teoría: el constructivismo, el enfoque sociohistórico y el interaccionismo. Para el constructivismo propone la metáfora “los estudiantes hablan, el docente escucha” y aprender es sinónimo de los procesos de asimilación y modificación de las estructuras cognitivas del estudiante. Según una visión sociohistórica, "los docentes hablan, los alumnos escuchan" y el aprendizaje es enculturación; y en el interaccionismo la metáfora es "docentes y estudiantes en diálogo", con procesos tanto individuales como sociales creando significado.

- . Ambientes de aula:

Cobb, Perlwitz Underwoody Gregg (1998), identifica dos ambientes de aula: tradicional y micro-cultural. En un entorno tradicional, el docente encarna la autoridad de las matemáticas. En el ambiente de micro-cultural del salón de clases, el docente y los estudiantes crean esta micro-cultural a través de la interacción. Este entorno fomenta la investigación matemática en una comunidad de aprendizaje. En esta última aula, hay dos niveles de trabajo, uno de los cuales es la exploración de interpretaciones, respuestas y supuestos; y otra sobre su análisis, evaluación, discusión y evaluación.

A partir de la comunicación verbal, según Forrest (2008) la comunicación puede tener tres lógicas diferentes en la formación de mensajes los cuales son:

- *“Expresivo: cuando un estudiante pregunta en la clase de matemáticas, el docente responde desde su saber y experiencia.*
- *Convencional: el docente de matemáticas que sigue la lógica de diseño convencional de comunicación se centraría en el uso de normas convencionales y prácticas de las matemáticas; aunque puede escuchar las respuestas de los alumnos, se mueve en la dirección que considera, y así puede no tener en cuenta ni las respuestas, ni las preguntas de sus estudiantes.*

- *Retórico: una comunicación exitosa en el aula es aquella donde el docente es facilitador de la interlocución y negociación de lo que interpretan los estudiantes; los alienta al diálogo y estimula la negociación para la comprensión matemática"*[27].

Se observa cómo, a pesar de las diferencias en los nombres de las formas de ver una buena comunicación en la clase de matemáticas, coinciden en un tipo de clase donde se escuchan y analizan las respuestas de todos, hay un lugar para la argumentación y la demostración y la evaluación adquiere su verdadero significado como otra oportunidad de aprendizaje. Una clase con estas características se convertiría en una comunidad de aprendizaje comprometida con la práctica del discurso matemático.

1.3. Aula invertida y aprendizaje de las matemáticas

1.3.1. A needs analysis of flipped classroom-based mathematics learning model[28]

Esta investigación realiza primero un reconocimiento de las situaciones del aprendizaje de los estudiantes y las estrategias didácticas realizadas por los docentes en las aulas de matemáticas en 10 escuelas de secundaria en Java Central y la provincia de Yogyakarta en Indonesia. El estudio es de corte cualitativo y enfoque descriptivo que utiliza herramientas de recopilación de datos en hojas de observación, pautas de entrevista, documentación y discusiones de grupos focales.

Los resultados mostraron que el tiempo de aprendizaje de las matemáticas en las escuelas era limitado, por lo que el docente no podía transmitir el material de manera completa. Además, los docentes tienden a utilizar el método de práctica de preguntas para resolver problemas, pero la comprensión de los estudiantes aún no es óptima. De acuerdo a esto, los resultados fueron clasificados para identificar las necesidades de los estudiantes de un modelo más efectivo en el aprendizaje de las matemáticas, entonces propusieron el desarrollo de un modelo de aula invertida que pudiera superar las dificultades

---

[27] Forrest, D. B. (2009). Communication Theory Offers Insight into Mathematics Teachers' Talk. *The Mathematics Educator*, *18*(2).

[28] Rochmiyati, S., Wijayanto, Z., & Supriadi, D. (2020). A needs analysis of flipped classroom-based mathematics learning model. *PalArch's Journal of Archaeology of Egypt/Egyptology*, *17*(5), 69-93.

en el proceso de aprendizaje y mejorar las competencias de los estudiantes en razonamiento, comunicación y pensamiento crítico.

El proceso de aprendizaje rompe con los esquemas de la educación tradicional, cuyo propósito se tiene para esta investigación y lograr mediante la metodología de aula invertida evidenciar en la resolución de problema algebraico el uso de la competencia comunicativa.

1.3.2. How to flip the classroom in school students' mathematics learning: bridging in- and out-of class activities via innovative strategies[29]

Esta investigación realizada durante un año con un enfoque de estudio de caso, involucró a 37 estudiantes del grado 9 cuyos objetivos fueron indagar sobre cómo adoptar varias estrategias innovadoras en el aula invertida y qué efecto tienen para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, y analizar las percepciones de los estudiantes sobre la adopción de estas estrategias en las prácticas pedagógicas. Para encontrar los detalles sobre cómo se invirtió la clase, se trabajó con el tema de puntos, ángulos, líneas y planos.

En este estudio, se adoptaron tres estrategias innovadoras:

1. Se propuso un marco pedagógico 5-D propuesto del aula invertida, que comprende descubrir, diagnosticar, idear, desarrollar y defender. El marco pedagógico del aula invertida constaba de dos fases: fases fuera del aula y fases dentro del aula. En la fase fuera de clase antes de que comenzara un nuevo tema, los estudiantes participaron en la actividad 'Descubrir', en la que desarrollaron una comprensión inicial de los conceptos matemáticos a través de videoclips proporcionados por el docente utilizando diversas tecnologías. En esta fase, los estudiantes realizaron actividades de aprendizaje individual con apoyo del docente principalmente a través de WhatsApp. En la fase

[29] Song, Y. (2020). How to flip the classroom in school students' mathematics learning: bridging in-and out-of-class activities via innovative strategies. *Technology, Pedagogy and Education*, *29*(3), 327-345.

presencial, la actividad "Diagnóstico" se diseñó para adaptarse a la naturaleza del aula invertida en la que el docente ayudaba a los estudiantes a diagnosticar y corregir conceptos erróneos encontrados en su aprendizaje fuera de clase. Esto fue seguido por la actividad 'Diseñar', donde los estudiantes fueron introducidos a una tarea de resolución de problemas con un mayor nivel de dificultad que en la lección previa e hicieron planes para resolver los problemas. Luego, en la actividad 'Desarrollar', los estudiantes implementaron sus planes para generar hallazgos relacionados con la indagación del problema. Finalmente, en la actividad 'Defender', los estudiantes justificaron y presentaron sus hallazgos, y reflexionaron sobre lo que habían aprendido en el proceso. En esta fase, la indagación matemática de los estudiantes se promulgó en gran medida en actividades grupales con la facilitación del docente a través de la comunicación cara a cara. El proceso de aprendizaje giró alrededor de varias aplicaciones y una plataforma en línea llamada Schoology.

2. Facilitación docente: Antes de la enseñanza en clase, la facilitación del docente estaba disponible mediante el uso de la plataforma de redes sociales como WhatsApp y uso en la plataforma de aprendizaje en línea Schoology. En la enseñanza en clase la facilitación de los docentes se realizó utilizando las aplicaciones en iPad: Skitch, una aplicación de anotación, Keynote, una aplicación para hacer PowerPoint y la función de cámara para tomar fotografías.
3. Uso de la tecnología: El uso de tecnología en este estudio antes de la clase incluyó: uso de códigos QR y videoclips y uso de dispositivos móviles y otras tecnologías. Durante la enseñanza y el aprendizaje en clase, el uso de la tecnología incluyó: el uso de códigos QR y videoclips, uso de Airplay y uso de las aplicaciones de Skitch, Keynote y la función de cámara en iPad.

Esta investigación arroja la importancia de diseñar e implementar el aula invertida en las aulas de matemáticas respaldada por teorías constructivistas sociales que combinan actividades dentro y fuera del aula de manera integral utilizando el marco pedagógico 5-D (Descubrir, Diagnosticar, Idear, Desarrollar y Defender),permitiendo desarrollar el pensamiento matemático y la comunicación matemática a través del discurso y la interacción tecnológica, manejado diferentes lenguajes, representaciones, símbolos de los objetos matemáticos que contribuye a potencializar la competencia comunicativa en el aula de clase.

Por otro lado, promover el uso innovador de las tecnologías digitales especialmente las tecnologías móviles en el diseño pedagógico del aula invertida en actividades dentro y fuera de clase para acceder a los videoclips, hacer cuestionarios, facilitar la interacción entre el docente y los estudiantes antes de la clase, usando varias aplicaciones en clase para resolver conceptos erróneos de los estudiantes, hacer anotaciones y presentar el trabajo grupal en clase, lleva a potencializar el aprendizaje y a resolver problemas acertadamente en diferentes contextos.

1.3.3. The utility of a flipped classroom in secondary mathematics education [30]

Las aulas invertidas sirven como un nuevo enfoque pedagógico para la enseñanza y el aprendizaje, lo que implica cambiar la educación tradicional centrada en el docente. A diferencia del modelo de aula tradicional, el aula invertida permite a los estudiantes comprender mejor las clases mientras aprenden a su propio ritmo y mejoran sus habilidades de comunicación entre compañeros. Al mismo tiempo, los docentes tienen la oportunidad de extender el tiempo de discusión en clase a través de una sesión más interactiva entre los estudiantes.

En este trabajo, se realizó un estudio de caso en Barstow High School (Barstow, California) y participaron 91 estudiantes de grado 10 y 11 los cuales se dividieron en dos grupos experimental (aula invertida) y control (educación tradicional), con el objetivo de evaluar la implementación de aulas invertidas en la educación matemática a partir de una interacción de factores como el género, la etnia y

[30] Esperanza, P. J., Himang, C., Bongo, M., Selerio Jr, E., & Ocampo, L. (2021). The utility of a flipped classroom in secondary Mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-34.

la actitud de los estudiantes.

Los resultados revelaron una diferencia significativa en el rendimiento de la prueba previa de los estudiantes en matemáticas entre los géneros en el grupo experimental, ya que los hombres con un (62%) son más habilidosos que las mujeres al momento de utilizar las herramientas tecnológicas, no hubo ninguna diferencia significativa en el grupo de control. Tampoco hay una diferencia significativa en el desempeño de los estudiantes antes de la prueba en los métodos de enseñanza para estudiantes de diferentes orígenes étnicos. Además, no se encontraron diferencias significativas en los grupos de género y etnicidad en los dos métodos de enseñanza en función de su rendimiento posterior a la prueba. En la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, existe una diferencia significativa en la puntuación ATMI media en la subescala de disfrute en el grupo control y también es similar en las subescalas de valor, disfrute y confianza en sí mismo en el grupo experimental. Sin embargo, hay un cambio significativo en los estudiantes en las actitudes hacia las matemáticas para los grupos de género y etnia en ambos métodos de enseñanza. Además, se observó una percepción positiva por parte de los estudiantes sobre el uso y utilidad del modelo de aula invertida y como consecuencia mejoró el canal de comunicación dentro del aula, lo que les permitió desarrollar el pensamiento matemático.

1.3.4. A comparison of flipped learning with gamification, traditional learning, and online independent study: the effects on students' mathematics achievement and cognitive engagement[31]

En este estudio se analiza el rendimiento matemático y compromiso cognitivo en estudiantes de grado 9 de una escuela de secundaria de Hong Kong, que fueron preparados durante un año escolar para

[31] Lo, C. K., & Hew, K. F. (2020). A comparison of flipped learning with gamification, traditional learning, and online independent study: the effects on students' mathematics achievement and cognitive engagement. *Interactive Learning Environments*, *28*(4), 464-481.

participar en la prueba oficial de matemáticas de las Competiciones y Evaluaciones Internacionales para Escuelas (ICAS), bajo tres enfoques de aprendizaje diferentes: aprendizaje tradicional, aprendizaje invertido con gamificación y estudio independiente en línea con gamificación.

Las teorías centrales que sustentan el aprendizaje invertido con diseño de gamificación se basaron en los primeros principios de la teoría de la instrucción y la autodeterminación.

Donde, los principios de la teoría de la instrucción planteada por Merrill (2000) son:

(1) "El aprendizaje se promueve cuando los estudiantes se dedican a resolver problemas del mundo real (principio centrado en el problema).

(2) El aprendizaje se promueve cuando el conocimiento existente se activa como base para el nuevo conocimiento (principio de activación).

(3) El aprendizaje se promueve cuando el nuevo conocimiento se demuestra al estudiante (principio de demostración).

(4) El aprendizaje se promueve cuando el estudiante aplica nuevos conocimientos (principio de aplicación).

(5) El aprendizaje se promueve cuando los nuevos conocimientos se integran en el mundo del estudiante (principio de integración)"[32].

Estos principios se usaron para realizar las actividades en la clase invertida, por lo tanto, las actividades de aprendizaje previas a la clase se ubicaron en la plataforma Moodle. Los estudiantes primero repasaron los conocimientos previos (activación) y aprendieron algunos conocimientos básicos (demostración) antes de la clase viendo videos creados por los docentes y haciendo ejercicios de seguimiento en línea (aplicación) y discusiones grupales con ejercicios de resolución de problemas más avanzados (integración y centrados en problemas). Para analizar el

[32] Merrill, M. D. (2002). First principles of instruction. *Educational technology research and development*, *50*(3), 43-59.

compromiso de los estudiantes en el aprendizaje de aula invertida usaron la teoría de autodeterminación de Ryan y Deci (2000)[33] centrada en la motivación del sujeto, ya que en aula invertida los estudiantes son más autónomos, libres de invertir más tiempo en el aprendizaje autodirigido, así como en actividades de aprendizaje práctico y colaborativo.

Para la clase de estudio independiente en línea, todas las actividades se entregaron en línea a través de la plataforma Moodle. Los estudiantes estudiaron de forma remota para el curso viendo conferencias en video y haciendo ejercicios en línea. Los ejercicios de resolución de problemas se completaron de forma independiente. Se programaron consultas presenciales para aclarar dudas. En la clase tradicional, el tiempo de clase se dedicó a conferencias dirigidas por el docente sobre temas básicos y avanzados junto con práctica. De vez en cuando, una parte del tiempo se dedicaba a discusiones grupales sobre los problemas más avanzados. Los ejercicios de resolución de problemas se asignaron principalmente como tarea.

Se utilizó un enfoque de métodos mixtos con métodos cuantitativos (es decir, pruebas y una tarea opcional) y métodos cualitativos (es decir, entrevistas con estudiantes). Los resultados de la prueba indican que los estudiantes de la clase invertida superaron significativamente a los de las clases tradicionales y de estudio independiente en línea. Además, el aprendizaje invertido con gamificación promovió el compromiso cognitivo de los estudiantes mejor que los otros dos enfoques. Los hallazgos de las entrevistas a los estudiantes sugieren que las interacciones entre pares dentro del aula invertida fueron fundamentales para promover el rendimiento matemático y el compromiso cognitivo de los estudiantes, a diferencia de los recursos de aprendizaje en línea y la gamificación.

En resumen, el aula invertida permite brindar herramientas que desarrollan de manera individual y

[33] Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American psychologist*, *55*(1), 68.

colaborativa el pensamiento matemático, superando barreras en el aprendizaje de manera dinámica, autónoma y con responsabilidad, siendo muy pertinente en el manejo de la tecnología y sus lenguajes de comunicación, usando la competencia comunicativa en el acto de comunicar de manera adecuado, precisa y eficiente.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 1

En las investigaciones leídas y citadas se destaca la importancia del desarrollo de la competencia comunicativa en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia se convierte en un facilitador clave que permite a los estudiantes resolver problemas en diferentes contextos.

Sin embargo, es importante resaltar que el desarrollo de la competencia comunicativa en el aula requiere de una sólida fundamentación epistemológica. De esta manera, la comunicación en el aula no solo debe ser efectiva, sino también de alta calidad. Un estudiante que puede comunicar claramente la solución de problemas a sus compañeros y profesores demuestra habilidades tanto en la expresión oral como escrita, así como en la escucha activa y la lectura comprensiva.

En este contexto, se destaca la interacción en grupos que desempeña un papel fundamental. Esta interacción brinda la oportunidad de poner en práctica la competencia comunicativa, lo que a su vez fomenta el desarrollo del pensamiento matemático. Los estudiantes pueden argumentar, justificar y demostrar sus soluciones a problemas a través del discurso y el lenguaje matemático en sus diferentes representaciones. La interpretación de los conceptos matemáticos se moldea de acuerdo con la cultura y los contextos individuales de los estudiantes.

El papel del docente en este proceso es de suma importancia. Las estrategias implementadas por el docente deben motivar y crear espacios donde los estudiantes se sientan cómodos expresando sus ideas matemáticas y debatiéndolas con sus compañeros y el docente.

Además, el uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de aula invertida es esencial. Estas herramientas permiten a los estudiantes acceder a diversos recursos en línea que enriquecen su aprendizaje. Las capacidades cognitivas, visuales y comunicativas se ponen en juego, lo que facilita la manipulación y construcción de objetos matemáticos. Esto, a su vez, contribuye al entendimiento de los conceptos y a la adopción de estrategias efectivas para resolver problemas.

Para concluir, es fundamental tener en cuenta algunas tendencias importantes en la relación entre la competencia comunicativa, la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas, así como el uso del aprendizaje aula invertida, según la revisión de la literatura en el estado del arte:

- El desarrollo de las competencias lingüísticas y discursivas es de suma importancia en el aprendizaje de las matemáticas, ya que estas competencias facilitan la resolución de problemas.
- Los modos de comunicación oral y escrita en el aula de matemáticas están relacionados con tres enfoques pedagógicos claves: el constructivismo, el enfoque sociohistórico y el interaccionismo.
- El uso de la competencia comunicativa, que implica la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático, permite la argumentación y justificación del pensamiento matemático en la resolución de problemas.
- Existe un creciente interés en la utilización de herramientas tecnológicas y virtuales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Las actividades en el aula tienden a ser más prácticas y experimentales, lo que fomenta el trabajo autónomo y la autorregulación del aprendizaje por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se exponen los referentes teóricos que contribuyen a la ejecución del presente estudio mediante las siguientes categorías: Competencia comunicativa, aula invertida, aprendizaje del álgebra y resolución de problemas.

Se realiza una revisión del origen, evolución y tipos de la competencia comunicativa y estás como papel fundamental en el lenguaje de las matemáticas, para el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente parcial de aula invertida y los cambios de la comunicación matemática en la era digital dentro del aula de clase, en el momento de resolver problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas retadores, en diferentes contextos.

2.1. Competencia comunicativa y el aprendizaje de las matemáticas

La comunicación es el proceso en donde se presenta el intercambio de ideas, opiniones, sentimientos, entre el emisor y el receptor, mediante mensajes con códigos que debe ser decodificado por el receptor, para comprender lo que quiere decir el emisor. Por lo tanto, se caracteriza por ser efectiva por parte del emisor cuando el receptor comprenda el mensaje con claridad.

La competencia comunicativa, definidas por Hymes (1972, citado por Prado 2011), se refiere a *"aquello que un hablante necesita saber para comunicarse de manera eficaz en contextos socialmente significativos. Al igual que el término de Chomsky, que se toma como modelo, la competencia comunicativa se refiere a la habilidad de actuar. Se pretende distinguir entre lo que el hablante conoce –cuáles son sus capacidades- y cómo actúa en instancias particulares. Sin embargo, mientras los estudiosos de la competencia lingüística intentan explicar aquellos aspectos de la gramática que se creen comunes a todos los seres humanos independientemente de los condicionantes sociales, los estudiosos de la competencia comunicativa tratan a los hablantes como miembros de unas* *comunidades, que desempeñan ciertos papeles, y tratan de explicar su uso lingüístico para auto-identificarse para guiar sus actividades*”[34].

Podemos decir, que la competencia comunicativa está condicionada socioculturalmente, por lo que incluye un conjunto de normas que la persona adquiere durante su socialización. Además, los estándares de comunicación varían según las culturas y de un grupo a otro. Cuando interactuamos con diferentes personas en diferentes contextos, sobre diferentes temas, descubrimos y adaptamos las reglas apropiadas para las diferentes situaciones de comunicación que enfrentamos. Así, el término Competencia comunicativa pasa del conocimiento del código de la lengua a la capacidad de saber qué decir, a quién, cuándo y cómo decirlo. Entonces, cuando aprendemos a hablar, no solo captamos la gramática de un idioma, sino que también aprendemos sus diferentes registros y cómo usarlos de acuerdo con nuestro entorno sociocultural.

2.1.1. La naturaleza de la competencia comunicativa

En la década de 1970, Argyle y sus colegas propusieron un modelo general de conducta de interacción hábil que sugería que las personas alcanzaran objetivos sociales a través de una secuencia de pasos como la percepción del entorno, un proceso que implica atención, interpretación, etc.; la traducción de la percepción en desempeñó, un paso que incluye la resolución de problemas y la toma de decisiones y las respuestas motoras que lleva a la generación de conducta. Trabajando a partir de este modelo, Argyle fue capaz de especificar varias fuentes de déficit de competencias e identificar cualidades como la expresividad, la gratificación, asertividad, etc., que distinguen los comportamientos de interacción competentes de los inadecuados. Además, reconocieron el modelo de que las personas podrían ser entrenadas para emplear respuestas perceptivas, cognitivas y conductuales más apropiadas.

---

[34] Prado Aragonés, J. (2011). *Didáctica de la lengua y la literatura para educar en el siglo XXI.* (2ªed.). Madrid: Editorial La Muralla, p.72.

Otro estudio de competencia comunicativa, también de la década de 1970 es el de John Wiemann sobre la naturaleza de la competencia comunicativa, el cual enfatizó que la competencia es una construcción diádica en el sentido de que el comunicador competente no solo es capaz de lograr sus propios objetivos, sino también de hacerlo de una manera que satisfaga a la otra parte en la conversación. En la formulación de Wiemann se identifican cinco dimensiones de competencia: (1) empatía, (2) afiliación y apoyo, (3) relajación social, (4) flexibilidad conductual, (5) habilidades de manejo de interacción (es decir, manejar interrupciones, tomar turnos), etc.

Se observa que hay una serie de perspectivas teóricas diferentes sobre lo que realmente implica la competencia comunicativa. En parte esta diversidad de perspectivas surge del hecho de que las propiedades o características de una determinada muestra de comportamiento pueden codificarse en varios niveles de abstracción.

Es posible postular una jerarquía aproximada de niveles de análisis comúnmente reflejados en los modelos de lo que constituye la competencia comunicativa, por lo tanto;

- *"En el primer nivel los modelos en competencia comunicativa enfatizan que la comunicación se caracteriza por ser efectiva y adecuada. Es decir, el comunicador competente es capaz de lograr sus objetivos mientras actúa de manera socialmente apropiada. No se consideraría competente a una persona que es eficaz en el logro de sus objetivos, pero lo hace a través de amenazas, intimidaciones, mentiras, etc.*
- *Un segundo nivel para pensar sobre lo que constituye la habilidad de comunicación se deriva de perspectivas teóricas que enfatizan que todas las interacciones sociales implican la presentación de la "realidad social", incluidas las identidades de los interactuantes, la naturaleza de su relación y la definición del entorno social. El comunicador habilidoso, entonces, es sensible a las implicaciones de su propia presentación de la realidad social, las*

formas en que la perspectiva del otro puede ser diferente y las formas de acomodar esas diferencias o negociar una perspectiva mutuamente aceptable.

- *En el tercer nivel, la competencia comunicativa son las opiniones que enfatizan las propiedades generales del comportamiento que son más o menos hábiles. Es este nivel de abstracción en la codificación del comportamiento lo que tiende a reflejarse en la caracterización cotidiana de las personas de sus propias acciones y las de los demás hay muchas de estas dimensiones generales relevantes para la habilidad de comunicación, y lo que se considera hábil varía en cierta medida con la cultura y el contexto, pero entre las teorías que se centran en este nivel de análisis, a menudo se da énfasis a cualidades como ser un orientador a los demás, es decir, atento y sensible al otro, ser afirmativo (positivo y de apoyo en lugar de cáustico y castigador), ser flexible (creativo y adaptable), ser fluido y ser relajado y sereno.*
- *Un cuarto nivel reflejado en las caracterizaciones de la competencia comunicativa se enfoca en las capacidades de procesamiento de información requeridas para actuar de manera efectiva y apropiada. Estas actividades mentales incluyen aquellas relacionadas con asimilar y dar sentido al entorno de estímulo y aquellas involucradas en la producción de comportamiento. Por lo tanto, en el lado del procesamiento de entrada del sistema, los componentes clave de la competencia incluyen la asignación de atención a los estímulos relevantes como, la escucha, la comprensión, la categorización social y la toma de inferencias apropiadas. Con respecto a la producción conductual, el comunicador competente es capaz de planificar y elegir entre alternativas conductuales, monitorear y editar su comportamiento y traducir conceptos abstractos de qué hacer y decir en comportamientos verbales y no verbales reales e inteligibles.*
- *Un último nivel de análisis visto en las concepciones de la competencia comunicativa, mencionado Argyle (1976) se centra en las características manifiestas del comportamiento,*

por ejemplo, la velocidad del habla, la aparición de falta de fluidez, dirección y duración de la mirada, discrepancias entre canales de mensajes, entre otros"[35] .

2.1.2. Consideraciones sobre la competencia comunicativa

De acuerdo con la naturaleza de la competencia comunicativa y sus teorías, esta tesis adaptará el modelo propuesto por Canale (1983), el cual la divide en cuatro componentes la competencia comunicativa:

- *"La competencia gramatical o lingüística: todo lo relacionado con el dominio del código lingüístico y constituida por el conocimiento de las características y reglas del lenguaje (vocabulario, pronunciación y ortografía).*
- *La competencia discursiva: alude al modo en que se combinan las formas gramaticales y significados para lograr un texto hablado o escrito en diferentes géneros.*
- *La competencia sociolingüística: se encarga de la adecuación de la forma del mensaje y de las palabras que lo integran en los diferentes contextos comunicativos, en función de la situación de los participantes, sus intenciones comunicativas y las convenciones y normas de interacción.*
- *La competencia estratégica: consiste en el dominio de estrategias de comunicación verbal y no verbal utilizadas para compensar los fallos en la comunicación o favorecer la efectividad de la misma"*[36].

De acuerdo, con las componentes se observa una diferencia entre el uso de la lengua y el manejo de competencias en la resolución de problemas, por lo tanto, en el aula de clase de matemáticas, el emisor (estudiante o docente) no necesariamente requiere del código lingüístico con el buen uso de signos,

[35] Littlejohn, S. & Foss, K. (Eds.). (2009). *Encyclopedia of communication theory* (Vol. 1). Sage, p. 137-138.
[36] Canale, M. (2014). From communicative competence to communicative language pedagogy. In *Language and communication* (pp. 14-40). Routledge.

sino la importancia de comprender las competencias para que su uso sea adecuado en el proceso de aprendizaje de las matemáticas para la resolución de problemas en diferentes situaciones.

La comunicación matemática juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues permite que el estudiante comprenda significados, símbolos, representaciones de manera escrita u oral, mediante un discurso interactivo, participativo y argumentativo, permitiendo el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático.

El consejo Nacional de Docentes de Matemáticas (NCTM 2000), propuso que los estándares del plan de estudio de matemáticas como medio de comunicación para el grado 8°, los siguientes:

1. Modelar la situación de forma escrita u oral, las estrategias reales, imágenes, gráfico y álgebra.
2. Reflexionar y aclarar su propio pensamiento sobre las ideas matemáticas y su relación.
3. Desarrollar una comprensión de las ideas matemáticas en reglas y definiciones.
4. Utilizar la capacidad de leer y escuchar para interpretar y evaluar ideas matemáticas.
5. Discutir ideas matemáticas, hacer conjeturas y argumentos convincentes[37].

Para determinar el alcance de la competencia comunicativa matemáticas, según El Consejo de Profesores de Matemáticas (NCTM 2000), requirió los siguientes indicadores:

1. Organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación.
2. Comunicar su pensamiento matemático de manera coherente (ordenada lógicamente) y claro a sus compañeros, docente y otros.
3. Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias utilizadas por otra persona.
4. Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas correctamente.

[37] Rowan, Thomas, and Barbara Bourne. *Thinking Like Mathematicians: Putting the NCTM Standards into Practice. Updated for Standards 2000*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912, 2001.

El aula de clase es un espacio de interacción social y cultural, por lo tanto, los estudiantes desde su lenguaje expresan lo que piensan, a partir, de un lenguaje natural, que mediante el aprendizaje es transformado en un lenguaje formal o técnico, relacionado con el contexto o diferentes situaciones problema que se proponen como ejes dinamizadores retadores contribuyendo al aprendizaje significativo ,por lo tanto, la comunicación en el aula de matemáticas se evidencia en el discurso entre estudiantes o estudiante y docente, usando diferentes tipos de lenguaje que al final se interrelacionan para llevar a cabo la actividad matemática al expresar el pensamiento matemático en la resolución de problemas algebraicos.

2.2. El pensamiento algebraico en la educación

2.2.1. Estudios sobre el pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico representa una habilidad esencial en el ámbito de las matemáticas, y va más allá de la simple manipulación de símbolos y números. Este proceso implica la comprensión de patrones, relaciones y estructuras algebraicas, así como la capacidad de generalizar operaciones aritméticas y abordar cantidades desconocidas a medida que se vuelve más complejo.

Según la NCTM (2000), el pensamiento algebraico se clasifica en cinco categorías fundamentales: (a) la capacidad de generalizar y formular operaciones aritméticas, (b) la destreza para manipular y transformar problemas de igualdad específicos mediante operaciones inversas y la sintaxis principal, (c) el análisis de estructuras matemáticas, (d) la comprensión de relaciones y funciones que involucran tanto números como letras, y (e) el uso del lenguaje algebraico y su representación.

Estas cinco categorías ofrecen una estructura sólida para la enseñanza y el aprendizaje efectivos del pensamiento algebraico, permitiendo a los docentes abordar diferentes aspectos de esta habilidad esencial y ayudando a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda y una fluidez en el lenguaje algebraico que les servirá en su camino académico y en la resolución de problemas en la vida cotidiana. La comprensión de estas categorías y su aplicación práctica en el aula pueden contribuir significativamente a fortalecer las habilidades matemáticas de los estudiantes y prepararlos para un futuro lleno de desafíos intelectuales y profesionales.

Según Kamol (2005), los elementos fundamentales del pensamiento algebraico comprenden tres destrezas esenciales: notación, modelo (patrón) y variable. En cuanto a la notación, se refiere a la habilidad de utilizar tablas, gráficos, símbolos y otros elementos presentes en el problema. El modelo implica la capacidad de generalizar y formular patrones, mientras que la variable se relaciona con la habilidad de comprender el papel de la variable en contextos de números generalizados.

Numerosas investigaciones se han llevado a cabo acerca de la naturaleza del pensamiento algebraico, centrándose en lo que los individuos hacen y cómo evoluciona su capacidad de generalización y uso de símbolos. Lins (1992), el pensamiento algebraico se refiere "*al proceso de cambiar de contextos reales o matemáticos a una estructura abstracta, implicando el desarrollo de la capacidad humana para comprender y emplear símbolos*"[38]. Similarmente, Kaput (2008) ha argumentado que el pensamiento algebraico abarca dos aspectos esenciales:

"1. La capacidad de difundir y expresar generalizaciones cada vez más amplias utilizando sistemas de símbolos tradicionales.

2. El razonamiento con formas simbólicas, que incluye manipulaciones sintácticas dirigidas de estas formas"[39].

[38] Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Doctoral dissertation, University of Nottingham).

[39] Kaput, J. J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning?* In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades*. Taylor & Francis Group.

De acuerdo con Mason (2008), al iniciar la exploración de los números, los niños presentan una curiosidad natural que los docentes pueden aprovechar para orientar el proceso de construcción de significado hacia el pensamiento algebraico. En este sentido, el pensamiento algebraico se desarrolla a partir del reconocimiento aritmético de patrones numéricos que los niños comienzan a generalizar. Con el tiempo y una enseñanza específica, el pensamiento algebraico temprano se vuelve más sofisticado.

Carpenter y Levi (2000) proporcionaron una definición de pensamiento algebraico que abarca dos componentes*:*

"a) la capacidad de hacer generalizaciones

b) el uso de símbolos para representar ideas matemáticas y resolver problemas"[40].

Kaput (2008) adoptó esta definición de Carpenter y Levi (2000) como un marco conceptual en sus estudios, clasificando el pensamiento algebraico en dos aspectos distintos: la simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones, y el razonamiento sintáctico y las acciones relacionadas con generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales. Argumenta que el álgebra es un producto cultural, incorporado en los sistemas educativos de todo el mundo, mientras que el pensamiento algebraico es una actividad humana que precede al álgebra como disciplina. En la escuela, el álgebra se divide en dos aspectos principales. Primero, está la creación y generalización sistemática de conceptos en sistemas de símbolos cada vez más rigurosos. En segundo lugar, implica realizar operaciones guiadas sintácticamente en ecuaciones. Señala que estos aspectos están presentes en las tres ramas del álgebra escolar: el álgebra como estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones, el álgebra como estudio de funciones, relaciones y

[40] Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report.

combinaciones, y el álgebra como una herramienta de modelado de lenguaje tanto dentro como fuera del ámbito matemático.

Por otro lado, Kieran (2006) propone un modelo alternativo del álgebra escolar, donde identifica tres actividades principales interrelacionadas: la actividad de generalización, la actividad de transformación y la actividad a nivel global/meta. La actividad de generalización involucra la expresión algebraica de situaciones problemáticas cuantitativas, expresiones generales resultantes de patrones numéricos y reglas que rigen relaciones numéricas. Las actividades de transformación incluyen manipulaciones sintácticas, como la recopilación de términos similares, la expansión de paréntesis, la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones. Finalmente, las actividades a nivel global/meta utilizan el álgebra como una herramienta para resolver problemas, modelar y pronosticar, analizar estructuras y cambios, examinar relaciones y llevar a cabo actividades de generalización y prueba.

El pensamiento algebraico, de acuerdo con Kieran (2004), aborda situaciones cuantitativas enfocándose en relaciones generales que pueden servir como herramientas cognitivas para impulsar un discurso algebraico escolar más tradicional, no limitado a símbolos. Es crucial que los docentes comprendan las habilidades de pensamiento algebraico de sus estudiantes, especialmente en la resolución de problemas matemáticos. Esto es esencial al enseñar temas como ecuaciones, desigualdades y funciones exponenciales y logarítmicas, donde se requiere el uso de formas algebraicas y soluciones algebraicas para comprender y desarrollar el pensamiento y el razonamiento matemático de los estudiantes.

Según Ntsohi (2013), el pensamiento algebraico implica "*el uso de símbolos y herramientas matemáticas para representar información matemáticamente y analizar diferentes situaciones, como la* *ubicación de valores desconocidos, pruebas y demostraciones"*[41]. Kriegler (2007) identifica dos componentes clave en el pensamiento algebraico: el desarrollo de herramientas de pensamiento matemático y la exploración de conceptos fundamentales del álgebra. Estas herramientas de pensamiento abarcan habilidades de resolución de problemas, representación y razonamiento cuantitativo, mientras que las ideas básicas del álgebra incluyen la generalización aritmética, el uso del álgebra como lenguaje y su aplicación en funciones y modelado.

El pensamiento algebraico de acuerdo con Kieran (2011), es esencial en la educación matemática y va más allá de la manipulación de símbolos; implica analizar relaciones, generalizar a partir de eventos específicos, resolver problemas, modelar, predecir y justificar. Además, prepara a los estudiantes para el pensamiento matemático en otras áreas de las matemáticas. Sin embargo, muchos estudiantes enfrentan dificultades en este proceso y cometen errores conceptuales. Esto subraya la importancia de desarrollar habilidades de pensamiento algebraico en una variedad de dimensiones, incluyendo la comprensión de conceptos algebraicos básicos y la aplicación de diferentes formas de razonamiento.

En resumen, el pensamiento algebraico se extiende más allá de la aritmética y los símbolos, abarcando la generalización, la representación de relaciones matemáticas y la resolución de problemas. Su desarrollo es fundamental en la educación matemática y tiene un impacto duradero en el rendimiento académico de los estudiantes. Sin embargo, es esencial abordar las dificultades que los estudiantes enfrentan en este proceso y promover el pensamiento algebraico en diversas dimensiones.

2.3. Resolución de problemas matemáticos como actividad discursiva

Koichu (2018) contempla un modelo de resolución de problemas a partir de tres recursos, primero los recursos individuales (Schoenfeld 1985); segundo los recursos basados en la interacción con

[41] Ntsohi, M. M. (2013). *Investigating teaching and learning of Grade 9 Algebra through excel spreadsheets: a mixed-methods case study for Lesotho* (Doctoral dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University).

compañeros y las ideas heurísticas que pueden complementarse efectivas a través de un efecto sinergia grupal (Clark, James y Montelle,Schwartz, Neuman y Biezuner, 2000) y tercero, los recursos basados en la interacción con una fuente de conocimiento sobre la solución como un libro de texto, un video, búsqueda en internet, un docente o un compañero de clase, que ya ha encontró la solución pero aún no la ha revelado. Además, en conjunto con los recursos anteriores el modelo se basa en los movimientos discursivos de los estudiantes mientras resuelven problemas desafiantes, como medio para inferir ideas heurísticas. Koichu (2018) define idea heurística como:

"*Una pieza de discurso matemático a nivel de contenido que sugiere una posible forma de resolver el problema*" [42].

Esta pieza articulada en la resolución de problemas, es un proceso moldeado socioculturalmente de logro no inmediato, en el que los estudiantes, a través de un discurso grupal o intrínseco acompañado por los recursos individuales o colectivos, llegan a interpretar, argumentar, justificar y demostrar, la solución de los problemas, logrando con el objetivo.

Por lo tanto, una solución a un problema es una narrativa pública que es respaldada, por los que resuelven el problema o por los que lo proponen. A su vez, un problema es una pieza de discurso oral, textual o visual que desencadena el proceso anterior.

Son importante las estrategias de enseñanza heurística para la resolución de problemas, a partir de las diferencias individuales que pueden permanecer sin descubrir cuando se sensibiliza y se alfabetiza desde la heurística.

---

[42] Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In *Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education,* p.310. Springer, Cham.

De acuerdo con Koichu, Berman & Moore (2007) la alfabetización heurística es "*la capacidad de un individuo para usar vocabulario heurístico en el discurso de resolución de problemas y para abordar problemas matemáticos escolares mediante el uso de una variedad de heurísticas*".[43]

Las heurísticas en las que se centra este modelo, son las estrategias de Polya, cómo "pensar hacia adelante" o "pensar desde el final hasta el principio". Los estudios de Polya (1945) sugirieron que los métodos heurísticos son estrategias y reglas generales utilizadas para resolver problemas, incluyendo operaciones mentales basadas en experiencias previas con problemas similares, y muestra el camino a seguir para llegar a la solución.

De manera similar, Polya (1945) ofrece ideas sobre cómo ayudar a los estudiantes a pensar por sí mismos y describe cuatro etapas: "*comprender o explicar un problema, idear un plan, implementar el plan y recordar o verificar la solución*"[44]. Estas etapas están asociadas a una lista de preguntas, en las que el docente pone a prueba la curiosidad de los estudiantes, despierta el interés por la reflexión, la exploración y el deseo de implementar estrategias de solución, lo que lleva a tener éxito e identificar intereses en el trabajo mental donde las matemáticas tienen sentido para él.

2.3.1. Aspectos estéticos en la resolución de problemas como actividad discursiva

Los aspectos estéticos para resolver problemas en el aula de matemáticas desde la actividad discursiva, a partir de un conjunto de heurísticas propuestos por Koichu, Katz & Bermann (2007) son:

• *"Crear un ambiente de aprendizaje emocionalmente seguro.*

---

[43] Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), p.100.

[44] Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton. *New Jersey: Princeton University*, p.17.

• Garantizar prácticas de aula, en las que se valore el proceso de resolución de problemas por sí mismo y está desligado de la evaluación formal al menos en algunas ocasiones.

• Incorporar problemas no rutinarios en la enseñanza, incluidos problemas que tienen solución que pueden provocar asombro en los estudiantes.

• Usar secuencias de tareas relacionadas, en las que resolver la tarea anterior crea un marco para resolver la tarea posterior de una manera sorprendente. Es decir, que las soluciones de algunos problemas a veces son más cortas o más fáciles de lo que los estudiantes podrían haber esperado en base a su experiencia previa con problemas de aspecto similar y así crear "sorpresas agradables" en la resolución de problemas.

• Respaldar debates, en los que los estudiantes puedan expresar sus emociones, ya sean positivas o negativas, sobre los problemas y sus experiencias de resolución de problemas. Asegurarse de que tanto las emociones positivas como las negativas se respeten cuando se expresen.

• Incorporar gradualmente un vocabulario estético en el discurso del aula, incluyendo descriptores de problemas o soluciones de problemas como "hermoso", "feo", "interesante", "aburrido", "sorprendente", "torpe", "elegante" y similares.

• No predique sobre la belleza de los problemas, pero deje espacio para comparaciones y discusiones, en las que los estudiantes pueden comparar diferentes problemas y diferentes soluciones desde la perspectiva estética, por ejemplo, Creo que la segunda solución es más elegante que la primera".[45]

Se puede apreciar que la estética en la resolución de problemas se da, a través de las rutinas discursivas con un vocabulario heurístico diferenciado entre los estudiantes. Entonces, para disminuir

[45] Koichu, B., Katz, E., & Berman, A. (2017). Stimulating student aesthetic response to mathematical problems by means of manipulating the extent of surprise. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 42-57.

las brechas y sensibilizar a la estética en la resolución de problemas Koichu y sus colaboradores construyeron una escalera invertida que consiste en seis pasos:

"*6. Crear en clase lecciones para llevar a cabo una discusión comparativa de diferentes soluciones a problemas desafiantes en los que el aspecto estético de cada solución se puede adelantar. Antes de esto, necesitamos.*

5. Brindar a los estudiantes oportunidades para presentar varias soluciones al mismo problema. Antes de esto, necesitamos

4. Animar a los estudiantes a explicar sus soluciones frente a la clase. Anterior a eso, nosotros necesitamos

3. Proporcionar a los estudiantes oportunidades para resolver problemas de forma independiente mientras toleran el riesgo de fracaso. Antes de esto, necesitamos

2. Hacer que las lecciones sean emocionalmente seguras para los estudiantes para que puedan acercarse a problemas desafiantes y tener la oportunidad de obtener ayuda cuando sea necesario. Antes de esto, necesitamos

1. Llevar a las aulas problemas factiblemente desafiantes, para los cuales la solución los métodos son accesibles, pero no se enseñan por adelantado".[46]

Esta escalera es una herramienta pedagógica que permite al docente considerar cómo el estudiante desarrolla, promulga y respalda las rutinas discursivas específicas y cómo ayudar a los estudiantes a

[46] Koichu, B., Katz, E., & Berman, A. (2017). Stimulating student aesthetic response to mathematical problems by means of manipulating the extent of surprise. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 42-57.

desarrollar esquemas de resolución de problemas y creencias deseables o mejorar su capacidad cognitiva y habilidades metacognitivas.

2.4. Aula invertida en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

2.4.1. Definición de aula invertida

El aula invertida o flipped classroom, surge a partir de las dificultades académicas de un grupo de estudiantes, y como metodología apropiada se ven en la necesidad de invertir el aula, donde el aprendizaje por medio de la tecnología rompe las barreras del enfoque de aprendizaje tradicional (clases magistrales), creando ambientes flexibles e interactivo que permita la construcción del conocimiento, favoreciendo el trabajo colaborativo y respondiendo de manera pertinente hacia un aprendizaje significativo.

El concepto de aula invertida, trabajada por Flipped Learning Network (FLN) (2014, citada por Cevikbas y Kaiser 2020) consiste en "*un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa se desplaza de la dimensión del aprendizaje grupal, transformándose el espacio grupal en un ambiente de aprendizaje dinámico e interactivo en el que el facilitador guía a los estudiantes en la aplicación de los conceptos y en su involucramiento creativo con el contenido del curso".* [47]

Se considera que el aula invertida tiene la capacidad de transformar el paradigma de la enseñanza de las matemáticas e inspirar a los docentes a crear nuevas experiencias mediante herramientas tecnológicas, que brindan al desarrollo y comprensión del pensamiento matemático, y además fortalece la competencia comunicativa al momento de resolver problemas matemáticos.

2.4.2. Pilares del aprendizaje invertido

En el aula invertida, la práctica docente lleva a cabo los siguientes pilares, según el grupo de docente

[47] Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *Zdm*, *52*(7), 1291-1305.

Flipped Learning Network (FLN) (2014, citada por Cevikbas y Kaiser 2020):

1. *“F: Ambiente Flexible: Los docentes deben reorganizar el entorno de enseñanza-aprendizaje para adaptarlo a cada lección o unidad para fomentar el trabajo independiente o en grupo. Estos entornos recién creados permiten a los estudiantes seleccionar el momento y el lugar de aprendizaje deseados.*

2. *L: Cultura de aprendizaje: En el aula invertida, el tiempo de clase debe dedicarse a indagar, aprender temas y conceptos específicos de contenido más profundamente, y generar oportunidades de aprendizaje. Los docentes en el aula invertida hacen uso de andamiajes para permitir que sus estudiantes averigüen temas específicos mediante la implementación completa de enfoques centrados en el estudiante en la zona de su desarrollo próximo (Vygotsky 1978).*

3. *I: Contenido intencional: los docentes deben considerar constantemente cómo podrían beneficiarse del enfoque de aula invertida para ayudar a los estudiantes a mejorar una comprensión más profunda. Los docentes deben decidir sobre el contenido que se enseñará y los materiales que los estudiantes deben explorar.*

4. *P: Educador profesional: aunque la visibilidad del papel del educador profesional es menos evidente en las aulas tradicionales, los docentes en este entorno son mucho más importantes y, con frecuencia, tienen más desafíos que en las aulas tradicionales. Deben observar constantemente a los estudiantes, brindar apoyo, brindar retroalimentación integral y evaluar el trabajo de los estudiantes”.*[48]

[48] Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *Zdm*, *52*(7), 1291-1305.

La siguiente tabla 1, muestra indicadores que describen cada uno de los pilares del aprendizaje invertido en la práctica docente con actividades didácticas que giran alrededor de la tecnología de acuerdo con el aprendizaje diferenciado, colaborativo y participativo.

Tabla 1. Indicadores de los pilares del aprendizaje invertido en la práctica docente

Pilares del aprendizaje invertido		**Indicadores**
F 1	Flexible Environment-Ambiente flexible	Creo espacios y marcos temporales que permiten a los estudiantes interactuar y reflexionar sobre su aprendizaje.
F2		Continuamente observo y doy seguimiento a los estudiantes para hacer ajustes cuando sea necesario.
F3		Ofrezco a los estudiantes diferentes maneras de aprender el contenido y demostrar su dominio.
L1	Learning Culture-Cultura de aprendizaje	Ofrezco a los estudiantes diversas oportunidades de involucrarse en actividades significativas en las que el docente no es la pieza central.
L2		Dirijo estas actividades como mentor o guía y las hago accesibles a todos los estudiantes a través de la diferenciación y la realimentación.
I1	Intentional Content-Contenido dirigido	Priorizo los conceptos utilizados en la instrucción directa para que sean accesibles a los estudiantes por cuenta propia.
I2		Creo o selecciono contenidos relevantes por lo general videos para mis estudiantes.
I3		Utilizó la diferenciación para hacer el contenido accesible y relevante para todos los estudiantes.
P1	Professional Educator-Facilitador profesional	Estoy a disposición de los estudiantes para dar realimentación individual o grupal inmediata según sea requerido.
P2		Llevó a cabo evaluaciones formativas durante el tiempo de clase a través de la observación y el registro de información para complementar la instrucción.
P3		Colaboro y reflexiono con otros profesores y asumo la responsabilidad de la transformación de mi práctica docente.

Fuente: Elaboración propia. Información tomada de la página Flipped Learning Network.

2.4.3. Teoría constructivista social en el aprendizaje invertido

Según Cevikbas y Kaiser (2020) el aula invertida se encuentra enlazada con la teoría constructivista social por Vygotsky (1978).

De acuerdo con Vygotsky (1978) un docente crea un entorno de aprendizaje interactivo y útil, impulsado al descubrimiento y socialización, por lo tanto, los estudiantes pueden avanzar hacia a la zona de desarrollo próximo (ZDP), es decir, lo que el estudiante pueda hacer por sí mismo y con el apoyo de las herramientas tecnológicas, el trabajo colaborativo y la orientación del docente, por lo tanto, disminuye la distancia entre lo que sabe y aprende en sí el estudiante, en su entorno social y lo que profundiza y desarrolla sus potencialidades, con la ayuda de sus compañeros y docente en el proceso de aprendizaje."[49]

Con el apoyo de la teoría constructivista social permite analizar los cambios de la enseñanza de las matemáticas en aula invertida y, además, determinar las oportunidades y los desafíos en el aprendizaje de las matemáticas y construir un diseño pertinente de aprendizaje invertido, para la enseñanza de las matemáticas.

Conclusiones del capítulo 2

En el aula de matemáticas, se lleva a cabo un análisis del proceso de comunicación que trasciende en esta investigación. En este estudio, nos limitaremos al uso de la competencia comunicativa, que abarca aspectos lingüísticos, discursivos, sociolingüísticos y estratégicos. Es decir, evaluaremos la calidad del desempeño comunicativo de los estudiantes durante el aprendizaje del álgebra, específicamente en la

[49] Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *Zdm*, *52*(7), 1291-1305.

resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas a través de actividades comunicativas como hablar y escribir.

Uno de los principales motivadores para estudiar la competencia comunicativa en el aula de matemáticas radica en la variación en las habilidades que se presentan entre los estudiantes. Esto se manifiesta en preguntas como: ¿Por qué algunos estudiantes son más competentes que otros? ¿Por qué algunos estudiantes demuestran un desempeño más competente en ciertos momentos y situaciones que en otros? ¿Y por qué algunos estudiantes son más competentes en ciertas actividades de comunicación? Estas son cuestiones cruciales que han dado lugar a numerosas teorías para abordarlas.

Uno de los modelos teóricos apropiados para fundamentar esta tesis es el propuesto por Canale (1983). Este modelo aborda la competencia lingüística, que implica la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático, incluyendo el manejo del vocabulario, significados y símbolos utilizados para expresar conceptos matemáticos. Esto se relaciona con las competencias sociolingüísticas, ya que los estudiantes se encuentran inmersos en diversos contextos y utilizan expresiones influenciadas por su cultura y entorno social. Además, el pensamiento matemático se expresa a través de la competencia discursiva, que combina estructuras lingüísticas y significados para generar ideas coherentes en diferentes situaciones de comunicación matemática. Por último, se abordan las competencias estratégicas, donde los estudiantes buscan diversos recursos para lograr una comunicación efectiva y superar las dificultades en la comprensión de su lengua u otras limitaciones.

Profundizar en la transición de lo concreto a lo formal, mediante la creación de puentes entre el lenguaje natural y el simbólico, es esencial para los estudiantes. Esto implica el uso de estructuras conceptuales básicas para objetivar sus interpretaciones en favor del desarrollo del conocimiento. Además, es importante evaluar los productos discursivos, como las expresiones orales y escritas, que a veces pueden ser contradictorias durante la formación de un concepto. Esto trasciende la enseñanza tradicional de las matemáticas, que valora la producción de conceptos a través de la interacción social en lugar de simplemente la mecanización de algoritmos.

El pensamiento algebraico es una habilidad fundamental en matemáticas que va más allá de la simple manipulación de símbolos. Implica comprender patrones, relaciones y estructuras algebraicas, así como generalizar operaciones aritméticas y abordar cantidades desconocidas a medida que se vuelven más complejas. La enseñanza del pensamiento algebraico debe centrarse en el desarrollo de estas habilidades en los estudiantes, lo que les permitirá abordar una variedad de problemas matemáticos de manera efectiva.

La resolución de problemas matemáticos se considera una actividad discursiva en la que los estudiantes pueden expresar sus ideas, argumentar, justificar y demostrar soluciones. La alfabetización heurística, que implica el uso de estrategias heurísticas para abordar problemas matemáticos, es fundamental en este proceso. Además, los aspectos estéticos en la resolución de problemas, como la apreciación de soluciones elegantes o sorprendentes, también desempeñan un papel importante en la motivación y el compromiso de los estudiantes con las matemáticas.

En este sentido, la metodología de aula invertida proporciona estrategias de aprendizaje individual y grupal, rompiendo con las clases tradicionales e involucrando autonomía, flexibilidad, cultura de aprendizaje y aprendizajes significativos. Esto trasciende las fronteras de la enseñanza convencional de las matemáticas y permite que los estudiantes no solo hagan matemáticas, sino que también sean matemáticos, capaces de trabajar con otros y comunicar su pensamiento algebraico en la resolución de problemas desafiantes.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el tipo, enfoque, diseño de la investigación, la población y la muestra, procedimientos y técnicas para la recolección de los datos desde la teoría fundamentada que permita dar respuesta al problema de esta investigación: ¿Cómo describir y explicar el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas de los estudiantes de grado octavo (8°) en un ambiente de aula invertida?, además se describe las estrategias para el análisis de los datos y la metodología de aula invertida.

3.1. Tipo y enfoque de la investigación

La tesis asume un enfoque de investigación cualitativa ya que se intenta indagar la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas, mediante la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas desde el aula invertida en un ambiente natural del aula de clase mediante un proceso inductivo, descriptivo y generación de la perspectiva teórica.

Según Sampieri, Collado, Lucio y Pérez (2014) el enfoque de investigación cualitativo *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[50].

En esta investigación se utilizará el diseño de la teoría fundamentada, resultado de datos recolectados y analizados sistemáticamente durante el proceso de investigación. Según Corbin & Strauss (2002[51]) en este proceso la recopilación de datos, el análisis y la teoría resultante están estrechamente relacionados y están más cerca de la "realidad" que una teoría derivada de la combinación de varios conceptos basados en la experiencia.

---

[50] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p.358.

[51] Strauss, A., & Corbin, J. (2002). Base de la investigación cualitativa. *Técnica y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Sag. Publications Inc*.

Como lo afirma Charmaz (2014) “una característica singular de la teoría fundamentada es que la reunión y el análisis de los datos se realizan simultáneamente utilizando un método de comparación constante, además de ser un enfoque para generar y descubrir teoría a partir de datos que han sido sistemáticamente recogidos y analizados “.[52]

La teoría fundamentada proporciona un conjunto particular de métodos sistemáticos que respaldan la abstracción de los datos para desarrollar una teoría que se basa en los datos empíricos. Estos métodos incluyen diferentes procedimientos de codificación que se fundamentan en el método de comparación constante. Los nuevos datos se recopilan continuamente y los nuevos casos se incluyen en el análisis en función de su posible contribución al desarrollo y perfeccionamiento de la teoría en evolución, este método de muestreo se denomina muestreo teórico. El proceso iterativo de recopilación de datos de acuerdo con el muestreo teórico, el análisis de datos y el desarrollo de la teoría continúa hasta que los nuevos datos ya no contribuyen a un desarrollo sustancial de la teoría, es decir, hasta que se alcanza la saturación teórica para dar como producto final la teoría.

3.2. Población, muestra e instrumentos de la investigación

La población de esta investigación es la Institución Educativa Ángel María Paredes de la ciudad de Neiva. Actualmente cuenta con 1080 estudiantes, la sede principal tiene 520 estudiantes que les brinda una educación básica secundaria.

La unidad de análisis se centra en los estudiantes del grado 8° de la jornada mañana. Para llevar a cabo esta investigación, se empleó varios instrumentos como una entrevista semiestructurada, grabaciones de las interacciones verbales de los estudiantes durante la socialización y retroalimentación de las actividades exploratorias y de profundización, análisis de los escritos que

[52] Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

contienen las resoluciones de los problemas, así como memorandos y notas escritas por parte del investigador basadas en observaciones en clase. Este enfoque integral tiene como objetivo fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico de manera deductiva y promover el uso de Competencia comunicativa, lo que, en última instancia, contribuirá al logro de un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

3.3. Métodos y técnicas de la teoría fundamentada

Los métodos y técnicas de la teoría fundamentada hacen uso de diferentes elementos algunos se relacionan con la recopilación, la evaluación de datos y el proceso de investigación.

3.3.1. Sensibilidad teórica

Corbin y Strauss (2014) describen la sensibilidad como "t*ener conocimientos, así como estar sintonizado y ser capaz de detectar problemas, eventos y sucesos relevantes durante la recopilación y el análisis de los datos*" [53]. Según Glaser con la ayuda de Holton (2004) la esencia de la sensibilidad teórica es la "*capacidad de generar conceptos a partir de datos y relacionarlos de acuerdo con los modelos normales de la teoría en general*"[54], es decir, el primer paso para ganar sensibilidad teórica es ingresar al entorno de investigación con la menor cantidad posible de ideas predeterminadas. Sin embargo, Strauss y Corbin (1990[55]) consideran que la sensibilidad teórica es la literatura respectiva, la experiencia profesional y personal del investigador, así como el propio proceso analítico. Se supone que el investigador no debe seguir los caminos comunes de la literatura o su experiencia personal, sino cuestionarlos e ir más allá para obtener una nueva visión teórica. En "fundamentos de la investigación

[53] Corbin, J., & Strauss, A. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage publications.p.78.
[54] Glaser, B. G., & Holton, J. (2004, May). Remodeling grounded theory. In *Forum qualitative sozialforschung/forum: qualitative social research* (Vol. 5, No. 2). párr.43.
[55]Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, *13*(1), p. 3-21.

cualitativa", Strauss y Corbin (1990[56]) describen técnicas para fomentar la sensibilidad teórica, como el cuestionamiento, el análisis de palabras sueltas, frases u oraciones, y la comparación, por lo tanto, técnicas que impregnan la teoría fundamentada en general.

3.3.2. Interdependencia de la recopilación de datos, el análisis y el desarrollo de la teoría

Una característica de la teoría fundamentada es que la recopilación de datos, el análisis de datos y el desarrollo de la teoría no son pasos sucesivos en el procedimiento de investigación, sino que están entrelazados y son interdependientes.

Por lo tanto, el proceso se caracteriza por una alternancia constante entre la recopilación de datos y la reflexión en el análisis de los mismos, impulsando así el desarrollo de la teoría. El inicio del proceso de desarrollo de la teoría se encuentra en la recopilación y análisis de datos iniciales, mientras que los ciclos sucesivos de recopilación y análisis de datos se rigen por el muestreo teórico. Estos ciclos cumplen dos propósitos clave: primero, especificar el enfoque de la investigación y, segundo, generar hipótesis y teorías.

El muestreo teórico es un método acumulativo en el cual la elección de nuevos casos para el análisis se orienta según la teoría en desarrollo. Es importante destacar que, en este contexto, "casos" no necesariamente se refiere a "personas". Corbin y Strauss (2015) señalan que "son los conceptos y no las personas las que se muestrean"[57]. Estos autores también señalan que el objetivo del muestreo teórico puede cambiar a lo largo del proceso de desarrollo de la teoría. Inicialmente, la selección de casos se realiza con el propósito de descubrir nuevos conceptos relevantes que contribuyan a

[56] Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, *13*(1), p. 6.
[57] Corbin, J., & Strauss, A. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage publications.p.135.

diferenciar, elaborar, consolidar y validar categorías en términos de sus propiedades, dimensiones o interrelaciones.

El muestreo teórico y el desarrollo de la teoría continúan hasta que se alcance la saturación teórica, momento en el cual los nuevos datos ya no aportan información adicional significativa para la expansión de las categorías.

3.3.3. Análisis de datos

El objetivo general del análisis de datos en la metodología de la teoría fundamentada es el desarrollo de la teoría. Para lograr este objetivo los datos recopilados se evalúan aplicando diferentes formas de codificación como proceso central. La codificación en la metodología de la teoría fundamentada es un proceso de abstracción conceptual mediante la asignación de conceptos generales (códigos) a incidencias singulares en los datos.

Después de haber recopilado algunos (no necesariamente todos) los datos pueden comenzar el proceso de evaluación. Según Strauss y Corbin (1990) diferencian entre tres tipos de procedimientos de codificación necesarios para desarrollar una teoría fundamentada a partir de los datos: codificación abierta, axial y selectiva.

3.3.3.1. Codificación abierta

La codificación abierta es la parte del análisis de datos que se centra en la conceptualización y categorización de fenómenos a través de un análisis intensivo de los datos. En el primer paso de codificación abierta los datos se dividen en partes más pequeñas que se analizan en profundidad, el objetivo de este análisis es captar la idea central de cada parte y desarrollar un código para describirla.

Los códigos abiertos pueden desarrollarse in vivo, es decir, directamente a partir de los datos usando descripciones que también se derivan de los datos o con referencia a la literatura, por ejemplo, las teorías de la educación matemática u otras áreas relevantes de estudio.

El segundo paso, toma las partes analíticas más pequeñas se comparan con respecto a las similitudes y diferencias, las piezas similares se pueden etiquetar con el mismo código. Strauss y Corbin (1990) utilizan los conceptos para asignar un código y categorías para denotar conceptos de orden superior. Esto significa que los conceptos desarrollados se relacionan luego con otros conceptos de modo que emergen categorías de un orden superior para que se puedan describir diferentes dimensiones de la categoría. Durante el proceso de desarrollo de las dimensiones de las categorías las características teóricamente relevantes de cada categoría se determinan y explican en las descripciones del código.

3.3.3.2. Codificación axial

Según Strauss y Corbin (1990), la codificación axial es necesaria para investigar las relaciones entre códigos y categorías que se han desarrollado en el proceso de codificación abierta. Para trabajar las relaciones entre las categorías, Strauss y Corbin (1990) sugieren examinar los datos y los códigos basados en un paradigma de codificación que se enfoca y relaciona las condiciones causales, el contexto, las condiciones intermedias, las estrategias de acción e interacción y las consecuencias. Estas perspectivas sobre los datos ayudan a detectar relaciones entre conceptos y categorías para relacionarlos con una meta.

3.3.3.3. Codificación selectiva

El objetivo de la codificación selectiva es integrar las diferentes categorías que se han desarrollado, elaborado y relacionado entre sí durante la codificación axial en una teoría cohesiva. Para alcanzar este objetivo, los resultados de la codificación axial se elaboran, integran y validan. Así, la codificación selectiva es bastante similar a la codificación axial, pero se lleva a cabo en un nivel más abstracto, debido a que las categorías se integran teóricamente en una teoría general coherente, ya que se incluyen en una categoría central que está vinculada a todas las demás categorías que se establecieron en la codificación axial.

Por lo tanto, la codificación selectiva es el proceso de elegir la categoría central y relacionarla con las demás categorías de la codificación axial. Además, estas relaciones deben validarse y es posible que algunas categorías deban refinarse y elaborarse más. Para Strauss y Corbin (1990) la categoría central describe "*el fenómeno central en torno al cual se integran todas las demás categorías*"[58]. Si se encuentra la categoría central, el investigador conoce el fenómeno central de su investigación y finalmente puede responder a la pregunta de investigación. El producto de este proceso de investigación finalmente aparece la teoría fundamentada que surgió de los datos.

3.3.3.4. Memos y Diagramas

En general los memorandos son tipos muy especiales de notas escritas, ya que mantienen un registro del proceso analítico y las instrucciones para el analista. Por lo tanto, no solo describen los fenómenos sobre los que tratan, sino que se mueven en un nivel al ser analíticos y conceptuales.

Glaser con la ayuda de Holton (2004) consideran que: *"Los memos son notas teóricas sobre los datos y las conexiones conceptuales entre categorías. La redacción de memorandos teóricos es la etapa central en el proceso de generación de teoría. Si el analista se salta esta etapa y pasa directamente a clasificar o redactar, después de codificar, no está haciendo TF*"[59].

En el proceso de análisis de datos, se pueden elaborar códigos para que las notas de código se puedan desarrollar más en notas teóricas. Por lo tanto, la redacción de memorandos debe acompañar todo el

---

[58] Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, *13*(1), p. 116.

[59] Glaser, B. G., & Holton, J. (2004, May). Remodeling grounded theory. In *Forum qualitative sozialforschung/forum: qualitative social research* (Vol. 5, No. 2).

proceso analítico desde el desarrollo del primer código hasta la teoría fundamentada final.

Los memorandos son necesarios para argumentar y probar el desarrollo de la teoría fundamentada a partir de los datos, por lo tanto, son un aspecto crucial al que recurrir cuando se escribe la teoría. Además, Strauss y Corbin (1990) también advierten que "*si los memorandos y los diagramas se realizan escasamente, entonces la teoría del producto final podría carecer de densidad e integración conceptual. Al final, es imposible para el analista reconstruir los detalles de la investigación sin notas".*[60]

3.4. Fases de la investigación desde la teoría fundamentada

La Figura 1 muestra las fases del diseño de investigación desde la teoría fundamentada con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación. En esta figura, se integran y complementan el diseño y rediseño de actividades, así como la codificación y el análisis de datos. Por lo tanto:

Fase 1: En esta fase se lleva a cabo un muestreo intencional de las actividades exploratorias y de profundización.

Fase 2: Se realiza el primer ciclo de codificación y análisis de datos, que comienza con la codificación abierta y luego se procede a la codificación axial de los materiales de audio y resolución escrita de los problemas exploratorios y profundización en diferentes contextos.

Fase 3: Aquí se enfoca en el rediseño de las actividades, incorporando las observaciones y hallazgos obtenidos en las fases anteriores.

Fase 4: En esta etapa, se inicia el segundo ciclo de codificación y análisis de datos. En este proceso, se vuelve a utilizar la codificación abierta y axial. Además, se lleva a cabo una entrevista semiestructurada

[60] Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, *13*(1), p. 3-21.

para enriquecer la comprensión del fenómeno y facilitar la codificación selectiva, que es fundamental para desarrollar la teoría sustantiva.

Fase 5: En esta fase se lleva a cabo el tercer ciclo de codificación y análisis de datos, que se centra en la codificación teórica y la integración de categorías. El resultado de esta etapa es la obtención de la saturación teórica, que determina el núcleo de la teoría.

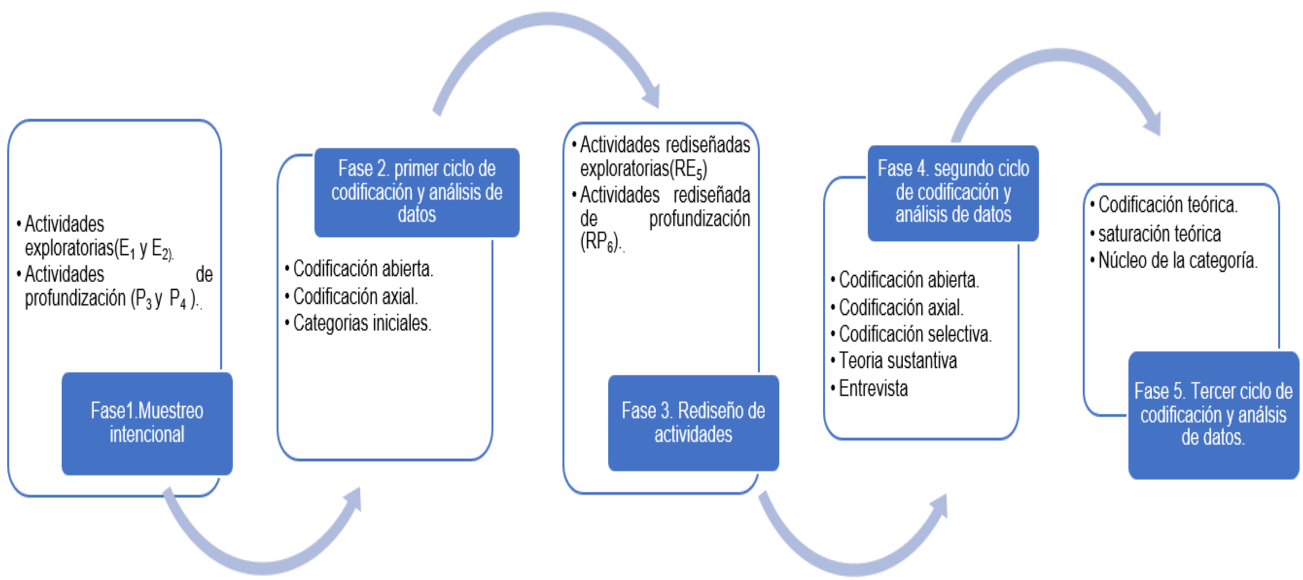


Figura 1. Fases diseño de investigación

Este diseño de investigación basado en la teoría fundamentada se desarrolla de manera secuencial y rigurosa para garantizar la robustez y la validez de los resultados.

3.5 . El papel de la teoría dentro de la teoría fundamentada y el paradigma de la codificación

La idea principal de la teoría fundamentada y uno de sus sellos distintivos es que las categorías, los conceptos y finalmente la teoría 'emergen' de los datos. Glaser y Strauss (2016) en la construcción de la teoría fundamentada aconsejan que *"ignore la literatura de teoría y hechos sobre el área en estudio,* *para asegurarse de que la aparición de categorías no se contamine*"[61]. Sin embargo, Glaser y Strauss (2016) también admiten que "...*por supuesto, el investigador no aborda la realidad como una tabla rasa. Debe tener una perspectiva que lo ayude a ver datos relevantes y abstraer categorías significativas de su escrutinio de los datos*"[62] .

En cuanto al uso de la literatura, Glaser y Strauss (2016) proponen varias formas de incorporarla en la investigación:

- *"Comparación: Los conceptos derivados de la literatura pueden servir como puntos de comparación con los datos, especialmente en términos de propiedades y dimensiones.*
- *Sensibilidad: La literatura relevante puede aumentar la sensibilidad del investigador a matices sutiles en los datos, aunque también puede limitar la creatividad.*
- *Perspectiva teórica: La perspectiva teórica del investigador influye en su enfoque en el estudio.*
- *Estimulación de preguntas: Las discrepancias entre los datos del investigador y la literatura pueden generar preguntas importantes y reveladoras.*
- *Confirmación y explicación: La literatura puede confirmar hallazgos o ayudar a explicar fenómenos, mientras que los hallazgos pueden cuestionar o mejorar la literatura existente."[63].*

De acuerdo a lo anterior en esta investigación se elaboró un marco teórico que se emplea como herramienta analítica, para mejorar la conceptualización de las categorías y obtener una teoría confiable, creíble y versátil, que describa y explique el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas, en la resolución de problemas algebraicos en un ambiente de aula invertida.

---

[61] Strauss, A., & Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Universidad de Antioquia.p.55-58.
[62] Ibid. p.54-58
[63] Strauss, A., & Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Universidad de Antioquia.p.55-58

3.6. Metodología de aula invertida en la investigación

Esta investigación adaptó un modelo de aula invertida propuesto por Rochmiyati, Wijayanto y Supriadi (2020)[64], reduciéndolo a cuatro etapas:

1. Preparación del material: Esta etapa implica la grabación de videoclips y videos. El docente comienza con una introducción que incluye actividades preliminares, definiciones y ejemplos prácticos, además de demostrar cómo utilizar aplicaciones interactivas en línea. Los videos también incluyen preguntas y problemas de práctica diseñados para evaluar la comprensión de los estudiantes.

2. Exploración: Se envía a los estudiantes una guía a través de grupos de WhatsApp. Esta guía contiene actividades exploratorias y enlaces a los videos y videoclips disponibles en el canal de YouTube "APRENDIENDO CON GORETTI (@angelaperdomo7332)  ". Estos recursos permiten a los estudiantes estudiar en casa y abordar los problemas propuestos. El docente está disponible para responder a las preguntas de los estudiantes relacionadas con el material a través de asesorías virtuales por medio de Google Meet, para abordar cualquier aspecto que les resulte difícil después de estudiar el material.

3. Retroalimentación: Se concede tiempo para el aprendizaje fuera del aula, lo que permite que los estudiantes comprendan el material de manera gradual. Se proporciona a los estudiantes un calendario (aproximadamente 8 días) y se espera que dediquen al menos 2 horas diarias de trabajo individual. Los estudiantes participan en el proceso de aprendizaje después de estudiar el material y trabajar en problemas exploratorios a través de los videos de aprendizaje. Las actividades en clase

[64] Rochmiyati, S., Wijayanto, Z., & Supriadi, D. (2020). A needs analysis of flipped classroom-based mathematics learning model. *PalArch's Journal of Archaeology of Egypt/Egyptology*, *17*(5), 69-93.

se diseñan para fomentar el razonamiento, y se promueve el diálogo como parte del proceso de retroalimentación.

4. Profundización: En esta etapa, los estudiantes trabajan en grupos colaborativos en el aula para abordar actividades de profundización que incluyen problemas desafiantes. El docente guía el aprendizaje y está disponible para responder a las preguntas de los estudiantes relacionados con el material a través de asesorías virtuales mediante Google Meet, en particular, para abordar los aspectos que les resulten más complicados. Finalmente, se lleva a cabo una socialización y profundización de los temas tratados, promoviendo así un aprendizaje significativo.

A continuación, se describe la Figura 2 que representa las fases del desarrollo de las guías de trabajo en el contexto del aula invertida:

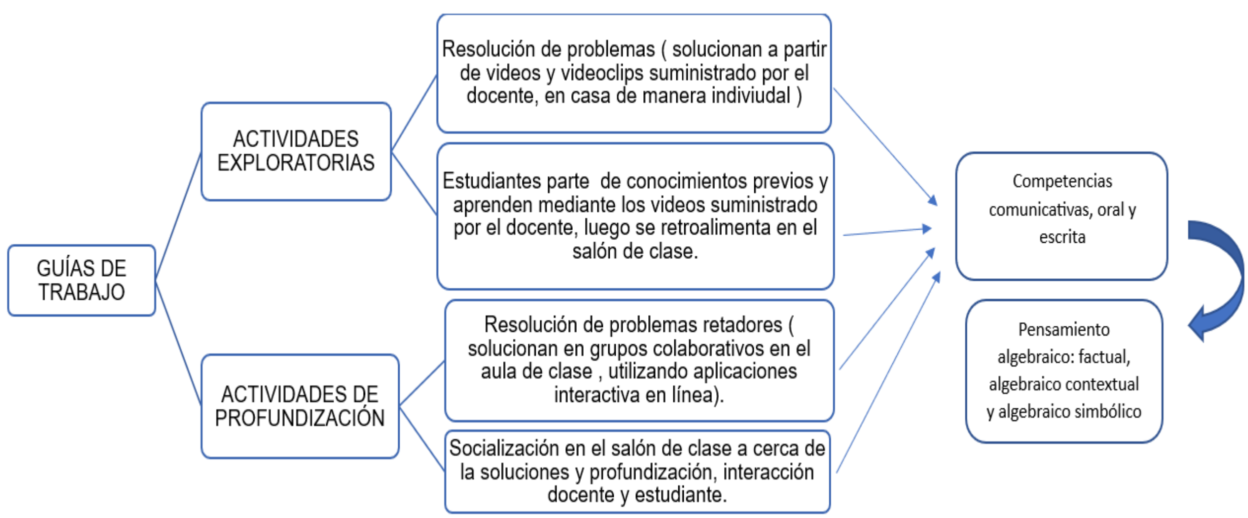


Figura 2. Fases de las guías de trabajo en aula invertida

Las tres guías de trabajo sobre ecuaciones lineales, cuadráticas y sistema de ecuaciones, cada una contiene dos actividades, la primera parte actividades exploratorias y la segunda parte actividades de profundización. Las actividades exploratorias incluyen problemas y preguntas que orientan al desarrollo de estas y comprensión de los temas abordados con la ayuda de los videoclips o videos facilitados por el docente y además la asesoría virtual por Google meet. Esta actividad se retroalimenta en clase con preguntas apropiadas y concretas, las cuales ayudan a abordar conceptos erróneos. Luego de las preguntas, viene el trabajo colaborativo de forma activa y aplicativa de las actividades de profundización que incluye problemas retadores. De forma simultánea se orienta y se interactúa docente- estudiante y estudiante-estudiante logrando prácticas exitosas y aprendizaje significativo.

Las actividades exploratorias y de profundización se diseñaron en función de la competencia comunicativa que permite utilizar dos modos de comunicación oral y escrita. Es importante resaltar en las actividades el desarrollo del pensamiento algebraico desde lo contextual y simbólico en problemas retadores.

Conclusiones del capítulo 3

En este capítulo se ha descrito y justificado el diseño de la teoría fundamentada con un enfoque cualitativo, para construir una teoría local que describa y explique el uso de la competencia comunicativa en el aprendizaje de las matemáticas.

Además, especifica y justifica en detalle la forma en que el muestreo teórico, la saturación teórica y el análisis de datos interactúan como elementos que dan vida a la investigación.

Finalmente, se muestra cómo es el papel de la teoría en la teoría fundamentada considerándose importante para contrastar, refutar e implementar, logrando una teoría eficiente para la investigación.

CAPÍTULO 4. ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS

4.1. Introducción

La resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas es una habilidad fundamental en el campo de las matemáticas, pero su aplicación va más allá de las aulas. En este contexto, la teoría fundamentada se convierte en una herramienta valiosa para analizar y comprender cómo el dominio de estas competencias matemáticas puede influir en el desarrollo de habilidades comunicativas en un entorno educativo innovador, como el modelo de aula invertida.

Este estudio se centra en explorar de manera detallada el proceso emergente en las formas de uso de la competencia comunicativa en los modos escrito y oral de los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas. Para lograrlo, se realiza una codificación abierta donde se exploran ampliamente las diferentes manifestaciones de la competencia comunicativa en el contexto de las matemáticas. Luego, mediante el análisis axial, se identifican patrones y relaciones clave que puedan surgir entre la competencia lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica en la resolución de ecuaciones. Finalmente, a través de la codificación selectiva, se enfoca en los aspectos más significativos y reveladores de este proceso emergente.

Esta investigación no solo busca lo anterior, sino que también ofrecer perspectivas valiosas sobre cómo mejorar la enseñanza de las habilidades matemáticas y comunicativas en un contexto de aula invertida. Este capítulo concluye con una síntesis de los resultados más relevantes y una discusión en profundidad de sus implicaciones, contribuyendo así al conocimiento en el campo de la educación matemática y la comunicación en el entorno escolar.

4.2. Procesos de codificación, muestreo, saturación teórica y análisis de datos

La codificación, el muestreo teórico, la saturación teórica y el análisis de datos por el método de comparación constante son componentes interconectados en la investigación. La codificación inicial muestra patrones emergentes, el muestreo teórico enriquece estos patrones, la saturación teórica señala el punto de suficiencia de datos y la comparación constante perfecciona continuamente la comprensión, permitiendo así la construcción de teorías sólidas.

A partir de esto, se realizan tres ciclos de codificación. En el primer ciclo se analizaron dos guías de aprendizaje, la primera es sobre ecuaciones lineales, la segunda solución de ecuación cuadrática aplicando el método de Po Shen Loh. En el segundo y tercer ciclo se analiza la guía tres de aprendizaje sobre sistema de ecuaciones lineales y la entrevista semiestructurada. Cada guía incluye una variedad de problemas exploratorios y de profundización contextualizados. Los problemas iniciales se resuelven de manera individual en casa, utilizando el material proporcionado por la docente, mientras que los problemas de profundización se abordan en grupos de trabajo colaborativos en el aula de clase. Esta metodología se ajusta a las fases de muestreo y saturación teórica, y coincide con los niveles y alcances teóricos que se buscan alcanzar en el estudio.

4.2.1. Primer ciclo de codificación y análisis de datos: codificación abierta y axial

El proceso de codificación abierta comienza con el análisis de las respuestas de los estudiantes, tanto escritas como orales, al resolver problemas de la guía de aprendizaje sobre ecuaciones lineales y cuadráticas. A través de este proceso, se hace evidente cómo los estudiantes emplean una variedad de habilidades comunicativas para desarrollar y expresar sus ideas relacionadas con el pensamiento algebraico de manera clara y efectiva.

La guía de aprendizaje se inicia con una actividad exploratoria con problemas que los estudiantes deben resolver en casa, apoyados por videoclases proporcionados por la docente y partiendo del conocimiento previo de cada uno de ellos. Además, incluye una actividad de profundización con problemas diseñados para resolver en grupos colaborativos durante las clases.

La Figura 3 muestra la respuesta del estudiante codificado E (4) P.E.3 (PRA). La codificación significa: E (4), estudiante 4, y P.E.3 (PRA), problema exploración 3, perímetro de rectángulos en relación con la altura.

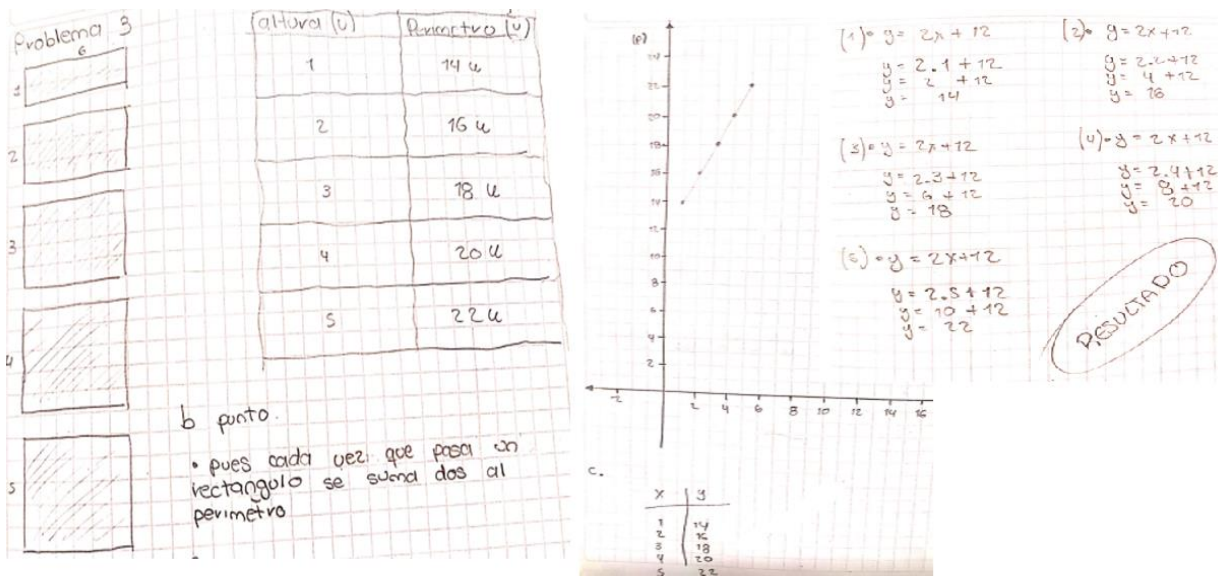


Figura 3. Inicio codificación abierta modo escrito.

La Figura 4 es la resolución del problema 2 de profundización: lanzamiento de la bala de un cañón por el grupo 5, codificado G (5) P.P 2 (LBC). En las Figuras 3 y 4, en primer lugar, se examina cuidadosamente el uso del lenguaje matemático. Se presta atención a la utilización de términos y al uso de símbolos. Además, se evalúa la capacidad de expresar conceptos matemáticos de manera clara y precisa para una comunicación efectiva en este contexto. Esto cobra mayor importancia cuando se comunican de manera oral, al expresar a través del habla el razonamiento para representar, generalizar y formalizar patrones.

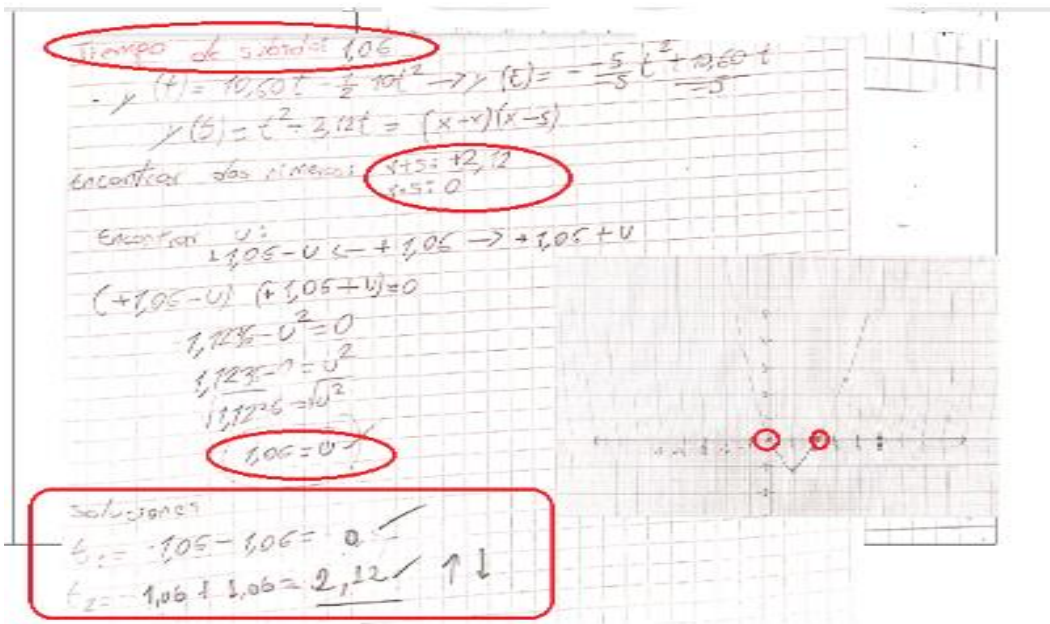


Figura 4. Inicio codificación abierta modo escrito.

Por lo tanto, en el siguiente diálogo D (3), que corresponde a la socialización en el aula de clase del problema profundización 3, sobre el perímetro de rectángulos en relación con la altura, codificado P.P3 D (3), se determinan más categorías conceptuales que actúan como indicadores empíricos del concepto inicial:

Docente: ¿y cómo determino el perímetro?

Eliana: contando los cuadritos de cada lado, voy a dibujar el primero en el tablero, entonces cuento 3 acá abajo luego subo 1, vuelo a contar otros 3 y cuento la otra altura 1. El primero perímetro es 8.

Docente: Eliana y compañeros ¿Será que sumar es lo mismo que contar?

Valentina: nooooo, Contar es 1,2,3 y el perímetro es sumar lo que mide cada lado.

Santiago Chala: no se enrede, el perímetro es la suma de todos los lados, yo no conté, sume los lados y ya. Mi base es de 4, entonces hay dos bases seria 8 más las dos alturas serian 2 es igual a 10 y lo mismo *para el segundo rectángulo la suma de las bases son 8 y las dos alturas 4 da el perímetro 12 y así hice lo mismo con los otros tres rectángulos, medio 14, 16 y 18.*

Docente: ¿cómo es la variación del perímetro con respecto a cada rectángulo?

Eliana: pues, con los datos que trabaje es de 2 en 2, porque inicio con el perímetro de 8, luego 10, el tercero 12, luego 14 y así continua.

Docente: ¿Cuál es la ecuación que determina el perímetro con la altura?

Eliana: mmmm, yo escribí 6 más 2x (6+2x), seis es la suma de las bases y no cambia y como son dos alturas, que desconocemos y cambian de valor.

Las anteriores resoluciones de los problemas escritos y orales, así como otros problemas codificados (ver)  permiten comparar y determinar los primeros conceptos: vocabulario y uso de símbolos, que a su vez dieron origen a una categoría de orden superior que más adelante se nombra competencia lingüística.

La tabla 2 y la Tabla 3, muestran las propiedades y dimensiones de los conceptos vocabulario y uso de símbolos:

Tabla 2. Vocabulario sus propiedades y dimensiones

Código	**Dimensión**	**Propiedad**	**Descripción**
Vocabulario	Uso de palabras que no son comunes en el lenguaje del estudiante y la aplicación de esas en el contexto de la expresión de una idea matemática.	Identificar incógnitas y variables Construir expresiones equivalentes Desarrollar algoritmos. Relacionar la solución o soluciones al contexto	Reconocer los elementos desconocidos que deben ser determinados en el proceso de solución. Además, transformar expresiones matemáticas de manera precisa. Mediante la creación de secuencias de pasos y procedimientos matemáticos que guíen la resolución de problemas de manera lógica y sistemática.

Tabla 3. Uso de símbolos sus propiedades y dimensiones

Código	Dimensión	Propiedad	Descripción
Uso de símbolos	Representar y comunicar conceptos matemáticos de manera efectiva. Estos símbolos, en su naturaleza concisa, permiten la representación de variables, operadores y relaciones de manera universal y precisa.	Precisión en la representación Simbología de incógnitas Expresión de operaciones matemáticas Uso de símbolos relacionales Notación algebraica Simplificación y resolución Representación de soluciones	Identificar, interpretar y crear símbolos en el contexto de ecuaciones, así como para aplicarlos de manera efectiva en la resolución de problemas matemáticos.

Continuamos con la codificación axial, conforme al enfoque propuesto por Strauss y Corbin en (1990)[65]. Este proceso es fundamental en la investigación cualitativa, ya que permite relacionar y conectar los códigos iniciales. Este método se enfoca en profundizar y comprender cómo diferentes aspectos se relacionan e influyen mutuamente en el contexto del fenómeno en estudio, que en este caso es el uso de vocabulario en el desarrollo de algoritmos.

Por lo tanto, la Figura 5 muestra el proceso que analiza cómo las condiciones causales, el contexto, las condiciones de intervención, las estrategias de acción e interacción, y las consecuencias están interconectadas y contribuyen a la comprensión del fenómeno.

Como parte de la dimensión y explicación de la categoría competencia lingüística en esta investigación fundamentada, se evidencia que las representaciones simbólicas utilizadas para abordar problemas con ecuaciones (condición causal) llevaron a los estudiantes a utilizar vocabulario en el desarrollo de

[65] Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research.* Sage publications

algoritmos (fenómeno). Se observó una aplicación práctica de las ecuaciones en situaciones de la vida diaria (contexto).

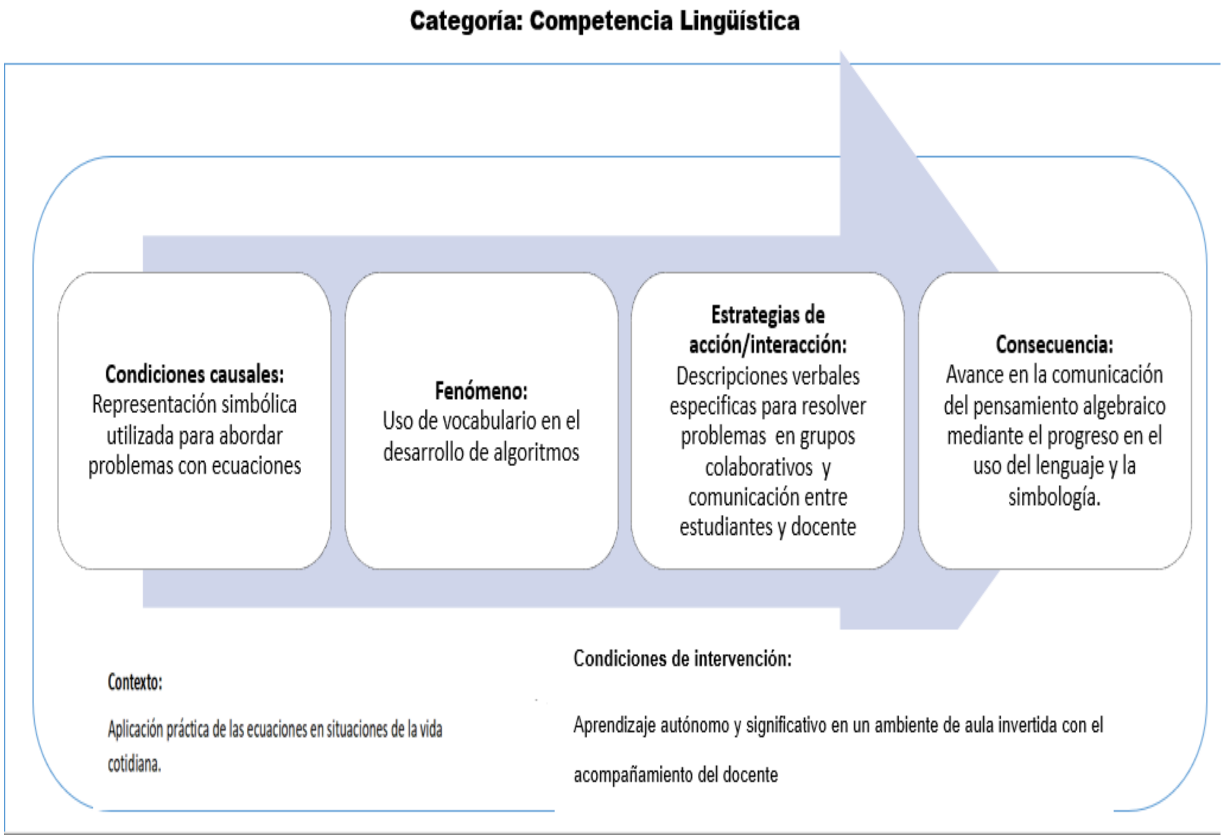


Figura 5. Codificación axial

Los estudiantes que experimentaron el vocabulario en los algoritmos, para abordar el fenómeno en la resolución de problemas, se sensibilizaron y comenzaron a realizar descripciones verbales (escritas y orales) específicas en grupos de trabajo colaborativos, comunicándolas entre ellos y con el docente (estrategias), todo esto facilitado por el aprendizaje autónomo y significativo en un entorno de aula invertida (circunstancias intermedias). Así, se continúa avanzando en la comunicación del pensamiento algebraico a través del progreso en el uso del lenguaje y la simbología (consecuencias).

Se explicó el proceso paso a paso de la codificación axial en la investigación, aplicando este paradigma de codificación para encontrar subcategorías que se conectaron para desarrollar la categoría. Cabe señalar que la codificación axial es un proceso iterativo (ver) ; estas categorías aún no son definitivas, pero sí representan un primer avance de la teoría sustantiva.

La Figura 6 es la resolución de un problema donde usan el método de Po Shen Loh para encontrar el número áureo a partir de un video suministrado y una proporción con una simbolización específica. Codificado E (2) P.E.3 (LDP). La codificación significa: E (2), estudiante 2 y P.E.3 (LDP), problema exploración 3, la divina proporción. Se analizó cómo los estudiantes estructuran sus respuestas y comprenden conceptos relacionados con el problema. Se presta especial atención a la coherencia en la presentación de los argumentos y los pasos de resolución.

Por lo tanto, en la resolución escrita de este problema, la comunicación de los pasos es clara y efectiva. La lógica detrás de cada paso y la presentación adecuada de la solución final ayuda a que se comprenda y continúe el proceso de resolución de manera coherente y precisa.

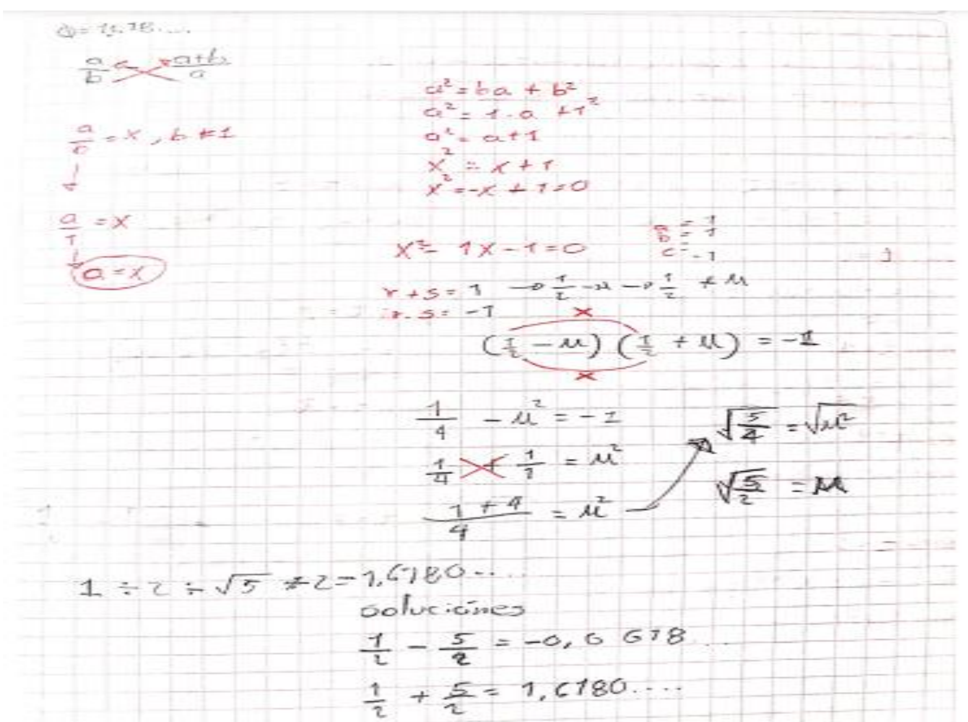


Figura 6. Inicio codificación abierta modo escrito.

En el siguiente diálogo codificado D (3) del problema exploración 3, la divina proporción, cada uno de los estudiantes utilizan el lenguaje de manera efectiva para comunicar sus procesos de pensamiento, estrategias de resolución y resultados en la resolución del problema. Veamos:

*Samuel: … ahora con **a** y **b**, pero multiplique en cruz entonces, eso da a elevado **a** la 2 igual a **b** por la suma de **a** mas **b** , entonces realice otra multiplicación y quedo, **a** al cuadrado igual **b** por a más **b** a la dos Entonces miré las otras cosas que nos dan de **a** sobre **b** es igual **x** y **b** es igual a **1**, entonces cambie la letra por esos valores, pero no estoy seguro si está bien, al final quedo la ecuación , ahh, me di cuenta que tener **a** sobre **b** es igual **a** , como **b** es igual a **1** , entonces me dio, dos **x** , nooooo, **x** elevado **a** la dos igual **a** más 1 (a+1) elevado a la dos.*

*Karen: profesora Goretti, yo lo hice así, se tiene **x** al cuadrado y a la cambie por **x**, pues la otra ecuación dice **a** igual a **x** y 1 al cuadrado es 1 y luego organice para que quedara la ecuación cuadrática, entonces espere, la escribo en el tablero, **x** al cuadrado menos **x** menos **2**.*

*Laura: … b es 1 y c es 1, entonces la suma de r y s es igual a menos 1 y la multiplicación a 1, ahora el promedio de las raíces o el centro de la suma es ½ (un medio) porque es la mitad de **b**, entonces hay que encontrar **u**, a la derecha y a la izquierda. ½ menos **u** y ½ más u, bueno multiplique y eso es igual a ¼ menos u al cuadrado igual a menos 1, despejo **u** y queda ¼ más 1 igual a **u** al cuadrado, profesora lo hice en decimal sume 0,25 más 1 y se da 1,25 y la raíz de eso es 1,11 (uno coma once), eso vale **u**.*

Laura: continuo, entonces acá, reemplace en ½ más 1,11, bueno todo en decimal es igual a 1, 61 (uno coma sesenta uno) y la otra sería ½ menos 1,11, y eso da -0,61 ya esa respuesta se cancela porque no es válida.

Se observa que Samuel expone su razonamiento y proceso de resolución de la ecuación, utiliza términos matemáticos y expresa el procedimiento paso a paso. Aunque comete errores y muestra confusión en un momento, su habilidad para comunicar sus ideas es evidente. Karen presenta una solución alternativa y explica claramente su proceso de reemplazar variables y organizar la ecuación cuadrática. Utiliza el lenguaje matemático de manera efectiva y proporciona justificaciones lógicas. Laura también contribuye al diálogo con una solución diferente, expresando sus cálculos y razonamientos de manera detallada. Utiliza términos como "promedio" y "raíz" para comunicar sus pasos y resultados. Además, muestra una comprensión de la validez de las soluciones obtenidas.

Las anteriores soluciones escritas y orales, junto con otros problemas codificados (ver) , permiten comparar y determinar los conceptos iniciales, como la coherencia y cohesión y argumentación, que a su vez dieron origen a una categoría de orden superior nombrada competencia discursiva.

La Tabla 4 y la Tabla 5 muestran las propiedades y dimensiones de los conceptos coherencia y cohesión y argumentación:

Tabla 4. Coherencia y cohesión sus propiedades y dimensiones

Código	**Dimensión**	**Propiedad**	**Descripción**
Coherencia y cohesión	A partir de los esquemas procedimentales se revela un enfoque paso a paso inmerso de significados en cada etapa del proceso. Un aspecto notable es cómo cada paso se conecta de manera natural con el anterior y el siguiente, donde utilizan tanto simbología numérica como alfanumérica. Esto da lugar a la construcción de expresiones algebraicas con estructuras equivalentes.	Vocabulario específico Comunicación concisa Explicar significados	El procedimiento descrito en el texto o en la narración oral corresponden de manera precisa con el que se ejecuta durante la construcción.

Tabla 5. Argumentación sus propiedades y dimensiones

Código	Dimensión	Propiedad	Descripción
Argumentación	Explicar el ¿Por qué? Al abordar un problema, los estudiantes se involucran en un análisis detallado, donde identifican meticulosamente las incógnitas y las relaciones matemáticas presentes. Este proceso comienza con la interpretación minuciosa del enunciado, seguida de la traducción hábil de la información proporcionada hacia un lenguaje algebraico comprensible. A medida que avanzan en el desarrollo, cada paso se fundamenta en una argumentación lógica sólida.	Coherencia Fundamentación Consistencia Precisión	Estructurar argumentos de manera coherente y lógica, además responder de forma efectiva a objeciones y críticas. Adaptar los argumentos hacia los compañeros de clase y docente y al contexto específico, así como la capacidad de utilizar el lenguaje de manera persuasiva.

Seguimos con la codificación axial, que permite profundizar y comprender de manera más profunda las categorías y conceptos emergentes en los datos recopilados. En este contexto, se aborda la categoría de competencia discursiva como un elemento de orden superior que abarca diversas dimensiones y propiedades relacionadas con la habilidad de comunicarse de manera efectiva a través del lenguaje en la resolución de problemas. Con la codificación axial, se examinó y se analizó las subcategorías y relaciones que constituyen esta competencia discursiva, permitiendo así una comprensión más completa y detallada de este importante fenómeno comunicativo.

En la Figura 7 se presenta la dimensión de la categoría competencia discursiva. Dentro de esta categoría, se observa que, mediante la argumentación estructurada, tanto escrita como oral (condición causal), los estudiantes explican significados en el discurso en la resolución de problemas (fenómeno). Se ha observado una aplicación práctica de las ecuaciones en situaciones de la vida diaria (contexto).

Categoría Competencia Discursiva

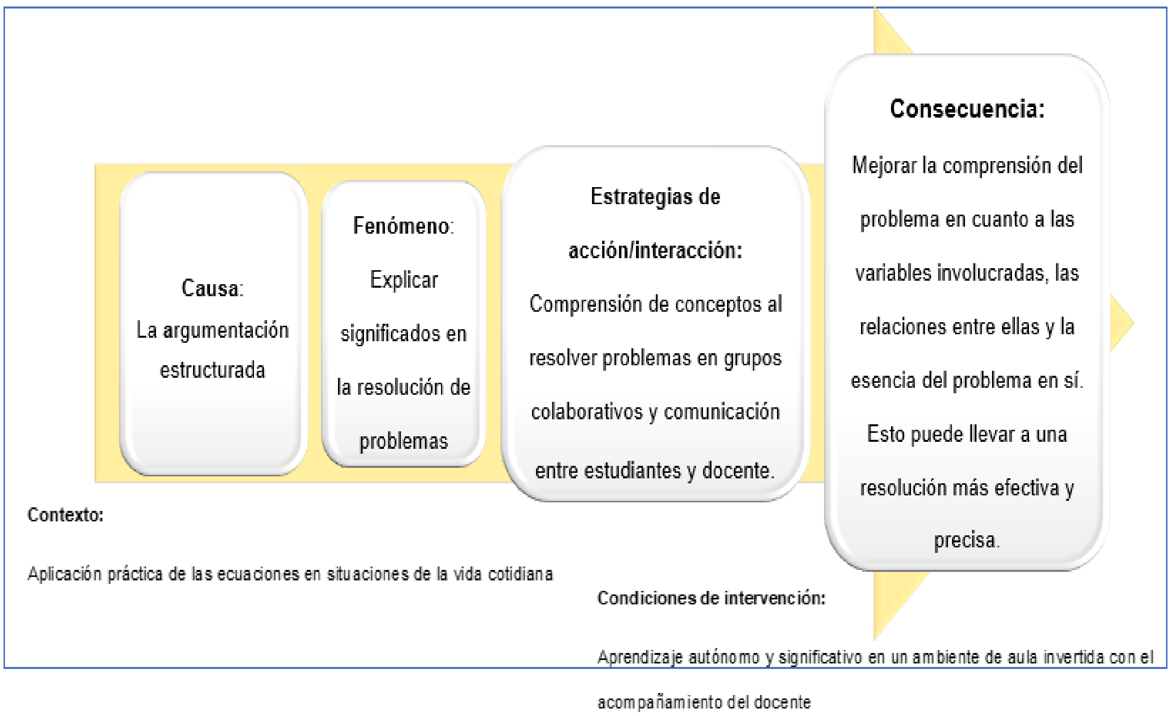


Figura 7. Codificación axial

Cuando los estudiantes explican significados en la resolución de problemas, logran una comprensión más sólida de los conceptos necesarios para alcanzar asertivamente la solución en grupos de trabajo colaborativos. Además, se fomenta la comunicación constante entre los estudiantes y el docente (estrategias). Todo esto se facilita gracias al aprendizaje autónomo y significativo en un entorno de aula invertida, con el apoyo constante del docente (circunstancias intermedias).

En consecuencia, este enfoque contribuye a mejorar la comprensión de los problemas en términos de las variables involucradas, las relaciones entre ellas y la esencia misma del problema. Como resultado, se logra una resolución más efectiva y precisa.

Se detalló el proceso de codificación axial en la investigación. Se aplicó este enfoque de codificación para identificar subcategorías que se relacionaron entre sí, para construir la categoría. Es importante destacar que la codificación axial fue un proceso iterativo (ver) .Estas categorías aún no son definitivas, pero sí representan avance en la construcción de la teoría sustantiva.

Se continuó manipulando los datos originales, logrando determinar otros conceptos iniciales en esta investigación, como palabras cotidianas y manipulación de objetos en contextos. Se identificaron mediante el análisis de los siguientes problemas y otros.

La Figura 8 contiene la solución de un problema de ecuación lineal y otro de tipo cuadrático, codificados respectivamente E (3), P.E .2 (EBA) y G (2) P.P.1(MAE), donde significa: E (3), estudiante 3 y P.E.2 (EBA), problema exploración 2, equilibrar la balanza entre animales y G (2), grupo 2 y P.P.1 (MAE), Problema de profundización 1, vuelo del avión Eurofighter.

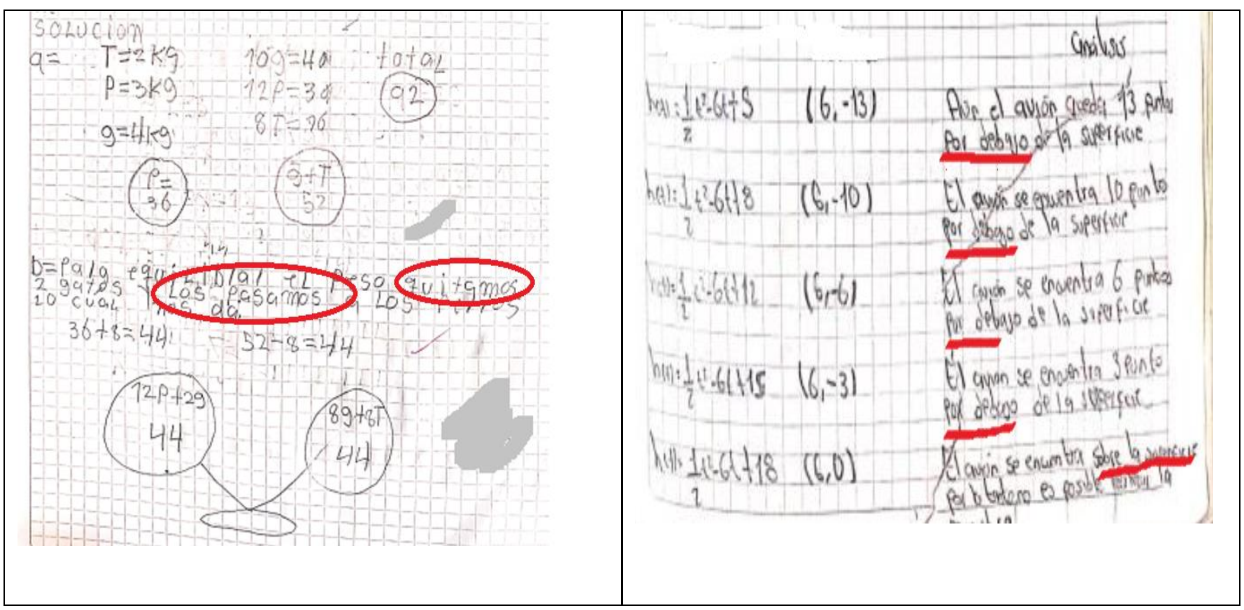


Figura 8. Codificación abierta

Al resolver problemas de ecuaciones, los estudiantes emplean diversas expresiones verbales escritas que combinan elementos matemáticos con el lenguaje cotidiano para comunicar sus pasos y razonamientos de manera efectiva. Estas expresiones ayudan a clarificar el proceso y a establecer una conexión entre el contexto matemático y situaciones de la vida diaria.

Cuando describen el proceso de sumar o restar términos para despejar una variable, expresándose como "agregamos", "pongo" o "quitamos" para ilustrar la acción que están llevando a cabo y explican por qué ciertos pasos son necesarios, usan frases como "lo pasamos" o "para aislar", lo que ayuda a establecer la lógica detrás de sus decisiones.

Es importante mencionar que las expresiones verbales escritas varían según el nivel de comprensión y el público, en este caso, los compañeros de clase y docente. Se observa la combinación de elementos matemáticos y lenguaje cotidiano, que ayudan a clarificar su razonamiento, facilitar la comprensión y establecer conexiones con situaciones del mundo real.

Por otro lado, el siguiente fragmento del diálogo codificado D (1) problema profundización 1. Vuelo del avión Eurofighter, las estudiantes utilizan un discurso adecuado al contexto, usando un lenguaje cotidiano en sus expresiones. Leamos:

Mariana y Hellen:… utilizamos GeoGebra y allí colocamos la ecuación y **el h cero** *le fuimos colocando un número cualquiera, colocamos negativos y luego positivos y miramos que la gráfica cambiaba tanto para* ***abajo como para los costados****, eso ensayamos varias veces…..,hasta llegar a la respuesta nos dio* ***en h cero igual a 18*** *allí queda sobre el eje x, porque con número más pequeños* ***quedaba abajo*** *y el avión no podía hacer la maniobra se estrella, en cambio a partir de 18 queda sobre el piso y el avión sube.*

A partir de ese diálogo, argumentar la solución de problemas mediante el uso de palabras cotidianas en expresiones verbales orales desempeñan un papel esencial en la claridad y accesibilidad de la comunicación. Al emplear un lenguaje natural, los estudiantes transmiten sus razonamientos de manera efectiva, conectando así los conceptos matemáticos con situaciones de la vida diaria comprensibles para todos. Estas palabras cotidianas actúan como puentes, permitiendo que las ideas complejas se presenten de manera comprensible.

Por consiguiente, al emplear ejemplos y analogías, los estudiantes enriquecen la argumentación al hacerla más relevante y relacionada con la realidad. Esta práctica no solo fortalece la coherencia en la comunicación, sino que también fomenta un ambiente de aprendizaje colaborativo, al facilitar la interacción entre compañeros con diferentes niveles de conocimiento matemático. En última instancia, el uso de palabras cotidianas en las expresiones verbales orales al argumentar la resolución de problemas contribuye a una comunicación más efectiva y a un entendimiento más profundo entre los estudiantes.

El problema de la Figura 6 y otros (ver) que contribuyeron al código manipulación de objetos en contextos, implica el uso de símbolos matemáticos y representaciones visuales para modelar y resolver ecuaciones. En este proceso, los estudiantes emplean letras para representar las variables y números para representar los coeficientes. A medida que avanzan en la resolución de problemas, manipulan estos objetos simbólicos mediante operaciones matemáticas como suma, resta, multiplicación y división. Esta manipulación física de los objetos simbólicos les permite visualizar y comprender cómo se desarrolla el proceso de resolución.

A medida que los estudiantes interactúan con estos objetos y aplican los conceptos aprendidos en situaciones concretas, consolidan su interpretación. La manipulación de objetos matemáticos les ayuda a internalizar los procedimientos y las relaciones, lo que facilita una comprensión más profunda y duradera de las ecuaciones. Además, al fomentar el pensamiento matemático y la resolución de problemas, los estudiantes deben aplicar activamente los conceptos y tomar decisiones sobre cómo proceder en la resolución de estos problemas.

La Tabla 6 y la Tabla 7 presentan las propiedades y dimensiones de los conceptos palabras cotidianas y manipulación de objetos en contextos, lo que da lugar a una categoría de orden superior nombrada competencia sociolingüística.

Tabla 6. Palabras cotidianas sus propiedades y dimensiones

Código	Dimensión	Propiedad	Descripción
Palabras cotidianas	El uso de palabras cotidianas permite a los estudiantes explicar sus razonamientos y procesos de manera más efectiva. Esto, a su vez, les permite relacionar los conceptos matemáticos con situaciones de la vida diaria que todos pueden entender.	Accesibilidad Adecuación Reducción de barras de comunicación Universalidad	El uso del lenguaje cotidiano en la resolución de problemas promueve un aprendizaje más efectivo y una mayor confianza en la capacidad de abordar desafíos matemáticos. Además, fomenta la participación activa y el razonamiento algebraico, ya que los estudiantes deben aplicar activamente los conceptos y tomar decisiones sobre cómo proceder en la resolución de problemas.

Tabla 7. Manipulación de objetos en contextos sus propiedades y dimensiones

Código	Dimensión	Propiedad	Descripción
Manipulación de objetos en contextos	Realizar operaciones matemáticas, como suma, resta, multiplicación y división, de manera física con los objetos, o graficar en GeoGebra les ayuda a visualizar y comprender mejor cómo se relacionan los elementos de la ecuación y cómo se llega a la solución. Este enfoque no solo fortalece la comprensión de los procedimientos matemáticos, sino que también ayuda a los estudiantes a internalizar los conceptos y las relaciones subyacentes en las ecuaciones. Les brinda una base sólida para abordar problemas matemáticos de manera más efectiva y desarrollar habilidades de razonamiento algebraico.	Visualización Interacción Motivación	La conexión con el mundo real, la retroalimentación inmediata, la adaptabilidad a diferentes estilos de aprendizaje, la creatividad, la retención a largo plazo, la autoevaluación, la integración de habilidades y la motivación intrínseca, contribuyen a un aprendizaje efectivo y significativo.

A partir de este proceso, se examinaron las relaciones entre los códigos iniciales y se identificaron las conexiones subyacentes. Esta fase implicó un análisis más profundo de los datos, con el objetivo de comprender las relaciones causales, las conexiones temporales y las interacciones entre los códigos.

La Figura 9 conduce al desarrollo de la codificación axial, la cual sustenta una parte del marco teórico de la investigación, que proporciona una comprensión profunda del fenómeno expresiones verbales cotidianas en la resolución de problemas en diferentes contextos:

Figura 9. Codificación axial

En el marco de la dimensión y explicación de la competencia sociolingüística, se evidencia que la interpretación del lenguaje matemático, como un factor causal, lleva a los estudiantes a emplear expresiones verbales cotidianas en la resolución de problemas en distintos contextos (fenómeno). Esto se traduce en la aplicación práctica de ecuaciones en situaciones de la vida diaria, ya sea de forma individual o colaborativa dentro del entorno del aula (contexto).

Cuando los estudiantes interpretan el lenguaje matemático a través de la manipulación de objetos en diversas situaciones, utilizan el vocabulario matemático tanto en su expresión escrita como oral, en la interacción con sus compañeros y el docente (estrategias). Este proceso se facilita mediante el aprendizaje autónomo y significativo en un entorno de aula invertida, con el apoyo del docente (circunstancias intermedias).

Dicho enfoque propicia una comunicación precisa y coherente del lenguaje matemático, que resulta fundamental en la toma de decisiones y la resolución de problemas en diversos contextos sociales y culturales (consecuencias).

Las Figuras 10 y 11 representan la resolución de dos problemas planteados en las guías de aprendizaje. Estos problemas han sido codificados como G (1) P.P.3 (MUR) y G (3) P.E.1 (F.A.F.S.P), y cada código tiene un significado específico. G (1) se refiere al Grupo 1, P.P.3, problema profundización 3 movimiento uniformemente rectilíneo, mientras que G (3) se relaciona con el Grupo 3, y P.E.1 con Problema Exploratorio 1, fuegos artificiales en la fiesta de San Pedro.

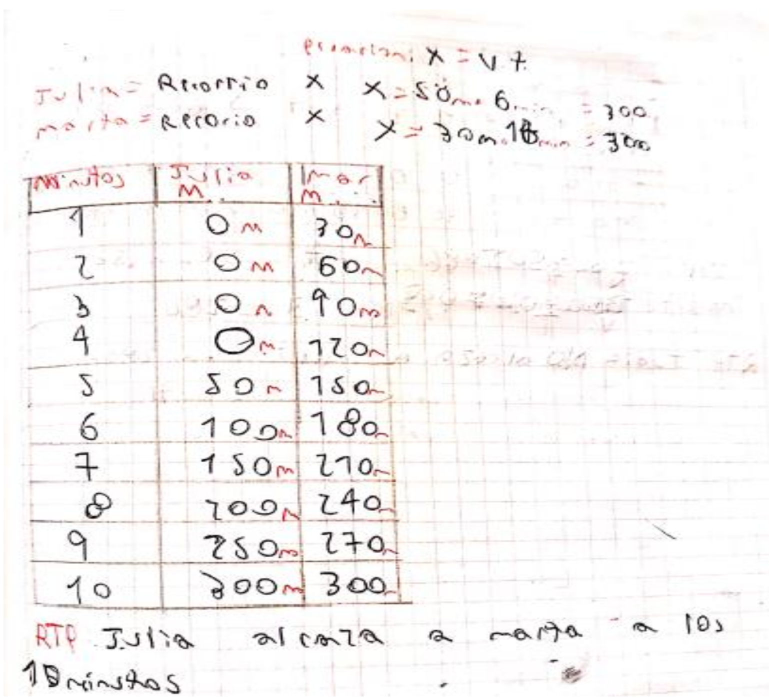


Figura 10. Codificación axial

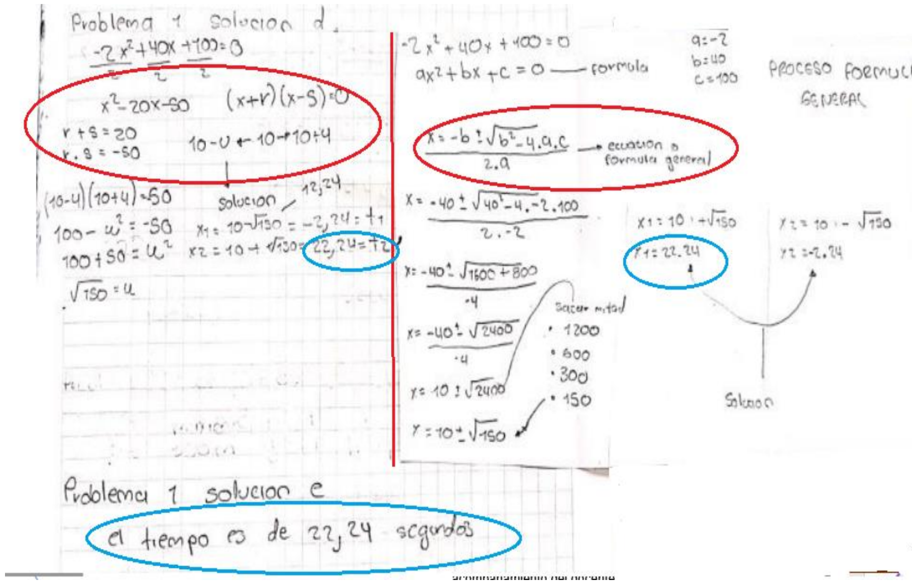


Figura 11. Codificación axial

Se observa en la solución de estos problemas y en otros que se encuentran en el (ver) , el uso de símbolos, herramientas matemáticas y tecnológicas para descubrir, verificar y relacionar lo desconocido en diversos contextos. Los estudiantes emplean enfoques de resolución que mantienen estructuras y algoritmos, y comunican sus procesos de manera escrita u oral. Esto involucra la capacidad de interpretar significados, comprender conceptos y transformar expresiones matemáticas. Además, demuestran la capacidad para percibir y comprender soluciones a problemas retadores, incluyendo la comprensión de lo que otros expresan a través de objetos matemáticos y la matematización aplicada en la modelación de diferentes situaciones.

En este proceso, se aprecia la creatividad en la forma en que los estudiantes abordan los problemas y utilizan tanto símbolos como palabras para expresar conceptos y comprender representaciones. Además, logran la reconstrucción de imágenes mentales y conceptuales, y se evidencia la diversidad en sus formas de pensamiento y expresión, que van desde el lenguaje cotidiano hasta el uso de un lenguaje académico escolar adquirido.

Cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas con ecuaciones, ya sea en formato escrito u oral, aplican una serie de estrategias que implican un pensamiento lógico y la capacidad para presentar sus procesos de manera coherente y convincente. Esto comienza con un análisis minucioso del problema, identificando incógnitas, datos conocidos y relaciones matemáticas involucradas. Este análisis sienta las bases para su razonamiento y les permite comprender la situación en su totalidad.

A medida que avanzan en la resolución, seleccionan estrategias adecuadas para resolverlo, ya sea despejando variables, aplicando propiedades algebraicas o utilizando simuladores, entre otras. Cada paso sigue una secuencia lógica, basado en el anterior y estableciendo el camino para el siguiente, demostrando su capacidad para desarrollar un razonamiento coherente y estructurado. Además, proporcionan explicaciones detalladas de cada paso utilizando tanto lenguaje matemático como cotidiano para comunicar sus procesos.

Al presentar la solución final, establecen conexiones con el problema original, explicando cómo la solución numérica se relaciona con el contexto del problema y satisface las condiciones dadas. No se limitan a aplicar conceptos matemáticos, sino que presentan sus procesos de manera lógica y convincente, asegurando que cada paso esté respaldado por una justificación sólida.

A partir de estos datos originales o códigos in-vivo, se han generado códigos iniciales mediante el proceso de codificación abierta. La Tabla 8 y la Tabla 9 muestran estos códigos iniciales: enfoques de resolución y razonamiento y argumentación, y, a su vez, han dado lugar a una categoría de orden superior que denominamos competencia estratégica.

Tabla 8. Enfoques de resolución sus propiedades y dimensiones

Código	Dimensión	Propiedad	Descripción
	Uso de estrategias y métodos que los estudiantes emplean al resolver problemas de ecuaciones con el objetivo de comunicar efectivamente	Justificar Generalizar y	Promover un pensamiento estructurado y lógico. A partir de: Estructura y Secuencia: Cómo los

Enfoque de resolución	sus procesos y soluciones. Estos enfoques abarcan una serie de pasos y decisiones que los estudiantes toman para abordar un problema matemático y expresar su pensamiento de manera coherente y clara.	transferir Creatividad Mediadores Metacognición	estudiantes organizan sus procesos de resolución en una secuencia lógica de pasos. Flexibilidad y Adaptabilidad: Capacidad de los estudiantes para seleccionar estrategias y ajustar su enfoque según las necesidades específicas de cada problema. Claridad en la Comunicación: Capacidad de los estudiantes para comunicar claramente sus procesos y soluciones, utilizando un lenguaje matemático y cotidiano comprensible para otros.

Tabla 9. Razonamiento y argumentación sus propiedades y dimensiones

Código	**Dimensión**	**Propiedad**	**Descripción**
Razonamiento y argumentación	Capacidad de pensar lógicamente, justificar decisiones y comunicar de manera efectiva los procesos de resolución.	Coherencia Precisión matemática Adaptabilidad Comunicación escrita y oral	Descomponer el proceso de resolución en pasos lógicos y claramente definidos, se comienza desde la formulación de las ecuaciones hasta la obtención de la solución. En este sentido, explicar cada paso en el proceso de resolución, incluye la elección de la estrategia utilizada, la manipulación algebraica específica y la justificación detrás de cada acción. Estas acciones contribuyen a persuadir de manera efectiva a los compañeros de clase y docente sobre la validez de la solución propuesta.

Se continua con la codificación axial, para relacionar las anteriores categorías y con conceptos emergentes.

La Figura 12 proporciona una comprensión del fenómeno acciones para resolver problemas en diferentes contextos.

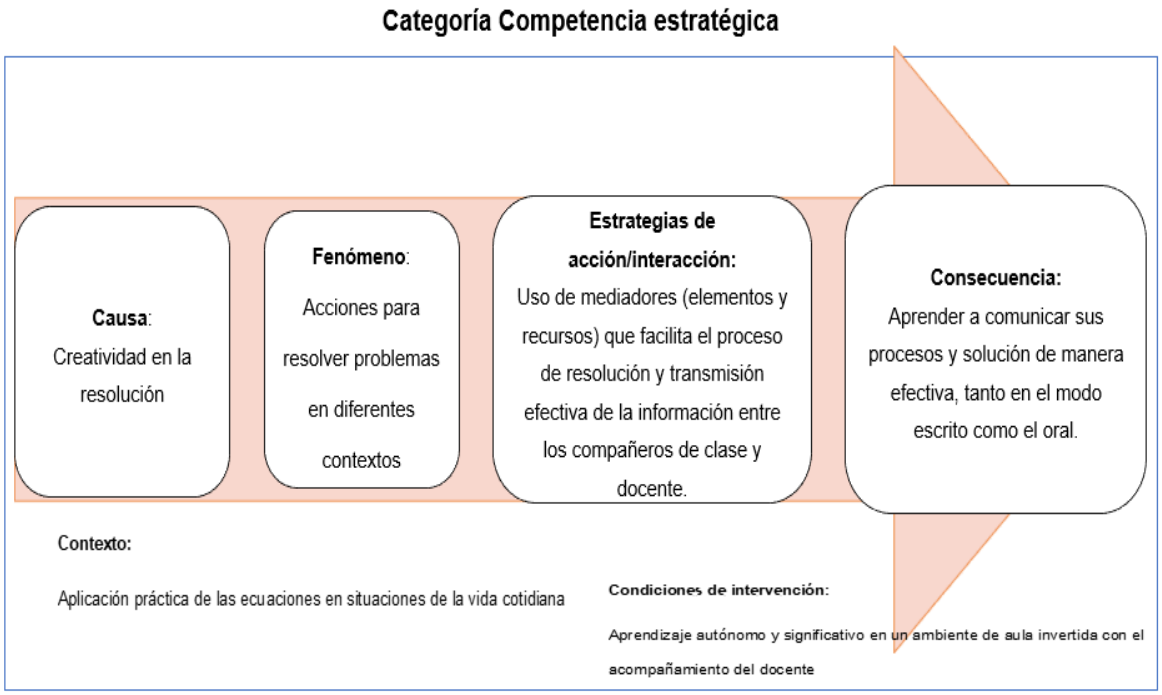


Figura 12. Codificación axial

La dimensión y explicación de la competencia estratégica destaca que la creatividad en la resolución de problemas tiene un impacto significativo, ya que funciona como un factor causal. Esto lleva a que los estudiantes realicen acciones para resolver problemas en diversos contextos (fenómeno). Esto se traduce en la aplicación práctica de ecuaciones en la vida cotidiana, ya sea de manera individual o colaborativa en el entorno del aula (contexto).

Cuando los estudiantes aplican estas acciones a través del razonamiento y argumentación, facilitan el proceso de resolución y logran transmitir información de manera efectiva de la información entre sus compañeros y el docente, lo que se puede considerar como estrategia clave en este proceso. Estas estrategias se ven favorecidas por el aprendizaje autónomo y significativo en un entorno de aula invertida, con el apoyo activo del docente, lo que se consideran circunstancias intermedias esenciales.

Como resultado de este enfoque, los estudiantes adquieren la habilidad de comunicar de manera efectiva sus procesos y soluciones, tanto en formato escrito como oral. Esto se traduce en una comunicación más eficaz y coherente.

A continuación, se analizó la relación existente entre las categorías de orden superior: lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica al resolver problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas en el contexto de aula invertida. En consecuencia, se presentan los resultados parciales de cada una de las categorías de orden superior mencionadas previamente, teniendo en cuenta el fenómeno de estudio en cada una de ellas. Es importante destacar que estas categorías aún no son definitivas, pero representan un primer avance en el desarrollo de la teoría sustantiva.

La competencia lingüística, en particular, se centra en el uso apropiado del vocabulario en los procedimientos matemáticos. Esta competencia establece las bases para una comunicación efectiva y coherente en la resolución de ecuaciones en un entorno de aula invertida. En la Tabla 10 presenta la relación entre la competencia lingüística y las competencias sociolingüística, discursiva y estratégica, ya que influye en cómo se adapta el lenguaje matemático al contexto, se presenta de manera coherente y se eligen estratégicamente los términos para lograr una resolución eficaz de ecuaciones.

Tabla 10. Competencia lingüística: Uso de vocabulario en el desarrollo de algoritmos en la resolución de problemas

Categoría: Uso de vocabulario en el desarrollo de algoritmos en la resolución de problemas. **Dimensión**: Dominio del vocabulario específico necesario para describir, analizar y resolver problemas en diferentes contextos.		
Propiedades	**Dimensiones**	**Descripción**
Uso de palabras cotidianas en contextos matemáticos. Interpretación de términos matemáticos en un contexto. Adaptar el lenguaje matemático al nivel de comprensión de los compañeros de clase.	Competencia sociolingüística	Relación entre el lenguaje matemático y el entorno social y cultural.
		Explicación matemática de manera

Coherencia	Competencia discursiva	lógica y estructurada, asegurando que los pasos de resolución estén interconectados y sigan una secuencia lógica.
Cohesión		Conexión fluida entre las ideas y la utilización de marcadores discursivos para guiar al lector u oyente a través de la explicación
Argumentar y justificar las elecciones de términos y expresiones. Creatividad para adaptar el lenguaje matemático a diferentes contextos. Mediar entre el lenguaje Matemático y el lenguaje cotidiano.	Competencia estratégica	Acciones y enfoques que se utilizan para abordar la resolución de problemas matemáticos

En la Tabla 11, se ilustra cómo la competencia discursiva se desarrolla al resolver problemas en relación de la competencia sociolingüística que desempeña un papel en la adaptación del lenguaje al contexto y a los interlocutores. Por su parte, la competencia lingüística asegura la precisión en el uso del vocabulario matemático, mientras que la competencia estratégica juega un papel clave en la transmisión efectiva de los significados matemáticos. Estas dimensiones trabajan en conjunto para facilitar la comunicación y la comprensión de conceptos y procesos matemáticos durante el proceso de resolución de problemas, lo cual contribuye significativamente a un aprendizaje matemático más profundo y significativo.

Tabla 11. Competencia discursiva: Explicar significados en la resolución de problemas

Categoría: Explicar significados en la resolución de problemas. **Dimensión**: Capacidad de explicar de manera coherente y argumentada los procedimientos y conceptos involucrados en la resolución de problemas.		
Propiedades	**Dimensiones**	**Descripción**
Interpretación de términos matemáticos en situaciones prácticas. Comunicar conceptos matemáticos	Competencia sociolingüística	Adaptación del lenguaje al contexto social y cultural.

de manera que sean comprensibles y significativos para quienes participan en la resolución de problemas.		
Precisión en la selección de palabras y términos matemáticos. Utilizar un lenguaje claro y adecuado para describir conceptos y procesos matemáticos.	Competencia lingüística	Competencia del lenguaje en sí, incluyendo el vocabulario específico necesario para describir, analizar y resolver problemas.
Selección de estrategias de comunicación efectivas Estructuración de argumentos lógicos Utilización de ejemplos apropiados.	Competencia estratégica	Aplicación efectiva de estrategias de resolución al razonar y argumentar de manera sólida.

En la Tabla 12, se presenta la relación de la competencia sociolingüística en el uso de expresiones cotidianas en la resolución de problemas en diversos contextos. Por lo tanto, la vinculación entre estas categorías se fundamenta en la competencia lingüística, que establece la base para la precisa elección de palabras y términos matemáticos. La competencia discursiva asegura una presentación coherente y organizada de las ideas, mientras que la competencia estratégica guía la selección estratégica de expresiones verbales cotidianas para mejorar la comprensión y la relevancia en la resolución de problemas matemáticos. Estas dimensiones trabajan de manera conjunta para facilitar un aprendizaje matemático más accesible y significativo, al conectar conceptos abstractos con el lenguaje cotidiano.

Tabla 12. Competencia sociolingüística: Expresiones verbales cotidianas en la resolución de problemas en diferentes contextos

Categoría: Expresiones verbales cotidianas en la resolución de problemas en diferentes contextos **Dimensión**: conocimiento y uso de expresiones cotidianas relacionadas con problemas matemáticos, lo que ayuda a conectar el lenguaje matemático con situaciones de la vida diaria.		
Propiedades	**Dimensiones**	**Descripción**
Selección precisa de palabras y		Conocimiento y uso de expresiones cotidianas relacionadas con problemas matemáticos, lo que

términos matemáticos. Utilizar un lenguaje claro y comprensible para describir conceptos Utilizar procesos matemáticos en términos cotidianos.	Competencia lingüística	ayuda a conectar el lenguaje matemático con situaciones de la vida diaria.
Explicar los pasos de resolución de manera lógica y organizada, asegurando que cada paso esté relacionado con el siguiente y que la explicación sea clara y comprensible para los destinatarios.	Competencia discursiva	Presentación coherente y estructurada de ideas matemáticas.
Comunicar conceptos y procesos matemáticos utilizando un lenguaje que sea relevante para la vida diaria. Elección de ejemplos y analogías que conecten los conceptos matemáticos con situaciones cotidianas.	Competencia estratégica	Acciones y enfoques utilizados para abordar la resolución de problemas matemáticos.

Las categorías de la Tabla 13, se basa en cómo la competencia lingüística proporciona la base para la elección precisa de palabras y términos matemáticos, la competencia discursiva garantiza una presentación coherente y organizada de ideas y la competencia sociolingüística guía la adaptación del lenguaje al contexto social y cultural en el que se están llevando a cabo las acciones para resolver problemas. Estas dimensiones trabajan de manera sinérgica para facilitar la comunicación efectiva y la comprensión de conceptos y procesos matemáticos en una variedad de contextos de resolución de problemas.

Tabla 13 Competencia estratégica: Acciones para resolver problemas en diferentes contextos

Categoría: Acciones para resolver problemas en diferentes contextos **Dimensión**: Selección y aplicación de estrategias efectivas para resolver problemas matemáticos.		
Propiedades	Dimensiones	Descripción
Selección precisa de palabras y términos matemáticos. Utilizar un lenguaje claro y comprensible para describir conceptos y procesos matemáticos de manera adecuada.	Competencia lingüística	Uso efectivo del vocabulario para comprender y aplicar las estrategias.
Explicar los pasos de resolución de manera lógica y organizada, asegurando que cada paso esté relacionado con el siguiente y que la explicación sea clara y comprensible para quienes la escuchan o leen.	Competencia discursiva	La argumentación sólida y la creatividad en la comunicación son esenciales para justificar y explicar las estrategias utilizadas.
Utilizar un lenguaje que sea relevante y apropiado para la audiencia y el entorno específicos. Interpretar y comunicar conceptos matemáticos de manera que sean significativos y comprensibles dentro un contexto.	Competencia sociolingüística	Relacionar el lenguaje matemático con expresiones cotidianas para una mejor comprensión y comunicación.

El proceso de codificación continúa evolucionando, y en un ambiente de aula invertida, estas cuatro competencias interactúan y se complementan para facilitar el desarrollo de habilidades efectivas en la resolución de problemas con ecuaciones. El dominio del vocabulario matemático, la capacidad de explicar conceptos con coherencia y argumentación sólida, el uso de expresiones cotidianas para contextualizar los problemas y la selección estratégica de enfoques de resolución se entrelazan para mejorar la comprensión y la comunicación de los procesos de resolución de problemas matemáticos. Esto proporciona una base sólida para comprender cómo estas competencias trabajan juntas para facilitar el aprendizaje y la resolución de problemas en un ambiente de aula invertida. Más adelante, en la evolución la teoría sustantiva, detallaremos estas interacciones de manera más profunda.

4.2.2. Segundo ciclo de codificación y análisis de datos: codificación abierta y axial

La primera fase de codificación nos permitió identificar y comprender en profundidad las competencias lingüísticas, discursivas, sociolingüísticas y estratégicas que influyen en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas en diversos contextos. Esta etapa inicial fue fundamental para desglosar y categorizar la información recopilada a partir de las fuentes de datos.

Ahora, avanzamos hacia el segundo ciclo de codificación y análisis de datos, que se centró en el impacto del rediseño de una guía de aprendizaje que contiene problemas de exploración y profundización en diferentes contextos relacionada con sistemas de ecuaciones lineales, así como en los resultados de la entrevista semiestructurada. Este segundo ciclo permitió explorar cómo las intervenciones específicas han afectado las competencias previamente identificadas y cómo los participantes las han aplicado en situaciones concretas.

Se inició con las cuatro categorías de orden superior identificadas en la primera codificación: competencia lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica, junto con los fenómenos asociados a cada una de ellas. A partir de los nuevos datos recopilados, se identifican propiedades adicionales y relaciones que contribuyen a la construcción de la codificación axial (ver) y selectiva, y, por ende, al progreso de la teoría sustantiva.

4.2.2.1. Categoría: Competencia lingüística

Fenómeno: Vocabulario en el Desarrollo de Algoritmos

Descripción: Es el uso de palabras y términos matemáticos en el proceso de resolver problemas de ecuaciones lineales 2x2 en diversos contextos aplicando los métodos de igualación, sustitución y eliminación.

Propiedades:

- Incógnita

Dimensión: Representar cantidades desconocidas mediante palabras o símbolos, asignar una letra como abreviatura de los nombres de los objetos, lo que resulta la construcción de ecuaciones coherentes. Esta práctica no solo simplifica la representación matemática del problema, sino que también facilita una comunicación eficiente y clara de los objetivos que se buscan alcanzar.

La Figura 13 es parte de la solución escrita de un grupo de estudiantes codificado G (4), P.P.7 (M), que significa G (4), grupo 4, P.P.7 (M) problema profundización 7 mezclas. Se observa que los estudiantes representan las incógnitas utilizando las letras 'x' y 'y', lo cual se ajusta de manera coherente a la comprensión e interpretación de las condiciones que el problema propone. A partir de esta simbolización, se construyen las ecuaciones al incorporar la información suministrada, permitiendo así comunicar matemáticamente las ideas de manera efectiva mediante la representación alfanumérica, de modo que otros puedan entender claramente lo que se ha planteado.

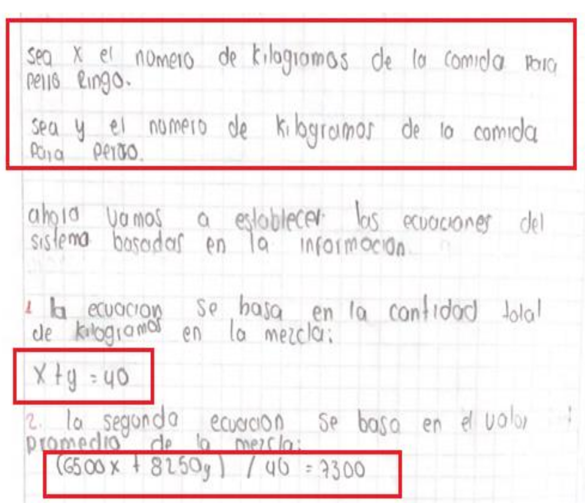


Figura 13. Solución del problema de profundización 7. Mezclas

Se presenta otra solución del grupo 2 (G (2)) P.P.6, problema profundización 6, sobre el ejercicio de una gimnasta en la Figura 14. En esta solución, los estudiantes reconocen que la incógnita principal es la 'velocidad', que se aplica tanto cuando la gimnasta corre como cuando utiliza la bicicleta. Sin embargo, emplean el mismo símbolo para ambas situaciones. Este enfoque genera un problema en la estructura de las ecuaciones, ya que no logran reflejar de manera precisa en el lenguaje matemático lo que intentan comunicar. Como resultado, al plantear las ecuaciones, omiten las incógnitas y cambian las letras de acuerdo con la asignación inicial, lo que lleva a que el significado de estas sea diferente al que el problema expone en el lenguaje común en cada contexto.

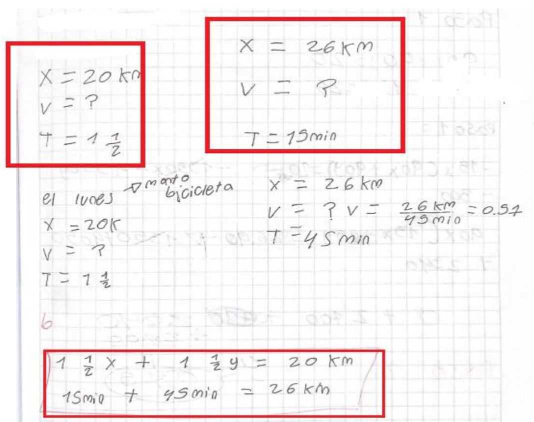


Figura 14. Resolución del problema profundización 6. Ejercicio de una gimnasta

- Variable:

Dimensión: Representar y definir relaciones matemáticas entre las incógnitas para la construcción de las ecuaciones que conforman el sistema que refleja las restricciones o condiciones planteadas en el problema en diferentes contextos.

La comprensión de las variables y su relación con las incógnitas se desarrolla en la Figura 15, problema exploración 1 sobre costos totales, codificado E (1), P.E.1(CT). En esta figura, los estudiantes representan las cantidades desconocidas en el problema y las relaciones matemáticas que existen entre ellas. En este contexto, se formula la ecuación del costo total de usar cualquier tipo de calefacción (solar o eléctrica) por año, variando los costos totales para 5,10 y 15 años. A partir de los resultados obtenidos en esta exploración, se realiza un análisis, predicción, comparación y argumentación para determinar cuál sistema es más eficiente con el paso del tiempo.

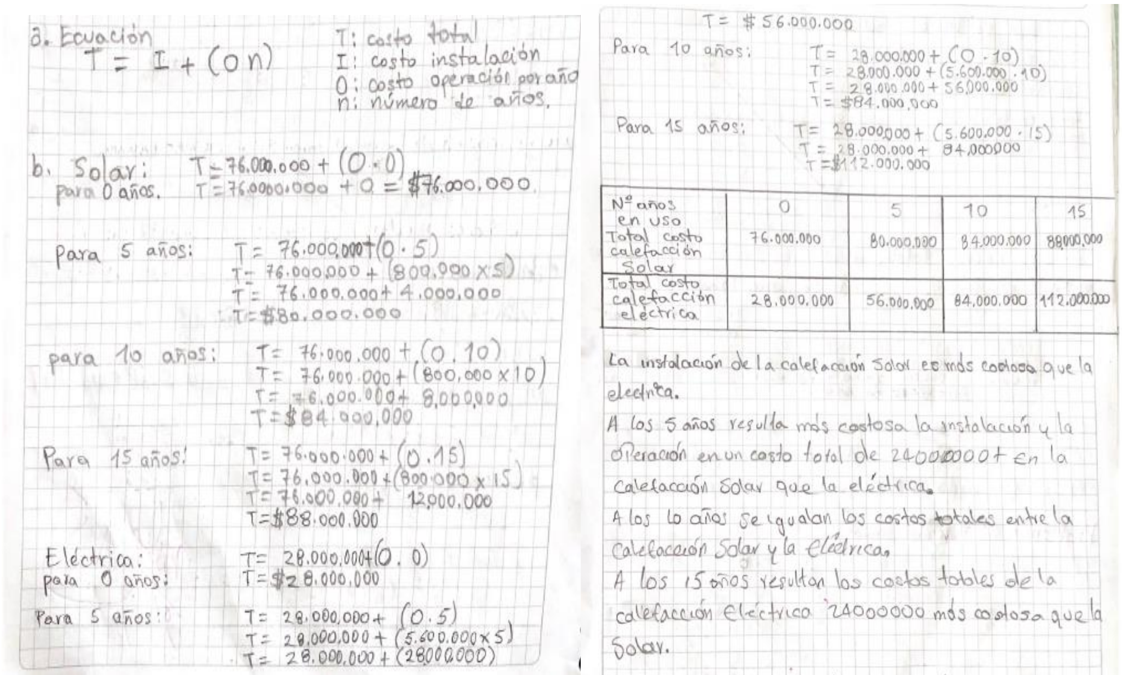


Figura 15. Resolucion del problema exploración 1. Costos totales

En las socializaciones orales, se observa que los estudiantes pueden tener dificultades para mantener el control adecuado del vocabulario necesario para identificar y analizar las variables del problema. En el diálogo 5 del grupo2, codificado como G (2), D (5), la estudiante menciona las variables en el contexto del problema, incluyendo las cantidades que son constantes. Sin embargo, también reconoce que existen valores desconocidos en relación con las cantidades de los dos tipos de comida para perros:

Yaira: … las variables son el precio de la comida de Ringo. También el precio de la comida Pedrigee, también la cantidad total de la mezcla y el valor deseado de la mezcla, pero de todas estas la que no sabemos son las cantidades de comida Ringo y cantidades de comida Pedrigee, nosotras simbolizamos C_r *(cantidad de comida Ringo en kg) y* C_p *(cantidad de comida Pedrigee en kg) y estas son las variables…*

- Solución

  Descripción: Encontrar los valores específicos de las incógnitas que hacen que la ecuación sea verdadera.

La Figura 16 es la solución gráfica del problema de profundización 1 sobre el cruce de objetos con movimiento uniformemente rectilíneo (MUR), codificado G (6) P.P1 (CO-MUR). A partir de la gráfica realizada en el plano cartesiano, la solución del sistema de dos ecuaciones lineales en diferentes contextos representa el punto de intersección de las dos líneas correspondientes a las ecuaciones. Esta representación gráfica es útil para visualizar la relación entre las ecuaciones y cómo se cruzan en un punto específico, sin embargo, al escribir la solución confunde las variables que especifica el problema.

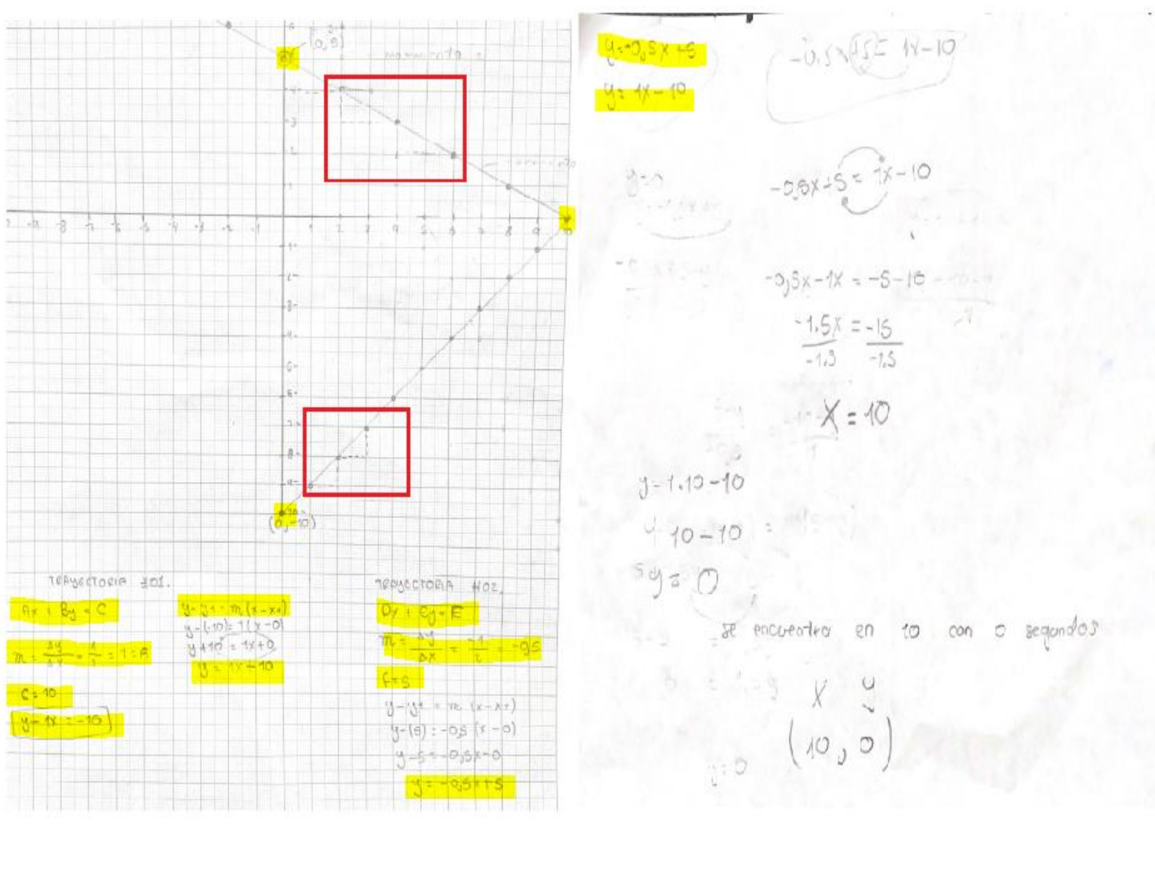


Figura 16. Solución gráfica del problema profundización 1. Cruce de objetos con movimiento uniformemente rectilíneo (MUR)

Subcategoría: Representaciones simbólicas

Descripción: Expresar los sistemas de ecuaciones utilizando símbolos matemáticos y notación adecuada para comunicar las relaciones algebraicas y encontrar las soluciones de los problemas en diferentes contextos.

Propiedades:

- Esquema procedimental

Dimensión: Explicar y comunicar los pasos y procesos involucrados en la resolución de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, lo que implica la comprensión de los pasos al usar el método de igualación, sustitución y eliminación con una metodología de aprendizaje de aula invertida.

La figura 17 muestra la resolución del problema profundización 4, ecuación de un proyectil, realizado por el grupo 9, codificado como G (9) P.P.4(EP). En esta figura, se observa cómo los estudiantes aplican de manera sistemática el método de eliminación, desglosando los algoritmos aritméticos y algebraicos necesarios para transformar un sistema de ecuaciones con tres incógnitas en otro con solo dos. En todo momento, optan por la aplicación constante del método de eliminación y logran comunicar sus conceptos con un lenguaje claro y accesible, que se traduce en expresiones algebraicas que facilitan la comprensión de cada paso. Establecen claramente cómo uno de estos pasos conduce al siguiente, creando una secuencia lógica que culmina en la solución final del problema.

- Esquema gráfico

Dimensión: Representar visualmente, interpretar soluciones y comunicar procesos de resolución y resultados a través de los esquemas gráficos en el plano cartesiano para las ecuaciones lineales 2x2 tienen un impacto significativo en la comprensión de conceptos matemáticos y en el fortalecimiento de las habilidades comunicativas en el lenguaje matemático. Estas herramientas permiten una visualización clara de las relaciones entre las variables y facilitan la expresión coherente y efectiva de los procesos de resolución y argumentación de resultados, enriqueciendo así la experiencia de aprendizaje en el álgebra.

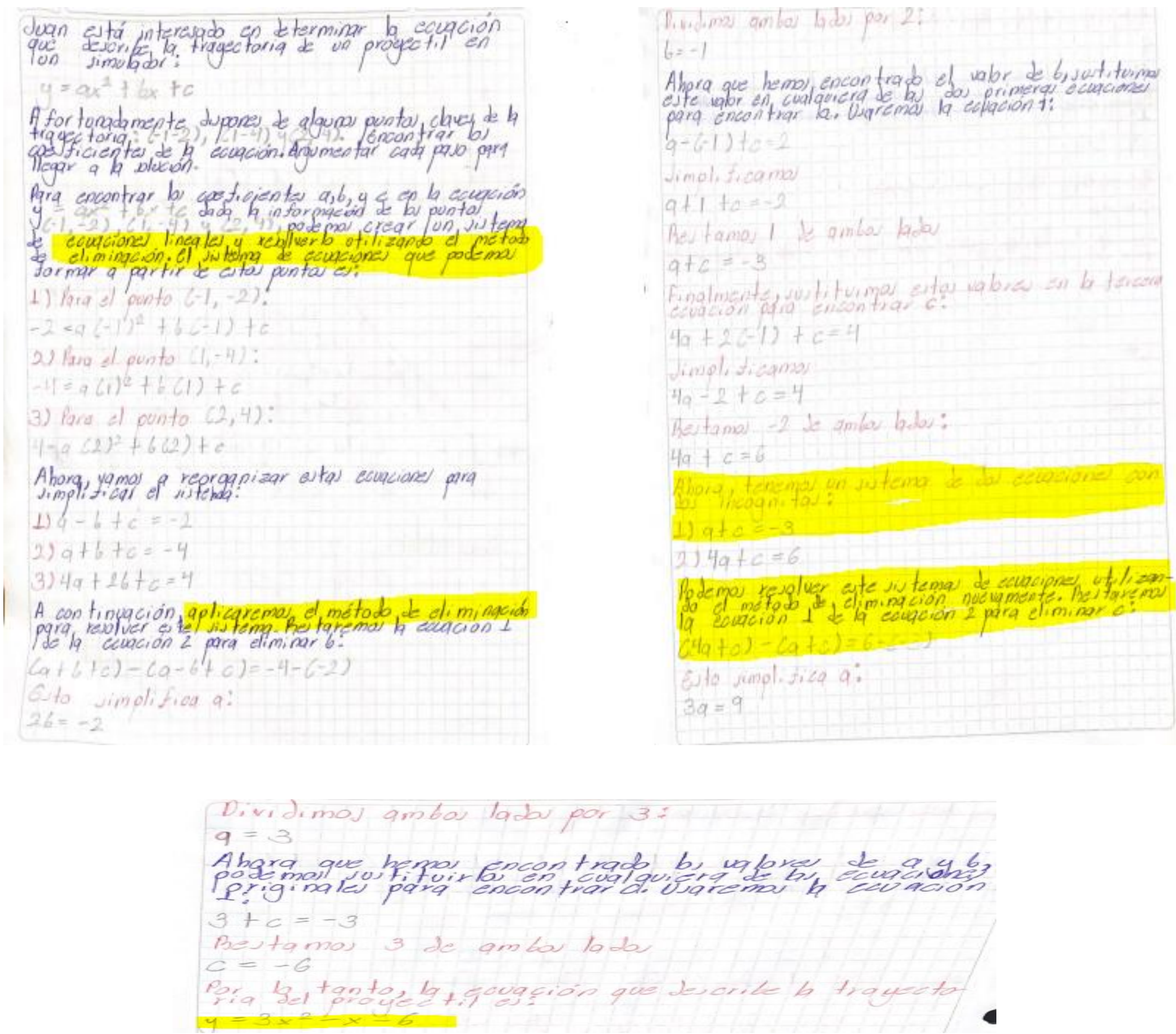

Juan está interesado en determinar la ecuación que describe la trayectoria de un proyectil en un simulador:
y = ax² + bx + c
Afortunadamente, dispones de algunos puntos claves de la trayectoria: (-1,-2), (1,-4) y (2,4). Encontrar los coeficientes de la ecuación. Argumentar cada paso para llegar a la solución.
Para encontrar los coeficientes a, b, y c en la ecuación y = ax² + bx + c dada la información de los puntos (-1,-2), (1,-4) y (2,4), podemos crear un sistema de ecuaciones lineales y resolverlo utilizando el método de eliminación. El sistema de ecuaciones que podemos formar a partir de estos puntos es:
1) Para el punto (-1,-2):
-2 = a(-1)² + b(-1) + c
2) Para el punto (1,-4):
-4 = a(1)² + b(1) + c
3) Para el punto (2,4):
4 = a(2)² + b(2) + c
Ahora, vamos a reorganizar estas ecuaciones para simplificar el sistema:
1) a - b + c = -2
2) a + b + c = -4
3) 4a + 2b + c = 4
A continuación, aplicaremos el método de eliminación para resolver el sistema. Restaremos la ecuación 1 de la ecuación 2 para eliminar b:
(a + b + c) - (a - b + c) = -4 - (-2)
Esto simplifica a:
2b = -2
Dividimos ambos lados por 2:
b = -1
Ahora que hemos encontrado el valor de b, sustituimos este valor en cualquiera de las dos primeras ecuaciones para encontrar a. Usaremos la ecuación 1:
a - (-1) + c = -2
Simplificamos
a + 1 + c = -2
Restamos 1 de ambos lados
a + c = -3
Finalmente, sustituimos estos valores en la tercera ecuación para encontrar c:
4a + 2(-1) + c = 4
Simplificamos
4a - 2 + c = 4
Restamos -2 de ambos lados:
4a + c = 6
Ahora, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:
1) a + c = -3
2) 4a + c = 6
Podemos resolver este sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación nuevamente. Restaremos la ecuación 1 de la ecuación 2 para eliminar c:
(4a + c) - (a + c) = 6 - (-3)
Esto simplifica a:
3a = 9
Dividimos ambos lados por 3:
a = 3
Ahora que hemos encontrado los valores de a y b, podemos sustituirlos en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar c. Usaremos la ecuación 1:
3 + c = -3
Restamos 3 de ambos lados
c = -6
Por lo tanto, la ecuación que describe la trayectoria del proyectil es:
y = 3x² - x - 6

Figura 17. Resolucion del problema profundización 4. Ecuación de un proyectil.

La Figura 18 corresponde a la resolución del problema codificado como G (8) P.P.2 (P20-MUR), que significa G (8), grupo 8, P.P.2, problema de profundización 2, y (P20-MUR), persecución de dos objetos con movimiento uniformemente rectilíneo. En esta figura, los estudiantes representan los datos en una tabla y luego crean un gráfico que muestra las relaciones entre las variables 'x' (tiempo) y 'y' (posición). Utilizan este gráfico para identificar la pendiente (velocidad) y el punto de corte con el eje 'y' (intercepto) en cada ecuación. Luego, traducen estos resultados visuales en un lenguaje matemático formal, construyendo y ajustando las ecuaciones. Verifican las ecuaciones en el gráfico para asegurarse de que coincidan con los datos visuales. A continuación, plantean un sistema de ecuaciones basado en estas relaciones y lo resuelven utilizando el método de igualación. Cada paso se comunica de manera clara a través del lenguaje matemático.

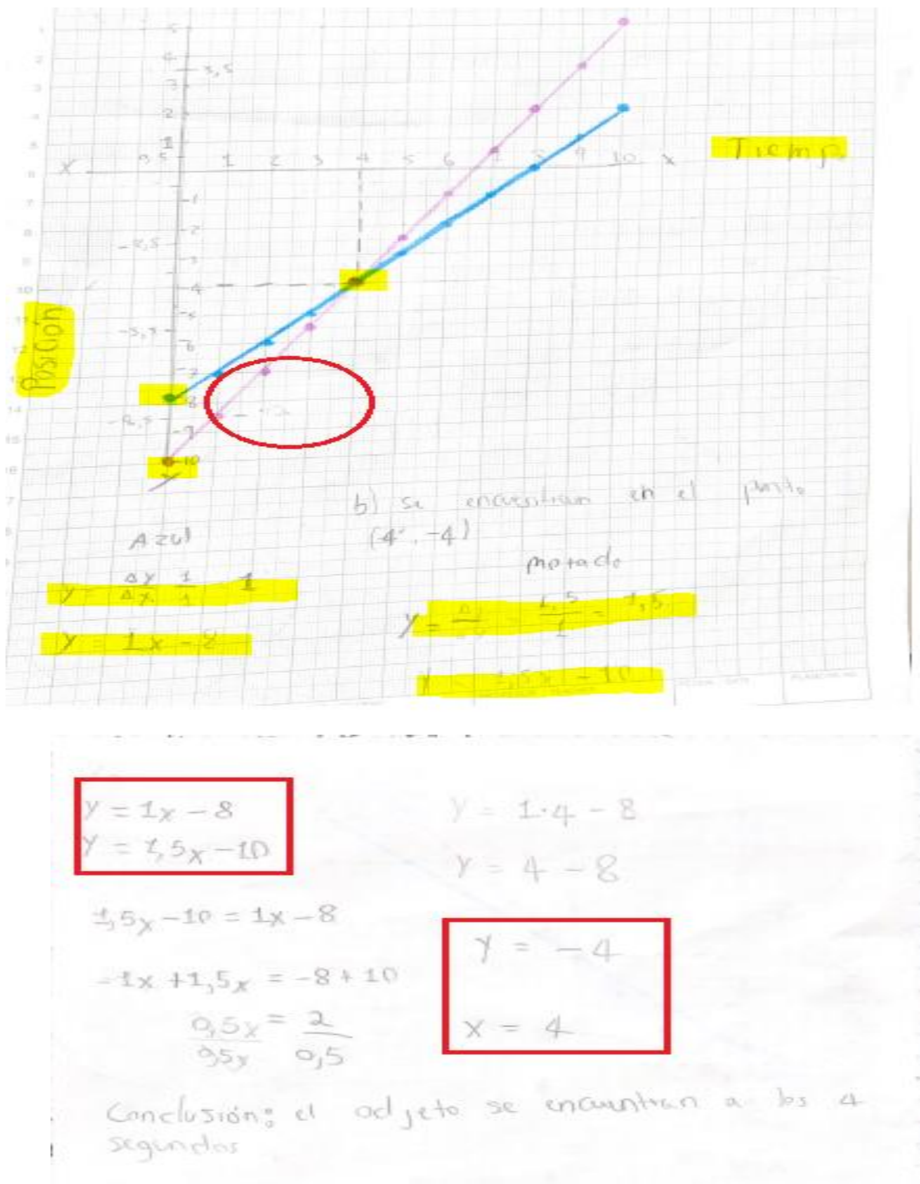


Figura 18. Resolucion del problema profundización 2. persecución de dos objetos con movimiento uniformemente rectilíneo

- Signo y objetos matemáticos

Dimensión: Relacionar los signos que se aplican a los objetos matemáticos, al traducir el problema en diferentes contextos del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.

El problema profundización ,ejercicio de una gimnasta (P.P.6(EG)), solucionado por el grupo 1,(G (1)) en la Figura 19, los estudiantes traducen el problema verbal en ecuaciones matemáticas mediante el uso de objetos matemáticos, que incluyen:

a.Incógnitas, representadas como 'vc' (velocidad de la gimnasta al correr en km/h) y 'vb' (velocidad de la gimnasta en bici en km/h).

b. Coeficientes, que corresponden al tiempo en cada actividad y se expresan en forma decimal.

c. Constantes, que representan la distancia total recorrida cada día al realizar ambas actividades.

También emplean signos matemáticos como el símbolo de suma (+) para denotar la operación de suma, ya que en el problema se menciona el "total" recorrido, y el símbolo de multiplicación (·) para indicar la operación de multiplicación entre el coeficiente y la incógnita relacionada con la expresión (v · t). También emplean el símbolo de igual (=) para representar la igualdad. Estos elementos permiten describir la relación matemática entre las cantidades involucradas a través del sistema de ecuaciones y resolver paso a paso el problema para obtener la solución según el contexto.

- Descripciones verbales

Dimensión: Identificar y definir las incógnitas, variables, constantes y coeficientes involucrados en el problema, describir las relaciones matemáticas que existen entre estos elementos al representar matemáticamente las ecuaciones correspondientes, para comunicar de manera clara y estructurada los pasos necesarios para resolver las ecuaciones, incluyendo el método utilizado en el proceso, e interpretar el significado de las soluciones encontradas en el contexto del problema. Además, es importante llevar a cabo una comprobación para asegurar de que las soluciones obtenidas satisfacen todas las condiciones establecidas en el problema inicial.

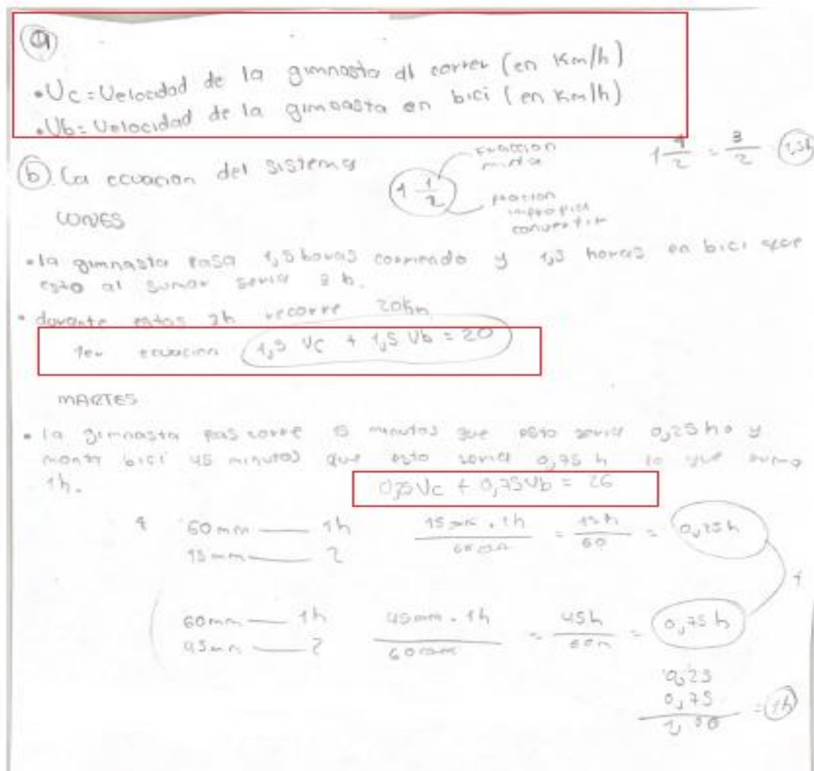


Figura 19. Resolución del problema profundización 6. Ejercicio de una gimnasta

En el siguiente diálogo 6, codificado como (D6), el estudiante comunica sus ideas de manera clara y demuestra su capacidad para utilizar el lenguaje matemático y comprender las restricciones y elementos presentes en el problema. A pesar de una pequeña confusión inicial sobre el concepto de "variable", el estudiante procede a identificar y definir las variables en el problema, luego a resolverlo de manera efectiva utilizando un enfoque simplificado:

Alfonso: *Bueno, voy a sacar las variables que analice en el problema, las identifique a medida que iba leyendo el enunciado, entonces hago la siguiente tabla ,las variables son las tasas de interés anual que eso lo da el problema ,en la primera inversión del 5,2% y de la segunda inversión del 7,2%, otra variable* *es el monto de inversión le puse la letra x a la primera inversión y en la segunda la exprese* $x + 2000.000$*, no sabemos cuánto fue el monto de inversión del comerciante en la primera inversión y en la segunda allí dice que 2.000 .000 millones más que la primera por eso, lo escribí así y la última variable es el interés anual por cada inversión la exprese en la primera inversión como* $0{,}052x \text{ y en la segunda inversión } 0{,}072\ (x + 2.000.000)$*. Hayyy una cosa, exprese el porcentaje en decimal, o sea lo dividí entre 100.*

Docente: ¿cómo plantea las ecuaciones para resolver el problema?

Alfonso: Profesora, yo no plantee dos ecuaciones como siempre hacemos, yo realice lo siguiente, como dice el enunciado que el total de interés anual ganado es de 3.200.000 entonces, sume las dos inversiones y las iguales a 3. 200. 000, creo que es algo simplificado.

Alfonso: … voy a determinar a x que es la primera cuenta, entonces distribuyo 0,072 por x más 0,072 por 2000.000, luego agrupo términos semejantes y las constantes y allí despejo a x y eso da 24.645.161,29 pesos y como la segunda cuenta es ese valor por 2000.000 entonces da 26.645.161,29 pesos.

4.2.2.2. Categoría: Competencia discursiva

Fenómeno: Explicar significados

Descripción: Capacidad de traducir situaciones del mundo real en ecuaciones matemáticas, resolver estas ecuaciones de forma eficiente y, lo que reviste mayor importancia, interpretar y comunicar el significado de esas soluciones dentro del contexto original.

Propiedades:

- Coherente y cohesión.

Dimensión: Establecer una relación lógica y ordenada entre las ideas y pasos en la resolución de problemas con ecuaciones 2x2. Para mantener la coherencia al explicar significados en este proceso, es importante seguir una estructura lógica y presentar los pasos de manera secuencial y organizada, teniendo en cuenta cómo conectan las oraciones y los elementos en la explicación. Esto proporciona una comunicación efectiva del desarrollo del pensamiento algebraico.

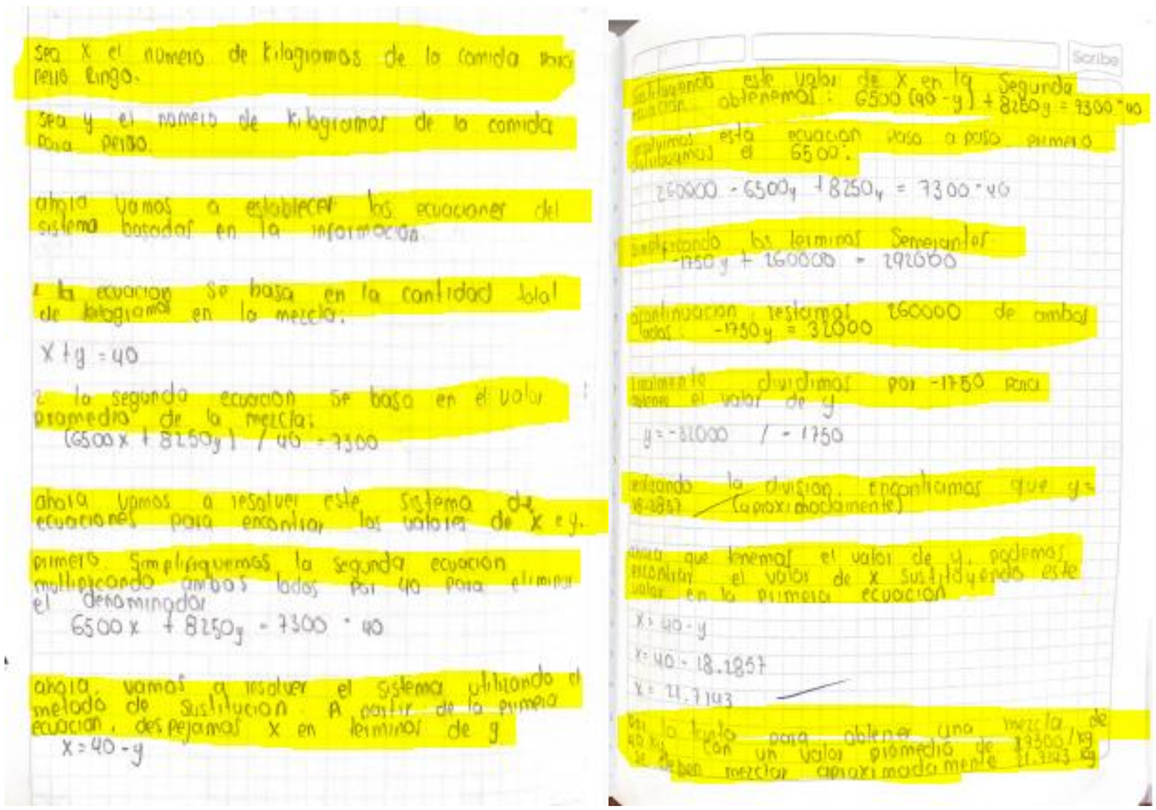


Figura 20. Resolución del Problema profundización 7. Mezclas

La Figura 20, representa la solución al problema de profundización 7 titulado "Mezclas", realizado por el grupo 5 y codificado como G (5) P.P.7 M, se demuestra un uso consistente de variables a lo largo del texto. Utilizan 'x' para representar la cantidad de kilogramos de comida Ringo y 'y' para la cantidad de kilogramos de comida Pedigree. Además, siguen las operaciones en el orden apropiado, los procedimientos matemáticos correspondientes, utilizando la notación adecuada y términos matemáticos precisos. Mantienen un vocabulario matemático coherente a lo largo de cada paso del proceso. Esto facilita la comprensión tanto de los cálculos realizados como de la solución final del problema, garantizando una resolución clara y precisa.

- Argumentación

Dimensión: La capacidad de los estudiantes para no solo encontrar soluciones a los problemas, sino también explicar y justificar de manera clara y coherente cada paso del proceso. Al argumentar sus razonamientos, los estudiantes demuestran su comprensión de los conceptos matemáticos subyacentes y su habilidad para aplicarlos en situaciones concretas. Esta habilidad no solo fortalece su destreza en matemáticas, sino que también les ayuda a desarrollar un pensamiento crítico y una comunicación efectiva, competencias valiosas tanto en el aula como en la vida cotidiana.

Al analizar la resolución del problema de la Figura 20, se observa que los estudiantes, en primer lugar, identifican las incógnitas 'x' e 'y' para resolver el problema de la mezcla de comida para perros tipo Ringo y Pedigree. Luego, establecen las ecuaciones que reflejan las restricciones del problema y utilizan el método de sustitución para determinar los valores de 'x' e 'y' que satisfacen ambas ecuaciones. La solución encontrada cumple con las condiciones del problema y satisface las necesidades del veterinario para obtener la mezcla deseada. La argumentación respalda la validez de la respuesta y explica cómo se llega a la cantidad precisa de cada comida para alcanzar el valor requerido por kilogramo.

- Comprensión de conceptos

Dimensión: Combinar la habilidad de percibir y comprender la información proporcionada en el problema con la capacidad de representar esta información matemáticamente y manipularla de manera adecuada para llegar a soluciones precisas. Esto permite comunicar las soluciones de manera clara y efectiva y aplicar los conocimientos en diferentes contextos.

Al analizar la resolución del problema profundización 3, titulado “Demanda y oferta de un helado”, realizado por el grupo 1 y codificado como G (1) P.P.3 (DOH) en la Figura 21, se observa que los estudiantes demuestran una sólida comprensión de los conceptos al relacionar la información de una tabla que incluye la cantidad demandada de helado, el precio y la oferta en el mercado. Identifican el punto de equilibrio (Demanda = Oferta) y lo representan en una ecuación lineal. Además, cuando el gobierno interviene aumentando el precio del azúcar, comprenden cómo esto impacta tanto en la oferta como en los precios. Ajustan sus ecuaciones para reflejar estos cambios y encuentran un nuevo equilibrio de mercado con un precio diferente, lo que evidencia una comprensión profunda de los principios económicos involucrados.

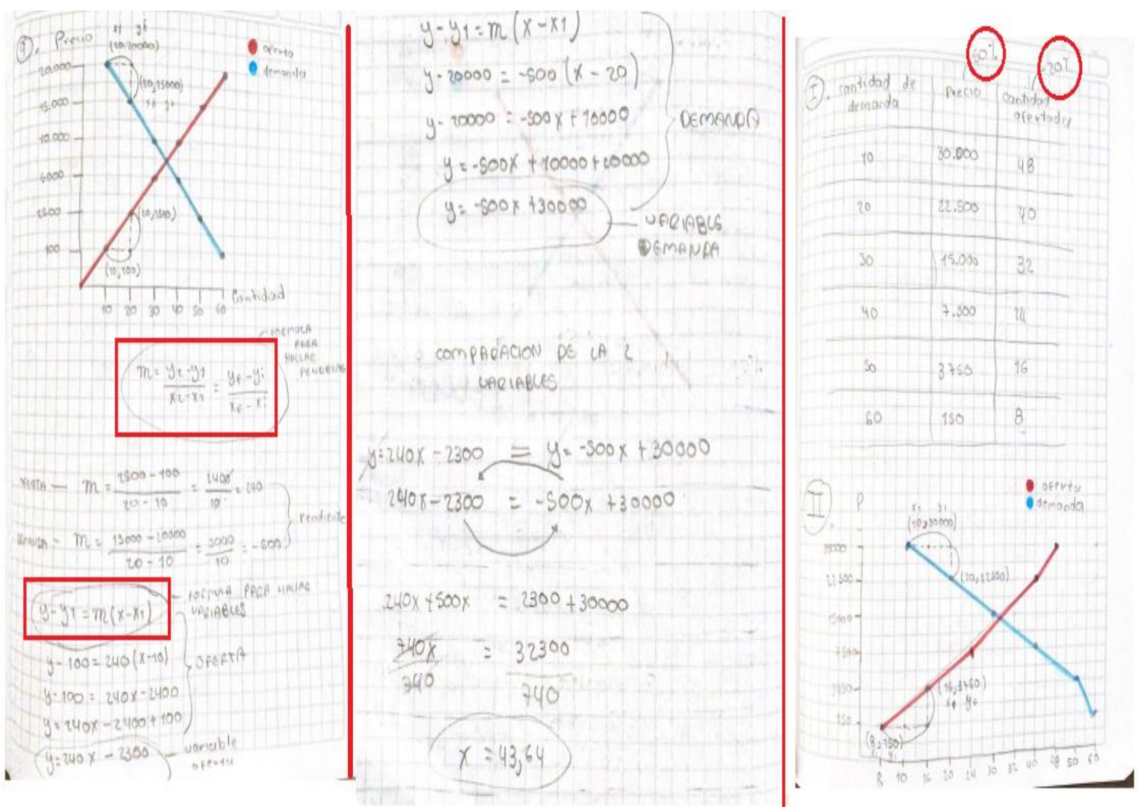


Figura 21. Resolución del Problema profundización 3. Demanda y oferta de un helado

4.2.2.3. Categoría: Sociolingüística

Subcategoría: Expresiones verbales cotidianas

Descripción: Comprender los problemas matemáticos y traducir el lenguaje cotidiano en ecuaciones para comunicar sus soluciones de manera efectiva en un contexto matemático.

Propiedades:

- Palabras cotidianas

Dimensión: Interpretar y comprender el significado de las palabras cotidianas presentes en el contexto de un problema matemático. Esto es esencial para traducir estas palabras en ecuaciones matemáticas y expresar sus ideas y razonamientos de manera clara y coherente. También implica la capacidad de interpretar lo que representan las variables y los valores en el contexto específico del problema.

La Figura 21, que muestra la resolución del problema de profundización 3 titulado "Demanda y Oferta de un Helado", revela cómo los estudiantes identifican palabras cotidianas en el enunciado, como "cantidad demandada," "cantidad ofertada," y "precio," y las relacionan con conceptos matemáticos de manera precisa. Utilizan ecuaciones para modelar estas relaciones y determinar el punto de equilibrio, donde la cantidad demandada y ofertada coinciden, estableciendo así el precio. Además, demuestran su comprensión al ajustar las ecuaciones para reflejar cambios en el mercado, como el aumento del precio del azúcar, y explicar de manera efectiva cómo estos cambios se traducen en números que representan la dinámica del mercado.

- Interpretación

Dimensión: Desarrollar una competencia sólida en el lenguaje matemático, que abarca la familiarización con términos, símbolos y notación específica. Esto implica la capacidad de interpretar y utilizar con precisión los símbolos matemáticos, así como la habilidad de comprender el significado de palabras y frases específicas en un contexto matemático, teniendo en cuenta la diversidad de contextos sociales y culturales. Esta competencia es esencial para comunicar conceptos matemáticos al explicar los métodos de resolución, respaldar la validez de las respuestas y presentar los hallazgos de manera clara y coherente en el ámbito de las matemáticas.

La figura 18, muestra la resolución de un problema en el que los estudiantes comprenden los datos contenidos en una tabla que proporciona información sobre la distancia y el tiempo recorridos por dos objetos en movimiento. Identifican el momento en el cual estos objetos se encuentran y la ubicación exacta en la cual se produce el encuentro, a partir de la traducción de los datos en ecuaciones que relacionan la distancia y el tiempo para cada uno de los objetos. Posteriormente, resuelven el sistema de ecuaciones resultante con el fin de determinar el tiempo y la posición de encuentro, y justifican cada uno de los pasos de resolución, explican cómo se obtuvieron los valores de tiempo y posición. Finalmente, presentan de manera coherente los resultados empleando un lenguaje matemático apropiado.

- Uso de vocabulario

Dimensión: Interpretar, comunicar y argumentar conceptos matemáticos utilizando un lenguaje preciso y coherente en un contexto social y cultural diverso.

El siguiente diálogo 7, codificado D (7), que corresponde a la socialización del problema profundización 1 cruce de objetos con movimiento uniformemente rectilíneo:

Saray: para resolver el primer problema de profundización, graficamos los movimientos de acuerdo a la información de la tabla, el tiempo se ubicó sobre el eje x y posición sobre el eje y, esto pues es de los objetos que se cruzan con movimiento uniformemente rectilíneo.

Yaira: como dijo Saray, graficamos en papel milimetrado primero los puntos de la primera tabla es decir el movimiento del objeto 1, trazamos la recta, y analizamos que la recta crece a medida que avanza en tiempo y posición, en cambio con el movimiento 2, observamos lo contrario baja.

Saray: nosotras interpretamos que como es cruce viene de direcciones opuestas y pues según el gráfico se encuentran los cuerpos a los 10 segundos y en la posición 0.

Yaira: … para construir las ecuaciones, entonces la de cuerpo 1, partimos de la ecuación de la recta $y = mx + b$ *, m es la pendiente es decir la velocidad y b es el punto de partida del movimiento, entonces la velocidad es este triángulo que se forma debajo de la recta una unidad en el eje y, y en el eje x otra unidad entonces, dividimos 1 entre 1 es igual 1 y parte de la posición -10, lo que nos da:* $y = 1x - 10$.

Saray: Profe Goretti, para el segundo cuerpo se analizó similar, la pendiente es negativa y baja una unidad y dos unidades hacia la izquierda y el cuerpo parte de 5 metros, la segunda ecuación es $y = -\frac{1}{2}x + 5$ *, nosotros trabajamos en decimal* $y = -0{,}5\,x + 5$.

Saray y Yaira: Resolvimos el sistema por igualación es más fácil porque ya está despejada la ***y****, al igualarlas a un lado dejamos la variable* ***x*** *y en el otro las constantes, se reduce términos semejantes y efectivamente resulta x =10 y reemplazamos en la ecuación del primero movimiento dando como resultado y=0.*

Yaira: Los objetos se cruzan a los 10 segundos en la posición 0 metros, con velocidad constante porque es uniforme.

En relación con esto, es importante destacar cómo las estudiantes utilizan un vocabulario matemático preciso y adecuado al contexto, lo que facilita la comprensión de su enfoque. Además, recurren a representaciones gráficas para visualizar los datos y reconocer patrones en el movimiento de los objetos. La interpretación de los gráficos es precisa, destacando cómo cambian las posiciones en relación con el tiempo y cómo las pendientes reflejan las velocidades. A partir de esta comprensión, formulan ecuaciones lineales que describen el movimiento de los objetos. Explican claramente cómo identificar la pendiente (que representa la velocidad) y el punto de partida en estas ecuaciones.

Un aspecto destacado es la resolución de un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de igualación. Este proceso demuestra un conocimiento sólido de cómo despejar variables y encontrar soluciones. En última instancia, llegan a la conclusión de que los objetos se cruzan a los 10 segundos en la posición 0 metros, indicando que el movimiento es uniforme y constante.

4.2.2.4. Categoría: Competencia estratégica

Subcategoría: Acciones

Descripción: En la resolución de problemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en diferentes contextos, se busca comprender el problema, definir las ecuaciones de manera precisa y explicar cada paso lógicamente. Se respaldan las decisiones tomadas con justificaciones sólidas y, cuando es posible, se utilizan gráficos para visualizar las relaciones. La comunicación efectiva y persuasiva es esencial, destacando los beneficios de la solución y persuadiendo a otros para que la acepten y apoyen, a través de argumentos sólidos y la capacidad de abordar objeciones.

Propiedad: Razonamiento y argumentar

Dimensión: Descomponer el proceso de resolución en pasos lógicos y claramente definidos, se comienza desde la formulación de las ecuaciones hasta la obtención de la solución. En este sentido, explicar cada paso en el proceso de resolución, incluye la elección de la estrategia utilizada, la manipulación algebraica específica y la justificación detrás de cada acción. Estas acciones contribuyen a persuadir de manera efectiva a los compañeros de clase y docente sobre la validez de la solución propuesta.

En referencia a la Figura 22, resolución de problema de profundización 5 titulado “Encontrar el área del triángulo”, codificada P.P.5 (ET), G (9), se observa una comprensión sólida al interpretar las ecuaciones de las trayectorias como rectas en el plano cartesiano. Además, identifican el punto de intersección de estas trayectorias utilizando el método de igualación, reconociendo que este punto actúa como el vértice del triángulo. Una vez que tienen el punto de intersección, proceden a calcular las longitudes de la base y la altura del triángulo utilizando datos obtenidos de las ecuaciones. Esto les permite aplicar la fórmula del área de un triángulo (Área = 1/2 * base * altura) y calcular el área del triángulo formado por las trayectorias.

Adicionalmente, justifican la elección de la fórmula del área del triángulo, explican por qué el punto de intersección es crucial para medir la base y la altura, y argumentan la necesidad de medir estas longitudes. Finalmente, confirman la aplicación de la fórmula del área, destacando la relevancia del área calculada en el contexto del problema. En resumen, su razonamiento y argumentación respaldan un sólido proceso de resolución de problemas matemáticos.

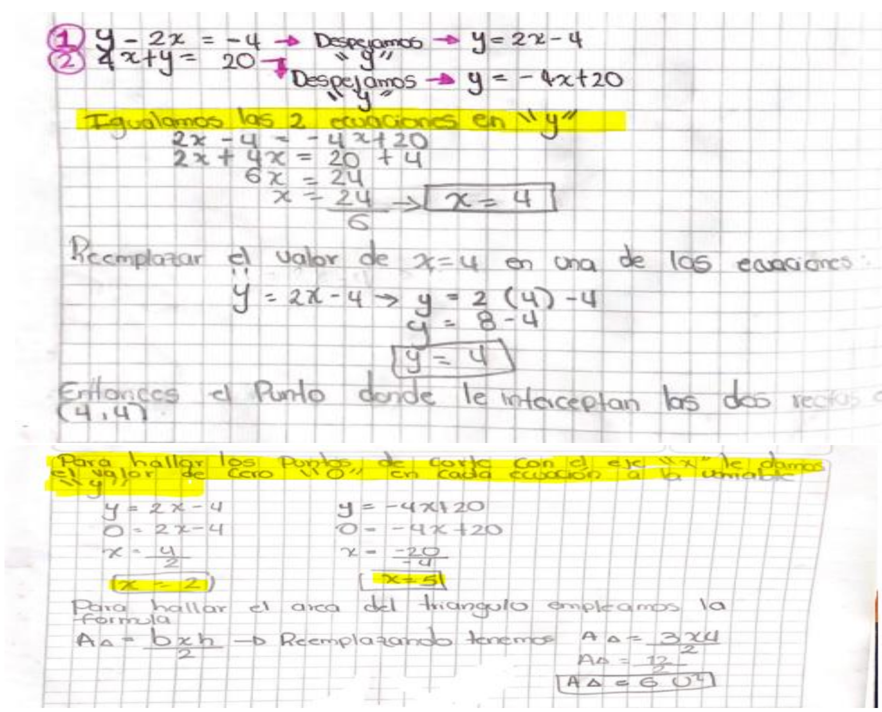


Figura 22. Resolución del Problema profundización 5. Encontrar el área del triángulo

- Creatividad

Dimensión: Capacidad de adoptar múltiples enfoques, adaptarse al contexto, comunicar de manera visual y contextualizada, y mantener la claridad en la explicación. Estas dimensiones se combinan para hacer que la resolución de problemas sea más accesibles y significativas en el aula de clase.

En relación a la Figura 23, sobre la resolución del problema exploración 3 Encontrar los términos faltantes realizado por el estudiante 11, (E 11), codificado P.P3 (ET), se observa un enfoque creativo en la resolución del problema. El estudiante resuelve el problema en dos partes. En la primera parte, aplica el método de sustitución en función de la constante K. En la segunda parte, utiliza el enfoque de 'ensayo y error'. Realiza varios intentos con valores específicos para K, como 0, 1 y 2. En cada intento, verifica con atención si el sistema no tiene solución, tal como se requiere en el enunciado del problema. Cuando llega al valor K=2 y comprueba que el sistema no tiene una solución, debido a que se elimina la variable 'y'. Luego, repite la verificación mediante la sustitución del valor de K en las ecuaciones originales. En este proceso, llega nuevamente a la conclusión de que el sistema no tiene una solución, lo que confirma la validez de la primera observación. Este enfoque se utiliza para resolver el problema de manera sistemática, asegurando que se explore exhaustivamente la búsqueda de soluciones y se cumpla con la condición de que el sistema no tenga solución cuando K toma un valor específico.

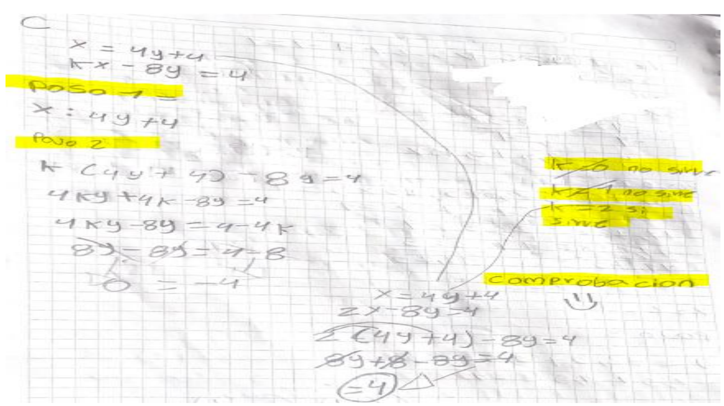


Figura 23. Resolución del Problema profundización 3. Encontrar los términos faltantes

- Mediadores

Dimensión: Traducir el lenguaje matemático en un discurso comprensible, es decir, explicar en palabras que sean accesibles para los compañeros de clase las representaciones simbólicas y notación matemática que están presente en las ecuaciones y establecer conexiones lógicas y coherentes entre estas y su significado en el contexto. Acompañado de las representaciones visuales para complementar las argumentaciones.

En la Figura 21, se puede apreciar el empleo de diversos mediadores que condujeron a la solución del problema. Los estudiantes utilizan la representación gráfica de las curvas de demanda y oferta para facilitar la comprensión de la relación entre la cantidad y el precio. Argumentan de manera sólida la construcción de estos gráficos, estableciendo una conexión con la estructura $y=mx+b$. Además, desarrollan de ecuaciones matemáticas que detallan la relación entre la cantidad y el precio en los contextos de demanda y oferta. Explican de manera clara y concisa el proceso de derivación de estas ecuaciones a partir de los datos presentados en tablas. Finalmente, resuelven las ecuaciones mediante el método de igualación para determinar el precio y la cantidad de equilibrio. Este enfoque demuestra un sólido dominio de las herramientas matemáticas y gráficas utilizadas para abordar el problema, lo que resulta en una solución efectiva y comprensiva.

4.2.3. Categorías y subcategorías de la teoría sustantiva

La Tabla 13 presenta las categorías y subcategorías de la teoría sustantiva, como producto de un exhaustivo proceso de codificación y análisis de los resultados obtenidos en esta investigación centrada en el uso de la competencia comunicativa en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas en ambiente de aula invertida.

Tabla 13. Competencia comunicativa en la resolución de problemas

Categoría: Competencia comunicativa en la resolución de problemas **Descripción**: Competencia comunicativa en la resolución de problemas con ecuaciones lineales y cuadráticas		
Propiedades	**Dimensiones**	**Descripción**
Uso de vocabulario específico	**Competencia lingüística**	Terminología Matemática: Capacidad de utilizar con precisión términos matemáticos, como ecuación, variable, coeficiente y solución, al comunicar y resolver problemas
		Nomenclatura de variables: El conocimiento y uso adecuado de letras y símbolos para representar cantidades desconocidas o variables en ecuaciones.
Dominio de representaciones simbólicas		Símbolos algebraicos: Capacidad para interpretar y manipular símbolos algebraicos, como “x”, “y” y operadores matemáticos, es esencial para la resolución de ecuaciones.
		Notación Matemática: Comprender y utilizar la notación matemática de manera precisa, incluyendo paréntesis, exponentes, fracciones y otros símbolos.
		Expresiones Matemáticas: Habilidad para comprender y desarrollar expresiones matemáticas, como ecuaciones lineales o cuadráticas, de manera clara y efectiva y expresar conceptos matemáticos.
Comunicación de conceptos matemáticos		Explicación de Conceptos: Capacidad para explicar de manera efectiva los conceptos matemáticos involucrados en la resolución de ecuaciones, como la propiedad distributiva, factorización, o despeje de variables. Comprensión de Conceptos Abordados: Demostrar una sólida comprensión de los

		conceptos matemáticos abordados en el contexto de la resolución de ecuaciones. Claridad en la Comunicación: La comunicación debe ser clara y precisa para facilitar la comprensión de otros.
Explicación coherente de procesos	**Competencia discursiva**	Comunicación de Razonamiento: Comunicar el razonamiento detrás de un proceso o solución matemática. Esto implica explicar por qué se toma un determinado enfoque o se aplican ciertas reglas. Argumentación Estructurada: Presentación ordenada de pasos en la resolución de un problema o la exposición de un argumento matemático. Coherencia Expositiva: consistencia en la forma en que se presentan los conceptos y procesos matemáticos. Esto significa que la comunicación debe seguir un flujo lógico y estar libre de contradicciones o saltos abruptos en la explicación.
Interpretación de lenguaje matemático	**Competencia sociolingüística**	Relación entre el Lenguaje Matemático y Experiencias Cotidianas: Capacidad de relacionar el lenguaje matemático con situaciones cotidianas, lo que ayuda a contextualizar y comprender los problemas matemáticos. Uso de Vocabulario en Contexto: Habilidad de utilizar el vocabulario matemático de manera apropiada y coherente en un contexto específico. Comprensión de Términos Matemáticos: Comprender los términos matemáticos y su significado en el contexto de la resolución de ecuaciones.
Uso de lenguaje cotidiano en contexto matemático		Conexión con la Situación de la Vida Diaria: Conectar conceptos matemáticos con

		situaciones de la vida diaria, lo que demuestra una comprensión profunda y su aplicabilidad en el mundo real. Integración de Expresiones Comunes: La integración de expresiones comunes y lenguaje cotidiano en la explicación de conceptos matemáticos hace que la comunicación sea más accesible.
Creatividad en resolución de problemas	**Competencia estratégica**	Innovación de Enfoques de Resolución: Desarrollar enfoques creativos para abordar problemas matemáticos, buscando soluciones originales. Uso de Estrategias Creativas: La exploración de estrategias no convencionales o creativas en la resolución de ecuaciones muestra un alto nivel de competencia estratégica.
Selección y aplicación de estrategias		Elección de Estrategias de Resolución: Evaluar y seleccionar la estrategia más adecuada para resolver un problema específico. Implementación de Procedimientos Matemáticos: La habilidad para llevar a cabo los procedimientos matemáticos de manera precisa y efectiva. Razonamiento en la Selección de Estrategia: Razonamiento lógico en la elección de estrategias, basado en la comprensión del problema.

La Figura 24 representa una red semántica(ver) que ha sido diseñada para la análisis y visualización de las relaciones entre las diversas categorías y subcategorías de la teoría sustantiva. Estas categorías y subcategorías se encuentran organizadas y sistematizadas en Tabla 13. Esta representación gráfica proporciona una vista clara y coherente de cómo estos componentes se relacionan entre sí, lo que permite una comprensión más profunda y una visualización efectiva de la estructura conceptual subyacente en la teoría sustantiva.

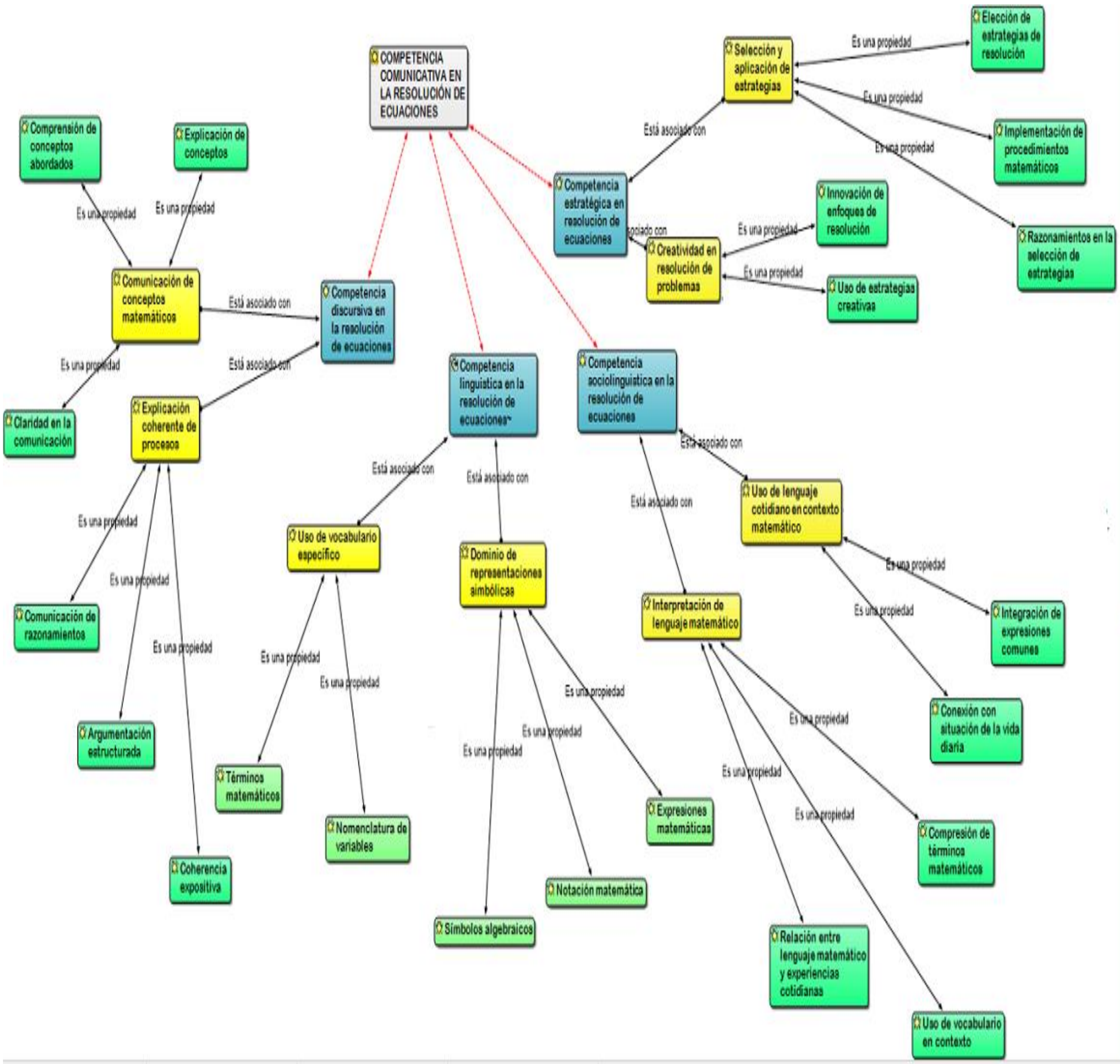


Figura 24. Red semantica categorias y subcategoria de la teoria sustantiva

Hasta este momento, y como resultado parcial y tentativo, se han identificado dos procesos fundamentales que constituyen la base de la teoría sustantiva en estudio. El primer proceso se centra en la comprensión de los conceptos matemáticos, la habilidad para comunicar ideas de manera efectiva y la destreza en la resolución de problemas matemáticos. Este proceso enfatiza la adquisición de conocimientos sólidos, la capacidad de transmitirlos de forma clara y la habilidad para aplicarlos en la solución de desafíos matemáticos.

El segundo proceso que compone esta teoría sustantiva se enfoca en la aplicación de estrategias pedagógicas apropiadas, este proceso implica la selección y el uso de enfoques educativos que se adapten a las necesidades de los estudiantes y promuevan un aprendizaje efectivo, en nuestro caso es la metodología de aula invertida. Estas estrategias pedagógicas son fundamentales para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades en los estudiantes. Este proceso se detalla con precisión en el tercer ciclo de codificación.

4.2.4. Tercer ciclo de codificación y análisis de datos. Codificación teórica, en la construcción de las categorías centrales

Los datos analizados en este ciclo provienen de la entrevista semiestructurada a la que voluntariamente accedieron cinco estudiantes. Como era de esperar, en este proceso de codificación y análisis, fue necesario revisar nuevamente los datos de las actividades que se reconstruyeron. Se volvió a emplear la codificación abierta, axial y selectiva con el fin de profundizar en la comprensión de las categorías que conforman la teoría sustantiva, expandiendo su alcance y su explicación.

En la tabla 14, se presenta las categorías y subcategorías relacionadas con la metodología de aula invertida (ver) y la competencia comunicativa en el proceso de aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, lo cual evidencia el segundo proceso de la teoría sustantiva.

Tabla 14. Metodología de aula invertida y competencia comunicativa

<table>
<tr><td colspan="3">Categoría: Metodología de aula invertida y competencia comunicativa
Descripción: se refiere al enfoque pedagógico que implica invertir el tiempo de clase tradicional. Los estudiantes aprenden de manera activa en casa a través de recursos como vídeos y ejercicios y luego participan en actividades más interactivas en el aula. Además, se analiza el uso de la competencia comunicativa al resolver problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Recursos de aprendizaje
Descripción: Los vídeos son uno de los recursos clave utilizados en el enfoque de aula invertida. Los estudiantes mencionaron ver vídeos proporcionado por la docente, así como buscar vídeos adicionales en línea para reforzar su comprensión de los conceptos matemáticos y procedimientos. Además, simuladores en línea y la herramienta de GeoGebra. Estos recursos les brindan la flexibilidad de estudiar a su propio ritmo.</td></tr>
<tr><th>Propiedades</th><th>Descripción</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Tipo de recurso</td><td rowspan="3">Diversos recursos utilizados para aprender matemáticas desde casa. Incluye vídeos, ejercicios en línea y lecturas. Los estudiantes pueden utilizar diferentes fuentes, como YouTube (canal “aprendiendo con Goretti”), materiales proporcionados por el docente y recursos en línea, para aprender y practicar conceptos matemáticos.</td><td rowspan="3">Acceso a recursos en línea: Los estudiantes suelen contar con acceso a plataformas en línea donde pueden encontrar recursos adicionales, como videos explicativos, ejercicios prácticos, simuladores y actividades interactivas que refuerzan el aprendizaje.</td></tr>
<tr><td>Fuente</td></tr>
<tr><td>Utilidad</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Comunicación
Descripción: Los estudiantes se comunican entre sí y con la docente para aclarar dudas, discutir soluciones a problemas y compartir conocimientos. Esto incluye tanto la comunicación verbal como escrita.</td></tr>
<tr><th>Propiedades</th><th>Descripción</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Medio de comunicación</td><td rowspan="3">Se enfoca en cómo los estudiantes se comunican entre sí y con sus profesores para resolver dudas y discutir problemas matemáticos. Incluye la comunicación verbal y escrita, así como la frecuencia con la que se comunican.</td><td rowspan="3">Discusiones en Clase: Durante las clases presenciales, se fomentan discusiones y debates en grupo para que los estudiantes compartan sus ideas y perspectivas.

Foros en Línea: Se crean espacios de discusión en línea donde los estudiantes pueden plantear preguntas, compartir recursos y participar en conversaciones relacionadas con el tema.</td></tr>
<tr><td>Frecuencia</td></tr>
<tr><td>Utilidad</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Resolución de problemas

Descripción: Los estudiantes enfrentan desafíos al resolver problemas y, a veces, recurren a vídeos, comunicación con otros estudiantes o docente para superar esos desafíos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Propiedades</th><th>Descripción</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Tipo de problemas</td><td rowspan="3">Se analiza cómo los estudiantes enfrentan desafíos al resolver problemas matemáticos. Pueden encontrarse con diferentes tipos de problemas y desafíos, como ecuaciones lineales, cuadráticas, aplicadas en diferentes contextos. También se incluyen las soluciones que encuentran o buscan para superar estos desafíos.</td><td rowspan="3">Tareas Prácticas: Los estudiantes se enfrentan a problemas prácticos y desafiantes que requieren la aplicación de los conceptos aprendidos.

Ejercicios Interactivos: Se utilizan ejercicios en línea que ofrecen retroalimentación inmediata y permiten a los estudiantes practicar la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Desafíos</td></tr>
<tr><td>Soluciones</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Apoyo docente

Descripción: El docente desempeña un papel importante en el proceso de aprendizaje. Proporciona recursos, responde a preguntas y clarifica conceptos.</td></tr>
<tr><th>Propiedades</th><th>Descripción</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Tipo de apoyo</td><td rowspan="3">Se explora cómo los profesores brindan apoyo a los estudiantes en su aprendizaje de matemáticas desde casa. Se considera la disponibilidad de los profesores, el tipo de apoyo que ofrecen (como aclaraciones, recursos adicionales) y cómo esto impacta en la comprensión de los estudiantes.</td><td rowspan="3">Tutorías: El docente ofrece sesiones de tutoría individual o en grupo para abordar las dudas y dificultades de los estudiantes.
Retroalimentación Personalizada: Se brinda retroalimentación específica sobre el desempeño de cada estudiante y se sugieren áreas de mejora.</td></tr>
<tr><td>Disponibilidad</td></tr>
<tr><td>Impacto</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Trabajo en grupo

Descripción: Trabajar en grupo les brinda a los estudiantes la oportunidad de colaborar en la resolución de problemas. Pueden discutir diferentes enfoques, compartir soluciones y aprender de sus compañeros.</td></tr>
<tr><th>Propiedades</th><th>Descripción</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>Dinámica de grupo</td><td rowspan="3">Se centra en cómo los estudiantes trabajan en grupo para aprender matemáticas. Se analiza la dinámica del grupo, cómo se distribuyen las responsabilidades, si colaboran de manera efectiva y cómo esto influye en la comprensión y resolución de problemas.</td><td rowspan="3">Discusión Grupal:

Se organizan sesiones de discusión en grupo donde los estudiantes resuelven problemas juntos y comparten soluciones.</td></tr>
<tr><td>Responsabilidad</td></tr>
<tr><td>Colaboración</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subcategoría: Proceso de aprendizaje

Descripción: Cómo los estudiantes abordan y asimilan los conceptos matemáticos mientras estudian de manera</td></tr>
</table>

independiente.		
Propiedades	**Descripción**	**Acciones**
Progreso Autodisciplina Comprensión	Se explora el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Se considera su progreso en el tiempo, la autodisciplina necesaria para aprender desde casa, y cómo su comprensión de los conceptos matemáticos evoluciona a lo largo del tiempo.	Flexibilidad: Se permite a los estudiantes avanzar a su propio ritmo y revisar los materiales según sus necesidades individuales. Seguimiento del Progreso: la docente y los estudiantes hacen un seguimiento constante del progreso a través de evaluaciones formativas y autoevaluaciones. Reflexión: Se anima a los estudiantes a reflexionar sobre su aprendizaje y a identificar áreas de fortaleza y debilidad.

El análisis detallado de la metodología de aula invertida y su relación con la competencia comunicativa en el aprendizaje de las ecuaciones lineales y cuadráticas se convierte en un proceso clave en nuestra teoría sustantiva. Este proceso nos permite comprender cómo la pedagogía innovadora y las habilidades comunicativas se entrelazan y enriquecen mutuamente, lo que a su vez impacta positivamente en la educación matemática de los estudiantes. Además, este enfoque puede proporcionar valiosas perspectivas para el diseño de estrategias educativas más efectivas y la mejora continua de la enseñanza de las matemáticas.

4.3. Categorías centrales emergentes como núcleo de la teoría

La Figura 25, presenta las categorías centrales emergentes que componen el núcleo de una teoría sustantiva de la competencia comunicativa en educación matemática. Estas categorías se centran en la capacidad de los estudiantes para comprender conceptos, comunicar ideas matemáticas y resolver problemas en un entorno de aprendizaje invertido. A través de esta investigación, se busca arrojar luz sobre la importancia de la comunicación efectiva en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

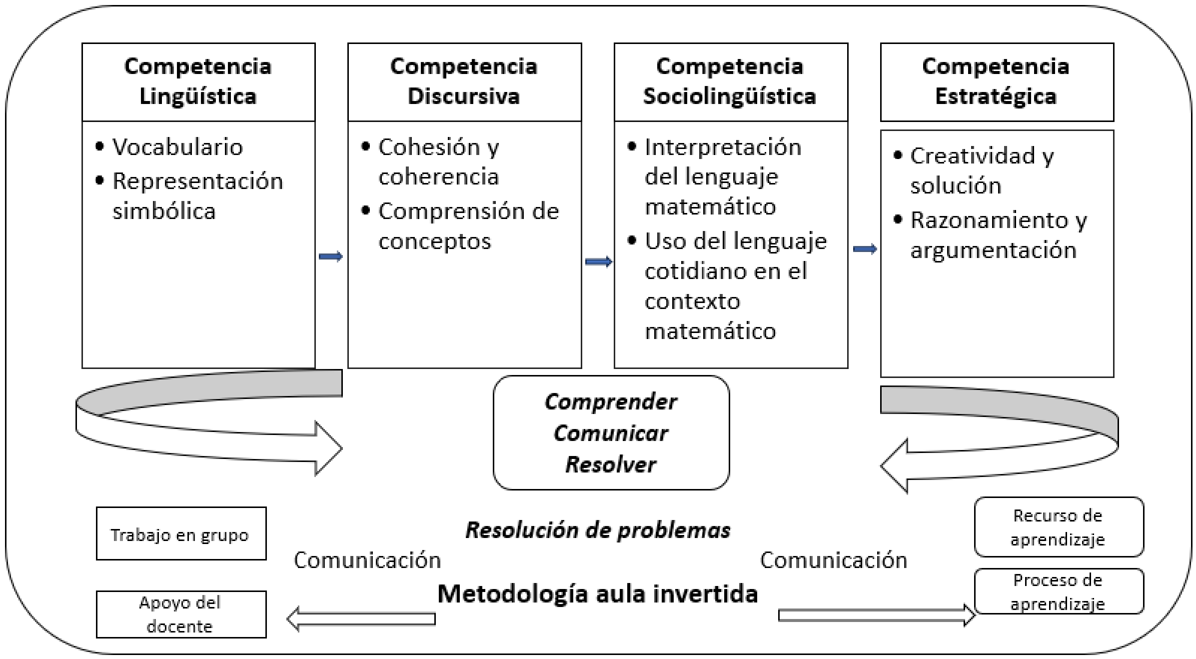


Figura 25. Uso de la competencia comunicativa en la resolución de problemas en un ambiente de aula invertida

En resumen, las categorías centrales emergentes en la teoría de la competencia comunicativa en educación matemática ofrecen una visión integral de cómo los estudiantes adquieren y aplican habilidades comunicativas en el contexto de las matemáticas. Estas categorías resaltan la importancia de la competencia lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de conceptos. Además, al considerar el entorno de aprendizaje invertido se reconoce la importancia de adaptar y mejorar la comunicación en entornos educativos modernos. En última instancia, esta teoría sustantiva resalta la competencia comunicativa como un componente clave para el éxito en la educación matemática y como una herramienta esencial para el aprendizaje colaborativo y significativo.

4.4. Saturación teórica

El proceso de saturación teórica en esta investigación se desarrolló a lo largo de las fases metodológicas que permitieron avanzar desde los primeros códigos iniciales hasta llegar a categorías de orden superior.

Esta evolución fue crucial para comprender en profundidad el fenómeno del uso de la competencia comunicativa y la metodología de aula invertida.

En la primera fase, se llevó a cabo la codificación inicial de los datos, implicando la identificación y clasificación de datos relevantes surgidos de la resolución de problemas de las guías de aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas. A través de un proceso de codificación abierta y axial, se organizaron estos datos en categorías más amplias que reflejaban conceptos y temas clave emergentes.

En la segunda fase, se procedió a la reconstrucción de la guía de aprendizaje "sistema de ecuaciones lineales." A partir de nuevos datos, se repitió el proceso, se revisa y ajusta categorías existentes, lo que permitió identificar otras categorías adicionales relacionadas entre sí de manera más profunda y compleja. Esta fase de análisis más refinado ayudó a captar las interconexiones y relaciones entre los conceptos emergentes y a profundizar en la comprensión del fenómeno.

Sin embargo, la tercera fase de codificación a partir de la encuesta semiestructurada reveló un patrón interesante. A medida que se exploraba más a fondo la metodología de aula invertida y su relación con la competencia comunicativa en el proceso de aprendizaje matemático, se observaba, en su mayoría se estaba consolidando y refinando las categorías previamente identificadas en las fases uno y dos. En otras palabras, no surgían nuevos códigos o categorías completamente distintas, sino que estaba reafirmando y ampliando el entendimiento de las categorías existentes.

Este fenómeno de repetición en la tercera fase de codificación fue un indicador claro de la saturación teórica en nuestra investigación. Significaba que se había alcanzado un nivel de comprensión y profundidad en el análisis que no requería la identificación de nuevas categorías o códigos, ya que los datos se estaban consolidando y validando en torno a un conjunto de conceptos esenciales relacionados con la competencia comunicativa y la metodología de aula invertida.

En resumen, la saturación teórica se logró a través de un proceso sistemático que partió de la codificación inicial, evolucionó hacia categorías de orden superior en la segunda fase, y finalmente confirmó y amplió estas categorías en la tercera fase sin la necesidad de incorporar nuevos códigos. Esto respalda la robustez y la validez de la teoría sustantiva en el contexto de estudio y proporciona una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones en el campo de la educación matemática.

4.5. Conclusiones del capítulo 4

Los ciclos de codificación y análisis de datos cualitativos ponen de manifiesto la implementación de las estrategias propuestas en el diseño de investigación basado en la teoría fundamentada. Este proceso cíclico, caracterizado por una constante revisión de los datos mediante el método de comparación constante, y la aplicación de técnicas de codificación abierta, axial y selectiva, culminó en la obtención de datos suficientes y enriquecedores con el fin de abordar la pregunta de investigación planteada.

En el primer ciclo, se llevó a cabo la codificación de categorías y subcategorías que describen el uso de la competencia comunicativa en la resolución de problemas. El segundo proceso se centró en cómo se relacionan la competencia lingüística, discursiva, sociolingüísta y estratégica en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales, todo ello mediante la metodología de aula invertida.

A partir de estos dos procesos emergentes, los datos se consolidan en el tercer ciclo de codificación, donde se enfocó en la identificación de conceptos más abstractos. En este ciclo se ponen en primer plano las categorías de metodología de aula invertida, como resultado de la aplicación del muestreo y la saturación teórica.

CAPÍTULO 5. LA TEORÍA EMERGENTE DE LOS DATOS

5.1. Introducción

La competencia comunicativa desempeña un papel fundamental en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas matemáticos. En el contexto particular del aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, y considerando la metodología de aula invertida, el desarrollo de competencias comunicativas se convierte en un desafío crucial que abarca tanto los modos de comunicación escritas como orales. Esta teoría tiene como objetivo explorar exhaustivamente cómo se entrelazan y complementan cuatro categorías clave: Competencia Lingüística, competencia discursiva, competencia sociolingüística y competencia estratégica, junto con sus respectivas subcategorías y propiedades. Se analiza cómo estas dimensiones se relacionan entre sí y contribuyen al desarrollo de competencias comunicativas efectivas en el contexto de las ecuaciones algebraicas, con un enfoque especial en la conexión entre el lenguaje cotidiano y el matemático, así como en el pensamiento algebraico, tanto en su expresión escrita como oral, mediante la metodología de aprendizaje de aula invertida.

5.2. Desarrollo de la competencia comunicativa lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica en la resolución de ecuaciones

5.2.1. Competencia lingüística en la resolución de ecuaciones

La primera dimensión, el uso de vocabulario específico de la competencia lingüística, implica la capacidad de los estudiantes para utilizar términos matemáticos precisos y la nomenclatura de variables de manera correcta y apropiada en el contexto de la resolución de ecuaciones. Los estudiantes deben comunicarse de manera efectiva utilizando un lenguaje matemático preciso, lo cual es esencial para expresar sus pensamientos matemáticos de manera clara y para comprender las instrucciones y los enunciados de los problemas. En el aula invertida, esta competencia cobra importancia, ya que los recursos en línea suelen presentar un lenguaje matemático específico, y los estudiantes deben ser capaces de comprenderlo y aplicarlo correctamente en sus propias resoluciones de ecuaciones. Un lenguaje matemático preciso facilita la comprensión mutua y el aprendizaje efectivo.

El segundo aspecto se refiere al dominio de los símbolos algebraicos, la notación matemática y las expresiones matemáticas en general. Este dominio permite a los estudiantes interpretar y utilizar estos símbolos y notaciones con facilidad, lo que es crucial para traducir problemas verbales en ecuaciones matemáticas y viceversa. La habilidad para manipular símbolos algebraicos y comprender la notación matemática les permite representar de manera efectiva los problemas y razonar sobre ellos de manera precisa. En el contexto del aula invertida, donde los estudiantes interactúan con recursos en línea que a menudo contienen símbolos y notación matemática, esta competencia se vuelve especialmente relevante. Un sólido dominio de representaciones simbólicas es esencial para comprender y aplicar conceptos matemáticos de manera efectiva, lo que mejora la calidad de la preparación antes de las sesiones presenciales y contribuye al éxito en la resolución de ecuaciones.

5.2.2. Competencia discursiva en la resolución de ecuaciones

En la competencia discursiva implica la habilidad de los estudiantes para explicar conceptos matemáticos de manera clara y comprensible. En otras palabras, los estudiantes deben ser capaces de traducir conceptos abstractos y procedimientos matemáticos en un lenguaje que sea accesible para sus pares y docentes. Este aspecto es especialmente relevante en el contexto de la metodología de aula invertida. Aquí, los estudiantes, al interactuar con recursos en línea, deben comprender y comunicar los conceptos clave de las ecuaciones de manera efectiva. Esta competencia facilita la discusión y el aprendizaje colaborativo durante las sesiones presenciales, ya que un entendimiento claro y una comunicación efectiva son esenciales para el éxito en el proceso de aprendizaje matemático.

La segunda dimensión de la competencia discursiva se refiere a la capacidad de expresar ideas de manera directa y fácilmente comprensible. En el contexto de la resolución de ecuaciones, la claridad en la comunicación es esencial para que los compañeros y el docente puedan seguir y evaluar los razonamientos matemáticos de un estudiante. Cuando se resuelven ecuaciones, los pasos deben ser presentados de manera lógica y coherente, evitando ambigüedades y confusiones. La claridad en la comunicación asegura que los procesos de pensamiento se puedan seguir de manera efectiva, lo que es crucial para la comprensión mutua y para facilitar el proceso de aprendizaje en el aula invertida. La capacidad de expresar ideas con precisión y de manera estructurada mejora la calidad de la colaboración y la retroalimentación entre los estudiantes y el docente.

5.2.3. Competencia sociolingüística en la resolución de ecuaciones

La Interpretación del lenguaje matemático involucra la capacidad de los estudiantes para relacionar el lenguaje matemático con situaciones y experiencias de la vida cotidiana. Los estudiantes que poseen esta competencia pueden dar significado práctico a los conceptos matemáticos al comprender cómo se aplican en el mundo real. Por ejemplo, pueden entender cómo una ecuación lineal representa una relación de proporción en un contexto financiero o cómo una ecuación cuadrática modela la trayectoria de un objeto en movimiento. Esta capacidad de relacionar conceptos abstractos con situaciones prácticas aumenta la motivación de los estudiantes al mostrarles la relevancia de las ecuaciones en su vida diaria y mejora su comprensión global de las matemáticas.

Además, el uso de lenguaje cotidiano en contexto matemático se refiere a la capacidad de los estudiantes para utilizar expresiones comunes y lenguaje cotidiano en un contexto matemático. Esto significa que pueden traducir términos y conceptos matemáticos en palabras y expresiones que son familiares y comprensibles en su vida diaria. Por ejemplo, pueden explicar una ecuación utilizando ejemplos y analogías que se relacionen con experiencias comunes, lo que facilita la comprensión de sus compañeros y docentes. Esta competencia también permite a los estudiantes ver la conexión entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano, lo que hace que el aprendizaje de las ecuaciones sea más accesible y significativo.

5.2.4. Competencia estratégica en la resolución de ecuaciones

La competencia estratégica involucra la capacidad de los estudiantes para ser creativos al enfrentar problemas matemáticos, incluyendo la resolución de ecuaciones. Esto implica que los estudiantes deben estar dispuestos a explorar diferentes enfoques y pensar de manera innovadora para encontrar soluciones efectivas. En el contexto del aula invertida, donde tienen tiempo para reflexionar y prepararse antes de la clase, esta competencia se vuelve aún más relevante. Los estudiantes pueden descubrir enfoques inusuales y estratégicos para resolver ecuaciones, lo que puede llevar a soluciones más eficientes y una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

También es importante la capacidad de los estudiantes para seleccionar y aplicar las estrategias más apropiadas para resolver ecuaciones y llevar a cabo procedimientos matemáticos con precisión. Esto significa que los estudiantes deben ser capaces de evaluar una situación matemática y decidir cuál es la estrategia más adecuada para abordarla. Además, deben ser capaces de aplicar estas estrategias de manera efectiva y justificar sus elecciones estratégicas. Esta dimensión es esencial para el proceso de resolución de ecuaciones, ya que los estudiantes deben elegir entre una variedad de métodos y enfoques disponibles, como la factorización, el método de sustitución o el método gráfico, y aplicarlos de manera competente. La capacidad de razonar y explicar su elección de estrategia también es fundamental, ya que promueve una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos subyacentes y permite a los estudiantes aprender de manera más efectiva.

5.3. Metodología aula invertida en la resolución de ecuaciones

5.3.1. Recursos de aprendizaje

Los estudiantes hacen uso de una amplia variedad de recursos en línea, que incluyen videos educativos, lecturas digitales y aplicaciones interactivas, como sus principales fuentes para adquirir conocimientos previos sobre el tema de las ecuaciones. Estos recursos son seleccionados cuidadosamente por su relevancia y utilidad específica para el tema en cuestión. Los estudiantes buscan recursos que aborden conceptos clave, estrategias de resolución de ecuaciones y ejemplos prácticos que les ayuden a comprender el contenido de manera efectiva.

Durante esta etapa, la competencia sociolingüística y la competencia estratégica desempeñan un papel crucial. Los estudiantes deben aplicar su capacidad para discernir qué recursos en línea son creíbles y confiables. Esto implica evaluar la fuente, verificar la precisión de la información presentada y considerar el contexto en el que se ofrece el contenido en línea. La capacidad de identificar y seleccionar fuentes de información confiables es esencial para garantizar que estén obteniendo información precisa sobre ecuaciones matemáticas.

Una vez que los estudiantes han identificado y seleccionado los recursos en línea pertinentes, utilizan estos recursos para prepararse de manera efectiva antes de la sesión presencial. Aquí, la competencia discursiva juega un papel fundamental. Los estudiantes toman notas detalladas y comprensibles durante el estudio de los recursos en línea, lo que les permite capturar conceptos importantes y estrategias de resolución de ecuaciones. Esta comprensión previa es esencial, ya que facilita la posterior discusión en clase y la aplicación de los conceptos matemáticos aprendidos. Además, la capacidad de expresar sus pensamientos y preguntas de manera clara y concisa durante la sesión presencial es fundamental para un aprendizaje efectivo.

5.3.2. Comunicación

La comunicación se realiza a través de videollamadas, Messenger de Facebook, grupos de WhatsApp y en el aula de clase. Estos medios de comunicación proporcionan un espacio donde los estudiantes pueden interactuar entre sí y con el docente. Los estudiantes utilizan estos medios para plantear preguntas, expresar dudas y compartir conocimientos relacionados con las ecuaciones matemáticas. Esta comunicación es esencial para fomentar la colaboración y la resolución conjunta de problemas.

La competencia estratégica desempeña un papel fundamental en la determinación de cuándo y cómo participar en las discusiones en línea y en el aula de clase. Los estudiantes deben planificar su participación de manera estratégica para obtener el máximo beneficio de la interacción con sus compañeros y el docente. Esto implica elegir cuándo plantear preguntas, cuándo ofrecer ayuda a otros estudiantes y cuándo participar en debates sobre conceptos matemáticos. La habilidad para gestionar su participación de manera efectiva es fundamental para optimizar su aprendizaje en el aula invertida.

La competencia discursiva se convierte en un elemento crucial para la comunicación efectiva de conceptos matemáticos y la aclaración de dudas en línea. Los estudiantes deben ser capaces de expresar sus pensamientos de manera clara y comprensible para sus compañeros y el docente. Esto no solo facilita la comunicación, sino que también contribuye a la comprensión mutua de los conceptos matemáticos. Los estudiantes pueden ofrecer explicaciones detalladas, ejemplos prácticos y respuestas claras a las preguntas de sus compañeros, lo que enriquece la discusión y mejora el aprendizaje colaborativo.

5.3.3. Resolución de problemas

En el contexto del enfoque de aula invertida para el aprendizaje de ecuaciones, los estudiantes acceden principalmente al canal de YouTube del docente para aprender los conceptos clave. Sin embargo, también buscan recursos adicionales en línea para aclarar dudas y profundizar en la materia. Esta búsqueda demuestra su competencia estratégica, ya que seleccionan problemas relevantes a sus necesidades de aprendizaje. Buscan ejemplos variados de ecuaciones y ejercicios que aborden conceptos específicos que desean entender mejor. Esto les permite personalizar su aprendizaje y abordar áreas en las que tengan dudas o desafíos específicos, mostrando su compromiso con el proceso de aprendizaje.

La resolución de problemas matemáticos implica desafíos que requieren habilidades estratégicas y lingüísticas. Los estudiantes deben aplicar estrategias creativas para resolver problemas y comprender completamente el enunciado, ya que una interpretación incorrecta puede llevar a soluciones erróneas. También deben analizar los problemas en pasos más pequeños, identificar patrones y aplicar estrategias adecuadas.

Una vez que resuelven los problemas, los estudiantes participan en discusiones en línea o presenciales para compartir sus soluciones y comparar enfoques con sus compañeros. Esto fomenta el aprendizaje colaborativo y la evaluación de diferentes estrategias de resolución. La competencia discursiva es esencial, ya que deben comunicar sus soluciones de manera clara y comprensible, explicando sus procesos de pensamiento y justificando sus elecciones estratégicas. Esta interacción en línea enriquece la comprensión de los conceptos matemáticos y permite el aprendizaje colaborativo.

5.3.4. Apoyo docente

El docente proporciona orientación y retroalimentación en el aula de clase y en línea a los estudiantes, lo que requiere competencia discursiva para comunicar comentarios constructivos. Además, la competencia sociolingüística se utiliza para interpretar la disponibilidad del docente en las asesorías en línea y entender cómo buscar ayuda adicional. Este apoyo docente tiene un impacto significativo en el aprendizaje, ya que la retroalimentación del docente ayuda a los estudiantes a corregir errores y mejorar sus habilidades matemáticas, contribuyendo a su motivación y confianza en el proceso de aprendizaje de ecuaciones

5.3.5. Trabajo en grupo

Los estudiantes tienen la oportunidad de colaborar en aula de clase y en línea, donde pueden discutir conceptos matemáticos y resolver problemas de manera conjunta como parte de un grupo. Para que esta dinámica sea efectiva, las competencias sociolingüísticas y discursivas son esenciales. Los estudiantes deben ser capaces de comunicarse de manera efectiva con otros miembros del grupo, ya que esto facilita la comprensión mutua y la resolución colaborativa de problemas matemáticos. La competencia sociolingüística les permite adaptarse al entorno en línea y comprender las expectativas de comunicación.

La competencia sociolingüística y discursiva también se aplican para fomentar el respeto mutuo y la colaboración entre los estudiantes que trabajan en grupos. Los estudiantes deben ser capaces de expresar sus ideas de manera respetuosa y considerada, lo que contribuye a un ambiente de aprendizaje positivo y constructivo. Además, la colaboración efectiva es esencial para que los estudiantes trabajen juntos de manera productiva y logren sus objetivos de aprendizaje en el contexto de la resolución de ecuaciones matemáticas.

5.3.6. Proceso de aprendizaje

El proceso de aprendizaje en el enfoque de aula invertida permite a los estudiantes seguir su progreso, establecer metas claras y planificar actividades futuras para mejorar constantemente sus habilidades en la resolución de ecuaciones. La autodisciplina es esencial en el aprendizaje en línea y se logra a través de la competencia estratégica y discursiva, lo que les permite gestionar su tiempo eficazmente y comunicar sus necesidades y dudas de manera efectiva. Además, la participación en discusiones en línea y en el aula de clase, así como la colaboración con otros estudiantes, enriquece su comprensión de conceptos matemáticos y mejora sus habilidades en la resolución de ecuaciones, brindándoles diversas perspectivas y fortaleciendo su aprendizaje.

Los fundamentos y criterios de la teoría desarrollada se basan en la premisa fundamental de que la competencia comunicativa y la metodología de aula invertida son dos elementos interconectados que pueden potenciarse mutuamente en el aprendizaje de ecuaciones matemáticas. Esta teoría reconoce la importancia de las competencias lingüísticas, discursivas, sociolingüísticas y estratégicas en la resolución de ecuaciones, así como el valor de la utilización de recursos en línea y la comunicación efectiva en el contexto de aula invertida. Los criterios clave incluyen la capacidad de los estudiantes para utilizar un lenguaje matemático preciso, comprender y aplicar símbolos algebraicos y notación matemática, relacionar conceptos matemáticos con experiencias cotidianas, colaborar en línea de manera respetuosa y autodirigida, y monitorear su progreso para lograr una comprensión profunda. En conjunto, estos fundamentos y criterios respaldan la teoría emergente que destaca la sinergia entre la competencia comunicativa y el enfoque de aula invertida en el aprendizaje de ecuaciones.

5.4. Conclusión del capítulo 5

Se evidencia que tanto la metodología como la teoría en sí misma cumplen con determinados criterios que funcionan como indicadores de la coherencia metodológica y los requisitos de la teoría que se ha desarrollado. Este logro se materializa al construir la teoría a partir del contexto propuesto y al seguir un diseño específico basado en la teoría fundamentada. Como resultado, se aprecia cómo las dos categorías fundamentales de la teoría se describen como procesos y cómo contribuyen al aprendizaje de las matemáticas, fomentando el desarrollo del pensamiento matemático.

CAPÍTULO 6. HALLAZGOS

6.1. Sinergia de competencias: Potenciando la competencia comunicativa en matemáticas en modos escritos y orales

La teoría desarrollada sobre la sinergia de competencias entre la metodología de aula invertida y la competencia comunicativa en matemáticas ofrece una visión más profunda y estructurada de cómo estos elementos se entrelazan para enriquecer la enseñanza y el aprendizaje. En el contexto del aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, esta teoría reconoce que la competencia comunicativa se despliega tanto en modos escritos como orales, y que la interacción entre las competencias lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica es fundamental.

En el modo escrito, la competencia lingüística se refleja en la habilidad de los estudiantes para utilizar un lenguaje matemático preciso y comprender la nomenclatura de variables. La competencia discursiva se manifiesta en la claridad de la comunicación y la explicación de conceptos. La competencia sociolingüística les permite relacionar el lenguaje matemático con situaciones cotidianas y utilizar expresiones comunes en contexto matemático. La competencia estratégica se aplica en la creatividad para resolver problemas y seleccionar estrategias adecuadas.

Por otro lado, en el modo oral, estas mismas competencias juegan un papel fundamental. La competencia lingüística se traduce en la capacidad de expresar conceptos matemáticos de manera clara y comprensible en conversaciones. La competencia discursiva implica la habilidad para comunicar de manera efectiva, mientras que la competencia sociolingüística les permite relacionar el lenguaje matemático con el mundo real y utilizar expresiones comunes en conversaciones matemáticas. La competencia estratégica es esencial para abordar problemas matemáticos de manera creativa y seleccionar estrategias de resolución adecuadas.

En el contexto de aula invertida, esta teoría reconoce que los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar estas competencias de manera autodirigida. Pueden explorar recursos en línea, participar en discusiones enriquecedoras, tomar notas efectivas y colaborar con otros estudiantes. La metodología de aula invertida les brinda el espacio y las herramientas necesarias para fortalecer su competencia comunicativa tanto en el modo escrito como en el oral.

En resumen, esta teoría proporciona una base sólida para comprender cómo la sinergia de competencias y la metodología de aula invertida enriquecen la competencia comunicativa en matemáticas en modos escritos y orales. Esto tiene un impacto significativo en la calidad del aprendizaje y la comprensión de ecuaciones lineales y cuadráticas, lo que a su vez contribuye al éxito académico de los estudiantes en el ámbito matemático.

6.2. Aula Invertida: Metacognición y Autoevaluación

La teoría desarrollada sobre la sinergia de competencias en el contexto del aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas en un aula invertida amplía la comprensión de cómo la metodología de aula invertida puede potenciar la reflexión metacognitiva y la autoevaluación en matemáticas. Esta metodología permite a los estudiantes no solo adquirir conocimientos previos a través de recursos en línea, sino también reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje, identificar sus puntos fuertes y áreas de mejora, y desarrollar estrategias de autorregulación.

En el modo escrito, los estudiantes pueden expresar sus reflexiones en forma de ensayos, diarios de aprendizaje o comentarios en línea. Pueden analizar cómo han abordado la resolución de ecuaciones, qué estrategias han utilizado y qué dificultades han encontrado. Esta reflexión metacognitiva no solo les ayuda a comprender mejor su propio proceso de aprendizaje, sino que también fortalece su competencia discursiva al expresar sus pensamientos de manera clara y coherente.

En el modo oral, la reflexión se manifiesta a través de discusiones en línea y en el aula de clase. Los estudiantes pueden compartir sus experiencias, desafíos y estrategias de resolución con sus compañeros. Esta interacción promueve una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y mejora su competencia comunicativa en el modo oral. Además, la capacidad de hablar sobre sus procesos de pensamiento y aprendizaje les permite ser más conscientes de su propio progreso y áreas de desarrollo.

La reflexión metacognitiva y la autoevaluación son elementos clave para el desarrollo de la competencia comunicativa en matemáticas, ya que permiten a los estudiantes ser más conscientes de su comunicación escrita y oral, así como de su comprensión de conceptos matemáticos. Esta reflexión contribuye a un enfoque más deliberado y consciente hacia la comunicación efectiva y el aprendizaje matemático en general en ambos modos, fortaleciendo así la sinergia de competencias en el aula invertida.

6.3. Desafíos y estrategias de la competencia comunicativa en la resolución de ecuaciones en aula invertida modos escritos y orales

La implementación de la metodología de aula invertida en la enseñanza de la resolución de ecuaciones matemáticas introduce una serie de desafíos notables en cuanto a las competencias lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica. Estos desafíos, aunque significativos, pueden superarse con enfoque y estrategias pedagógicas adecuadas

<u>Competencia lingüística:</u>

En el modo escrito, los desafíos de la competencia lingüística incluyen la necesidad de utilizar un lenguaje matemático preciso al escribir soluciones y explicaciones. Los estudiantes enfrentan dificultades para expresar ecuaciones y conceptos de manera coherente y clara en papel o a través de medios digitales. Superar este desafío requiere una atención especial a la terminología matemática y la práctica constante de la escritura matemática.

En el modo oral, los estudiantes se les dificulta en la competencia lingüística expresar conceptos matemáticos verbalmente. La verbalización de procesos matemáticos puede ser complicada, y algunos estudiantes presentan dificultades para articular sus ideas de manera fluida. Para abordar este desafío, es fundamental fomentar la expresión oral a través de discusiones en grupo, presentaciones y ejercicios de explicación en voz alta.

Competencia discursiva:

En el modo escrito, los desafíos discursivos incluyen la capacidad de estructurar y organizar adecuadamente las explicaciones y soluciones matemáticas. Los estudiantes tienen dificultades para presentar sus argumentos de manera lógica y persuasiva. Para superar este desafío, se pueden enseñar técnicas de redacción específicas para la matemática y seguir un enfoque paso a paso en sus explicaciones escritas.

En el modo oral, los desafíos discursivos pueden ser más evidentes al comunicar procesos matemáticos en tiempo real. A los estudiantes se les dificulta mantener una comunicación efectiva y clara al explicar ecuaciones y soluciones en voz alta. La práctica de la comunicación oral matemática, como la realización de presentaciones y debates en el aula, puede ayudar a mejorar esta competencia.

Competencia sociolingüística:

En el modo escrito, los desafíos sociolingüísticos pueden surgir cuando los estudiantes no pueden relacionar el lenguaje matemático con situaciones cotidianas o cuando tienen dificultades para utilizar expresiones comunes en un contexto matemático. Incorporar ejemplos y problemas que conecten las ecuaciones con la vida diaria puede abordar este desafío y ayudar a los estudiantes a comprender la relevancia de las matemáticas en sus vidas.

En el modo oral, los desafíos sociolingüísticos pueden manifestarse al relacionar el lenguaje matemático con el mundo real durante conversaciones en grupo o presentaciones. Los estudiantes pueden necesitar apoyo para vincular conceptos matemáticos con aplicaciones prácticas y expresar estos vínculos de manera efectiva.

Competencia estratégica:

Tanto en el modo escrito como en el oral, los desafíos de la competencia estratégica incluyen la selección de métodos de resolución de ecuaciones y la aplicación de estrategias efectivas. Los estudiantes pueden necesitar orientación y práctica en la elección de enfoques adecuados para abordar diferentes tipos de problemas matemáticos. La resolución de problemas variados y la exploración de múltiples estrategias pueden ayudar a desarrollar esta competencia.

Los desafíos en las competencias lingüística, discursiva, sociolingüística y estratégica en la resolución de ecuaciones se presentan tanto en los modos escritos como en los orales. Para superar estos obstáculos, los docentes deben ofrecer una variedad de actividades y enfoques pedagógicos que permitan a los estudiantes practicar y mejorar sus habilidades en ambos contextos. La metodología de aula invertida puede ser especialmente efectiva al proporcionar a los estudiantes el tiempo y los recursos necesarios para desarrollar estas competencias en profundidad.

7.CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta investigación sobre el uso de la competencia comunicativa y la metodología de aula invertida en el aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, se ha evidenciado una profunda transformación en la forma en que los estudiantes abordan las matemáticas y la comunicación. No obstante, este proceso no está exento de desafíos y reflexiones críticas.

En primer lugar, es fundamental reconocer que, si bien la metodología de aula invertida brinda flexibilidad y autonomía para el aprendizaje, no todos los estudiantes responden de la misma manera. Algunos pueden sentirse sobrecargados por la responsabilidad de gestionar su propio aprendizaje, especialmente en un entorno en línea, lo que plantea interrogantes sobre la equidad en el acceso a la educación y la necesidad de apoyo adicional.

Además, la transición del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático sigue siendo un obstáculo significativo en el proceso de comunicación. Los estudiantes enfrentan dificultades para comprender y aplicar el lenguaje matemático en situaciones prácticas, lo que refleja una brecha en la comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas en la vida diaria. Esta brecha suscita preguntas sobre cómo cerrar la distancia entre el lenguaje matemático abstracto y su relevancia en el mundo real.

En cuanto a la comunicación, a pesar de las mejoras en las competencias comunicativas de los estudiantes, persisten limitaciones. La competencia discursiva y estratégica sigue siendo un área de desarrollo, especialmente en el discurso oral, donde la falta de confianza al expresar ideas matemáticas es un desafío que requiere atención adicional.

Es importante destacar que la argumentación y la formulación de conjeturas en ideas matemáticas han demostrado ser elementos cruciales en el desarrollo del pensamiento matemático. Los estudiantes han aprendido a cuestionar, explorar y justificar sus razonamientos matemáticos de manera más profunda.

Han adquirido la capacidad de respaldar sus ideas con evidencia y construir argumentos sólidos, lo que no solo fortalece sus habilidades matemáticas, sino también su capacidad de pensamiento crítico.

Es esencial resaltar el papel fundamental del docente como agente de motivación y guía en este proceso. Los docentes desempeñan un rol crucial en la motivación de los estudiantes y en la superación de desafíos. No obstante, también enfrentan obstáculos al adaptarse a la metodología de aula invertida y al gestionar la comunicación en línea.

Además, se ha observado que la aplicación de las habilidades matemáticas a problemas de diversas disciplinas, especialmente en física, ha enriquecido significativamente la comprensión de la relevancia de las matemáticas en diferentes contextos. Esto ha impulsado el desarrollo de la competencia lingüística, ya que los estudiantes han debido utilizar un lenguaje matemático específico para describir y resolver problemas físicos.

En cuanto a la competencia discursiva, esta se ha fortalecido gracias a la necesidad de comunicar claramente los procedimientos y resultados en la resolución de problemas aplicados. Los estudiantes han aprendido a expresar sus pensamientos matemáticos de manera efectiva, tanto por escrito como de manera oral, permitiéndoles comunicar sus estrategias de resolución en un lenguaje accesible para otros.

La competencia sociolingüística también ha ganado relevancia a medida que los estudiantes han aplicado conceptos matemáticos en contextos de física, economía, geometría entre otros. Han desarrollado la habilidad de relacionar el lenguaje matemático con experiencias cotidianas y han utilizado el lenguaje cotidiano en un contexto matemático para comprender y resolver problemas aplicados, mejorando así su capacidad para interpretar el lenguaje matemático en diferentes contextos.

En términos de la competencia estratégica, los estudiantes han demostrado creatividad en la resolución de problemas aplicados en física, explorando diferentes enfoques y estrategias. Esta habilidad ha llevado a la innovación en la resolución de problemas en otros contextos, siendo la elección y aplicación de estrategias esenciales en la resolución de problemas, ya que los estudiantes deben seleccionar las más apropiadas para cada situación.

En consecuencia, a partir de las conclusiones mencionadas, se formulan las siguientes recomendaciones para optimizar el proceso educativo:

Personalización del Aprendizaje: Para abordar las diferencias individuales en la respuesta de los estudiantes a la metodología de aula invertida, se sugiere personalizar el proceso de aprendizaje, adaptando recursos y brindando orientación adicional según las necesidades.

Desarrollo de Competencias Comunicativas: Se recomienda ofrecer oportunidades continuas para la práctica y aplicación del lenguaje matemático en situaciones prácticas, utilizando ejemplos y ejercicios contextualizados para resaltar la relevancia de las matemáticas en la vida cotidiana.

Fortalecimiento de la Competencia Discursiva: Para mejorar la competencia discursiva, se aconseja implementar estrategias que aumenten la confianza de los estudiantes al expresar sus ideas matemáticas de manera oral, mediante actividades como debates y presentaciones.

Apoyo Docente y Formación Continua: Es esencial proporcionar a los docentes capacitación y apoyo continuo en la implementación efectiva de la metodología de aula invertida y en la gestión de la comunicación en línea, reconociendo su papel vital en el proceso de aprendizaje.

Promoción de la Interdisciplinariedad: Fomentar la aplicación de habilidades matemáticas en contextos interdisciplinarios, como la física, economía, geometría enriquece la comprensión de la relevancia de las matemáticas en diferentes áreas.

Énfasis en la Competencia Sociolingüística: Continuar desarrollando la competencia sociolingüística ayudará a los estudiantes a relacionar el lenguaje matemático con experiencias cotidianas, lo que facilitará la interpretación y comunicación de conceptos matemáticos en diversos contextos.

Fomento de la Creatividad en la Resolución de Problemas: Estimular la creatividad y la exploración de diversos enfoques y estrategias en la resolución de problemas matemáticos y aplicados promoverá la innovación y el pensamiento crítico.

La implementación de estas recomendaciones tiene el potencial de mejorar significativamente el proceso de aprendizaje de ecuaciones lineales y cuadráticas, abordando los desafíos identificados y promoviendo un aprendizaje más efectivo y significativo, tanto en matemáticas como en competencias comunicativas. Al aplicar estas recomendaciones, se busca crear un entorno de aprendizaje más inclusivo y adaptado a las necesidades individuales de los estudiantes. Esto no solo beneficiará su comprensión y dominio de las matemáticas, sino que también fortalecerá sus habilidades de comunicación, pensamiento crítico y resolución de problemas, habilidades esenciales para su éxito tanto en el ámbito académico como en el futuro profesional.

BIBLIOGRAFÍA

Argyle, M. (1976). Social skills theory. *Children as teachers; theory and research on tutoring*, 57-74.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*(1-10), 1-10.

Bauersfeld, H. (1995). Language games in mathematics classroom: Their function and their effects. En: Cobb, P., & Bauersfeld, H. (eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, 271-292. New York, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of mathematics Teacher education*, *3*(2), 125-153.

Cáliz, S. R. S., Sepúlveda, S. J. R., & Rico, S. E. P. (2015). ¿Cómo influye la habilidad explicativa en la resolución de problemas? *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*.

Canale, M. (2014). From communicative competence to communicative language pedagogy. In *Language and communication* (pp. 14-40). Routledge.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Research Report. In *Research Report: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*

Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *Zdm*, *52*(7), 1291-1305.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood-Gregg, D. (1998). *Individual construction, mathematical acculturation and the classroom community*. Ed: Larochelle, M., Bernarz, N., and Garrison, J. Constructivism and Education. 63-80. Cambridge University Press.

Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*.

Corbin, J., & Strauss, A. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage Publications.

Disasmitowati, C. E., & Utami, A. S. (2017). Analysis of Students' Mathematical Communication Skill for Algebraic Factorization Using Algebra Block. In *International Conference on Research in Education* (Vol. 20, No. 2, pp. 72-84).

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Springer Nature.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.

Engvall, M., Samuelsson, J., & Forslund Frykedal, K. (2015). How communicative teaching strategies create opportunities for mathematics learning. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic* (pp. 1368-1373). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 245-262.

Esperanza, P. J., Himang, C., Bongo, M., Selerio Jr, E., & Ocampo, L. (2021). The utility of a flipped classroom in secondary Mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-34.

Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S., & Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, *1*(2), 173-202.

Forrest, D. B. (2009). Communication Theory Offers Insight into Mathematics Teachers' Talk. *The Mathematics Educator*, *18*(2).

Felmer, P., Liljedahl, P., & Koichu, B. (Eds.). (2019). *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development*. Springer International Publishing.

Glaser, B. G., & Holton, J. (2004, May). Remodeling grounded theory. In Forum qualitative sozialforschung/forum: qualitative social research (Vol. 5, No. 2).

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill.

Ingram, J., Schütte, M., & Ríordáin, M. N. (2022, April). 14th International Congress on Mathematical Education Proceedings of Topic Study Group 39. In *14th International Congress on Mathematical Education*.

Jiménez, A., & Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, *16*, 101-116.

Jiménez-Espinosa, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, *10*(1), 121-134.

Kamol, N. (2005). *A framework for characterizing lower secondary school students' algebraic thinking* [Unpublished doctoral dissertation]. Srinakharinwirot University.

Kamol, N., & Har, Y. B. (2010). Upper primary school students' algebraic thinking. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Kurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 289-296). MERGA.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. *Mathematics Classrooms That Promote Understanding*, *Ccm*, 133-155.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades*. Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early algebra ICME-13 topical surveys.

Kieran, C. (2006). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In *Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education,* p.310. Springer, Cham.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), p.100

Koichu, B., Katz, E., & Berman, A. (2017). Stimulating student aesthetic response to mathematical problems by means of manipulating the extent of surprise. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 42-57.

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. *Retrieved September*, *10*, 2008.

la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Unpublsihed Ph.D. thesis. University of Nottingham].

Littlejohn, S. & Foss, K. (Eds.). (2009). *Encyclopedia of communication theory* (Vol. 1). Sage, p. 137-138.

Lo, C. K., & Hew, K. F. (2020). A comparison of flipped learning with gamification, traditional learning, and online independent study: the effects on students' mathematics achievement and cognitive engagement. *Interactive Learning Environments*, *28*(4), 464-481.

Löwing, M. (2000). *Kartläggning av utländska lärares utbildningoch arbetssituation: delrapport 1: Bakgrund och instrument [Assessment of immigrant teachers' education and professional situation. Report 1: Background and analysing tools]*. Göteborg, Sweden: Institutionen för pedagogik och.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. *Algebra In The Early Grades*, *2008*, 57-94.

Merrill, M. D. (2002). First principles of instruction. *Educational technology research and development*, *50*(3), 43-59.

Ministerio de Educación Colombia (2006) Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, Colombia.

Moschkovich, J. N., Wagner, D., Bose, A., Mendes, J. R., & Schütte, M. Language and Communication in Mathematics Education.

NCTM. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2003, January). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

Ntsohi, M. M. E. (2013). *Investigating teaching and learning of grade 9 algebra through excel spreadsheets: A mixed methods case study for Lesotho* (Issue December).

Paridjo, P., & Waluya, S. B. (2017). Analysis mathematical communication skills students in the matter algebra based NCTM. *IOSR Journal of Mathematics*, *13*(01), 60-66.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton university press.

Prado Aragonés, J. (2011). *Didáctica de la lengua y la literatura para educar en el siglo XXI.* (2ªed.). Madrid: Editorial La Muralla.

Prediger, S., & Neugebauer, P. (2021). Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 289-304.

Presmeg, N., Radford, L., Kadunz, G., Puig, L., & Roth, W. M. (2017). Topic Study Group No. 54: Semiotics in Mathematics Education. In *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 627-631). Springer, Cham.

Puspa, S., Riyadi, R., & Subanti, S. (2019, February). Profile of mathematical communication skills junior high school students in problem solving. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 3, p. 032125). IOP Publishing.

Qohar, A., & Sumarmo, U. (2013). Improving Mathematical Communication Ability and Self-Regulation Learning of Junior High Students by Using Reciprocal Teaching. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(1), 59-74.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM-Mathematics Education, 44*, 641–651.

Rochmiyati, S., Wijayanto, Z., & Supriadi, D. (2020). A needs analysis of flipped classroom-based mathematics learning model. *PalArch's Journal of Archaeology of Egypt/Egyptology*, *17*(5), 69-93.

Rohid, N., & Rusmawati, R. D. (2019). Students' Mathematical Communication Skills (MCS) in Solving Mathematics Problems: A Case in Indonesian Context. Anatolian Journal of Education, 4(2), 19-30.

Rowan, Thomas, and Barbara Bourne. *Thinking Like Mathematicians: Putting the NCTM Standards into Practice. Updated for Standards 2000*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912, 2001.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American psychologist*, *55*(1), 68.

Schmidt, Q. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.

Sfard, A. (2009, November). Moving between discourses: From learning-as-acquisition to learning-as-participation. In AIP Conference *proceedings* (Vol. 1179, No. 1, pp. 55-58). American Institute of Physics.

Sfard, A. (2009, November). Moving between discourses: From learning-as-acquisition to learning-as-participation. In *AIP Conference proceedings* (Vol. 1179, No. 1, pp. 55-58). American Institute of Physics.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In: A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ.

Song, Y. (2020). How to flip the classroom in school students' mathematics learning: bridging in-and out-of-class activities via innovative strategies. *Technology, Pedagogy and Education*, *29*(3), 327-345.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). Base de la investigación cualitativa. *Técnica y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Sag. Publications Inc*.

Strauss, A., & Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Universidad de Antioquia.

Sumaji, S., Sa'dijah, C., Susiswo, S., & Sisworo, S. (2020). Mathematical Communication Process of Junior High School Students in Solving Problems based on APOS Theory. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, *8*(1), 197-221.

Syaiful, S., Muslim, M., Huda, N., Mukminin, A., & Habibi, A. (2019). Communication skills and mathematical problem-solving ability among junior high school's students through problem-based learning. *International Journal of Scientific & Technology Research*.

Vigotsky, L. (1934). Pensamiento y Lenguaje: Obras Escogidas II. *Madrid: Visor*.

Vigotsky, L. (1982). Pensamiento y lengua e. *La Habana: Editorial Pueblo Educación*.

Wood, T., & McNeal, B. (2003). Complexity in Teaching and Children's Mathematical Thinking. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 435-441.

Zulhelmi and Anwar, "Mathematical communication skills in solving block and cube problems," J. Phys. Conf. Ser., vol. 1882, no. 1, p. 012065, 2021.

ANEXOS

Anexo 1.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA ÁNGEL MARÍA PAREDES	
Asignatura: Álgebra	**Grado**: 8°
Guía de aprendizaje 1: Ecuaciones lineales: Modelo de la balanza, transposición de términos y gráficas lineales	
Tema: Ecuaciones lineales	**Subtemas**: lenguaje algebraico, reducción términos semejantes, números enteros, números racionales, plano cartesiano.
Objetivos: • Interpretar y utilizar el lenguaje algebraico para plantear ecuaciones que relacionan los datos del problema. • Aplicar la propiedad aditiva o multiplicativa para determinar la solución de ecuaciones con diferentes coeficientes. • Aplicar los procedimientos aprendidos para despejar variables en una fórmula.	
Metodología: Antes de resolver los problemas observar los siguientes videos: https://youtu.be/McCupCRE6sw https://youtu.be/iInRKWJWZTg https://youtu.be/BhXwwLYuZB0 https://youtu.be/Fpp6Q2ikoFk https://youtu.be/leEejFS5s80 https://youtu.be/Pi9el_glSkQ Luego, realizar en casa los problemas de exploración para ser socializado en clase y finalmente en clase en grupo de tres estudiantes solucionar los problemas de profundización.	

ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN 1:

Resolver en casa los siguientes problemas:

Ingresar a la aplicación: Equality Explorer (colorado.edu), dar click en explorador de igualdades, luego en variables; modelar y resolver la siguiente situación, en la parte superior dar valor a la variable x según considere fácil para resolver el problema.

Problema 1: La igualdad de balanza entre frutas

Un vendedor de frutas tiene un paquete que contiene 2000 gr de fresas. ¿Cuántas veces como mínimo debe utilizar la balanza para separar 110 gr de fresa, utilizando dos pesas, una de 20 gr y otra de 50 gr?, escribir paso a paso el procedimiento.

Ingresar a la aplicación: Equality Explorer (colorado.edu), dar click en explorador de igualdades, luego en Basics y en el animal, ahora modelar y solucionar la siguiente situación:

Problema 2: Equilibrar la balanza entre animales

Se tiene una balanza, en un platillo hay 12 perros y el otro platillo contiene 10 gatos y 8 tortugas. Tener en cuenta, que animales del mismo tipo tienen igual peso. Si el peso de 4 perros es igual al peso de 3 gatos y el peso de una tortuga es la mitad del peso de un gato.

Contestar:

a. ¿Cuál es el peso total de la balanza?, describir el procedimiento.
b. ¿Cuántos animales como mínimo se debe trasladar de un platillo a otro, para equilibrar la balanza?, escribir paso a paso el procedimiento.

Problema 3: Perímetros de rectángulos en relación con la altura

Ingresar a la aplicación: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/.

Construir en el geoplano, diferentes rectángulos de largo (base) constante y de anchos (alturas) variables de: 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, 4 unidades y así sucesivamente.

Resolver:

b. A partir de la construcción de los rectángulos de base constante y altura variable, registrar los valores de sus respectivos perímetros, en la siguiente tabla y ubicar los puntos en GeoGebra. Escribir el procedimiento para determinar el perímetro de cada rectángulo.

Altura (u)	Perímetro (u)
1	
2	
3	
4	
5	

a. De acuerdo a los resultados obtenidos en el punto a, ¿cómo es la variación del perímetro con respecto a cada rectángulo?, ¿Qué gráfica se obtiene?, describir cada análisis.

b. Determinar la ecuación que relaciona el perímetro con su altura. Escribir el procedimiento.

ACTIVDADES DE PROFUNDIZACIÓN:

En grupo de tres estudiantes solucionar el siguiente problema, de acuerdo a las indicaciones. Ingresar a la siguiente página:https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Pan-Balance----Expressions/

Resolver:

Problema de profundización 1: La balanza con expresiones algebraicas y gráfica lineal.

Ingresar en la bandeja roja la expresión "el doble de un número" y en la bandeja azul "un número aumentado en 4".

Realizar y contestar:

a. Ingresar el valor x = -3. ¿Qué sucede con la balanza?, ¿Qué observa en la gráfica?, describir lo sucedido y escribir el procedimiento realizado.
b. Cambie el valor de x=0 y luego a x=3. ¿Cómo cambia esto la relación entre las bandejas y las gráficas?, analizar.
c. Encuentre un valor de x tal que la bandeja roja sea igual a 0. ¿Dónde está el punto rojo cuando la bandeja roja tiene un valor de 0?, describir lo observado.
d. Encuentre un valor de x tal que la bandeja azul sea igual a 0. ¿Dónde está el punto azul cuando la bandeja azul tiene un valor de 0?, describir lo observado.
e. Mueva el control deslizante para ajustar el valor de x. ¿Para qué valor de x las bandejas roja y azul tienen valores iguales?, ¿Qué sucede en la gráfica cuando los valores de los platillos son iguales?, comparar los resultados, al ingresar a la aplicación Equality Explorer (colorado.edu), dar click en operations. Escribir los procedimientos realizados, usando esa aplicación.
f. De acuerdo a los resultados obtenidos en el punto c y d, responder:

   ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal?, ¿una ecuación lineal puede no tener solución?, ¿una ecuación lineal puede tener más de una solución?

Problema de profundización: Modelado de ecuaciones lineales en el plano cartesiano.

En grupo de tres estudiantes solucionar el siguiente problema, de acuerdo a las indicaciones ingresar a GeoGebra.

Resolver:

Problema profundización 2: Costo del gimnasio

Camila está planeando aprender escalada en roca en un gimnasio de escalada en roca bajo techo. En la tabla se muestran los aranceles diarios por el uso de las instalaciones y el costo de las lecciones en el gimnasio Ascenso bajo techo.

<table>
<tr><th colspan="3">ASCENSO BAJO TECHO
Gimnasio de escalada en roca</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aranceles diarios</td><td>Lecciones</td></tr>
<tr><td>Días</td><td>Aranceles</td><td rowspan="3">Lección introductoria $35000</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$ 12.000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$ 24.000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$ 36.000</td><td rowspan="2">Lección de técnica $30000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$ 48.000</td></tr>
</table>

a. Sea x la cantidad de días. Escribir una expresión para los aranceles. Describir la gráfica.

b. El costo total es el precio de dos lecciones más los aranceles diarios por el uso de las instalaciones. Escribir una expresión que dé el costo total por x días. Analizar la gráfica.

c. Camila tiene un presupuesto de $185000 para tomar lecciones y pagar los aranceles en Ascenso bajo techo. Escribir y resolver una ecuación para hallar cuántos días puede ir a ese gimnasio.

d. Camila ahorra $45000 por mes. ¿Durante cuántos meses debe ahorrar para tener al menos suficiente dinero para pagar las lecciones y los aranceles? Describir el procedimiento.

<u>Problema de profundización 3: Movimiento uniformemente rectilíneo</u>

María salió de su casa para la escuela. Sofía, su hermana, salió 4 minutos más tarde. La velocidad de marta fue de 30m/min y la de Julia fue de 50 m/min.

La ecuación de la $distancia\ recorrida$ es: $x = v.t,\ donde\ v = velocidad\ y\ t = tiempo\ recorrido$.

a. ¿En cuántos minutos alcanzó Julia a Marta?, Describir el procedimiento algebraico y gráfico.

b. Si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280m, ¿Julia alcanzara a Marta en el camino?, analizar gráficamente y algebraicamente, escribir paso a paso el procedimiento.

Problema de profundización 4: Escala de temperatura

La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por la expresión:

$\frac{9}{5}T_{°c} + 32 = T_{°f}$, donde $T_{°c} temperatura\ grados\ Celsius\ o\ centigrados$

$T_{°f} = temperatura\ Fahrenheit.$

a. Si el cuerpo humano alcanza hasta 104°F cuando está expuesto a infecciones virales u otras enfermedades, ¿a cuántos grados Celsius equivale esta temperatura?, describir algebraicamente y gráficamente.
b. Según la gráfica, cuántos grados Celsius equivale la temperatura, cuando la temperatura de cierto cuerpo es de 0°F. Escribir el procedimiento algebraico.
c. Descargar en el celular por "*Play Store*", la aplicación *clima, y* de acuerdo al pronóstico del clima durante el día, realizar en GeoGebra la gráfica que relacione la temperatura en grado °C y las horas, analizar y describir la gráfica.
d. Convertir las temperaturas del punto c, a grados °F y realizar la gráfica temperatura °F con respecto a la temperatura °C. Analizar y describir.

Anexo 2.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">INSTITUCIÓN EDUCATIVA ÁNGEL MARÍA PAREDES</td></tr>
<tr><td align="center">Asignatura: Álgebra</td><td align="center">Grado: 8°</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Guía de aprendizaje 2: Solución de ecuaciones cuadráticas método de Po Shen Loh</td></tr>
<tr><td>Tema: Ecuaciones cuadráticas por el Método de Po Shen Loh y fórmulas de Vieta.</td><td>Subtemas: punto medio, punto de corte con el eje x, diferencias de cuadrados, valor numérico.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Objetivo: Resolver deductivamente problemas que involucren el concepto, las características, la representación de funciones cuadráticas y sus soluciones, en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metodología: Antes de resolver los problemas observar el siguiente video:
https://youtu.be/CZIGABgAFU8 (Videoclip)

https://youtu.be/dUhQQ2Im3EM

https://www.youtube.com/watch?v=-_AdNFXVr28

Luego, realizar en casa los problemas de exploración para ser socializado en clase y finalmente en clase en grupo de tres estudiantes solucionar los problemas de profundización.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN:

Resolver en casa los siguientes problemas:

Problema 1: Los fuegos artificiales en la fiesta del San Pedro.

Dibujar la ecuación cuadrática en GeoGebra y contestar las preguntas de acuerdo a la siguiente información:

Para la fiesta de San Pedro, se planeó realizar una exhibición de fuegos artificiales en el parque Santander. Cuando han transcurrido t segundos desde el lanzamiento de cada proyectil, la altura, en metros, está dada por la ecuación:

$$y(t) = -2t^2 + 40t + 100$$

a. Según el gráfico, cuáles son las soluciones y ¿por qué?

b. Ubicar el centro entre las soluciones de la ecuación y escribir cómo determinarlo para cualquier ecuación cuadrática, según el modelo de **Po Shen Loh.**

c. ¿Cuántas unidades de distancia **u** se resta o se suma, con respecto al centro para encontrar las soluciones?

d. Comprobar el punto a, aplicando el modelo de **Po Shen Loh.**

e. ¿Cuánto demoran los fuegos artificiales en alcanzar su altura máxima?, ese tiempo según con el modelo de **Po Shen Loh** que representa.

<u>Problema 2: Encontrar los números</u>

Encontrar dos números sabiendo que la suma es 1/4 y el producto es -3/8.

a. Utilizando el método de **Po Shen Loh**., escribir paso a paso el procedimiento.

b. Verificar la respuesta obtenida en el punto a, graficando en GeoGebra. Describir los resultados.

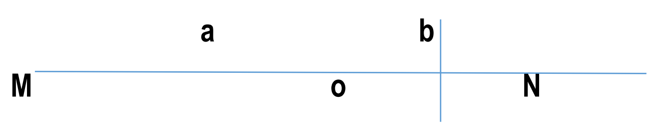
<u>Problema 3: La divina proporción</u>

Ingresar al siguiente link https://www.youtube.com/watch?v=JOkVfu2FxpA , Donald en el país de las matemáticas. Contestar las siguientes preguntas:

a. ¿ Qué es la sección áurea o sección de oro?

b. Escribir en palabras y algebraicamente, ¿ cómo define en el video la "divina proporción"?

c. De acuerdo al punto b, se obtiene la siguiente proporción: $\frac{MO}{0N} = \frac{MN}{MO}$



Por lo tanto, la divina proporción sería: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

Y se asume que $\frac{a}{b} = x, \quad b = 1$

Determinar los valores de x para que sea válida la proporción. Comparar estos resultados con el número áureo. Escribir el paso a paso el procedimiento, utilizando el método de **Po Shen Loh.**

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN:

En grupo de tres estudiantes trabajar en GeoGebra la siguiente situación:

Problema de profundización 1:

El avión **Eurofighter** de guerra debe realizar una maniobra de “vuelo rasante” (pasar muy cerca de la superficie), la cual debe iniciar a una cierta altura h_0 (la altura la cual el avión inicia la maniobra).

La ecuación que describe la altura h que alcanza el avión (en metros) a los t segundos de haber comenzado la maniobra está dada, por la expresión:

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + h_0 \qquad 0 \leq \ t \leq 12$$

Contestar:

a. A partir del modelo **Po Shen Loh,** determinar el punto medio de la ecuación. Describir qué indica ese punto en la situación.
b. Determinar la altura mínima que el piloto debe iniciar la maniobra, utilice GeoGebra para graficar el comportamiento de la altura que alcanza el avión, a partir de los diferentes puntos medios posibles, para que cumpla las condiciones del problema. Llenar la siguiente tabla:

Ecuación	Punto medio	análisis
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t +$?		
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + ?$		
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + ?$		
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + ?$		
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + ?$		
$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + ?$		

c. Determinar los puntos de cortes con el eje x de las ecuaciones cuadráticas del punto b, por el método de **Po Shen Loh,** a partir de estos valores, ¿qué relación existe entre las soluciones y coeficientes de cada ecuación?; es posible hallar el valor de la suma y el producto de cualquier ecuación cuadrática sin necesidad de resolverla.

d. De acuerdo a la altura mínima que se debe maniobra el avión, encuentra algunas soluciones según el método de **Po Shen Loh. Analizar**

<u>Problema profundización 2: Lanzamiento una bala de cañón</u>

En grupo de tres estudiantes ingresar a la siguiente aplicación: [Movimiento de un Proyectil (colorado.edu)]() y realizar el siguiente laboratorio:

Ingresar a laboratorio los siguientes datos:

Rapidez inicial: 15 m/s

Altura del cañón: 0 m

Angulo: 45°

Desplegar la pestañan del objeto y señalar: bala del cañón

Masa: entre 9Kg y 12kg

Diámetro: 0,40 m

Gravedad: 10 m/s^2

Dar click en lento y en el icono rojo del cañón, para iniciar el movimiento, observar y contestar las siguientes preguntas:

a. Una de las ecuaciones de la altura en el movimiento de proyectiles es:

$$y(t) = v_{oy}\, t - \frac{1}{2}\; g\; t^2 + y_0 \qquad (1)$$

En este caso la v_{oy} = 10,60 m/s y $y_0 = 0\ m$.

De acuerdo con la información de la trayectoria de la bala del cañón por parte de la aplicación, construir la ecuación cuadrática (1). Describir el movimiento mediante el uso del GeoGebra.

b. ¿Cuál es el tiempo mínimo de subida de la bala del cañón?, comprobar el dato suministrado por la aplicación y el modelo de solución de ecuaciones cuadrática de **Po Shen Loh.** Escribir el procedimiento

c. Aplicar el método de solución de ecuaciones cuadráticas de **Po Shen Loh,** para encontrar las soluciones; ¿son las soluciones de la ecuación números enteros?, ¿racionales? ¿Irracionales? imaginarias? Analizar.

d. Determinar la altura máxima que alcanza la bala del cañón, comparar con los datos obtenidos en la aplicación. Escribir el procedimiento.

e. Determinar la ecuación cuadrática de la bala del cañón, tengan en cuenta que la v_{oy} = 10,60m/s y $y_0 = 4m$. Utilizar:

$$y(t) = v_{oy}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 + y_0 \qquad (2)$$

f. Aplicar el método de solución de ecuaciones cuadráticas de Po Shen Loh, para encontrar los puntos de corte; ¿qué se puede analizar con el resultado obtenido?, contrastar con GeoGebra. ¿son las soluciones de la ecuación números enteros?, racionales? ¿Irracionales? ¿Imaginarias?, Describir el procedimiento.

Anexo 3.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">INSTITUCIÓN EDUCATIVA ÁNGEL MARÍA PAREDES</td></tr>
<tr><td align="center">Asignatura: Álgebra</td><td align="center">Grado: 8°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Guía de aprendizaje 3: Sistema de ecuaciones lineales</td></tr>
<tr><td align="center">Tema: Sistema de ecuaciones lineales: igualación, sustitución y eliminación</td><td>Subtemas: ecuaciones lineales, lenguaje algebraico, reducción términos semejantes, pendiente e intercepto con eje y.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
• Modelar situaciones de variación en sistema de ecuaciones lineales
Interpretar y utilizar el lenguaje algebraico para plantear sistema de ecuaciones lineales que relacionan los datos de un problema

• Desarrollar los diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metodología: Antes de resolver los problemas observar los siguientes videos:

https://youtu.be/NqDe1UA31L8 sistema de ecuación por eliminación.

https://youtu.be/v1JcCRJRAxQ sistema de ecuación por sustitución.

https://youtu.be/4fhajkGekEo sistema de ecuación por igualación.

Luego, realizar en casa los problemas de exploración para ser socializado en clase y finalmente en clase en grupo de tres estudiantes solucionar los problemas de profundización.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN 1:

Resolver en casa los siguientes problemas:

Problema 1: Costos totales

La siguiente información son los costos de instalación y operación de dos tipos de sistemas de calefacción: solar y eléctrica.

Tipos de calefacción	Costo de operación por año	Costo de instalación
Solar	$800 000	$76000000
eléctrica	$5600000	$28000000

Contestar las siguientes preguntas:

a. Utilice la información de la tabla para escribir una ecuación que represente el costo total de usar cualquier tipo de sistema de calefacción en términos de la cantidad de año que está en uso.
b. Use las ecuaciones que escribió en el punto ***a***, para comparar los costos de los dos sistemas. A partir de una tabla de costos para períodos específicos de uso:

Número de años en uso	0	5	10	15
Total de costo de calefacción solar				
Total de costo de calefacción eléctrica				

Utilice la información de la tabla para comparar los costos totales de cada tipo de calefacción después de cada período de 5 años. argumentar

c. Al comparar los costos totales en la tabla, ¿qué sistema cree que es mejor?, hacer comparaciones graficando la información de la tabla.

d. Según el gráfico, ¿cuándo son iguales los costos totales de los sistemas de calefacción?, ¿Cuánto es el costo? Comprobar algebraicamente los resultados.

e. ¿Qué sistema de calefacción cuesta menos a los 15 años? ¿A los 20? Explicar.

<u>Problema 2. Inversión anual</u>

Un comerciante invirtió algo de dinero a un interés simple anual del 5,2%. Luego, realizó una segunda inversión de $2000000 más que el primero, invirtió a una tasa de interés simple anual de 7.2%. El total de interés anual ganado fue de $3200000.

a. Construir una tabla asignando las variables del problema.
b. Plantear las ecuaciones del sistema. Justificar y argumentar
c. ¿Cuánto invirtió el comerciante en cada cuenta? Justificar y argumentar

<u>Problema 3. Encontrar los términos faltantes</u>

Mario y Camilo se están retando a encontrar los términos faltantes de una de las ecuaciones del siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} Ax + By = c \\ 3x - 4y = 10 \end{Bmatrix}$$

a. Describir cada paso, si la solución del sistema es (2,-1).

b. Graficar el sistema de ecuaciones y comprobar con la solución del sistema. Argumentar.

c. Nuevamente se retan, encontrar el valor de *k* en el siguiente sistema de ecuaciones que no tiene solución:

$$\begin{Bmatrix} x = 4y + 4 \\ kx - 8y = 4 \end{Bmatrix}$$

ACTIVDADES DE PROFUNDIZACIÓN:

En grupo de tres estudiantes solucionar el siguiente problema, de acuerdo a las indicaciones.

Problema 1. Cruce de objetos con mur (movimiento uniformemente rectilíneo)

Las siguientes tablas es el tiempo y posición de dos objetos que se cruzan con movimiento uniformemente rectilíneo:

Movimiento objeto 1. Posición inicial: -10 metros (m)

Tiempo (s)	**Posición (m)**
0	-10
1	-9
2	-8
3	-7
4	-6
5	-5
6	-4
7	-3
8	-2
9	-1
10	0

Movimiento objeto 2. Posición inicial: 10 metros (m)

Tiempo (s)	Posición (m)
0	10
1	8
2	6
3	4
4	2
5	0
6	-2
7	-4
8	-6
9	-8
10	-10

Realizar:

a. Con los datos de las dos tablas representar los movimientos gráficamente. Argumentar lo observado.
b. Observar la gráfica y determinar en qué posición se encuentran los objetos y en qué instante ocurre el encuentro.
c. Determinar algebraicamente dónde y cuándo se encuentran los objetos y comprobar los resultados con el punto b.

Problema 2. Persecución de dos objetos con mur (movimiento uniformemente rectilíneo)

Las siguientes tablas es el tiempo y posición de dos objetos en persecución con movimiento uniformemente rectilíneo:

Movimiento objeto 1. Posición inicial: -10 metros (m)

Tiempo (s)	Posición (m)
0	-10
1	-8,5
2	-7,0

3	-5,5
4	-4,0
5	-2,5
6	-1
7	0,50
8	2
9	3,5
10	5

Movimiento objeto 2. Posición inicial: -8 metros (m)

Tiempo (s)	Posición (m)
0	-8
1	-7
2	-6
3	-5
4	-4
5	-3
6	-2
7	-1
8	0
9	1
10	2

Realizar:

a. Con los datos de las dos tablas representar los movimientos gráficamente. Argumentar lo observado.

b. Observar la gráfica y determinar en qué posición se encuentran los objetos y en qué instante ocurre el encuentro.

c. Determinar algebraicamente dónde y cuándo se encuentran los objetos y comprobar los resultados con el punto b.
d. si el objeto se mueve con una velocidad constante de 10 m/s transcurrido 15 segundos sale en su persecución en la misma dirección y sentido otro objeto a una velocidad de 20 m/s ¿en qué distancia y tiempo se encuentran? Determinar algebraicamente y comprobar mediante la gráfica. Argumentar

Problema 3. Demanda y oferta de helado

La siguiente tabla proporciona la conducta de un consumidor y de un productor de helado:

Cantidad demandada Q_d	**Precio (p)**	**Cantidad ofertada Q_o**
10	20000	60
20	15000	50
30	10000	40
40	5000	30
50	2500	20
60	1000	10

Realizar:

a. Representar gráficamente la cantidad demanda y la cantidad ofertada con respecto al precio. Argumentar lo observado.
b. Determinar las ecuaciones de la demanda y de la oferta.
c. Determinar la cantidad de equilibrio y el precio. argumentar
d. Para controlar las diabetes el gobierno aumentó el precio del azúcar (un insumo) provocando que los vendedores ofrecieran menos helado, reduciendo la cantidad ofertada en un 20% y aumentando los precios en 50% al original. Manteniéndose igual la cantidad demandada. Realizar:

    i) Una nueva tabla ajustada a las nuevas condiciones.
    ii) Graficar la cantidad demanda y la cantidad ofertada con respecto al precio. Argumentar lo observado.
    iii) Determinar las ecuaciones de la demanda y de la oferta.
    iv) Determinar la nueva cantidad de equilibrio y el precio. argumentar

Problema 4. La ecuación de un proyectil

Juan está interesado en determinar la ecuación que describe la trayectoria de un proyectil en un simulador:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Afortunadamente dispone de algunos puntos claves de la trayectoria: (-1,-2), (1,-4) y (2,4).

Encontrar los coeficientes de la ecuación. Argumentar cada paso para llegar a la solución.

Problema 5: Encontrar el área del triángulo

Dos cuerpos en movimiento siguen las siguientes trayectorias:

Cuerpo1:

$$y - 2x = -4$$

Cuerpo 2:

$$4x + y = 20$$

Las trayectorias forman en el primer cuadrante un triángulo cuya base está en el eje x.

Determinar el área del triángulo. Argumentar el procedimiento.

Problema 6. Ejercicio de una gimnasta

Una gimnasta hace ejercicio en bicicleta y corre todos los días para mantenerse en forma. El lunes ella gasta $1\frac{1}{2}$ horas en cada una de esas actividades, recorriendo en total 20 km. El martes corre durante 15 minutos y monta bicicleta 45 minutos recorriendo en total 26 km. Se supone que su velocidad para correr y montar bicicleta no cambia de un día a otro. Determinar

a. Las incógnitas del problema
b. Las ecuaciones del sistema
c. ¿Cuáles son las velocidades que utiliza para correr y montar bicicleta? Argumentar
d. Comprobar las velocidades obtenidas en el punto c, con la representación gráfica. Analizar.

Problema 7. Mezclas

Un veterinario desea mezclar dos comidas para perro, Ringo que cuesta $ 6500 el kilogramo con Pedrigee de $8250 el kilogramo para obtener 40 kilogramos de una mezcla con valor de $ 7300 el kilogramo.

Determinar:

a. Las incógnitas del problema

b. Las ecuaciones del sistema

c. ¿cuántos kilogramos debe mezclar de cada comida? Argumentar

Problema 8. Encontrar el valor de a y b

Para los siguientes sistemas de ecuaciones las soluciones son las mismas, entonces encontrar ***a+b.***

$$\begin{Bmatrix} 3x - y = a \\ 2x + y = 24 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x + y = 5 \\ x - 3y = b \end{Bmatrix}$$

Anexo 4. Entrevista semiestructurada

INSTITUCIÓN EDUCATIVA ÁNGEL MARÍA PAREDES

ENTREVISTA

Objetivo:

Comprender cómo los estudiantes aprenden álgebra en un entorno de aula invertida.

Contestar:

a. ¿Describe cómo aprende desde casa los diferentes temas aprendidos de álgebra?

b. ¿Cómo comunica con sus compañeros y docente las inquietudes o la revisión de las posibles soluciones de los problemas propuestos?

c. ¿Qué tipos de recursos como videos, lecturas o ejercicios, ha utilizado para aprender los conceptos y algoritmos que requieren llevar a cabo la resolución de los problemas? ¿por qué?

d. ¿Puede proporcionar un ejemplo de un problema que haya resuelto utilizando material proporcionado por la docente o que le haya llamado la atención de internet ?,¿por qué?

e. ¿Ha enfrentado desafíos al comunicar sus pensamientos o preguntas al resolver los problemas? ¿Cómo los supera?

f. ¿Cómo siente que la comunicación ha contribuido a su comprensión de los temas aprendidos en casa y retroalimentados en clase?

g. ¿Cómo ha influido el trabajo en grupo en su capacidad para comprender y resolver estos problemas?

i. ¿Ha recibido retroalimentación de sus compañeros o docente en su proceso de aprendizaje? ¿Cómo ha sido esa retroalimentación y cómo la ha utilizado?

j. ¿Con los problemas trabajados en casa y en clase tuvo la oportunidad de hacer matemáticas?, describa y explique.

Anexo 5. Carpeta compartida. Audios y codificación axial escrita y oral de las guías de aprendizaje 1,2 y 3. (ver)