REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL PROCESO DE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en

Educación Matemática

Carlos Augusto Pabón Chipatecua

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL PROCESO DE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Carlos Augusto Pabón Chipatecua

Director de tesis:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Dr. Miguel Cruz Ramírez

Bogotá D.C.

2023

TABLA DE CONTENIDOS **PÁGINAS**

INTRODUCCIÓN

Existe una larga trayectoria investigativa que propugna por la introducción de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Correspondientemente, en diferentes escenarios los docentes de matemáticas han puesto en evidencia múltiples experiencias exitosas de aprendizaje a partir de actividades de resolución de problemas. Por tanto, la resolución de problemas es un enfoque consolidado y ampliamente estudiado e implementado en el ámbito de la Educación Matemática

El planteamiento de problemas, por su parte, ha sido considerado parte indisoluble del proceso de resolución de problemas. De acuerdo con Silver (1994), el planteamiento puede tener lugar antes, durante o después de la resolución de un problema. No obstante, en años recientes se ha venido desarrollando una perspectiva centrada en los procesos específicos del planteamiento de problemas, sin que esto signifique una supresión de la necesaria interrelación con la resolución de problemas.

La importancia del planteamiento de problemas ha sido destacada por distintos autores. El mismo Einstein afirmaba que la formulación de un problema interesante es a menudo más importante que su solución (Einstein e Infeld, 1938, citado por Cai, Hwang, Jiang y Silber, 2015)[1]. En contraste con esta idea, la escuela tradicional ha negado a los estudiantes la posibilidad de formular sus propias preguntas y se ha concentrado en buscar que sean capaces de responder a asuntos ajenos a sus intereses y necesidades.

Varios investigadores en Educación Matemática han destacado el impacto que la implementación del planteamiento de problemas puede causar en el aprendizaje de las matemáticas. En particular, English (1997) considera que el planteamiento de problemas:

[1] Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem posing research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. NY: Springer, p. 5.

- "*Promueve un espíritu de curiosidad y genera un pensamiento más diverso y flexible.*
- *Anima a los niños a asumir una mayor responsabilidad por su aprendizaje.*
- *Alerta tanto a maestros como a niños sobre concepciones erróneas y preconceptos.*
- *Mejora la resolución de problemas de los niños, refuerza y enriquece conceptos básicos.*
- *Elimina puntos de vista erróneos sobre la naturaleza de las matemáticas.*
- *Disipa temores y ansiedades comunes sobre las matemáticas*"[2].

Dado que el enfoque en planteamiento de problemas aún se encuentra en desarrollo, este es un campo con un amplio rango de posibilidades tanto teóricas como prácticas. De acuerdo con Cruz (2019) *"… corresponde a la Educación Matemática un importante papel, en el sentido de sistematizar buenas prácticas y también de ahondar en las bases teóricas que sirven de fundamento a la enseñanza y el aprendizaje del planteo de problemas en el contexto escolar*"[3].

Pese al desarrollo relativamente reciente del enfoque de planteamiento de problemas, es interesante notar que existe un libro considerado clásico en la materia. Se trata de *The Art of Problem Posing* (Brown y Walter, 2005). En este libro, los autores exponen una estrategia conocida en la literatura de planteamiento de problemas como *"¿qué si no?"*.

Por otro lado, en revistas especializadas se ha venido incrementando la publicación de artículos que profundizan en aspectos del planteamiento de problemas en diferentes niveles educativos. Por ejemplo, el número 3 del volumen 12 de la revista Teaching Children Mathematics (año 2005) titula su foco temático *Posing and Solving Problems*. La revista Educational Studies in Mathematics lanza en el año 2013 el número 1 del volumen 83 titulado *Problem Posing in Mathematics Teaching and Learning: Establishing a*

---

[2] English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing Classroom. *Teaching Children Mathematics*, *4*(3), p.173

[3] Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), p. 469.

Framework for Research y en el 2020 el número 3 del volumen 105 centra su atención en el afecto en planteamiento de problemas matemáticos. En el año 2019, la International Journal of Educational Research también publica un número dedicado exclusivamente al planteamiento de problemas en Educación Matemática. Por su parte, la revista ZDM – Mathematics Education tuvo como foco temático del número 4 del volumen 53 del año 2021 la investigación empírica sobre resolución y planteamiento de problemas.

Adicionalmente, existen recientes compilaciones de estudios que enfatizan en el planteamiento de problemas: *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (Singer, Ellerton y Cai, 2015) y *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (Felmer, Pehkonen y Kilpatrick, 2016).

El enfoque ha sido abordado en eventos de trascendencia internacional en el campo de la Educación Matemática como el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), el Simposio de Matemática y Educación Matemática (MEM 2022 y 2023), entre otros. En estas reuniones se han presentado experiencias investigativas que reflejan las dificultades y avances teóricos y prácticos que este enfoque ha tenido al ser implementado en diferentes niveles educativos.

El ICME es considerado el más importante congreso en Educación Matemática a nivel internacional. Es de destacar que en la edición número 13 de dicho evento que tuvo lugar en Hamburgo en 2016, el TSG 19 se titulaba *Problem solving in Mathematics Education*. En el ICME 14, que tuvo lugar en Shanghai en 2021, el TSG 17 se denomina *Problem posing and solving in Mathematics Education*. Esta es una evidencia clara del creciente interés mundial en la comunidad de Educación Matemática por el desarrollo de investigaciones sobre planteamiento de problemas.

Concretamente, según la descripción del TSG 19 disponible en la página web del ICME 13, al respecto del planteamiento de problemas se proponen las siguientes preguntas orientadoras: *"¿Qué tipos de tareas son importantes para fomentar la formulación y resolución de problemas por parte de los estudiantes? ¿Cómo se relaciona el planteamiento de problemas con la resolución de problemas? ¿Cómo se debería incluir en el currículum y los entornos de aprendizaje y cómo evaluar las actividades de planteamiento de problemas de los estudiantes?"*[4].

En el TSG 17 propuesto para el ICME 14, casi la totalidad de las preguntas orientadoras hace alguna referencia al planteamiento de problemas. Se destacan a continuación las que se asocian de manera más directa con la presente tesis:

- *"¿Cómo se han utilizado diferentes marcos conceptuales para explicar el desarrollo de las competencias matemáticas de planteamiento de problemas (o resolución de problemas)?*
- *¿Cómo se ha estudiado la relación entre resolución de problemas y planteamiento de problemas en la Educación Matemática y qué se ha aprendido?*
- *¿Cuáles son las características claves de los modelos o enfoques de instrucción para las actividades eficaces de planteamiento y resolución de problemas en el aula de matemáticas?*
- *¿Cuáles son los modelos o enfoques efectivos para ayudar y apoyar a los maestros a incorporar el planteamiento de problemas y la resolución de problemas en su enseñanza de las matemáticas?"*[5].

[4] Topic Study Group (TSG). International Congress on Mathematical Education, ICME13. (2016). Recuperable el 29 de octubre de 2019 de la URL: *http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_19.pdf*
[5] Topic Study Group (TSG). International Congress on Mathematical Education, ICME14. (2020). Recuperable el 29 de octubre de 2019 de la URL: *https://www.icme14.org/ueditor/jsp/upload/file/20190121/1548052369852001597.pdf*

En Colombia, en los Simposios MEM 2022 y 2023 se aborda en conferencias plenarias el planteamiento de problemas en la escuela por investigadores como Malaspina (2022, 2023); Cai (2023) y Silver (2023). En sus conferencias, estos investigadores apuntan a temas como las fases, estrategias y usos didácticos del planteamiento de problemas y su implementación en procesos de modelación matemática. Además, hacen referencia a lo que las investigaciones expresan sobre la enseñanza de la matemática a través del planteamiento de problemas. Mason (2021) en el Seminario de Educación Matemática expone su estudio sobre el planteamiento de problemas en diversos contextos, con énfasis en el papel que desempeñan las imágenes mentales.

Un aspecto de los enfoques basados en problemas que se ha considerado particularmente poderoso es la capacidad de involucrar a los estudiantes de manera activa en el quehacer matemático. Esto genera autonomía en los estudiantes y aumenta la confianza en sus capacidades, así como subvierte el orden tradicional según el cual el docente es el dueño del saber, siendo el estudiante receptor pasivo del mismo.

En este mismo sentido, Ernest (1991, citado por Silver, 1994) afirma que una herramienta para desafiar las rígidas jerarquías asociadas a las concepciones convencionales de las matemáticas, del currículo y de la aptitud matemática es la pedagogía orientada a la indagación con énfasis en resolución y planteamiento de problemas.

Cai (2019) hace notar que el enfoque de resolución de problemas ha atravesado por tres énfasis investigativos: como constructo, como variable y como intervención. Este último énfasis es, de acuerdo con el autor, evidencia de su madurez. En el caso del planteamiento de problemas, Cai (2019) señala que, si bien hay trabajos desarrollados con base en cada uno de los tres énfasis, el último es aún incipiente y hay múltiples interrogantes aún por responder. Con esto se reafirma el hecho de que la investigación en planteamiento de problemas matemáticos es un campo aún joven y con un inmenso potencial para el futuro.

Por otra parte, en Colombia los documentos oficiales del Ministerio de Educación, en particular los estándares básicos de competencias en matemáticas apuntan que, entre los procesos generales presentes en toda la actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente, están *"… formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas*"[6].

A partir de las anteriores consideraciones, se aplica como parte de la fundamentación del presente estudio una encuesta a docentes que indaga acerca de su familiaridad con el planteamiento de problemas (ver Anexo 1). Se encuentra, en términos generales que, aunque los docentes encuestados implementan con sus estudiantes actividades basadas en problemas, predomina la resolución sobre el planteamiento de problemas (Anexo 2).

Asimismo, se indaga acerca de las limitaciones que los docentes evidencian en sus aulas de clase en el aprendizaje de la geometría (ver Anexo 1) y se implementa un estudio exploratorio, consistente en una actividad inicial de planteamiento de problemas con estudiantes de secundaria del Colegio San Isidro Sur Oriental en Bogotá (Anexo 3). En ambos casos, se logra evidenciar limitaciones en los siguientes aspectos (Anexos 2 y 4):

- Reconocimiento de los objetos que pertenecen a un concepto matemático.
- Comprensión sobre el proceso de resolución de problemas.
- Rigor en la notación y en la argumentación.
- Manejo de representaciones visuales.
- Habilidades y estrategias en el planteamiento de problemas.

[6] Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional, p. 5.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo contribuir al proceso de planteamiento de problemas de modo que se propicie el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de secundaria?

Se precisa como **objeto de investigación** el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de un enfoque basado en problemas a nivel de educación básica secundaria. Se plantea como **objetivo general** contribuir al desarrollo de un proceso robusto de planteamiento de problemas que propicie el desarrollo del pensamiento geométrico, basado en un modelo didáctico que enfatiza en situaciones retadoras, en estudiantes de secundaria de una institución educativa oficial de la ciudad de Bogotá.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** es el proceso de planteamiento de problemas para desarrollar el pensamiento geométrico en el nivel secundario.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

- ¿Cuáles investigaciones contribuyen al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, específicamente el planteamiento de problemas a través del pensamiento geométrico en el nivel secundario?
- ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso del planteamiento de problemas a través del pensamiento geométrico en el nivel secundario?
- ¿Cómo concebir un modelo didáctico para favorecer el proceso del planteamiento de problemas a través del pensamiento geométrico en el nivel secundario?

- ¿Cómo analizar la validez del modelo didáctico y del sistema de actividades para favorecer el proceso del planteamiento de problemas a través del pensamiento geométrico en el nivel secundario?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis se proponen las siguientes **tareas de investigación**:

- Elaborar el estado del arte sobre el planteamiento de problemas matemáticos, en particular en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel de educación básica secundaria.
- Determinar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de planteamiento de problemas en el desarrollo del pensamiento geométrico a nivel de educación básica secundaria.
- Elaborar un modelo didáctico para el proceso de planteamiento de problemas que contribuya al desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de secundaria.
- Construir un sistema de actividades sustentado en el modelo didáctico.
- Validar el modelo didáctico y el sistema de actividades.
- Aplicar y analizar los resultados del sistema de actividades.

El **aporte práctico** consiste en un sistema de actividades basadas en el planteamiento de problemas orientadas a favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de secundaria.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico en el cual se manifiestan diferentes interacciones entre procesos del pensamiento geométrico y el planteamiento de problemas. La estructura del modelo permite comprender estos procesos en conjunto y favorece la implementación de actividades de planteamiento de problemas, contribuyendo al desarrollo del pensamiento geométrico de estudiantes de secundaria.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el primer capítulo se presenta el estado del arte correspondiente a la temática central de la presente tesis, la cual se ha dividido en tres epígrafes: investigaciones sobre el enfoque de planteamiento de problemas en Educación Matemática, modelos para el planteamiento de problemas e investigaciones sobre el planteamiento de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico, en el cual se han considerado los siguientes aspectos: pensamiento geométrico, teoría de la resolución de problemas, planteamiento de problemas en la escuela y la visualización matemática. El tercer capítulo expone los aspectos metodológicos del presente trabajo. En este se precisan el tipo de investigación, el contexto, la población, la muestra, los métodos, las técnicas e instrumentos utilizados y las fases de la investigación.

El cuarto capítulo hace explícitos los aportes teórico y práctico de la presente investigación. En el aporte teórico, se presenta el modelo didáctico para el planteamiento de problemas geométricos, indicado anteriormente. En el aporte práctico se exponen las actividades de aula elaboradas a partir del modelo didáctico en cuestión.

El quinto capítulo centra su atención en los resultados obtenidos a lo largo del proceso investigativo, desde la fundamentación del problema hasta la implementación de actividades prácticas en el aula de secundaria.

Se presentan cuatro anexos correspondientes a los instrumentos de implementación de la encuesta a docentes y sus resultados, el estudio exploratorio realizado con estudiantes de secundaria, la entrevista a exolímpicos, la entrevista a expertos y la encuesta de satisfacción.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En consonancia con la naturaleza del problema de investigación propuesto, se presentan a continuación algunos trabajos en Educación Matemática que forman parte del estado del arte en planteamiento de problemas. En primera instancia, se consideran trabajos que destacan la relevancia del planteamiento de problemas en Educación Matemática desde una perspectiva general. Seguidamente, se detallan diferentes modelos teóricos que han sido desarrollados en el estudio de los procesos propios del planteamiento de problemas. Finalmente se consideran trabajos de investigación que abordan la implementación del enfoque de planteamiento de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

1.1. Investigaciones sobre el enfoque de planteamiento de problemas en Educación Matemática

1.1.1. Problem formulating: Where do good problems come from?[7]

La investigación realizada por Kilpatrick (1987) presenta algunos resultados en actividades de formulación de problemas, a partir de situaciones cotidianas que involucran la modelación matemática con estudiantes de secundaria. Así, se destaca el hecho de que ellos son capaces de formular buenos problemas, contradiciendo la idea generalizada de que éstos pueden emanar de los libros de texto o de los docentes.

El autor plantea algunas ideas preliminares acerca de las estrategias que se pueden utilizar en los procesos de formulación de problemas. Algunas de estas son: asociación, analogía, generalización-particularización, contradicción, entre otras.

[7] Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Por otro lado, Kilpatrick expone algunos interrogantes para estudios posteriores. Por ejemplo, se plantea si se puede promover en los estudiantes la disposición creativa y el hábito de encontrar problemas o si las habilidades de formulación de problemas deben ser enseñadas explícitamente o por descubrimiento. Se pregunta además qué procesos intervienen en la formulación de problemas, cómo interactúa la formulación de problemas con la resolución de problemas o cómo debe ser la evaluación de actividades de formulación de problemas.

Entre otras consideraciones, el autor señala que no basta introducir a los estudiantes en un ambiente rico en problemas matemáticos. Este tipo de ambiente se puede potenciar mediante la intervención del docente, quien debe animar la exploración de ideas en los estudiantes. Asimismo, se destaca el trabajo grupal como contexto natural para la formulación de problemas. Además, se reconoce la importancia del uso de computadores para explorar variaciones, identificar patrones, visualizar teoremas, etc.

El estudio de Kilpatrick (1987) proporciona elementos fundamentales para implementar un enfoque en planteamiento de problemas. Entre estos elementos se encuentran los tipos de procesos que desarrollan los estudiantes y los interrogantes que surgen al estudiarlos, los cuales son necesarios para el desarrollo de la presente tesis.

1.1.2. Fostering creativity through instruction rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing[8]

La investigación realizada por Silver (1997) considera irónico el contraste entre la creatividad inherente a la actividad del matemático y su desconocimiento en el ámbito escolar. El autor expone entonces dos visiones en torno a la creatividad. La primera la considera propia de individuos especiales (“genios”), quienes de manera repentina alcanzan momentos de inspiración. La segunda la asocia con un

[8] Silver, E.A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *29*(3), 75-80.

conocimiento profundo y sensible de dominios de contenido, y la considera susceptible de influencias instruccionales. Esta segunda visión sugiere que es posible desarrollar la creatividad en una población general, no exclusivamente en individuos excepcionales.

El autor destaca la relación entre la creatividad y los procesos de planteamiento y resolución de problemas. Profundiza en tres aspectos: la *fluidez*, la *flexibilidad* y la *originalidad*. En general, Silver precisa actividades asociadas a estas tres características de la creatividad, tanto para la resolución como para el planteamiento de problemas.

Se concluye que las características de la creatividad se evidencian en el proceso de planteamiento y resolución de problemas, especialmente en su interacción. De igual manera se comparte la concepción de una creatividad susceptible de ser desarrollada en los estudiantes. Esto es consistente con la concepción de un aprendizaje activo de las matemáticas, presupuesto esencial de la presente tesis.

1.1.3. Assessing students' mathematical problem posing[9]

Silver y Cai (2005) hacen referencia a dos formas de desarrollar el planteamiento de problemas en el aula. La primera es asumirlo como medio para el aprendizaje de conceptos y habilidades. La segunda es considerarlo objeto de la instrucción, es decir, que el fin de ésta sea desarrollar las habilidades para plantear problemas. Asociados a estas dos maneras de considerar el planteamiento de problemas, existen los respectivos tipos de evaluación: la evaluación *con* planteamiento de problemas y la evaluación *de* planteamiento de problemas.

A continuación, se enuncian dos ejemplos presentados por los autores. El primero se ajusta a una evaluación con planteamiento de problemas: "*Plantea problemas que puedan resolverse usando el mismo*

[9] Silver, E. y Cai, J. (2005). Assessing Students' Mathematical Problem Posing. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 129-135.

enunciado de división: $540 \div 40 = ?$*. ¿Cuántos problemas diferentes puedes plantear y resolver? (Dos problemas serán diferentes si tienen diferentes respuestas)*". El segundo ejemplo corresponde a una evaluación de planteamiento de problemas. "*Ann tiene 34 canicas, Billy tiene 27 y Chris, 23. Escribe y resuelve tantos problemas como puedas usando esta información*"[10].

Adicionalmente, Silver y Cai (2005), proponen tres criterios generales de evaluación para el planteamiento de problemas:

- Cantidad: referente al número de respuestas generadas.
- Originalidad: presencia de respuestas que resultan atípicas
- Complejidad: comprende distintos aspectos como la sofisticación de las relaciones matemáticas inmersas, la dificultad y la complejidad lingüística.

El trabajo en cuestión resulta de relevancia para la presente tesis, dado que señala la importancia de definir claramente el papel del planteamiento de problemas en el proceso de evaluación. Asimismo, proporciona criterios para tener en cuenta al momento de generar procesos de valoración del trabajo de los estudiantes.

1.1.4. Characteristics of Problem Posing of Grade 9 students on geometric tasks[11]

En este trabajo se analizan las características individuales del planteamiento de problemas de 480 estudiantes de grado 9 de tres escuelas secundarias en Singapur. El análisis gira en torno a las siguientes situaciones:

- "*Escribe un problema tal que la respuesta final sea 60°.*

---

[10] Silver, E. y Cai, J. (2005). Assessing Students' Mathematical Problem Posing. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 129-135.
[11] Chua, P. H. y Wong, K. Y. (2012). Characteristics of Problem Posing of Grade 9 students on geometric tasks. En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 202-208). Singapore: MERGA.

- *Una cabra está dentro de un cercado rectangular de 60 m por 40 m en una granja. Es atada a un poste en A (una esquina del rectángulo) por una cuerda de 30 m la cual no puede estirarse*"[12].

Se procede a analizar únicamente los problemas resolubles. Estos se codifican según los siguientes criterios:

- Tipo de problema: "relacional" o "de requerimiento directo".
- Información del problema: "edición de información", "adición de objeto", "sobre-condicionamiento" y "supuesto implícito".
- Tipo de solución: "multipaso" y "uso de álgebra".
- Temática: según el grado de escolaridad.

Este trabajo estudia las relaciones entre los distintos criterios usados para clasificar los problemas obtenidos a partir de cada situación. Esto resulta de interés para la presente tesis pues sugiere ideas acerca de cómo organizar la información que se obtiene de la aplicación de actividades de planteamiento de problemas.

1.1.5. Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead[13]

El estudio realizado por Silver (2013) está dedicado especialmente al planteamiento de problemas y con base en ellos sugiere algunas direcciones para desarrollar futuros trabajos de investigación. Destaca el progresivo interés en este campo a nivel internacional. De igual manera evidencia el planteamiento de problemas en los documentos de reforma curricular.

---

[12] Chua, P. H. y Wong, K. Y. (2012). Characteristics of Problem Posing of Grade 9 students on geometric tasks. En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 202-208). Singapore: MERGA. p. 202 y 203.
[13] Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 157-162.

En este estudio se pueden encontrar diversas experiencias y actividades de planteamiento de problemas y propone algunos interrogantes como: ¿qué semejanza o diferencia existe entre el problema planteado por el docente para sus estudiantes, del docente para sí mismo, o de los estudiantes para sus compañeros? o ¿qué relación hay entre cada uno de estos casos y el hecho de considerar esta actividad como parte de un proceso de resolución o una reformulación creativa?

El autor muestra características específicas de las actividades de planteamiento de problemas, en las cuales resalta la importancia de la motivación al momento de plantear problemas. Estos pueden ser planteados por el docente para sus estudiantes, por los estudiantes para sus compañeros, o por los estudiantes para sí mismos.

Por otro lado, Silver (2013) señala algunos de los esquemas de enseñanza, así como las elecciones metodológicas que varios investigadores han utilizado en sus estudios. Este es un asunto relevante para esta tesis porque provee ideas acerca de cómo implementar una serie de actividades de planteamiento de problemas en el aula. En general, el autor invita a reflexionar acerca de los procesos subyacentes al planteamiento de problemas, como también reconoce los que están presentes en la ejecución práctica de las actividades.

1.1.6. Problem posing research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions[14]

El estudio de Cai, Hwang, Jiang y Silber (2015) hace énfasis en el desarrollo de diez preguntas representativas en investigación sobre planteamiento de problemas. A continuación, se referencian algunas preguntas consideradas importantes para el desarrollo de esta tesis:

[14] Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem posing research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). NY: Springer.

- ¿Qué sabemos sobre los procesos cognitivos del planteamiento de problemas?
- ¿Son capaces los docentes y estudiantes de plantear problemas matemáticos importantes?
- ¿Cómo se relacionan las habilidades para plantear problemas con las habilidades para resolver problemas?

El análisis de esta investigación permite identificar los avances que el planteamiento de problemas ha tenido hasta el momento y sugerir algunos aspectos indispensables para su estudio e implementación en el aula.

1.1.7. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research[15]

En este estudio los autores señalan tres actividades intelectuales de los docentes: planteamiento de problemas propios, predicción acerca del tipo de problemas que sus estudiantes pueden plantear y diseño de tareas para que sus estudiantes planteen problemas.

Intentando abarcar distintas posturas, los autores proponen la siguiente definición: "… *por planteamiento de problemas en Educación Matemática nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que involucran o apoyan a los docentes y estudiantes a formular (o reformular) y expresar un problema o tarea en función de un contexto particular (al que nos referimos como contexto o situación del problema)*"[16].

[15] Cai, J. y Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001*

[16] Cai, J. y Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001 p. 2.

De acuerdo con Koichu y Kontorovich (2013, citado por Cai y Hwang, 2019), combinar la exploración y la resolución con el planteamiento de problemas contribuye a mejorar el desempeño de los docentes al momento de crear nuevos problemas.

Por otro lado, Koichu (2019, citado por Cai y Hwang, 2019) considera que entrar en contacto con el planteamiento de problemas de buena calidad desarrollado por otros individuos, es un importante factor para el desempeño de los estudiantes en este proceso. Otros factores importantes son la introducción en contextos matemáticamente retadores y la aplicación de estrategias utilizadas por los matemáticos. Se han de tener en cuenta los anteriores aspectos en la implementación de las actividades de aula, ya que inciden positivamente en el planteamiento de problemas de los estudiantes de secundaria.

Los autores refieren tres perspectivas del planteamiento de problemas matemáticos: como constructo, como variable y como intervención. En el primero, las metodologías pueden incluir observaciones de los individuos o grupos, entrevistas, análisis de discurso, etc. En el segundo, se busca identificar relaciones entre planteamiento de problemas y otras variables. En el tercero, se hacen evaluaciones posteriores a la intervención para medir sus efectos.

Entre otros aspectos, se enuncia la idea de aprender a “enseñar a través de planteamiento de problemas” que implica una transformación de las clases de matemáticas por parte del docente. También se resalta la necesidad de que adquiera experiencia en el diseño de tareas con base en el planteamiento de problemas. Estas consideraciones se constituyen en recomendaciones prácticas para la implementación de actividades de planteamiento de problemas con estudiantes de secundaria.

1.1.8. La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas[17]

En Falk (2020) se efectúa un análisis de las motivaciones que subyacen al planteamiento de problemas en las diferentes etapas de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas. Cada problema incluye una discusión acerca del tipo de construcciones o razonamientos esperados en su proceso de resolución. Adicionalmente se exponen ideas asociadas con la caracterización del pensamiento que se busca desarrollar en el estudiante.

A continuación, un ejemplo de problema planteado en este contexto: "*Sean* x,y,z *enteros consecutivos tales que* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{45}$. *¿Cuál es el mayor valor que puede tomar* $x + y + z$*?*"

En relación con este problema se indica que tiene su origen en un problema rutinario de sumas de fracciones. Al plantearse en términos de una desigualdad se convierte en un problema interesante. Falk (2020) observa que, aunque la resolución del problema requiere el análisis de una operación entre fracciones, esto ha de tener lugar a partir de planteamientos propios del estudiante y no como respuesta a una petición directa. Se destaca aquí el privilegio dado al pensamiento autónomo y al análisis.

El trabajo de Falk (2020) se constituye en un referente a partir de una experiencia concreta de larga trayectoria, las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas lideradas por la Universidad Antonio Nariño. Dado el hecho de que involucran de forma directa el proceso de planteamiento de problemas, este estudio aporta una perspectiva práctica en el diseño de actividades de aula en el desarrollo de la presente tesis.

[17] Falk, M. (2020). La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. *Espacio Matemático 1*(1), 1-18.

1.2. Modelos para el planteamiento de problemas

1.2.1. Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática[18]

La tesis doctoral de Cruz (2002) propone una estrategia metacognitiva para el proceso de formulación de problemas matemáticos. El trabajo muestra cómo dicha estrategia favorece el proceso en el contexto de la formación de docentes de matemáticas.

La estrategia en cuestión se enmarca en un modelo para la resolución de problemas, pues se interpreta la formulación como un caso especial del proceso de resolución. Asimismo, se concibe como parte de un problema más general (metaproblema) que involucra las etapas de formulación, resolución y adecuación de un problema.

La estrategia generaliza diversas técnicas de formulación de problemas que aparecen en la literatura, un ejemplo de las cuales es la estrategia "¿qué si no?" de Brown y Walter. La Figura 1 muestra que la estrategia es no lineal.

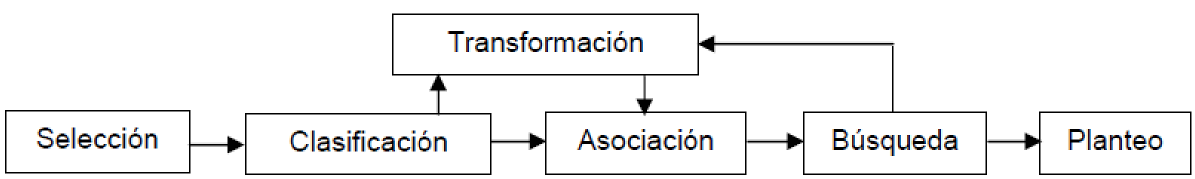


Figura 1. Estrategia metacognitiva para la formulación de problemas (Cruz, 2002)

La estrategia comprende las etapas de selección del objeto, clasificación de los componentes, transformación del objeto, asociación de conceptos, búsqueda de dependencias y finalmente planteo de la pregunta (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Se considera este trabajo de gran

[18] Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática.* (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

valor para la presente tesis, pues proporciona una mirada general del proceso de planteamiento de problemas que aporta conceptualmente a su comprensión, asunto primordial en el desarrollo de la tesis.

1.2.2. Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: using a Problem-Posing framework with prospective Mathematics teachers[19]

En este artículo se aplica un marco para el planteamiento de problemas mediante la modificación de un problema dado. Uno de los aspectos que destaca el autor es la importancia de la interacción entre planteamiento y resolución de problemas. El trabajo parte del siguiente problema geométrico: ¿qué propiedad especial tienen las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles?

Inicialmente se prueba una conjetura en la cual se afirma que dichas medianas son congruentes. A continuación, se busca la generación de nuevos problemas a partir de éste. Con base en los resultados, el autor afirma que entre los procesos matemáticos fundamentales en el planteamiento de nuevos problemas están la demostración, la inversión, la especialización, la generalización y la extensión.

La inversión se refiere al planteo del problema recíproco ("si dos medianas de un triángulo son congruentes, sus lados correspondientes son congruentes"). La especialización corresponde a un problema particular ("las medianas de un triángulo equilátero son congruentes"). Un problema, producto de una generalización es "en cualquier triángulo la mediana más larga corresponde al lado más corto y viceversa". En la extensión, el problema se lleva a un caso que no es particular, pero tampoco más general, por ejemplo, un triángulo rectángulo.

Estos procesos se relacionan en un marco propuesto por el autor, el cual se presenta en la Figura .

[19] Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: using a Problem-Posing framework with prospective Mathematics teachers. *The Mathematics Educator 17*(2), 15–23.

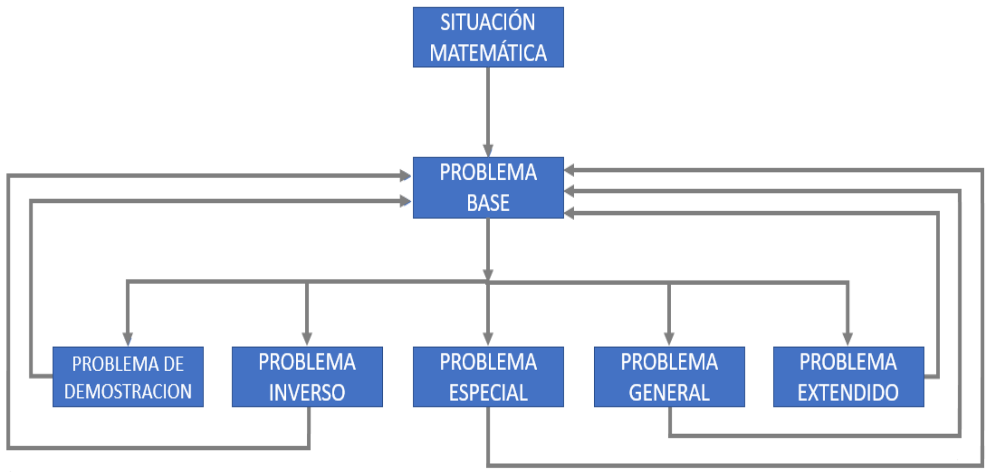


Figura 2. Marco para el planteamiento de problemas según Contreras (2007).

Para los propósitos de la presente tesis, el estudio es relevante, ya que brinda al investigador nuevas posibilidades sobre la articulación de las distintas fases de un proceso de planteamiento de problemas.

1.2.3. An empirical taxonomy of Problem Posing processes[20]

El trabajo de Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman (2005) se enfoca en la construcción, descripción y puesta a prueba de un modelo teórico para el planteamiento de problemas. En la construcción de dicho modelo, los autores acuden a procesos que se hallan en la literatura. La validación del modelo se efectúa usando cinco pruebas de planteamiento de problemas en estudiantes de sexto grado.

Los procesos de planteamiento de problemas que se introducen en el modelo en cuestión son: edición, selección, comprensión y traducción de información cuantitativa. Cada uno de estos procesos está vinculado a alguna tarea de planteamiento de problemas, propuesta a los estudiantes.

[20] Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* *37*(3), 149–158.

El proceso de edición se asocia a tareas que proponen plantear un problema sin restricciones, a partir de información o sugerencia dada. El proceso de selección se relaciona con tareas de planteamiento de problemas que se ajusten a una respuesta específica dada. El proceso de comprensión tiene que ver con tareas en las se requiere plantear problemas a partir de ecuaciones o cálculos previamente proporcionados. El proceso de traducción se asocia con tareas que involucran plantear problemas o preguntas a partir de gráficas, diagramas o tablas.

Por ejemplo, una tarea para el proceso de selección puede ser: "*Escribe una pregunta para la siguiente situación tal que la respuesta al problema sea '385 lápices': Alex tiene 180 lápices mientras que Chris tiene 25 lápices más que Alex"*[21].

Paralelamente, Christou et al. (2005) elaboran una clasificación de los estudiantes, con base en las respuestas a las pruebas aplicadas. De esta manera, se definen: la categoría 1, de estudiantes que son capaces de responder sólo las tareas de comprensión; la categoría 2, de estudiantes capaces de responder tareas de comprensión y traducción; y la categoría 3 que comprende a los estudiantes que son capaces de responder todos los tipos de tareas.

Este trabajo investigativo es un referente en el análisis de los procesos que tienen lugar en el desarrollo de actividades de planteamiento de problemas. Asimismo, la investigación provee elementos para establecer relaciones entre dichos procesos y el tipo de tareas que se pueden proponer a los estudiantes.

[21] Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37*(3), 149–158.

1.2.4. An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups[22]

El trabajo de Kontorovich, Koichu, Leikin y Berman (2012) presenta un modelo exploratorio para analizar la complejidad del planteamiento de problemas matemáticos por parte de los estudiantes. Los autores toman como base el modelo propuesto por Schoenfeld, el cual considera el planteamiento de problemas como un caso particular de la resolución de problemas.

Consideran cuatro facetas ya estudiadas en otras investigaciones: organización de tareas, base de conocimiento, heurísticas de planteamiento de problemas y dinámicas de grupo. Adicionalmente los autores introducen una nueva faceta: las consideraciones individuales de aptitud.

La investigación se basa en un problema sobre trayectorias de bolas de billar. Se presenta la trayectoria de una bola en dos distintas mesas de billar como se muestra en la Figura 3 y se solicita al estudiante plantear tantos problemas matemáticos interesantes como pueda, indicando que los demás participantes deben resolverlos.

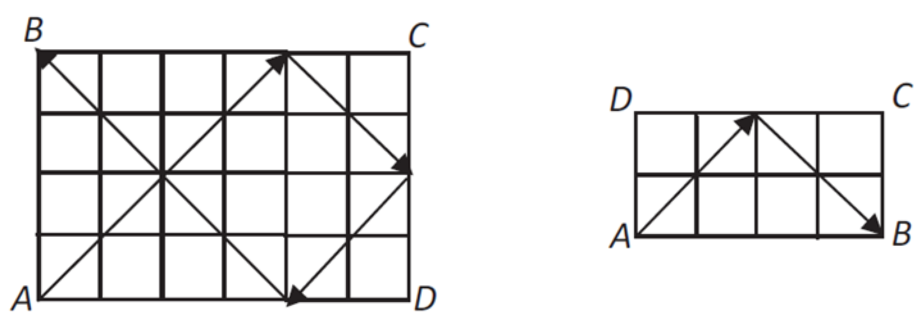


Figura 3. Problema de trayectorias en mesas de billar

[22] Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. y Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior 31*(1), 149–161.

El modelo propuesto permite analizar el proceso de planteamiento de problemas a partir del desarrollo de la tarea y considera diversos aspectos del proceso (ver Figura).

Figura 4. Modelo para planteamiento de problemas según Kontorovich, Koichu, Leikin y Berman (2012)

El análisis permite observar que un contexto de planteamiento de problemas en el que se da la posibilidad de emplear consideraciones de aptitud (de acuerdo con la Figura 4) puede conducir a mejorar la calidad de los resultados.

Este modelo relaciona la diversidad de las variables que se tienen en cuenta al analizar los episodios de planteamiento de problemas en los estudiantes. Considerar dicha variedad, teniendo en cuenta los propósitos investigativos y de aprendizaje, es muy importante al momento de diseñar un modelo didáctico y llevarlo a la práctica.

1.2.5. Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas[23]

El estudio de Malaspina (2016) enfatiza la importancia de examinar y resolver problemas creados individual o grupalmente como parte de un trabajo de dinamización de la clase de matemáticas. En dicho estudio se expone el desarrollo de una serie de talleres con docentes de matemáticas a quienes inicialmente se les hace una presentación breve sobre el significado de creación de problemas considerando cuatro elementos básicos: información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

A partir de allí se presentan problemas obtenidos por los docentes al modificar un problema dado. El autor los clasifica en dos tipos: los Problemas Pre, en los que su solución contribuye al problema original haciendo énfasis en el proceso de solución; y los Problemas Pos, en los que la importancia radica en la manera de encontrar la solución, haciéndolos más retadores y complejos.

El autor presenta distintos ejemplos de planteamiento de problemas Pre y Pos obtenidos por variación. Este tipo de actividades propicia la generación de una dinámica matemática con resultados muy diversos, que permite desarrollar el pensamiento matemático, hacer matemáticas e iniciar a los estudiantes en la investigación matemática.

También presenta la creación de problemas por elaboración a partir de situaciones no vinculadas con un problema en particular. Este proceso reconoce la creatividad para seleccionar información en la creación de un nuevo problema.

Se concluye que la creación de problemas es una posibilidad para hacer matemáticas en un contexto educativo. Esto concuerda con una perspectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática

[23] Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), 321-331.

en la que los estudiantes pasan de ser receptores de información a sujetos activos en la actividad matemática del aula, criterio que se comparte en esta tesis.

1.2.6. Indagación, creación y resolución de problemas de matemáticas[24]

La conferencia de Malaspina (2020) expone la interacción dinámica entre tres procesos: indagar, crear y resolver problemas. Se destaca la intervención de la pregunta en cada uno de estos procesos. Así, en la indagación se hacen preguntas, en la creación se precisan preguntas y en la resolución se responden preguntas.

Con respecto a la indagación, se entiende como la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas. El autor presenta un ejemplo de actividad de creación de problemas en un ambiente de indagación. Se entrega a un grupo de niños palillos de diferente longitud y se les sugiere realizar la siguiente secuencia:

- Escribir ejemplos de actividades relacionadas con triángulos que se pueden hacer con los palillos.
- Escribir preguntas sobre las actividades ideadas.
- Utilizar las preguntas anteriores para crear problemas sobre triángulos.

El autor distingue entre los problemas creados por variación de un problema dado y los problemas creados por elaboración a partir de una situación o requerimiento. Asimismo, plantea estrategias para la creación de problemas en cada uno de estos casos aplicados en la matemática escolar. Igualmente, plantea estrategias análogas para la formación de docentes que involucran la indagación didáctico-matemática.

[24] Malaspina, U. (2020). Indagación, creación y resolución de problemas de matemáticas. En Seminario de Educación Matemática. Programa de doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Las ideas presentadas en la conferencia de Malaspina (2020) brindan herramientas para el desarrollo de actividades centradas en planteamiento de problemas y permite reconocer estrategias para el planteamiento de problemas en contextos escolares y de formación de docentes.

1.3. Investigaciones sobre el planteamiento de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría

1.3.1. Problem posing in a dynamic geometry environment and the development of mathematical insights[25]

El trabajo de Shriki y Lavy (2012) reporta una interacción entre el uso de un software de geometría dinámica y la estrategia "¿qué si no?" en actividades de planteamiento de problemas con docentes. Los autores resaltan esta interacción puesto que proporciona una oportunidad para que los estudiantes se hagan responsables de su propio aprendizaje. Es de anotar que los participantes en el estudio carecían de experiencia previa tanto en planteamiento de problemas como en el uso de este tipo de tecnologías.

A lo largo del curso los docentes documentan su trabajo en un portafolio en el cual plasman intentos fallidos, indecisiones, pensamientos, ideas valiosas, etc. Shriki y Lavy (2012) destacan con ello la importancia de poner en evidencia la faceta experimental de las matemáticas.

Un ejemplo relevante aparece en el portafolio de Gail, uno de los docentes, quien hace una exploración a partir del segmento medio de un triángulo. Decide dividir dos lados no en dos sino en tres partes, mide la razón entre el área del triángulo original y el triángulo menor y nota que se puede demostrar que dicha razón es 9. A continuación, traza una recta paralela a uno de los lados, aplica sobre ella la función de

[25] Shriki, A. y Lavy, I. (2012). Problem posing in a dynamic geometry environment and the development of mathematical insights. *The International Journal of Learning*, *18*(5), 61-70.

arrastre propia del software y observa el valor que va tomando la razón en cuestión. La relación entre las dos áreas no parece clara hasta que Gail hace una gráfica y encuentra una parábola.

Shriki y Lavy (2012) destacan en su discusión final que la geometría dinámica y la estrategia "¿qué si no?'" interactúan en forma natural y se estimulan mutuamente. Esto justifica la implementación de actividades en las que se evidencie esta interacción. Aunque fue realizada con docentes, esta investigación brinda elementos para su aplicación en el contexto escolar.

1.3.2. Fostering mathematical creativity through Problem Posing and Modeling using dynamic geometry: Viviani's problem in the classroom[26]

El estudio realizado por Contreras (2013) enfatiza en los resultados de una experiencia con docentes en formación, describiendo la reformulación gradual de un problema inicial, cuyo enunciado es el siguiente "*Un campamento se encuentra a lo largo de la base de una región triangular isósceles. Un campista quiere instalar su tienda de campaña de tal modo que la suma de las distancias a los otros dos lados sea mínima ¿Dónde debería colocar la tienda? Interpreta geométricamente la suma de tales distancias*".

Luego de trabajar en su resolución, se solicita a los estudiantes hacer variaciones al problema. De esta manera, se consideran como acciones importantes para el planteamiento considerar el problema recíproco, un problema particular y un problema más general que el problema original.

Por otro lado, se evidencia la capacidad del software de geometría dinámica para visualizar con mayor facilidad las relaciones entre los elementos de un objeto geométrico. Por ejemplo, al resolver el problema original, los estudiantes conjeturan que la solución del problema es el punto medio de la base del triángulo,

[26] Contreras, J. N. (2013). Fostering mathematical creativity through Problem Posing and Modeling using dynamic geometry: Viviani's problem in the classroom. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(2), 66-72.

pero el software les permite notar que cualquier otro punto sobre dicha base también satisface la condición expresada en el enunciado del problema.

Otro aspecto de interés para las actividades de planteamiento de problemas es el uso de preguntas retadoras por parte del docente. Un ejemplo de este tipo de preguntas ocurre cuando, en el problema particular, se les propone indagar acerca de qué pasa si el campamento es todo el triángulo equilátero. Los estudiantes conjeturan que la tienda puede estar en cualquier punto sobre el perímetro del triángulo. Una vez más, el software les permite descubrir con asombro que cualquier punto al interior del triángulo satisface la propiedad.

El autor destaca la importancia de tener bases matemáticas apropiadas para un provechoso proceso de planteamiento de problemas. En todo caso, señala que aprender a plantear problemas significativos resulta un proceso retador que además favorece diversas prácticas matemáticas. Para la presente tesis, este estudio expresa ideas de interés sobre la interacción entre planteamiento y resolución de problemas, además reconoce el sentimiento de satisfacción del docente cuando sus estudiantes se ven involucrados en actividades matemáticas significativas y creativas.

1.3.3. Teachers modify geometry problems: from proof to investigation[27]

El trabajo de Leikin y Grossman (2013), bajo la perspectiva del aprendizaje basado en la indagación, estudia cómo un grupo de docentes modifican problemas de demostración en geometría. En esta actividad se solicita transformar los problemas de demostración en problemas de investigación. Los autores asumen las investigaciones en geometría como actividades que incluyen experimentación, conjeturación, puesta a prueba, y demostración (o refutación) de la conjetura.

[27] Leikin, R. y Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 515-531.

Se hace un análisis con respecto a los tipos de problemas generados por los docentes. Se determinan dos tipos: problemas orientados a la investigación y problemas de no-investigación. Los problemas orientados a la investigación se clasifican como problemas de descubrimiento y problemas de verificación. Los problemas de no-investigación se catalogan como problemas de demostración, problemas de guía y problemas de cálculo.

Adicionalmente se analizan los tipos de transformaciones que los docentes efectúan sobre los problemas de demostración. Los autores establecen una diferenciación entre los resultados por parte de docentes que hacen uso de un software de geometría dinámica y los que no lo usan.

Este trabajo es de interés para el desarrollo de la presente tesis pues proporciona elementos orientadores para la categorización de los productos de los estudiantes en el ámbito del planteamiento de problemas matemáticos y expone razones para usar recursos como el software de geometría dinámica.

1.3.4. Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con GeoGebra [28]

El estudio realizado por Cruz (2019) presenta una experiencia de planteamiento de problemas con estudiantes de licenciatura en educación, utilizando como recurso el software GeoGebra. El contenido particular es geométrico y se enfoca en el problema de extender el teorema de las tres bisectrices de un triángulo a otros casos como el de un cuadrilátero o un triángulo esférico.

Se acude a estrategias heurísticas como "¿Qué si no?" de Brown y Walter o "¿Qué si más?" de Kaput. Se aplica un modelo de planteamiento de problemas denominado SCABV+T, el cual es utilizado para describir las diferentes etapas a lo largo del proceso.

[28] Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 468-477.

Este modelo recibe su nombre debido a las fases que lo constituyen: Selección, Clasificación, Asociación, Búsqueda, Verbalización + Transformación, y fue propuesto por Cruz (2002) y enriquecido en estudios posteriores. Se destaca su capacidad para explicar estrategias puntuales de planteamiento de problemas, estudiadas por otros autores.

Se hace notar que el uso del software GeoGebra, al manipular los objetos geométricos, favorece la obtención de conjeturas por parte de los estudiantes. Se plantea que en el modelo SCABV+T tiene lugar un proceso cíclico entre las fases. En este sentido, el uso de GeoGebra facilita la generación de ciclos en el proceso y consecuentemente, la obtención de nuevos problemas. El autor afirma que hay mucho por investigar acerca de las dinámicas de dichos ciclos.

Por último, señala en este estudio que el software GeoGebra es un recurso didáctico que propicia la generación de conjeturas en el planteamiento de problemas. Los planteamientos anteriores se consideran en la implementación del software en el presente trabajo de investigación.

Conclusiones del capítulo 1

El capítulo expone investigaciones, mayoritariamente recientes, que corresponden a avances en la teoría y la práctica del enfoque de planteamiento de problemas en Educación Matemática. Centra su atención en tres aspectos esenciales para la presente tesis: el planteamiento de problemas en un contexto general, los modelos que se han desarrollado en torno a los procesos del planteamiento de problemas y la implementación del planteamiento de problemas en el aula de geometría. De cada una de las investigaciones presentadas se han extraído aspectos teóricos para ser tenidos en cuenta en la construcción del modelo didáctico que se propone diseñar. De igual manera se destacan algunas recomendaciones del orden práctico, presentes en el desarrollo de los distintos estudios.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico se fundamenta a partir de cuatro ejes: el pensamiento geométrico, la resolución de problemas, el planteamiento de problemas y la visualización matemática. Estos aportes teóricos permiten el desarrollo armónico de la propuesta para comprender la articulación de los procesos que emergen del planteamiento de problemas en la investigación.

2.1. Referentes teóricos sobre el pensamiento geométrico espacial

En los Estándares Básicos de Competencias se plantea que: "*… se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio*"[29]. A continuación, se aborda los referentes teóricos sobre el pensamiento geométrico, en particular el espacial. Según NCTM (2000), la geometría ofrece un medio para describir, analizar y entender el mundo. Esta afirmación es coherente con el desarrollo del pensamiento geométrico a través de actividades que impliquen indagación y uso de la lógica como la resolución y el planteamiento de problemas.

En los Estándares Básicos de Competencias se considera que la utilidad de las ideas geométricas radica en el planteamiento y resolución de problemas en diferentes áreas de la matemática y en situaciones del mundo real. Esto exige que la geometría integre, cuanto sea posible, problemas contextualizados e interdisciplinarios.

[29] Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional, p. 58.

Según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) "*La geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio*"[30].

En concordancia con MEN (2006) "*Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos*"[31]. Los sistemas geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos.

En relación con los sistemas geométricos, el MEN (2006) asocia el pensamiento geométrico a dos vertientes: pensamiento espacial y pensamiento métrico. Esto ocurre en virtud de las consideraciones tiene el MEN acerca de los objetos y procesos que abordan los estudiantes en el campo de la geometría en el ámbito escolar.

En los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional en el 2006 se plantean tres momentos en la construcción del pensamiento geométrico, estos están dados por:

- El establecimiento de la noción de posición absoluta o relativa de los objetos.
- Una cuantificación de la posición dada por el concepto de medida.
- Los teoremas formales de la geometría euclidiana (esto corresponde a un pensamiento formal).

En lo concerniente al pensamiento geométrico espacial el The National Research council (2006) plantea que "*es una amalgama de tres elementos: conceptos de espacio, herramientas de representación y*

[30] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas*. *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN, p. 38.
[31] Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional, p. 62.

procesos de razonamiento"[32]. Por su parte, Uttal et al (2013) plantea que "*es un proceso mental de representación, análisis, dibujar inferencias de relación espacial, entre objetos, relaciones con objetos, analizar relaciones e imaginar transformaciones espaciales de estas relaciones*"[33]. Araujo (2020) expresa que este pensamiento es "*el conjunto de procesos cognitivos mediante el cual se construyen y se manipulan representaciones mentales de objetos del espacio, las relaciones entre estas transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales*"[34].

Por otra parte, Florez (1991) plantea que el pensamiento geométrico espacial es el *"[...] pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional, como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y se sistematiza y generaliza con el estudio de los contenidos geométricos en la escuela"*[35]. En la investigación se asumen los criterios dados por Flores (1991), el The National Research Council (2006), Uttal et al. (2013), y Araujo (2020).

Por otro lado, existen unas destrezas que el sujeto puede desarrollar preponderantemente en el pensamiento geométrico, las cuales son básicas tanto para la resolución como para el planteamiento de problemas y que han sido planteadas por Hoffer (1981):

- Destrezas visuales (identificar, observar características, comprender un dibujo, identificar posiciones).

---

32 National Research Council. (2012). *Discipline based education research: Understanding and Improving learning in undergraduate Science and engineering*. marWashington, DC: the National Academic Press. p. 12.

33 Uttal, D., Miller, I., & Newcombe, S. (2013). *Exploring and Enhancing Spatial Thinking: Links to Achievement in Science, Technology, Engineering, and Mathematics?* Current Directions in Psychological Science, 22 (5), 367–373. p. 367.

34 Araujo, S. (2020). Desarrollo del pensamiento métrico espacial a través de la implementación de un laboratorio de geometría interactivo. *Revista ESPACIOS*. ISSN, 798, 1015.p. 172.

35 Florez A, A. (1991). *Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba.* (Tesis de Grado Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana.

- Destrezas verbales (uso correcto de la terminología y precisión en el lenguaje para describir los objetos y las relaciones espaciales).
- Destrezas de dibujo (realizar construcciones en 2D y 3D, dibujar figuras semejantes, dibujar figuras simétricas).
- Destrezas lógicas (reconocer criterios para clasificar, formular hipótesis y verificarlas, demostrar).
- Destrezas aplicadas (aplicar conocimientos aprendidos en la práctica, resolver problemas prácticos utilizando geometría).

En la investigación se asumen algunas situaciones típicas donde se despliega el pensamiento geométrico, planteadas por Cruz (2019). Estas situaciones típicas son propicias para el planteamiento de problemas a los estudiantes, donde en el proceso de resolución puedan construir, enriquecer y desarrollar el pensamiento geométrico. Estas situaciones están dadas por la:

- "Visualización.
- Construcción de figuras con regla y compás.
- Imaginación espacial.
- Construcciones auxiliares.
- Cuantificación del espacio.
- Papiroflexia.
- Transformaciones geométricas"[36].

La experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico, a través del planteamiento y resolución de problemas propicia la construcción del pensamiento geométrico. Son varios los recursos

[36] Cruz, M. (2019). Pensamiento geométrico en Educación Matemática. En clases de Seminario III. Relaciones entre el pensamiento matemático y la Educación Matemática. Programa de Doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño.

didácticos que se pueden utilizar en el aula para el proceso de construcción de este pensamiento, entre los que se tienen según Cruz (2019):

- Manipulación de objetos del plano y el espacio.
- Juego con figuras geométricas.
- Construcción de una figura de análisis.
- Establecimiento de mapas conceptuales.
- Utilización de software de geometría dinámica.
- Descomposición y recomposición de figuras.
- Interpretación geométrica.

Duval (2005) establece tres procesos cognitivos asociados al desarrollo del pensamiento geométrico (ver Figura):

- Construcción. En este proceso se diseñan configuraciones mediadas por instrumentos geométricos como regla, compás y escuadra, o a través de software de geometría dinámica que simulan estos instrumentos.
- Razonamiento. Está relacionado con procesos discursivos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido geométrico.
- Visualización. Este proceso permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas.

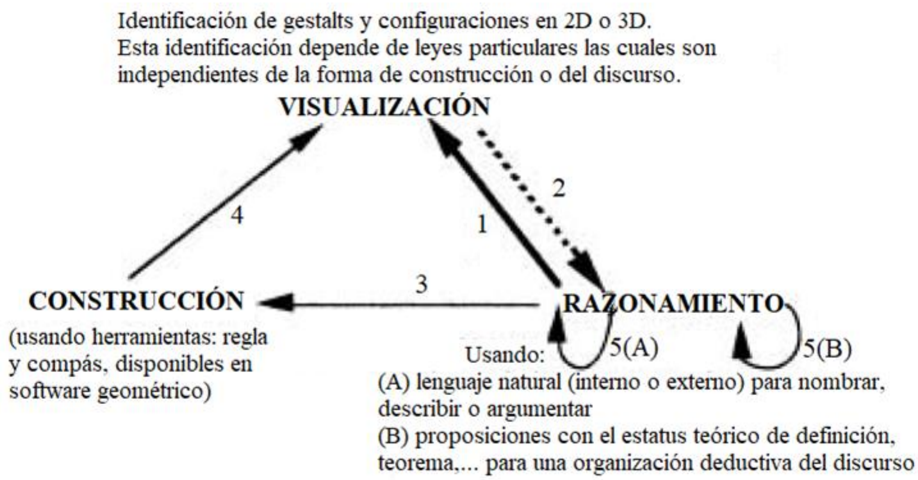


Figura 5. Procesos del desarrollo del pensamiento geométrico (Duval, 1998)

En la Figura 5, cada flecha representa la forma en que un tipo de proceso cognitivo puede apoyar a otro en cualquier tarea. La flecha punteada corresponde a un apoyo que no siempre tiene lugar. La flecha tipo bucle enfatiza que un proceso puede desarrollarse de manera independiente. También, se pueden tener circuitos más largos (Duval, 1998).

Para el proceso de construcción del pensamiento geométrico, a través del planteamiento y resolución de problemas, en la investigación se asumen reglas planteadas por Rojas (2009), las cuales son contextualizadas al presente trabajo:

- Objetivación de figuras geométricas. Consiste en ofrecer una representación del objeto concreto, o una representación simplificada, o una situación donde se permita la construcción de figuras de análisis y construcciones auxiliares, para luego proceder al planteamiento de problemas.
- Manipulación geométrica, descomposición e integración. Aquí se realizan estas operaciones con el objetivo de buscar rapidez, claridad y habilidad en el planteamiento de problemas.
- Análisis gráfico-analítico: se refiere a buscar relaciones, para determinar los objetos y operaciones que se pueden establecer
- Representación gráfica: muestra de imagen con contenido matemático

Estas reglas se precisan para la resolución de los problemas y situaciones retadoras propuesta en cada una de las actividades, y a la vez el análisis de los resultados de esas actividades enriquece dichas reglas.

2.2. Fundamentos de la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

La resolución de problemas ha sido estudiada por diferentes investigadores, en diversos campos de la Educación Matemática, lo que le ha permitido devenir como una de las teorías en la actualidad. Bajo esta teoría se busca indagar, experimentar, cambiar de estrategia y reflexionar sobre el actuar en el aula cuando se enfrentan a diversos tipos de actividades enmarcadas en la resolución de problemas, cuyo propósito es fortalecer aprendizajes en los estudiantes (Pochulu y Rodríguez, 2012).

En el epígrafe se hace referencia a la teoría de la resolución de problemas, como base para el planteamiento de problemas, en la construcción del conocimiento y del pensamiento matemático. Los investigadores Kilpatrick (1967); Krulik y Rudnik (1987); Schoenfeld (1985,1992); Campistrous y Rizo (1996); Cobo y Fortuny (2000); Harel y Lesh (2003), Pochulu y Rodríguez (2012), Liljedahl y Santos-Trigo, (2019); entre otros, aportan a la resolución de problemas. Ellos contribuyen con definiciones, estrategias y modelos de resolución.

Investigadores como Polya (1981), Ballester et al. (1992), Mason, Burton y Stacey (2010), entre otros, han planteado definiciones de problema. Estos autores son del criterio que, para ser un problema, se deben presentar dificultades en su resolución y su solución no debe ser inmediata. Polya (1981) plantea que tener un problema *"… significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"*[37].

[37] Polya, G. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

Por su parte, Ballester et al. (1992), afirma que un problema *"… refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución; se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución también desconocida se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos."*[38]

En la investigación se asume la definición dada por Krulik y Rudnik (1987), al establecer que un problema es *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[39].

Estas definiciones comparten características comunes, las cuales según Pochulu y Rodríguez (2012) son:

- *"Existe un sujeto que ha de resolverlo.*
- *Existe un punto de inicio y una meta por lograr.*
- *Existe un cierto bloqueo que impide acceder a la meta fácilmente"*[40].

Por su parte, Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) plantean rasgos que distinguen las diferentes definiciones de problema abordadas. Estos rasgos están presentes en cada una de ellas:

- La existencia de condiciones iniciales o finales que exprese la necesidad de transformación.
- La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, teniendo presente que lo que puede ser un problema para uno puede no serlo para otro.

[38] Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. *Tomo 1*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, p. 407.
[39] Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon, p. 4.
[40] Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, p. 155.

- Que el estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

Como se puede observar, existe coincidencia entre las características comunes planteadas por Pochulu y Rodríguez (2012) y los rasgos expresados por Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006), presentes en las diferentes definiciones de problemas abordadas por los investigadores en esta temática.

En la investigación se asume lo planteado por Pólya (1965), sobre lo que significa resolver un problema, quien afirma que: *"…es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"*[41].

Las fases o estrategias para el proceso de la resolución de problemas han sido abordadas por: Pólya (1945), Schoenfeld (1985), Mason, Burton y Stacey (2010), entre otros. Por su parte, Pólya (1973) fue uno de los primeros en aportar fases al proceso de resolución de problemas: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y evaluación de la solución y de la vía. En la presente investigación se asumen las fases para la resolución de problemas dadas por Mason, Burton y Stacey (2010). Estas fases son *abordaje, ataque* y *revisión* (ver Figura).

[41] *Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

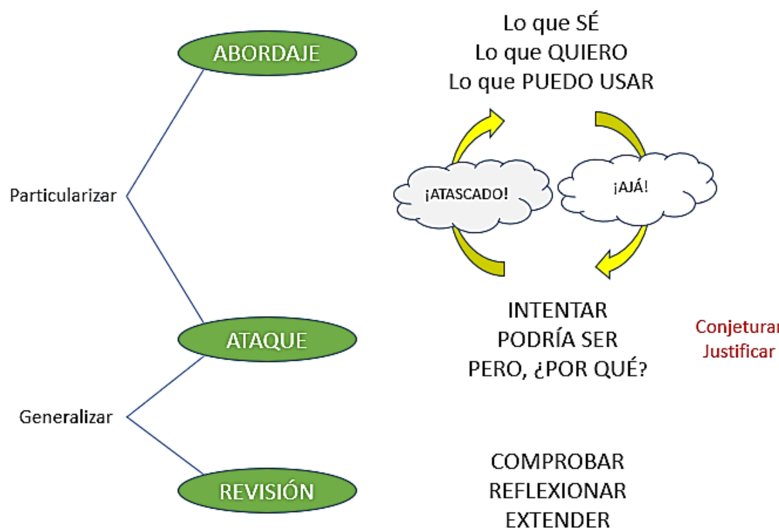


Figura 6. Fases del proceso de resolución de problemas según Mason, Burton y Stacey (2010).

A continuación, se explican cada una de estas fases y se proponen ciertas preguntas heurísticas (tomadas de Ballester et al., 1992), que el docente les puede formular, en caso de ser necesario, a los estudiantes que presenten dificultades, de forma tal que sean capaces de resolver el problema de forma independiente.

En la fase de abordaje se prepara el terreno para un posterior ataque, por lo cual es importante una dedicación prudencial de tiempo para su desarrollo. Según Mason, Burton y Stacey (2010), "*consiste en formular el problema de forma precisa y decidir qué es lo que se quiere hacer*"[42]. El abordaje debe tener en consideración tres elementos: qué se sabe, qué se busca y qué se puede usar. Para lograr una mayor comprensión del problema en esta etapa de abordaje, el docente puede realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante / contradictoria para determinar la incógnita?

[42] Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Harlow: Pearson, p. 26

La fase de ataque comprende actividades matemáticas muy variadas en la que el proceso matemático fundamental es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente. En esta fase luego de varios intentos fallidos y momentos parciales de descubrimiento, se puede llegar a una solución razonable. En esta fase tiene lugar los procesos de generalización y particularización. En el ataque de ser necesario, el docente puede formular las siguientes preguntas: ¿es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar? ¿podría imaginarse un problema análogo más simple/ general/particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución? ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿puede usted demostrarlo?

La fase de revisión tiene lugar al llegar a una solución razonable al problema o cuando tras varios intentos no se consigue hallar una vía de solución. Son propios de esta fase la comprobación de la posible solución, la reflexión sobre las ideas y momentos claves de todo el proceso y la generalización del problema a un contexto más amplio. Corresponden a esta fase las siguientes preguntas heurísticas: ¿puede usted verificar el resultado? ¿puede verificar el razonamiento? ¿puede obtener el resultado en forma diferente? ¿puede verlo de golpe? ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

El sistema de actividades que se propone en la investigación conduce al planteamiento de problemas retadores. Según Pérez (2004) los problemas retadores "… *invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento*"[43]. También afirma que estos problemas "*exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras*

[43] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"[44].

Por otra parte, Falk (1980) plantea que los problemas retadores constituyen *"… una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"*[45]. Los problemas retadores generan motivación e interés en los estudiantes, características estas que se evidencian en el planteamiento de problemas geométricos.

A continuación, se caracterizan los problemas retadores, tomando en consideración lo planteado por Falk (1980) y Pérez (2004). Los problemas retadores son aquellos que:

- Estimulan el pensamiento, son interesantes para el estudiante y la solución no es inmediata.
- Exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática.
- Su solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos, para lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental.

Se es del criterio que esta última característica es la que define a los problemas retadores, con respecto a los problemas en general, pues exige a los estudiantes la integración de los conocimientos previos, las operaciones lógicas del pensamiento y lo que se desea lograr, para alcanzar los resultados esperados o una resolución exitosa.

[44] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[45] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, p.16.

Un proceso sólido de planteamiento de problemas geométricos en la educación básica se potencia, si en el trabajo de aula se propicia: la indagación, la exploración, el razonamiento, la exposición de su actuación y la integración de conceptos, elementos que son característicos de los procesos de enseñanza aprendizaje del contenido matemático basados en problemas retadores.

2.3. Fundamentos de la visualización matemática

Visualizar es definido por Real Academia Española (2014) como *"Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter, … Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista"*[46]. Investigadores como Zimmermann y Cunningham (1991), De Guzmán (1996), Duval (1998), Arcavi (2003), Presmeg (2006), entre otros, han aportado al estudio del proceso de visualización matemática. Además, han investigado el uso de la visualización en Educación Matemática para el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Torres (2009) considera que la visualización es *"… una tarea del proceso comunicativo, por medio del cual se transforman los datos abstractos y los fenómenos complejos de la realidad en mensajes visibles, y que lleva a un proceso de descubrimiento del conocimiento"*[47]. Gutiérrez y Jaime (1991) aluden que *"… la visualización o percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no solo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría…"*[48].

Por su parte, Buttenfield y Mackaness (1991, citado en Torres 2009), entienden a *"… la visualización como el proceso de representar la información como una vista general de un todo, con el propósito de reconocer, comunicar e interpretar patrones y estructuras"*[49].

[46] Real Academia Española (2014). Visualizar. En Real Academia Española*, Diccionario de la lengua española (Ed. Tricentenario)*. Recuperado de *https://dle.rae.es/visualizar*
[47] Torres Ponjuán, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED 20*(6), p.164.
[48] Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. *Educación Matemática, 3*(2), p.44.
[49] Torres Ponjuán, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED, 20*(6), p.163.

Así mismo, Presmeg (2006) afirma que: *"… la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático"*[50].

Estos elementos abordados por Gutiérrez y Jaime (1991), Presmeg (2006), Torres (2009) resaltan el papel de la visualización matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. La visualización matemática vista como un proceso, aplicada en el contexto del razonamiento, la demostración, la resolución y el planteamiento de problemas en la actividad geométrica, aporta al desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

Diferentes investigadores han aportado definiciones sobre visualización matemática; a continuación, se hace referencia a algunos. Para Hershkowitz (1990) la visualización es "*… la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual*"[51].

Zimmermann y Cunningham (1991) plantean que: *"… la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y de utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática*"[52].

Por otra parte, Arcavi (2003) combina las definiciones que dan Hershkowitz (1989) y Zimmermann y Cunningham (1991), y precisa que la visualización es: *"… la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el*

---

[50] Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. En: Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense, p. 206.
[51] Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.
[52] Zimmermann, W. y S. Cunningham (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, p. 3.

pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión"[53]. Esta definición es esquematizada por Arcavi (2015) como se muestra en la Figura 7.

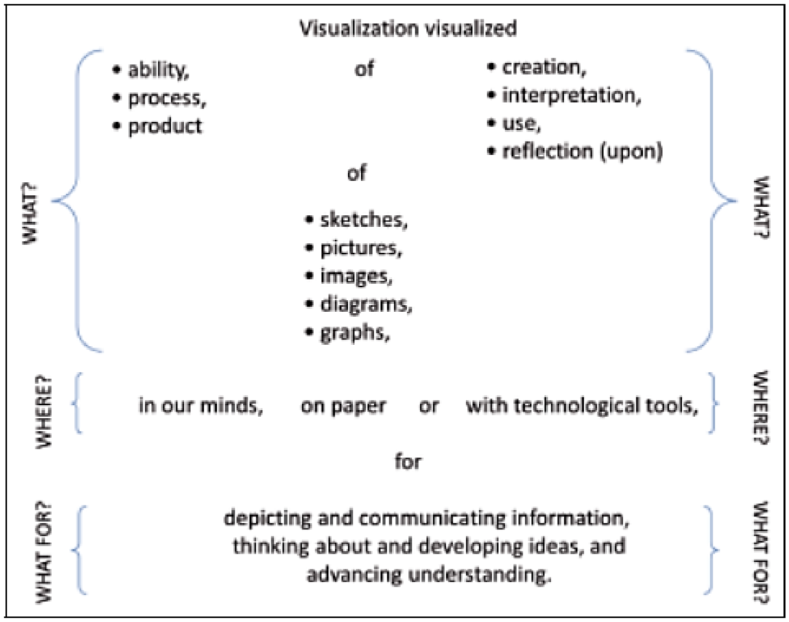


Figura 7. Visualización según Arcavi (2015).

El proceso de visualización constituye un recurso para la comprensión de los conceptos matemáticos y para comunicar ideas matemáticas (Arcavi, 2003). Estas ideas se consideran fundamentales y son tomadas en cuenta para la realización de la presente investigación.

Las distintas definiciones de visualización matemática abordadas poseen rasgos comunes (Rojas, 2009), los cuales pueden resumirse en:

- Evidencia la existencia de imágenes mentales que se corresponden entre sí y generan el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos.
- Es un proceso representable que permite comunicar información del quehacer matemático.

[53] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), p. 217.

- Refleja la interacción entre los fenómenos reales y abstractos.
- Permite la utilización de herramientas tradicionales y de las TIC.
- Brinda forma mental o física a ciertos conceptos, procesos y problemas geométricos.

De Guzmán (1996) considera que en la visualización matemática "*… las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo*"[54]. También hace referencia a que *"… la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático"*[55]. Estos criterios dados por De Guzmán (1996) son significativos para el planteamiento de problemas geométricos, objetivo al cual se dirige la tesis.

Con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) expresan que, "… los procesos de visualización constituyen el soporte de la actividad cognitiva en geometría donde el sujeto evoluciona en su percepción de los objetos y su potencial heurístico en la resolución de problemas"[56].

La visualización es necesaria en el aprendizaje de la geometría, pues permite que el estudiante se apropie de algunos procesos: manipular, representar, transformar, comunicar, modelar, entre otros. Por otra parte, la visualización matemática permite plantear problemas a partir de:

- Imágenes y representaciones.

---

54 De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra*. Cap. 0. El papel de la visualización. Madrid: Pirámide, p.2.
55 De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Madrid: Pirámide, p. 3.
56 Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, p. 113.

- Interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos y sus interrelaciones.
- Significado y sentido de los objetos matemáticos y sus interrelaciones.

Por su parte Gutiérrez (2006, citado por Ramírez, 2012) plantea que la visualización "… es el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar"[57]. En la investigación se asume a la visualización como un proceso que le permite al estudiante establecer relaciones entre los elementos propios de un objeto geométrico y sus propiedades, contribuyendo al planteamiento de problemas.

2.4. Referentes sobre el planteamiento de problemas en la escuela

Varios autores han proporcionado su propia definición de planteamiento de problemas. Silver (1997), por ejemplo, concibe el planteamiento de problemas como la formulación de problemas nuevos o la reformulación de problemas previamente establecidos. Para el presente trabajo se considera la definición de Cai y Hwang (2019): *"Por planteamiento de problemas en Educación Matemática, nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que implican o apoyan a los maestros y estudiantes a formular (o reformular) y expresar un problema o tarea en función de un contexto particular (al que nos referimos como contexto o situación problemática)"*[58]

Es de aclarar que en Cai y Hwang (2019) se entiende el término problema en un sentido muy amplio, capaz de incluir los ejercicios rutinarios. No obstante, en esta tesis se considera la definición de problema de Krulik y Rudnik (1987), de acuerdo con lo puntualizado en el anterior epígrafe.

---

[57] Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España, p. 10.

[58] Cai, J. y Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001, p. 2.

Como se ha mencionado atrás, el planteamiento de problemas es un enfoque que actualmente se encuentra en pleno desarrollo. Un libro clásico en la materia es Brown y Walter (2005), en el que se presentan dos perspectivas o estrategias generales para el planteamiento de problemas matemáticos.

La primera de estas estrategias se denomina "*aceptar lo dado*" y consiste en tomar como punto de partida una situación particular y extraer de ella el mayor número posible de problemas asociados, sin modificarla. La otra es la estrategia *"¿qué si no?"* que consiste en contradecir los atributos del problema, previamente enumerados, obteniendo el mayor número posible de nuevas situaciones sobre las cuales se generen nuevos problemas.

Asimismo, Kilpatrick (1987) relaciona algunas de las estrategias que pueden involucrarse en un proceso de planteamiento de problemas:

- Asociación: proceso relacionado con la estrategia "aceptar lo dado" de Brown y Walter.
- Analogía: que según Pólya es una fuente fértil de nuevos problemas.
- Generalización: proceso que debe interactuar con el de particularización.
- Contradicción: relacionado por el autor con la estrategia de Brown y Walter denominada "¿qué si no?" y la estrategia "¿qué si más?" de Kaput.
- Otros procesos: por ejemplo, tomar el punto de vista de otra persona, tomar el producto cartesiano o la intersección de dos conceptos, entre otros.

Algunos investigadores han diseñado modelos para el proceso de planteamiento de problemas involucrando en sus fases las estrategias antes mencionadas. Uno de ellos es Cruz (2019) quien plantea una estrategia general conocida como modelo SCABV+T para el Planteamiento de problemas. Esta estrategia es esencialmente un ajuste del modelo propuesto en Cruz (2002). En la Figura 8 se indican las fases de planteamiento de problemas de acuerdo con dicho modelo.

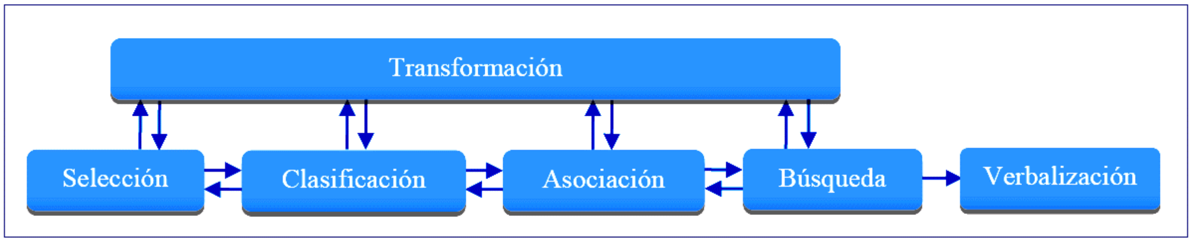


Figura 8: Fases de la estrategia de planteamiento de problemas según Cruz (2019).

El modelo SCABV+T debe su nombre a las seis acciones que lo componen:

- Selección del objeto matemático en torno al cual se plantea el problema.
- Clasificación de sus componentes en un proceso de análisis y síntesis.
- Asociación de conceptos determinando propiedades y relaciones.
- Búsqueda de dependencias, donde se analizan relaciones entre las propiedades asociadas en la fase anterior.
- Transformación del objeto, que puede mediar entre cualesquiera dos de las anteriores fases y que es fundamental en el planteamiento del problema (nótese que el proceso no es lineal, incluso puede ser cíclico).
- Verbalización del problema, en la que se enuncia explícitamente

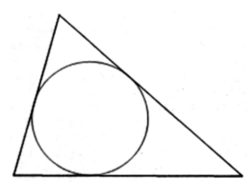
Por otra parte, algunos investigadores han tipificado las situaciones a partir de las cuales los estudiantes plantean problemas (situaciones de planteamiento de problemas). Stoyanova y Ellerton (1996, citado por Van Harpen y Sriraman, 2013), clasifican una situación de planteamiento de problemas como:

- Libre: cuando a los estudiantes se les pide generar un problema a partir de una situación dada, natural o artificial.

- Semiestructurada: cuando a los estudiantes se les da una situación abierta y se les invita a explorar su estructura y a completarla mediante la aplicación de sus experiencias matemáticas anteriores.
- Estructurada: cuando las actividades de planteamiento de problemas se basan en un problema específico

A continuación, se presentan ejemplos de dichas situaciones de planteamiento de problemas (tomados de Van Harpen y Presmeg, 2013), de las cuales, la primera es un ejemplo de una situación libre, la segunda se puede clasificar como semiestructurada y la tercera como estructurada:

- *"Hay 10 niñas y 10 niños de pie en una fila. Inventa tantos problemas como puedas que usen la información de alguna manera.*
- *En la siguiente imagen hay un triángulo y su círculo inscrito. Inventa tantos problemas como puedas que estén relacionados de alguna manera con esta imagen.*



- *Anoche hubo una fiesta en la casa de tu primo y el timbre de la puerta sonó 10 veces. La primera vez que sonó el timbre, solo llegó un invitado. Cada vez que sonaba el timbre de la puerta, llegaban tres invitados más de los que habían llegado al timbre anterior. a) ¿Cuántos invitados entrarán en el décimo toque del timbre? Explica cómo encontraste tu respuesta. b) Haz todas las preguntas que puedas que estén relacionadas de alguna manera con este problema".*[59]

[59] Van Harpen, X. y Presmeg, N. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), p.119.

Es de anotar que diversas investigaciones consideran que existe una importante relación entre el planteamiento de problemas y la creatividad matemática. Silver (1997) precisa como características propias de la actividad creativa las siguientes:

- *Fluidez*, que se refiere al número de ideas propuestas en respuesta a una sugerencia
- *Flexibilidad*, relacionada con posibles cambios en los enfoques tomados cuando se generan respuestas a una sugerencia
- *Originalidad* de las ideas que surgen como respuesta a una sugerencia.

Silver (1997) señala que aún más interesante que el planteamiento de problemas mismo, es la interacción entre planteamiento y resolución de problemas y enuncia actividades propias de ambos procesos asociándolas con las características de la creatividad, según la Tabla *1*. Relación entre creatividad y resolución y planteamiento de problemasTabla 1.

Tabla 1. Relación entre creatividad y resolución y planteamiento de problemas

Resolución de problemas	**Creatividad**	**Planteamiento de problemas**
Los estudiantes exploran problemas abiertos, con muchas interpretaciones, métodos de solución o respuestas.	Fluidez	Los estudiantes generan muchos problemas a resolver. Los estudiantes comparten sus problemas planteados.
Los estudiantes resuelven (o expresan o justifican) de una manera; luego de otras maneras. Los estudiantes discuten muchos métodos de solución.	Flexibilidad	Los estudiantes plantean problemas que se resuelven de diferentes maneras. Los estudiantes usan el enfoque de "¿Qué si no?" para plantear problemas.
Los estudiantes examinan muchos métodos de solución o respuestas (expresiones o justificaciones); luego generan otro que es diferente.	Originalidad	Los estudiantes examinan varios problemas planteados; luego plantean un problema que es diferente.

El interés fundamental de la presente tesis es el planteamiento de problemas. Por esta razón, resultan de gran relevancia las anteriores consideraciones, pues muchas de ellas orientan tanto la mirada teórica como la ejecución práctica de este trabajo.

2.5. Referentes sobre los modelos didácticos

Miller (1998) define modelo como "... *un sistema concebido mentalmente o realizado de forma material que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé nueva información sobre dicho objeto*"[60]. Por su parte, Bunge (1997) califica al modelo "*como una construcción teórica que pretende otorgar una explicación sobre un fragmento acotado de la realidad y nos informa de cómo intervenir en dicha realidad y orientar así la enseñanza en el camino adecuado"*[61].

Por otra parte, según el MEN (2006) "*Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema, a veces se dice también "una estructura" que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo"*[62]. Núñez (2003) aborda una amplia tipología de modelos, el autor de esta investigación dado su objeto de estudio, se vincula a los modelos didácticos. A continuación, se presentan algunas definiciones de modelos didácticos:

Para Requesens y Díaz (2009) *"El concepto de modelo didáctico constituye un instrumento fundamental para abordar los problemas de la enseñanza en los distintos niveles educativos, en tanto contribuye a*

---

[60] Miller, J. (1998). *The psychology mathematical*. Princenton University Press, Princenton.
[61] Bunge, M. (1997). *Ciencia, técnica y desarrollo.* Uruguay: Editorial Sudamericana.
[62] *Ministerio de Educación Nacional*. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio

establecer los vínculos entre el análisis teórico y la práctica docente"[63]*.* Además, Thompson (2002) afirma que *"Un modelo didáctico es un esquema de significados, acciones e interpretaciones que constituyen la imagen del instructor o del diseñador instruccional de todo lo que necesita ser entendido para que alguien le dé sentido al objeto didáctico de la manera que él o ella pretende"*[64]*.*

Por su parte, Sigarreta (2001) aduce que *"Un modelo didáctico es una concepción sistemática que, en el plano de la enseñanza y del aprendizaje, estructura una determinada práctica dentro del proceso docente educativo, para incidir en la formación integral de la personalidad del estudiante"*[65]. En la investigación se asumen los criterios dados por Requesens y Díaz (2009) y Thompson (2002) y Sigarreta (2001), pues permiten promover procesos de enseñanza y aprendizaje dinámicos, innovadores, motivadores, atrayentes, eficaces y eficientes.

De Armas, Lorences y Perdomo (2003) plantean que los modelos didácticos tienen las siguientes características:

- Capacidad de aproximarse al funcionamiento real del objeto (Validez y confiabilidad).
- El investigador modifica el aspecto dinámico del desarrollo del objeto.
- Capacidad para incluir los cambios que se operan en la realidad (Utilidad y permanencia).
- Capacidad referencial. Dar cuenta de la dependencia que tienen respecto al sistema social en el que se inserta.

Estas características se ven reflejadas en el modelo didáctico que se presenta en esta investigación.

[63] Requesens, E. y Díaz, G. (2009). Una revisión de los modelos didácticos y su relevancia en la enseñanza de la ecología. *Revista Argentina de Humanidades y Ciencias Sociales. Volumen 7, nº 1*

[64] Thompson, P. W. (2002). Didactic objects and didactic models in radical constructivism. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 197-220). Springer, Dordrecht.

[65] Sigarreta, J. (2001). Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Cuba, p. 78.

Conclusiones del capítulo 2

En este capítulo se identifican algunos referentes teóricos que sirven como marco teórico al desarrollo de esta investigación:

- Se exponen los procesos asociados al desarrollo del pensamiento geométrico planteados por distintos autores.
- Se presenta el modelo de resolución de problemas que se asume en la investigación a realizar.
- Se acoge la definición de "planteamiento de problemas" que se toma como base para la consecución de este trabajo, entre otros aspectos que se retoman durante el desarrollo de la investigación.
- Se reconoce que la visualización matemática facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría a través del planteamiento de problemas.
- Se esclarece el termino modelo didáctico y sus características.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se realiza un análisis detallado del tipo de investigación, el contexto, la población, la muestra, los métodos utilizados y se precisan las fases de la investigación.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

En el estudio se asume un paradigma de investigación cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo. Las investigaciones cualitativas "… *se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general. Por ejemplo, en un estudio cualitativo típico, el investigador entrevista a una persona, analiza los datos que obtuvo y saca conclusiones; posteriormente, entrevista a otra persona, analiza esta nueva información y revisa sus resultados y conclusiones; del mismo modo, efectúa y analiza más entrevistas para comprender el fenómeno que estudia. Es decir, procede caso por caso, dato por dato, hasta llegar a una perspectiva más general"*[66].

El enfoque de investigación cualitativo *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[67].

Según Hernández Sampieri, Fernández Collado, y Baptista Lucio (2014) el enfoque cualitativo es "… iterativo o recurrente; las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente"[68]. En el proceso

[66] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill, p. 8.
[67] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill, p. 358.
[68] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill, p. 356.

investigativo sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría con un enfoque de planteamiento de problemas se retoman dichas ideas para la consecución de la investigación.

Por otra parte, la investigación se estructura bajo un diseño de investigación acción. Este diseño *"… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de éste, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[69].

El diseño de investigación acción "Se basa en las fases cíclicas o en espiral de actuar, pensar y observar"[70]. *"Su precepto básico es que debe conducir a cambiar y por tanto este cambio debe incorporarse en el propio proceso de investigación. Se indaga al mismo tiempo que se interviene"*[71]. Se concluye que el diseño de investigación acción propicia transformar, favorecer y enriquecer el desempeño del docente en el aula de matemáticas.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría con un enfoque de planteamiento de problemas, se perfecciona y se enriquece, con un diseño de investigación acción, pues permite la experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico. Este proceso contribuye a despertar la motivación y el interés hacia la geometría a través del planteamiento de problemas y lograr aprendizajes sólidos de su contenido.

3.2. Contexto, población y muestra

El componente práctico del presente trabajo se desarrolla en el Colegio San Isidro Sur Oriental, institución educativa oficial de la ciudad de Bogotá que ofrece bachillerato académico y está ubicada en el barrio

---

[69] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia, p. 116.
[70] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill, p. 469.
[71] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill, p. 496.

San Isidro de la Localidad 4 en el sur de la ciudad. El Proyecto Educativo Institucional está centrado en valores y comunicación.

Las familias de los estudiantes pertenecen a una comunidad socioeconómicamente ubicada en los estratos 2 y 3. Según criterios de la institución, se evidencia poco acompañamiento por parte de las familias a los procesos que requieren de su participación.

La población está conformada por 70 estudiantes de grado séptimo y la muestra de la investigación la conforman 35 estudiantes del grupo 1 del grado séptimo de la jornada mañana.

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

La investigación precisa de métodos y técnicas de un nivel teórico y empírico de investigación científica. Como métodos teóricos se utilizan:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular con un enfoque de planteamiento de problemas.

Análisis-síntesis: permite precisar el estado del arte, la construcción de los fundamentos teóricos y sintetizar los resultados de las actividades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría con un enfoque de planteamiento de problemas. También propicia establecer el significado de los hechos y la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Del nivel **empírico** se utilizan:

Observación participante: permite obtener información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría al implementar actividades de planteamiento de problemas en el Colegio San Isidro Sur Oriental.

Encuesta: con el fin de buscar las limitaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, con un enfoque de planteamiento de problemas. También se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes.

Entrevista: dirigida a docentes investigadores y a competidores (o excompetidores) en olimpiadas matemáticas para fortalecer el planteamiento de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se definen las siguientes fases:

Fase preparatoria. Diagnóstico y búsqueda del problema de investigación. Se realizan las siguientes acciones:

- Determinar la importancia, pertinencia, actualidad y potencialidades del tema.
- Determinar el estado del arte sobre el tema a investigar.
- Elaborar, validar y aplicar instrumentos: observación participante, entrevista y encuesta a docentes.
- Procesar los datos arrojados por los instrumentos.
- Planteamiento inicial del problema de investigación.

Fase de planificación. Esta fase comprende varias acciones dirigidas a conformar el estado del arte, el marco teórico, la metodología, el aporte teórico y práctico de la investigación.

- Búsqueda exhaustiva del estado del arte, lo cual permite confirmar el problema de investigación, reestructurar el objetivo general y determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través del planteamiento de problemas.
- Determinar el marco teórico de la tesis.
- Establecer una adecuada metodología de la investigación.
- Elaborar el aporte teórico.

- Elaborar el aporte práctico.

Fase de trabajo de campo. En esta fase se hace selección del contexto, se realiza la aplicación de las actividades y se recoge la información. Por último, se aplica la encuesta de satisfacción.

Fase de análisis y redacción de informes. Se precisa: la sistematización y análisis de la información, presentación de los resultados, elaboración de conclusiones y elaboración del documento escrito.

Fase informativa. En esta fase se realiza la publicación o socialización de resultados.

Conclusiones del capítulo 3

En el trabajo se presenta el paradigma de investigación cualitativa, con un enfoque cualitativo y un diseño de investigación-acción. Se detalla el contexto de la investigación, teniendo en cuenta los aspectos socioculturales y económicos en que se encuentran inmersos los estudiantes. Asimismo, se selecciona la muestra que corresponde a un grupo de estudiantes de secundaria del Colegio San Isidro Sur Oriental I.E.D. Se explicitan, de igual manera, los métodos, técnicas e instrumentos a implementar en el desarrollo de la investigación. Finalmente, se enuncian las fases: preparatoria, planificación, trabajo de campo, análisis y redacción de informes e informativa, las cuales constituyen la estructura metodológica de la presente tesis.

CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

En este capítulo se presenta el modelo didáctico para el planteamiento de problema geométricos, el cual está estructurado en cuatro partes: Fundamentos del modelo, Caracterización, Resolución del modelo y Concreción práctica. Además, se plantea el sistema de actividades y las consideraciones para la implementación de actividades.

4.1. Construcción del modelo didáctico para el planteamiento de problemas en estudiantes de secundaria

El modelo didáctico consta de cuatro partes. A continuación, se presenta su estructura, con los componentes de que consta cada una de estas partes y las relaciones entre estos.

4.1.1. Primera parte: Fundamentos del modelo.

Se presentan los sustentos del modelo y su objetivo.

Los sustentos del modelo están dados por fundamentos filosóficos, psicológicos, matemáticos y de Educación Matemática.

- Filosóficos: La presente tesis asume entre sus aspectos filosóficos las ideas planteadas en el libro *Pruebas y refutaciones* (Lakatos, 1978). Este trabajo enfatiza en unas matemáticas informales, en proceso de crecimiento y de descubrimiento, en contraposición con las matemáticas concebidas en corrientes como el formalismo en las que son reducidas a un proceso de generación mecánica de teoremas a partir de unas reglas preestablecidas. El libro, escrito a manera de diálogo entre un profesor y sus estudiantes, muestra cómo las matemáticas no están libres de imprecisiones y que su proceso creativo gira en torno a distintas aproximaciones en las que permanentemente se hacen ajustes y correcciones a las teorías. De esta manera se considera el conocimiento matemático como epistemológicamente informal y cuasi-empírico.

Además, se consideran algunos aspectos tratados por Davis y Hersh (1989) y Hersh (1999). En particular, se asume su crítica a las presentaciones que muchos libros y profesores hacen del conocimiento matemático, las cuales eliminan el proceso de descubrimiento y los pasos de que consta, reorganizando y puliendo el conocimiento de manera que se ajuste a los cánones del método lógico deductivo. Este tipo de presentación es contrario al proceso creativo de las matemáticas que implica ensayo y error y es de naturaleza informal, intuitiva y tentativa.

Para el desarrollo de la presente tesis se considera que el aprendizaje de las matemáticas se fortalece con la inmersión de los estudiantes en actividades que emulen la creación matemática, en particular en procesos de resolución y planteamiento de problemas matemáticos. De esta manera, se conciben las matemáticas en forma opuesta a como los textos convencionales suelen presentarlas.

- Psicológicos: La presente investigación desde lo psicológico considera los referentes de Piaget (1958) para la construcción del conocimiento. El desarrollo del conocimiento está enmarcado por una serie de etapas cuyo orden es invariable, con sus características propias del pensamiento. El desarrollo cognoscitivo se logra en el estudiante cuando se concreta un equilibrio interno entre la acomodación, el contexto y la asimilación de la realidad con sus estructuras, lo cual le permite actuar en esta y transformarla.

  Este estudio se realiza en estudiantes que se ubican en la etapa de las operaciones formales según Piaget (1958), la cual se caracteriza por conjeturar, razonar, teorizar y formular hipótesis (hacer proposiciones mentalmente), y la capacidad para generar y experimentar diferentes combinaciones lógicas de un problema. Además, en esta etapa los estudiantes muestran un adecuado desarrollo de la percepción táctil, visual y espacial, aumentan la capacidad de razonar sobre temas abstractos, y la capacidad de analizar y generalizar los datos obtenidos en el proceso de estudio. Estas características propician el desarrollo del pensamiento a un estadio superior.

El modelo didáctico de esta investigación se basa en el planteamiento de problemas geométricos para una construcción robusta del conocimiento, donde el estudiante integra los nuevos conocimientos a sus anteriores, en el logro de aprendizajes significativos y duraderos, que le permitan resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos a lo largo de su vida.

- Matemáticos: Los fundamentos matemáticos de la presente tesis corresponden a los contenidos desarrollados en el marco de las actividades de aula. En este caso, los ejes conceptuales pertenecen a la geometría del espacio, en especial lo relativo a la construcción de cuerpos geométricos, sus elementos, propiedades y relaciones, así como los conceptos de área y volumen asociados.
- Educación Matemática: En la presente investigación se asumen procesos y herramientas desde la didáctica de la matemática, que constituyen un sustento para el sistema de actividades. Entre estos procesos se tienen: el pensamiento geométrico espacial, la construcción de significado de los conceptos matemáticos, la resolución de problemas, los procesos heurísticos, la indagación, la visualización matemática y la manipulación geométrica. La integración de estas categorías en la resolución de las actividades propuestas permite un robusto planteamiento de problemas geométricos en los estudiantes.

A modo de conclusión, se puede establecer una relación entre los fundamentos teóricos de la presente investigación: filosóficos, psicológicos, matemáticos y de Educación Matemática. Desde lo psicológico se tiene presente que para la etapa de desarrollo del aprendizaje en la que se encuentran los estudiantes, procesos como conjeturar, razonar, teorizar y formular hipótesis están en consonancia con la concepción filosófica de la Educación Matemática, en la que se plantea que el aprendizaje de la matemática debe realizarse a partir de actividades en las que el estudiante haga matemáticas, en particular los conceptos propios de la geometría del espacio. El desarrollo de estos procesos, así como la concepción activa del aprendizaje de las matemáticas es coherente con los fundamentos teóricos desde la Educación Matemática, dado que en estos se promueve que los estudiantes hagan uso de su creatividad, en especial plantear sus propios problemas geométricos.

Por otra parte, el modelo didáctico tiene como objetivo contribuir a la comprensión y reflexión de los procesos presentes en el desarrollo del planteamiento de problemas geométricos, para favorecer la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático en estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria. La finalidad de este modelo didáctico está dada en:

- Contribuir al desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de secundaria a través de actividades de planteamiento de problemas.
- Aportar, mediante el planteamiento de problemas, al desarrollo de la creatividad matemática en los estudiantes de secundaria.
- Favorecer el reconocimiento del planteamiento de problemas, por parte de los estudiantes, como una actividad válida dentro de la clase, en la que puedan desarrollar habilidades y capacidades matemáticas.
- Contribuir a motivar el interés del docente por el desarrollo de actividades de planteamiento de problemas como un componente regular dentro de la práctica de aula.

4.1.2. Segunda parte: Caracterización.

En esta fase se hace referencia a la caracterización de los procesos didácticos iniciales en el contexto y población de estudio y a la exposición de la necesidad de implementar procesos de planteamiento de problemas geométricos, la cual en la práctica pedagógica es reflejo de las tendencias teóricas valoradas.

Diagnóstico. El diagnóstico está dado por los siguientes aspectos:

- Docentes: presentan un escaso conocimiento de la teoría pedagógica, lo que les impide dar el tratamiento didáctico adecuado al planteamiento de problemas. Aunque conocen y aplican la resolución de problemas en sus clases, desarrollan escasas actividades en las cuales los estudiantes puedan plantear problemas.
- Estudiantes: presentan insuficiencias en el aprendizaje como son la limitada comprensión sobre el proceso de resolución de problemas y el concepto mismo de problema, así como el limitado manejo de representaciones visuales, dificultades en el manejo de conceptos previos y el escaso rigor en la argumentación al abordar problemas geométricos.
- Concepción del proceso: está basado en una formación tradicional centrada en el aprendizaje memorístico y de ejecución de algoritmos preestablecidos donde la respuesta y el procedimiento son únicos. Esto incide negativamente en el uso que pueden hacer los estudiantes de su propia creatividad e imaginación, así como en el desarrollo de sus procesos de razonamiento que los conduzcan a argumentar correctamente, desarrollar procesos de abstracción e incluso hacer demostraciones matemáticas.
- Contenidos: temáticas de orden métrico, centradas en cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.
- Métodos: reproducción de un esquema de solución dado, memorización de definiciones, resolución de ejercicios rutinarios, rigidez en la presentación de contenidos.
- Organización de la enseñanza: clases magistrales, transmisión exclusiva del conocimiento del docente hacia el estudiante, limitada construcción del saber matemático, escasas oportunidades para que el estudiante manifieste sus ideas propias.
- Evaluación: ajuste entre la respuesta del estudiante y el procedimiento enseñado por el profesor, subestimación de respuestas que no se ciñen a dicho procedimiento, valoración predominante del conocimiento individual, escasa participación del estudiante en el proceso evaluativo.

Tendencias. La situación actual de los estudiantes permite conocer cómo se reflejan en la práctica pedagógica las tendencias teóricas valoradas. A continuación, se muestran las más relevantes para el presente trabajo de investigación.

- Dado el limitado manejo de las teorías actuales en Educación Matemática por parte de los docentes, existe una afectación en el uso didáctico que puedan hacer del planteamiento de problemas en el aula. Además, solo recientemente el enfoque en planteamiento de problemas ha iniciado a desarrollarse dentro de la Educación Matemática. Los anteriores factores conllevan a plantear que se carece de un modelo didáctico que aborde este proceso en la clase de geometría.
- Concepciones erróneas de los estudiantes frente al concepto de problema y el proceso de resolución de problemas, lo cual incide negativamente en la calidad de los problemas que plantean. Considerando estas ideas, desde la teoría se carece de una metodología que propicie la calidad en el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes.
- Esquemas tradicionales de enseñanza en la escuela centrados en la repetición y memorización, lo que influye en la escasa creatividad y libertad en el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes. Esto evidencia que se carece de una metodología que enfatice sobre los aspectos creativos en el planteamiento de problemas.

Factores. A continuación, se muestran los factores que, en su interrelación, inciden negativamente en la calidad de los procesos de planteamiento de problemas en el aula.

- Insuficiente incidencia de las preguntas heurísticas sobre el pensamiento geométrico de los estudiantes.
- Visión restringida del significado de problema por parte de los estudiantes.
- Limitada comprensión del proceso de resolución de problemas geométricos en los estudiantes.
- Limitado manejo de conceptos y términos del contenido geométrico.

- Concepción tradicional del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, la cual limita en los estudiantes la independencia y creatividad para el planteamiento de problemas.
- Inadecuada interpretación en los estudiantes de información a partir de una situación visual (identificar, observar características, comprender un dibujo e identificar posiciones en figuras, gráficas, imágenes, entre otras).
- Limitada diversificación de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Necesidad. El panorama descrito anteriormente sobre el planteamiento de problemas con estudiantes de séptimo grado evidencia dificultades en el aprendizaje de la Geometría que están asociadas a esquemas educativos tradicionales. Autores como Kilpatrick (1987) han puesto en evidencia que las actividades basadas en planteamiento de problemas contribuyen a superar algunas de estas dificultades.

Los instrumentos aplicados muestran que es escasa la presencia del planteamiento de problemas por los estudiantes en las aulas de matemáticas. Por lo anterior, se puede considerar la aplicación estructurada de actividades que enfaticen en el planteamiento de problemas geométricos como una vía importante y necesaria para el mejoramiento en el desarrollo del pensamiento matemático y en particular de la geometría del espacio.

4.1.3. Tercera parte: Resolución del modelo didáctico

En esta fase se concretan las interacciones entre componentes del modelo didáctico, culminando con el constructo llamado *situación retadora de planteamiento de problemas*. A continuación, se explican cada uno de los componentes, sus funciones y las relaciones que se establecen entre ellos. Estos componentes son:

- **Heurística del planteamiento de problemas.**

Definición. La Heurística es la ciencia encargada del estudio de las reglas y métodos del descubrimiento y la invención (Torres, 2001). Es destacada su aplicación en la Educación Matemática a la resolución de problemas, destacándose los trabajos pioneros de Pólya (1945). Recientemente, se ha venido trabajando en adaptar los métodos heurísticos al planteamiento de problemas. Por ejemplo, Cruz (2020) expone el Programa Heurístico General de Pólya aplicado a la formulación de problemas (ver Figura 9), el cual se considera un referente para la presente investigación.

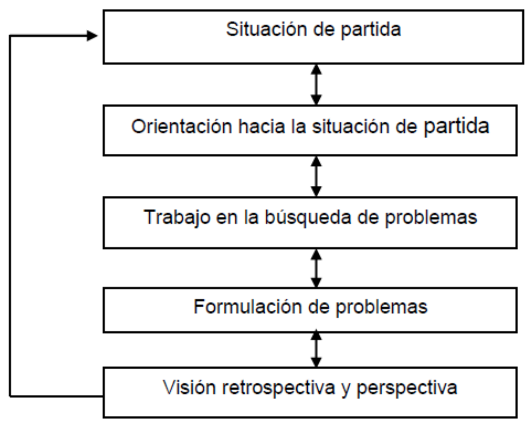


Figura 9. Programa Heurístico General para formulación de problemas (Cruz, 2020)

Recursos heurísticos en el planteamiento de problemas

De acuerdo con Kontorovich y Koichu (2011) existen heurísticas[72] que provienen de la investigación en Planteamiento de Problemas. A continuación, se presentan algunos ejemplos, los cuales se clasifican con base en los conceptos de heurística de resolución de problemas dados en Torres (2001), pero adaptados al planteamiento de problemas.

[72] Por heurística, Kontorovich y Koichu (2011) entienden los procedimientos heurísticos empleados ante una determinada situación, ya sea de resolución o de planteamiento de problemas.

- *Simetría* (Silver et al., 1996), creación de un problema por intercambio de los datos iniciales y el requerimiento presentes en un problema previamente dado. Se clasifica como regla especial de planteamiento de problemas.
- *Variación sistemática*, (Silver et al., 1996), creación de un problema nuevo a partir de uno dado, cuando un aspecto se mantiene constante y otros se varían sistemáticamente. Se clasifica como principio heurístico.
- *¿Qué-si-no?* (Brown & Walter, 1983), se puede ver como una forma de variación sistemática la cual está regida por una pregunta específica. Se clasifica como principio heurístico.
- *¿Qué-si-más?* (Kaput, en comunicación personal a Kilpatrick, 1987), expresa un cambio en el problema dado al aumentar la cantidad de valores de una variable o el número de variables. Se clasifica como regla heurística.
- *Encadenamiento* (Silver et al., 1996), consiste en crear un nuevo problema con base en la respuesta o en un aspecto de la resolución a un problema anteriormente planteado. Se trata de una regla heurística.
- *Focalización en una solución particular* (Koichu, 2008). En el cual el planteamiento está regido por la decisión de orientar la formulación del problema hacia el uso de un teorema, solución o enfoque matemático particular. Se clasifica como regla heurística.

Adicionalmente, Kontorovich y Koichu (2011) destacan las heurísticas propias de la resolución de problemas que también son aplicables al planteamiento de problemas, presentando los siguientes ejemplos (tomados de Schoenfeld, 1985):

- *Analogía*: variación de uno o más elementos matemáticos de una situación, por otros con los que tenga alguna semejanza de forma o de contenido. Se clasifica como principio heurístico general.

- *Generalización:* obtención de un problema mediante la variación de uno o más conceptos, propiedades o relaciones pertenecientes a una situación dada, por otros que sean más amplios o generales. En el contexto del planteamiento de problemas se clasifica como una estrategia heurística.
- *Descomposición de un problema*: generación de un problema nuevo mediante la obtención de un subproblema de un problema dado. Se trata de un principio heurístico especial.
- *Creación de un modelo:* Es una forma de reducción, que consiste en buscar una interpretación (un modelo) del problema o situación dada, en la matemática, con el fin de contribuir a su visualización, de modo que, al realizar la transformación inversa del modelo, se llegue al planteamiento de un problema. Se clasifica como regla heurística.

  Se consideran otros procedimientos heurísticos de la resolución de problemas que son aplicables al planteamiento. Por ejemplo, la inducción, que consiste en la búsqueda de la vía para plantear un problema, mediante la generalización de una relación, con base en casos particulares.

Función. La heurística aplicada al planteamiento de problemas matemáticos busca identificar, describir y enriquecer las reglas y métodos orientados al proceso creativo de plantear problemas. Tradicionalmente este proceso es realizado por el profesor con el fin de crear para sus estudiantes problemas interesantes y cuya resolución implique el desarrollo del pensamiento matemático. En el contexto de la presente tesis, el proceso en cuestión es desarrollado por los estudiantes en el aula, partiendo de la base del impacto que tiene sobre su aprendizaje, de acuerdo con diversas investigaciones. En particular, se busca entender los recursos heurísticos que utiliza el estudiante cuando se enfrenta a una situación de planteamiento de problemas y que lo conducen a crear problemas nuevos relacionados con conceptos de geometría del espacio.

La heurística en general y concretamente en el planteamiento de problemas favorece el desarrollo del pensamiento matemático, fortaleciendo en el estudiante su razonamiento lógico, así como los aspectos creativos de su actividad matemática y la autonomía en su aprendizaje.

- **Contenido geométrico.**

Definición: El contenido hace referencia a ¿qué enseñar y aprender? Los contenidos del proceso de enseñanza y aprendizaje según Castellanos et al. (2001) son "*los hechos, conceptos, principios, teorías, hábitos, habilidades, procedimientos y estrategias, capacidades, sentimientos, actitudes, normas, y valores*"[73]. Por su parte, Solé y Coll (1993) proponen tres tipos de contenidos: conceptuales, procedimentales y actitudinales.

El contenido geométrico está dado por "*los conceptos geométricos, relaciones esenciales (teoremas y propiedades), conocimientos sobre las figuras geométricas y las relaciones que se establecen entre ellos, así como los procedimientos, hábitos y habilidades que permiten operar con ese conocimiento*"[74].

Los aspectos conceptuales del contenido geométrico hacen referencia a ¿qué saber?, en este caso, se enfatiza en la geometría del espacio, en especial lo relativo al área superficial y al volumen de sólidos, así como su construcción, sus propiedades y relaciones entre estos. Por su parte, los aspectos conceptuales del planteamiento de problemas son el reconocimiento general de este proceso, su definición, objetivo y características básicas.

Los aspectos procedimentales geométricos enfatizan en ¿qué saber hacer?, en particular, el proceso de calcular áreas superficiales y volúmenes de sólidos, construirlos, aplicar algunas de sus propiedades, así como aplicar herramientas básicas que se requieren al momento de realizar estos

---

[73] Castellanos, D. et al. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", La Habana, Cuba, p. 91.
[74] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba, pp. 78-79.

procedimientos, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, entre otros. Los aspectos procedimentales del planteamiento de problemas corresponden a la aplicación de distintos procedimientos heurísticos que se encuentran en la literatura para abordar estas situaciones como son la analogía, la generalización, la particularización, etc.

Los aspectos actitudinales asociados con la geometría involucran ¿cómo se debe ser? Se plantea, por tanto, dentro de este contenido, el refuerzo y enriquecimiento de los conceptos geométricos básicos y una mayor motivación hacia el desarrollo del pensamiento geométrico, mediante la exploración, experimentación, formulación y reformulación de conjeturas. Este proceso conduce a descubrir y/o redescubrir definiciones, relaciones y propiedades de los conceptos que se estudian en la geometría del espacio en grado séptimo.

En cuanto a los aspectos actitudinales del planteamiento de problemas se incluye el desarrollo de la curiosidad, la diversidad y flexibilidad del pensamiento de los estudiantes, la responsabilidad por su aprendizaje, una noción más amplia acerca de la naturaleza de las matemáticas y mayor seguridad al abordar las tareas matemáticas, en particular, aquellas que involucran procesos de planteamiento de problemas.

Función: el contenido contribuye a la consecución de los objetivos de aprendizaje, pues consta de los conocimientos y destrezas que se espera que los estudiantes logren. A continuación, se hace explícita la función del contenido en cada uno de los aspectos de que consta, con base en la definición presentada.

El contenido geométrico en su aspecto conceptual proporciona los fundamentos teóricos propios de la geometría espacial que se constituyen en herramientas con las cuales los estudiantes pueden abordar distintos tipos de situaciones, tanto estrictamente matemáticas como contextualizadas. Por tanto, una buena fundamentación conceptual provee elementos para mejorar la cantidad y calidad de planteamiento de problemas en los estudiantes.

En cuanto al aspecto procedimental, la función del contenido geométrico es propiciar una mayor comprensión de los aspectos conceptuales y con esto, facilitar el abordaje de situaciones diversas, en particular de planteamiento de problemas, a partir del dominio de las herramientas y procedimientos básicos geométricos.

La componente actitudinal del pensamiento geométrico tiene como función desarrollar en los estudiantes una mayor libertad en el desarrollo de sus habilidades al aprender geometría, y contribuir a que adopten una actitud positiva frente a las actividades relacionadas con dicho aprendizaje.

La función del contenido de planteamiento de problemas en su aspecto conceptual es favorecer el reconocimiento por parte de los estudiantes del planteamiento de problemas como una actividad válida e importante dentro del aprendizaje de las matemáticas, concretamente en la geometría del espacio del grado séptimo.

Por su parte, la función del aspecto procedimental del planteamiento de problemas consiste en desarrollar destrezas para la creación de problemas a partir de diversos tipos de situaciones, reconociendo y aplicando las diferentes estrategias que han sido estudiadas en diferentes investigaciones en Educación Matemática.

La componente actitudinal del planteamiento de problemas tiene como función contribuir al desarrollo de una concepción diferente de las matemáticas y una motivación hacia los aspectos creativos de esta actividad, donde más allá de reproducir algoritmos predeterminados, pueda aportar ideas propias y que estas sean consideradas valiosas dentro del aula.

Relaciones del contenido geométrico con otras categorías asociadas a la fase de resolución:

- Contenido geométrico-heurística de planteamiento de problemas:

La aplicación de procedimientos heurísticos generales y especiales en el proceso de planteamiento de problemas favorece en el estudiante la asociación de conceptos, lo cual contribuye a un aprendizaje más sólido del contenido geométrico, tanto en su aspecto conceptual y procedimental como en el actitudinal.

Adicionalmente, el uso recurrente y organizado de los procedimientos heurísticos conduce al planteamiento de problemas de diversa naturaleza por parte de los estudiantes. Este hecho implica la posibilidad de obtener nuevos problemas que incluso rebasen los límites del contenido inicialmente concebido por el docente, extendiéndolo a niveles superiores.

Por otro lado, de acuerdo con el contenido geométrico se pueden aplicar diversos tipos de recursos heurísticos. En particular, existen reglas, estrategias y principios especiales cuya aplicación está determinada por conceptos o ideas matemáticas específicas que dependen por tanto del contenido a desarrollar. Adicionalmente, el hecho de que una situación de planteamiento de problemas se pueda vincular con una variedad de conceptos, puede incidir en la diversidad de procedimientos heurísticos aplicables a dicha situación y por tanto, en la cantidad de posibles problemas planteados.

- **Recursos didácticos.**

Definición. Según Castellanos et al. (2001) los recursos didácticos "*representan el componente que sirve de apoyo a la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje, con la finalidad de que los y las estudiantes se apropien de los contenidos*"[75]. Los recursos didácticos utilizados en esta investigación se basan en materiales concretos (cartón, palillos, pitillos, lámina de acetato, papel para plegado), maquetas y software de geometría dinámica.

Función: se pueden identificar las siguientes funciones de los recursos didácticos.

[75] Castellanos, D. et al. (2001). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", La Habana, Cuba, p. 101.

- Propiciar en los estudiantes el análisis, la abstracción y generalización de los conceptos geométricos y sus propiedades a partir de la observación, exploración y conjeturación del contenido geométrico.
- Facilitar el abordaje de diversas situaciones, para lograr la comprensión de conceptos, propiedades y relaciones geométricas, que le permiten al estudiante plantear nuevos problemas.
- Favorecer la visualización y el uso de estrategias heurísticas al abordar situaciones retadoras.
- Propiciar construcciones y representaciones reales o virtuales portadoras de contenido geométrico.
- Incentivar la identificación de las invariantes de un objeto geométrico al manipular sus elementos.
- Motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría, favoreciendo su autorreconocimiento como parte activa en el proceso de construcción de significado de los conceptos geométricos.

Relaciones de los recursos didácticos con otras categorías asociadas a la fase de resolución:

- Recursos didácticos - heurística de planteamiento de problemas:

  Los recursos didácticos utilizados en el aula, cuando estos han sido manipulados por el estudiante, se convierten en medios heurísticos auxiliares puesto que contribuyen a precisar la información requerida para iniciar el abordaje de una situación de planteamiento de problemas. Además, los procesos asociados a la manipulación del recurso didáctico influyen sobre la manera en que el estudiante ejecuta los procedimientos heurísticos al enfrentarse a este tipo de situaciones. Por ejemplo, la manipulación de un objeto geométrico a través del software de geometría dinámica contribuye a establecer relaciones entre los elementos dados y los buscados, acción que pertenece a la segunda fase del programa heurístico general de planteamiento de problemas (orientación hacia la situación de partida), de acuerdo con Cruz (2020).

Los procedimientos heurísticos cuya aplicación el docente sugiere o motiva en el estudiante, inciden en la manera como este manipula y reflexiona acerca de los recursos didácticos que utiliza. Asimismo, los diferentes procedimientos heurísticos a emplear influyen en la elección que hace el docente de los recursos didácticos que provee o solicita a sus estudiantes.

- Recursos didácticos - contenido geométrico: Los recursos didácticos deben estar en correspondencia con la parte conceptual del contenido. De igual manera, una apropiación adecuada del contenido procedimental proporciona destrezas para la manipulación de determinados recursos didácticos. Un contenido adecuado en su aspecto actitudinal promueve un acercamiento, manipulación y abordaje de los recursos didácticos de manera motivada y creativa. La selección del recurso didáctico está determinada por un argumento teórico acerca de la incidencia del recurso sobre el aprendizaje del contenido en cuestión.

A su vez, los recursos didácticos facilitan la visualización matemática, la construcción geométrica y el razonamiento acerca de los conceptos involucrados. Estos recursos también propician la exploración de diversos objetos matemáticos para establecer conjeturas sobre propiedades o relaciones entre estos o entre sus elementos. Además, permiten efectuar y comprender los procedimientos asociados y desarrollar las habilidades y actitudes requeridas para un aprendizaje consistente.

- **Visualización matemática.**

  Definición: proceso desarrollado en la mente o mediante algún recurso externo que contribuye a la comprensión de conceptos y el desarrollo de nuevas ideas en el estudiante a partir de la representación y comunicación de ideas asociadas a imágenes visuales provenientes de materiales concretos o diferentes tipos de representaciones pictóricas o gráficas (Arcavi, 2003).

Función: la visualización propicia en el estudiante el establecimiento de propiedades y relaciones entre los objetos geométricos, con base en el procesamiento visual de la información y la interpretación de la información figurativa (Bishop, 1989). El proceso de visualización contribuye a una comprensión sólida de los contenidos geométricos, y dota al estudiante de herramientas para plantear nuevos problemas. Entre los procesos que favorece la visualización matemática están manipular, representar, transformar, conjeturar, generalizar, abstraer, modelar, comunicar, entre otros. Además, el hecho de que se pueda percibir y operar sobre un objeto geométrico a través de la visualización, contribuye al interés del estudiante por su estudio, motivándolo hacia la búsqueda del contenido geométrico y propiciando el desarrollo de los procesos mencionados.

Relaciones de la visualización matemática con otras categorías asociadas a la fase de resolución.

- Visualización - heurística de planteamiento de problemas

  Los procesos que se derivan de la visualización matemática inciden en los tipos y características de los procedimientos heurísticos empleados por el estudiante. Por ejemplo, como resultado de la visualización, el estudiante puede abstraer propiedades acerca de los conceptos geométricos, lo cual facilita la aplicación de procedimientos heurísticos como la analogía o la generalización.

  A su vez, la experiencia del estudiante, dada por la sistematicidad en el uso de los procedimientos heurísticos, favorece la ejecución de procesos más o menos complejos derivados de la visualización. Por ejemplo, el procedimiento heurístico de crear un modelo incide en una comunicación más fluida de las ideas que el estudiante obtiene al momento de visualizarlas.

- Visualización-contenido geométrico: los procesos de visualización favorecen la formación y análisis de imágenes mentales, facilitando la indagación en torno a los conceptos geométricos y el descubrimiento de propiedades o relaciones entre estos. Asimismo, la generación de imágenes mentales propiciada por la visualización contribuye a una comprensión sólida de los procedimientos que se pueden efectuar entre los objetos o conceptos geométricos. Adicionalmente, el acto de visualizar incide en la motivación del estudiante por el estudio de la geometría, al poder asociar los conceptos con una experiencia sensorial.

  A su vez, el contenido geométrico, por su naturaleza, es propicio para el desarrollo de la visualización matemática, permitiendo la construcción del conocimiento geométrico. Esto ocurre siempre que, al momento de llevar el contenido al aula, en sus diferentes aspectos, este no se limite a la ejercitación de fórmulas, sino que propicie la experimentación, la representación, el razonamiento, la argumentación, etc., procesos que permiten al estudiante apropiarse del contenido de forma consistente. Esto favorece que en la visualización se desarrollen de manera robusta sus procesos asociados.
- Visualización-recursos didácticos: Diferentes tipos de recursos didácticos contribuyen a desarrollar diversos procesos que están inmersos en la visualización (representar, transformar, conjeturar, etc.). A modo de ejemplo, se ha evidenciado que los SGD, utilizados adecuadamente, favorecen la experimentación y los procesos de conjeturación del estudiante en torno a los conceptos geométricos.

  A su vez, la experiencia del estudiante con procesos de visualización implica que este pueda relacionarse de forma eficiente con un determinado recurso didáctico. Asimismo, en correspondencia con la construcción robusta de un contenido geométrico, la visualización exige la búsqueda de un recurso didáctico que optimice diferentes factores como el tiempo empleado. Se considera que la visualización de las propiedades de un objeto geométrico puede en ocasiones desarrollarse de forma más eficiente utilizando un SGD. Si se estudian las propiedades de un cuadrado, por ejemplo, mediante la función de arrastre se pueden evidenciar las propiedades que se mantienen invariantes al modificar sus dimensiones de forma continua, acción más eficiente que la de dibujar muchos cuadrados en el tablero.

- Pensamiento geométrico espacial

Definición: es un tipo de pensamiento matemático acerca de los objetos del espacio, sus operaciones y relaciones de naturaleza espacial, así como las propiedades que posee cada uno de estos componentes.

Este pensamiento se desarrolla mutuamente con las destrezas de Hoffer (1981), las cuales se refieren a aspectos visuales, verbales, de dibujo, lógicos y aplicados. Esta interacción se enriquece cuando los estudiantes abordan situaciones retadoras de planteamiento de problemas, lo cual se propone evidenciar en los resultados de la presente tesis.

Función: el pensamiento geométrico espacial fortalece la ubicación del individuo en el espacio, apoyándose en representaciones de objetos de dos y tres dimensiones. De esta manera, adquiere habilidades para plantear y resolver problemas geométricos a partir de situaciones tanto internas como externas a las matemáticas y se favorecen procesos como la generalización y la abstracción. Se determinan así, relaciones y propiedades que se expresan a través de teoremas a un nivel de complejidad cada vez mayor.

En este proceso es importante la adecuada planificación de situaciones que sean retadoras para los estudiantes, de tal manera que conlleven a acciones de experimentación, exploración, búsqueda, comprensión, conjeturación, razonamiento, argumentación y comunicación. Estos procesos permiten fortalecer el pensamiento geométrico y conducen a los estudiantes a descubrir los conceptos geométricos y sus propiedades, así como aplicarlos en diversidad de situaciones.

Relaciones del pensamiento geométrico espacial con otras categorías de la fase de resolución:

- Pensamiento geométrico - Heurística de planteamiento de problemas

  Los procedimientos heurísticos potencian actividades dirigidas a interiorizar conceptos y definiciones, propiedades y construcciones geométricas espaciales, desarrollando en el estudiante su potencial creativo, su capacidad para observar, visualizar y construir modelos, lo cual contribuye a enriquecer el pensamiento geométrico y sus destrezas necesarias para el planteamiento de problemas.

  Por ejemplo, se puede anticipar que la aplicación del procedimiento heurístico *¿qué si no?*, demanda del estudiante la comprensión de relaciones entre conceptos para decidir qué atributos de una situación puede sustituir y por cuáles. Esta comprensión incide necesariamente en las destrezas lógicas del pensamiento geométrico del estudiante.

  Por otra parte, el desarrollo de las diferentes destrezas del pensamiento geométrico repercute sobre la cantidad y calidad de los recursos heurísticos que el estudiante utiliza al abordar una situación de planteamiento de problemas. Un ejemplo de esta situación tiene lugar cuando el estudiante desarrolla sus destrezas visuales y de aplicación según Hoffer (1981), puesto que estas le conducen a efectuar de manera más eficiente el procedimiento heurístico de creación de un modelo.

- Pensamiento Geométrico – Contenido Geométrico: sin duda, el contenido geométrico incide en el pensamiento geométrico del estudiante. Un contenido que propicie diversidad de conceptos, procedimientos o actitudes contribuye de manera más efectiva al desarrollo del pensamiento geométrico. En consecuencia, los contenidos deben propiciar actividades que favorezcan las destrezas visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas. De esta manera, un contenido que incluya la posibilidad de que el estudiante manipule y visualice los objetos geométricos, establezca relaciones entre elementos, plantee conjeturas, argumente y resuelva problemas, resulta ser más propicio para el desarrollo de las destrezas del pensamiento geométrico, que un contenido basado en la ejercitación de procedimientos según un esquema preestablecido.

Por su parte, el desarrollo del pensamiento geométrico facilita el aprendizaje de nuevos conceptos, la ejecución de procedimientos más elaborados, la motivación y adquisición de seguridad para el aprendizaje de la geometría. En definitiva, el avance en el pensamiento geométrico incide positivamente en el dominio de los componentes conceptual, procedimental y actitudinal del contenido geométrico. En concordancia con esta idea, el desarrollo en el estudiante de las diferentes destrezas del pensamiento geométrico genera una disposición para el abordaje de nuevos conceptos. Por ejemplo, las destrezas visuales inciden en la manera en que el estudiante afronta una situación basada en material manipulativo. Las destrezas verbales facilitan la comunicación de las ideas involucradas al aprender un nuevo contenido y las destrezas lógicas contribuyen a una mejor argumentación en torno a nuevas propiedades o relaciones entre los objetos geométricos.

- Pensamiento geométrico-recursos didácticos: Los recursos didácticos estimulan el desarrollo del pensamiento geométrico espacial pues favorecen actividades como la exploración, experimentación, formulación y reformulación de conjeturas. El uso adecuado de estos recursos conduce al descubrimiento de conceptos, definiciones, propiedades, teoremas y fórmulas.

Asimismo, la diversidad de recursos didácticos favorece el desarrollo de diferentes destrezas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, al tiempo que lo hace motivador, activo y dinámico. Mientras ciertos recursos están orientados a fortalecer destrezas visuales o de dibujo, otros son más apropiados para el desarrollo de destrezas verbales, lógicas o aplicadas. En este sentido, recursos específicos contribuyen predominantemente a consolidar aspectos concretos del pensamiento geométrico.

Por otro lado, el desarrollo en el pensamiento geométrico del estudiante le permite crear condiciones para hacer frente a recursos que requieran efectuar procesos cada vez más complejos (exploración, experimentación, conjeturación, etc.). El avance en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes constituye una herramienta para que el docente haga una selección adecuada de los recursos a utilizar en el aula.

- Pensamiento geométrico-visualización: dado que el aprendizaje de la geometría, por su naturaleza, requiere el uso de habilidades relacionadas con la visualización y sus procesos inherentes, se puede considerar que esta es fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico. Como se expuso previamente, la visualización contribuye a fortalecer diversidad de procesos, los cuales se pueden asociar con destrezas propias del pensamiento geométrico. La manipulación y representación favorecen las destrezas visuales y de dibujo. La comunicación se asocia con las destrezas verbales. Los procesos de conjeturación, generalización y abstracción inciden en el desarrollo de las destrezas lógicas. Por su parte, la modelación aporta al desarrollo de las destrezas aplicadas.

  Por su parte, dentro del desarrollo del pensamiento geométrico está implícito el ascenso en la complejidad de los procesos de conjeturar, generalizar y abstraer acerca de relaciones o propiedades de los objetos o conceptos geométricos. Además, se requiere construir representaciones más elaboradas y modelar fenómenos u objetos asociados a conceptos geométricos más complejos. En consecuencia, el avance en el pensamiento geométrico del estudiante favorece que este realice procesos de visualización cada vez más exigentes. Adicionalmente, el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante proporciona al docente criterios para el diseño de situaciones que favorezcan procesos de visualización que estén en concordancia con dicho nivel.

- **Situación retadora de planteamiento de problemas.**

  Concepto: es una situación de planteamiento de problemas que desafía la capacidad intelectual del estudiante, lo intriga e incita a usar su imaginación y creatividad al abordarla. Uno de los rasgos de una situación retadora es que debe favorecer la aplicación de estrategias heurísticas. Además, las situaciones retadoras poseen características análogas a los problemas retadores, pero teniendo en cuenta que sus propósitos son diferentes. A continuación, se consideran los rasgos planteados por Falk (1980) y Pérez (2004) para los problemas retadores, los cuales se transfieren a este tipo de situaciones:

  - Estimulan el pensamiento, son interesantes y desafiantes para el estudiante y el planteamiento de problemas a partir de ellas puede llegar a altos niveles de complejidad.
  - Exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática.
  - El planteamiento de problemas basado en la situación retadora exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos, para lograr un dominio y una comprensión profunda de los conceptos matemáticos asociados.

  Se es del criterio que esta última característica es preponderante en la definición de una situación retadora, pues exige a los estudiantes la integración de los conocimientos previos explícitos e implícitos. Adicionalmente, requiere de los recursos heurísticos, de la imaginación y creatividad y de las operaciones lógicas del pensamiento para alcanzar un robusto proceso de planteamiento de problemas.

Función: la situación retadora está en la base del proceso de planteamiento de problemas, interactuando con los demás componentes para darle solidez. Además, permite motivar a los estudiantes en la profundización en los conceptos involucrados, contribuye a que el estudiante establezca vías para crear nuevos problemas y facilita la construcción de relaciones más robustas entre los distintos problemas que plantea. Por lo anterior, la situación retadora es el componente dinamizador de la fase de resolución del modelo.

Origen: Las situaciones de planteamiento de problemas que se proponen en la parte práctica de esta tesis siguen la categorización de Stoyanova y Ellerton (1997) en estructuradas, semiestructuradas y libres. Independientemente de esta clasificación, la condición para estas situaciones de ser retadoras se puede verificar completamente solo después de ser abordadas por los estudiantes, momento en el cual es posible evidenciar que se satisface la totalidad de las características propias de una situación retadora. Esto está relacionado con el hecho de que diversos factores (conocimientos previos, familiaridad con problemas no rutinarios, incluso estados de ánimo, etc.) inciden en la calidad del abordaje que hacen los estudiantes de una situación de planteamiento de problemas. De esta manera, tanto el proceso como el producto de dicho planteamiento permiten determinar que, en efecto, la situación de planteamiento de problemas resultó ser retadora para el estudiante.

Relaciones de la Situación retadora de planteamiento de problemas con otras categorías asociadas a la fase de resolución:

- Situación retadora – heurística del planteamiento de problemas. Una característica esencial de una situación retadora es que favorece la aplicación de procedimientos heurísticos. Este tipo de situación proporciona los conceptos, propiedades y relaciones que se requieren en el planteo de recursos heurísticos para lograr un buen desempeño de los estudiantes en la creación de problemas.

  El tipo y complejidad de los procedimientos heurísticos empleados por el estudiante al momento de abordar una situación de planteamiento de problemas se fortalece con el hecho de que dicha situación sea retadora. Dado que esta contribuye a la creación de redes conceptuales progresivamente más sólidas, se favorecen reglas, estrategias o principios heurísticos, por ejemplo, la analogía, la particularización y la generalización, entre otras.

  Por otro lado, la situación retadora motiva el planteamiento de problemas por los estudiantes, pero necesita apoyarse en la heurística para hacer más eficiente y robusto este proceso. Los recursos heurísticos propician que el estudiante explore, experimente, construya, descubra y redescubra los conceptos de la geometría espacial presentes en la situación retadora.
- Situación retadora – contenido geométrico: Una situación retadora contiene implícitamente aspectos concretos del contenido geométrico. Esta situación facilita el tránsito entre diferentes conceptos, juicios o procedimientos propios del contenido, gracias a la construcción de redes de conceptos. Por otra parte, el hecho de que el contenido geométrico involucre la asociación cada vez más compleja de nuevos conceptos, propiedades y relaciones entre estos, favorece la introducción de situaciones retadoras progresivamente más elaboradas y que demandan del estudiante un mayor grado de apropiación de los procedimientos heurísticos de planteamiento de problemas.

- Situación retadora – recursos didácticos: La situación retadora exige el uso de recursos didácticos específicos acordes con el contexto, los conceptos geométricos involucrados y las estrategias de planteamiento de problemas que se desea desarrollar. A su vez, el tipo de recurso didáctico incide en el abordaje que hace el estudiante de la situación retadora. La situación debe sugerir un recurso idóneo que facilite el proceso de generación de nuevos problemas más adecuadamente que otros recursos.
- Situación retadora – visualización: Como se ha mencionado, uno de los rasgos de una situación retadora es que permite determinar relaciones entre objetos y conceptos geométricos, y en este proceso la visualización es un factor fundamental. El estudiante puede valerse de esta para establecer o enriquecer redes de conceptos presentes al abordar la situación, propiciando una comprensión y comunicación idónea del conocimiento matemático. Esto implica un uso adecuado de procesos como creación, interpretación, uso y reflexión que son propios del acto de visualizar.

  Por otra parte, el avance en la complejidad de las situaciones retadoras que se le plantean al estudiante, demanda de este un progreso en el desarrollo de los diferentes procesos vinculados a la visualización. De esta manera, si se plantea a los estudiantes situaciones retadoras cada vez más exigentes, por ejemplo, pasando de situaciones estructuradas a semiestructuradas y de estas a situaciones libres, se desarrolla una visualización que implica procesos asociados cada vez más consolidados. Se plantea que situaciones retadoras que incluyan gradualmente menos información explícita, exigen del estudiante un desarrollo mayor de procesos como la abstracción o la generalización, y por tanto de una visualización con un mayor grado de complejidad.

- Situación retadora – pensamiento geométrico: La situación retadora ofrece los elementos necesarios que fortalecen la estructura de relaciones del pensamiento geométrico. Asimismo, facilita el desarrollo de las diferentes destrezas asociadas con este tipo de pensamiento (visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas, según Hoffer, 1981).

  Se espera verificar que la calidad de una situación retadora de planteamiento de problemas geométricos está relacionada con el número de destrezas geométricas que propicia al momento de ser abordada por el estudiante.

  Por otro lado, el avance en el desarrollo del pensamiento geométrico, sobre la base del fortalecimiento de las destrezas visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas, favorece el abordaje de situaciones retadoras con un nivel de complejidad cada vez mayor. Esto propicia que el estudiante sea capaz de desarrollar un proceso robusto de planteamiento de problemas.

La situación retadora y sus relaciones con el sistema conformado por las categorías de la fase de resolución del modelo.

A diferencia de los demás componentes del modelo, la situación retadora de planteamiento de problemas posee el rasgo especial de propiciar que este proceso sea robusto. En el lenguaje corriente, el adjetivo “robusto” se aplica a un objeto que es resistente por su grosor, gran densidad y firmeza. En el contexto del planteamiento de problemas es posible hacer una analogía de cada una de estas características, como se expresa a continuación:

- El grosor se puede interpretar por la cantidad de conceptos presentes en el proceso de planteamiento de problemas.
- La densidad se puede asociar con la cantidad de relaciones que se establecen entre un concepto y otros que le sean cercanos.

- La firmeza se puede interpretar como la solidez que poseen dichas relaciones entre conceptos.

Como se ha dicho anteriormente, una situación retadora, por su naturaleza y características, promueve redes conceptuales cada vez más amplias y sólidas. Por tanto, el hecho de que una situación sea retadora se constituye en una herramienta para lograr procesos robustos de planteamiento de problemas.

La situación retadora tiene una relación dinámica con las categorías de la fase de resolución del modelo: heurística de planteamiento de problemas, contenido geométrico, recursos didácticos, visualización y pensamiento geométrico. Todos estos componentes están mutuamente relacionados, como se ha explicado anteriormente. Sin embargo, la situación retadora, además de interactuar con cada uno, tiene una incidencia fundamental sobre el sistema de relaciones que se establece entre ellos, pues constituye el aspecto que le confiere un carácter robusto al proceso completo de planteamiento de problemas. De esta manera, dinamiza a los restantes componentes, perfeccionando y enriqueciendo el sistema.

La Figura 10 muestra las relaciones entre los componentes Heurística de planteamiento de problemas, Contenido geométrico, Recursos didácticos, Visualización y Pensamiento geométrico, a partir de las consideraciones del presente epígrafe, explicitando las relaciones individuales entre estos componentes, en ambos sentidos.

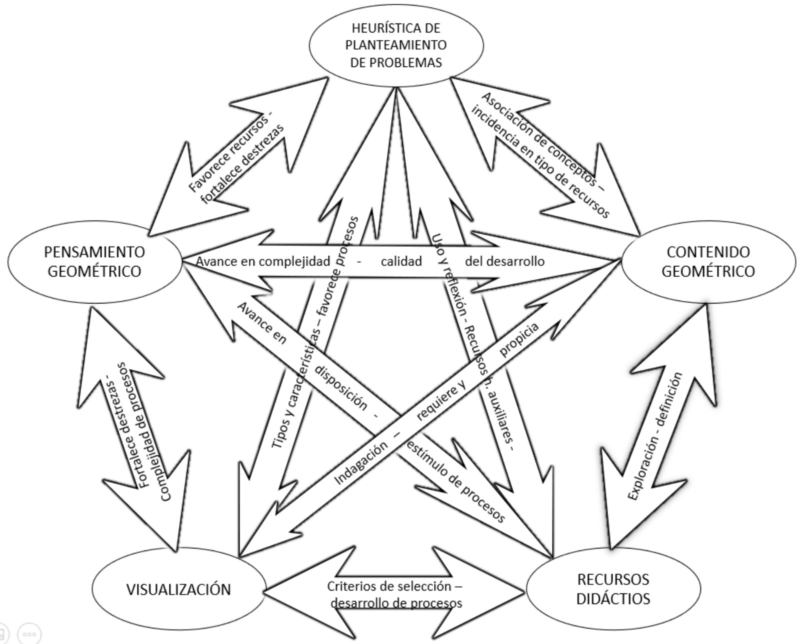


Figura 10. Componentes del modelo

La Figura 11 presenta el sistema de relaciones entre la Situación retadora y los demás componentes mostrados en la Figura 10. Es de destacar que se establece una relación especial entre la situación retadora y el proceso interactivo entre los demás componentes, dado por la posibilidad de generación de redes conceptuales, lo cual conlleva a un proceso robusto de planteamiento de problemas.

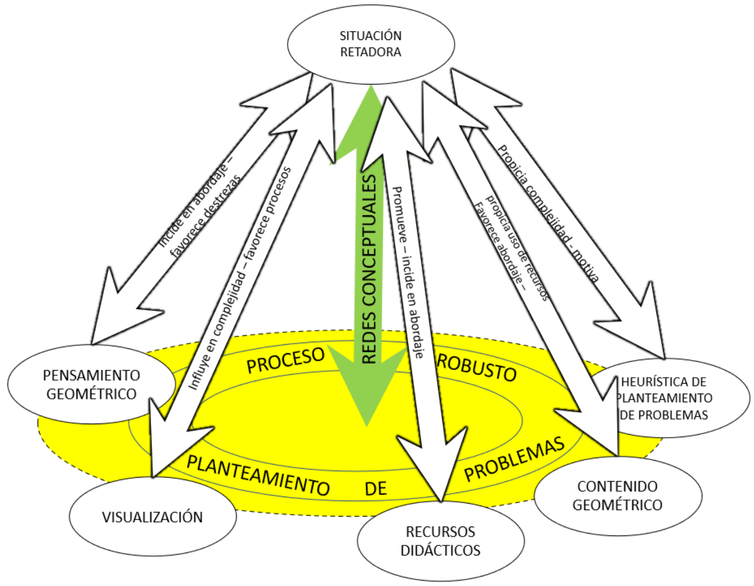


Figura 11. Relaciones entre la situación retadora y demás componentes del modelo

Finalmente, la Figura 12 muestra la evolución del proceso de planteamiento de problemas mediante el paso de situaciones estructuradas a situaciones semiestructuradas y de estas a las situaciones libres. La variación en la coloración del subsistema que aparece en la base de cada diagrama expresa el hecho de que este se transforma a lo largo del proceso. En el tránsito entre los distintos tipos de situaciones hay una evolución gradual en los recursos heurísticos, en el contenido geométrico, en el tipo de recursos didácticos, en la complejidad de los procesos de visualización y en el desarrollo del pensamiento geométrico. Este proceso conlleva a que los estudiantes planteen más y mejores problemas, en el sentido de ser más interesantes, retadores y basados en el pensamiento geométrico y no en la ejercitación de algoritmos.

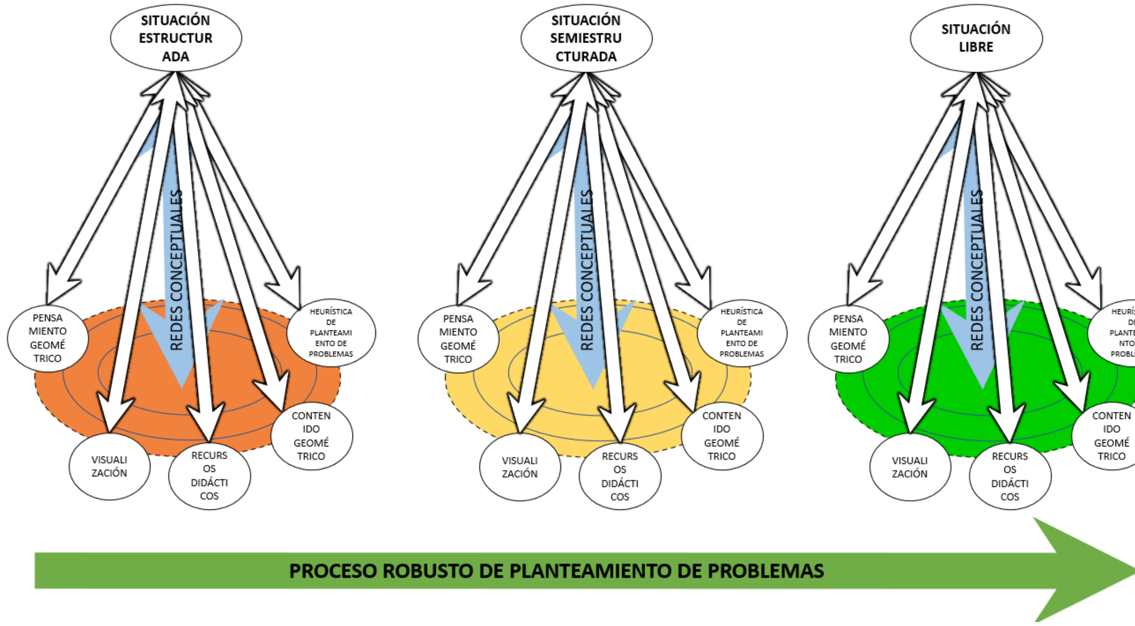


Figura 12. Evolución del proceso de planteamiento de problemas

Con este modelo se logra que los estudiantes profundicen en una comprensión y dominio de los procesos de planteamiento de problemas relacionados con la geometría del espacio, tomando como base los conocimientos previos y la construcción de significado de conceptos cada vez más complejos.

La relación sistémica entre estos componentes: Heurística de planteamiento de problemas, Contenido geométrico, Recursos didácticos, Visualización, Pensamiento geométrico y la Situación retadora como componente dinamizador del sistema, originan la formación de la nueva cualidad deseada: procesos robustos de planteamiento de problemas geométricos. La relación entre los componentes del sistema permite una evolución del proceso de planteamiento de problemas en tres fases esenciales sustentadas en la introducción sucesiva de situaciones retadoras estructuradas, semiestructuradas y libres. Es decir, aparecen nuevas situaciones retadoras, que necesitan de un contenido geométrico cada vez más complejo para desarrollar un proceso robusto de planteamiento de problemas geométricos.

Relaciones esenciales del modelo

La esencia de este modelo está dada por sus relaciones entre las fases y entre los componentes de la fase de resolución, que lo caracterizan y tipifican. Es importante destacar los niveles cada vez más profundos de estas relaciones.

- La primera relación está dada por las categorías de los fundamentos teóricos, las cuales constituyen la base del modelo didáctico.
- La segunda relación se presenta entre los fundamentos teóricos, la necesidad y la fase de resolución.
- La tercera relación se sitúa entre los componentes del momento de resolución, que en su interrelación forman la nueva cualidad.
- La cuarta relación se establece entre los componentes de la fase de resolución del modelo y la concreción práctica.

El gráfico de la Figura 13 es una representación que sirve para ilustrar los componentes, etapas, cualidades y relaciones esenciales del modelo. La situación retadora deviene en la práctica como componente dinamizador del modelo, se manifiesta y se refleja en los demás componentes del momento de resolución, para propiciar el planteamiento de problemas.

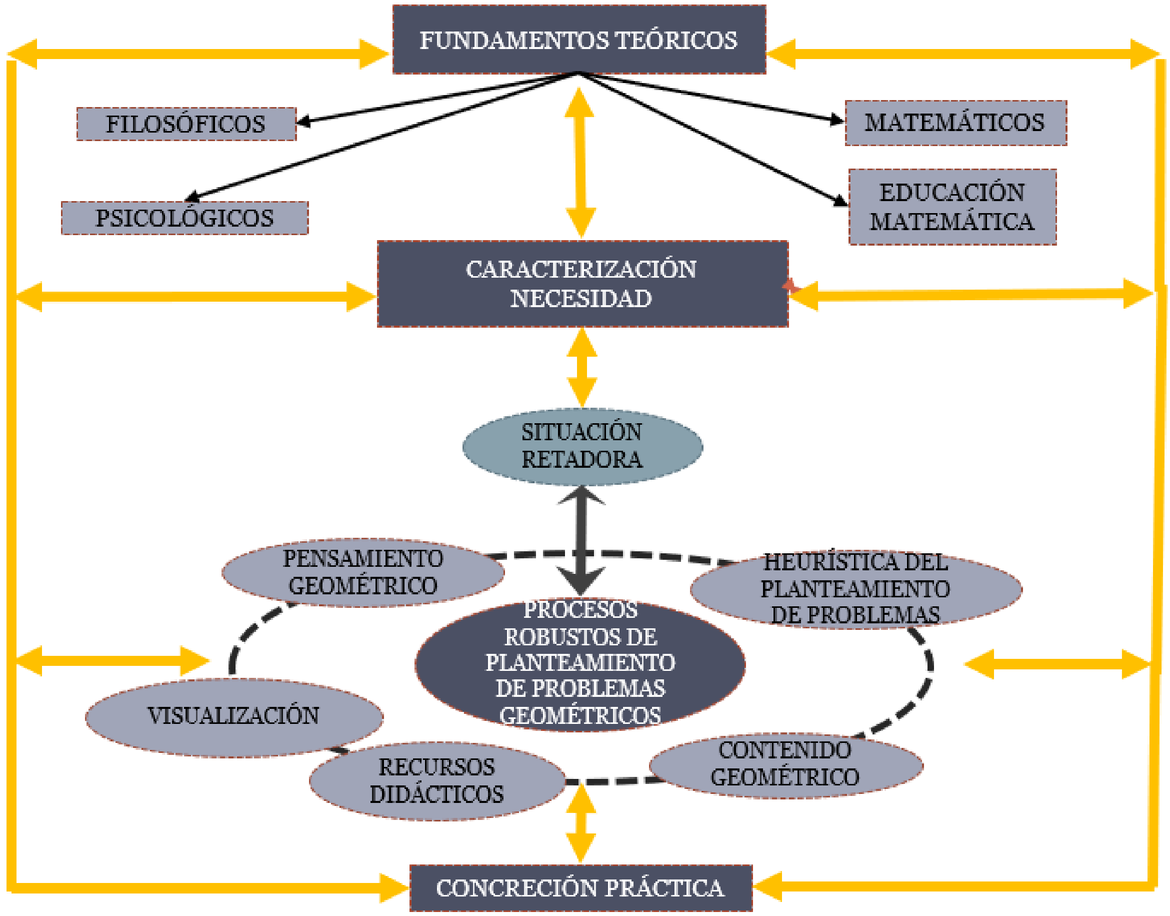


Figura 13. Representación gráfica de las relaciones esenciales del modelo didáctico para el planteamiento de problemas.

4.1.4. Cuarta parte: Concreción práctica.

En esta parte se orienta:

- Un sistema de actividades para el planteamiento de problemas geométricos, el cual se basa en el modelo didáctico y constituye la salida a la práctica educativa del modelo. Este sistema consta de 8 actividades, la primera de las cuales es de carácter preliminar y las demás organizadas en tres bloques en concordancia con el tipo de situaciones propuestas en ellas: estructuradas, semiestructuradas y libres. Cada actividad consta de una sugerencia metodológica que permite la instrumentación en la práctica. El sistema de actividades se presenta en epígrafe 4.2.

- La forma de evaluación para el proceso de planteamiento de problemas se precisa en cada una de las actividades, en concordancia con el alcance de los objetivos. Se tienen en cuenta los diferentes componentes del modelo didáctico. Para brindar una evaluación más justa del proceso, el profesor integra la observación, la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación.

4.2. Sistema de actividades

4.2.1. Actividad 0. Introducción al planteamiento de problemas

Objetivos

- Identificar conceptos básicos de geometría del espacio
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Generar diversos problemas de geometría del espacio a partir de diferentes situaciones
- Discutir formas de plantear problemas de geometría del espacio

Sugerencias didácticas

Contenido

La presente actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes de los conceptos de caras, vértices y aristas de un poliedro. Es por tanto, una guía de profundización en esta temática con base en la resolución y planteamiento de problemas asociados.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

Se aborda en la presente guía diferentes situaciones de planteamiento de problemas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de problemas partiendo de situaciones acerca de la construcción y desarrollo de sólidos geométricos.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Tiempo de trabajo: 1 hora 40 min.
Recursos: lápiz y papel, palillos de diferentes tamaños, plastilina, papel o cartón paja

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

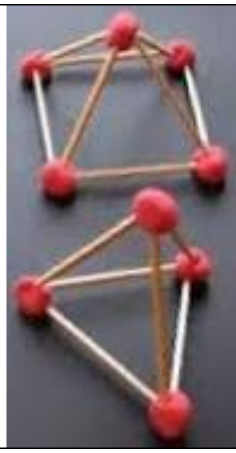
Presentación

El docente presenta la actividad como profundización de las temáticas de construcción de cuerpos geométricos enfatizando en el planteamiento de problemas.

Primer momento (situaciones estructuradas)

En cada una de las situaciones se maneja el siguiente esquema de actividades asociadas:

1. Resolución: Se presenta a los estudiantes el problema. Se les pide resolverlo.

Situación 1	Situación 2
 Podemos construir poliedros uniendo palillos por sus extremos usando plastilina. ¿Cuántas pirámides distintas se pueden construir usando una cantidad de palillos de máximo 12?	 Podemos construir poliedros uniendo palillos por sus extremos usando plastilina. Usando exactamente 8 bolitas de plastilina (vértices) ¿cuántos poliedros se pueden construir?

2. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas por los estudiantes a fin de aclarar aspectos conceptuales.

3. Planteamiento docente: El docente realiza algunos ajustes diferentes al problema, poniendo en evidencia varios tipos de problemas que se pueden obtener a partir de este, así como diferentes estrategias para obtenerlos.

4. Planteamiento y resolución grupal: Se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado y resolver por lo menos uno de ellos.

Segundo momento (situaciones semiestructuradas)

Se maneja el siguiente esquema de actividades asociadas:

1. Planteamiento docente: El docente realiza ejemplos de posibles preguntas que pueden surgir a partir de la situación dada, poniendo en evidencia algunos tipos problemas que se pueden obtener a partir de esta, así como diferentes estrategias para obtenerlos.

Situación 1

Un hexaedro es un poliedro de seis caras. Se proporciona a cada grupo palillos de longitudes 5 y 10 cm. Plantear problemas usando esta información.

2. Planteamiento y resolución grupal: Se solicita a los grupos plantear nuevos problemas a partir de la situación dada, resolver por lo menos uno de ellos.

Tercer momento (situaciones libres)

Se manejará el siguiente esquema de actividades asociadas:

1. Planteamiento docente: El docente presenta algunos ejemplos de problemas posibles que se pueden obtener a partir de la situación dada, poniendo en evidencia tipos de problemas que se pueden obtener, y posibles estrategias para obtenerlos.

2. Planteamiento y resolución grupal: Se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir de la situación dada, resolver por lo menos uno de ellos.

Situación 1
Crear problemas que estén relacionados con las caras, las aristas o los vértices de poliedros.

Cuarto momento

Socialización plenaria y conclusiones: Se socializan algunas de las respuestas y se obtienen conclusiones de la actividad.

4.2.2. Actividad 1.1 Construcción y desarrollo de sólidos

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio

- Generar diversos tipos de problemas de geometría del espacio a partir de problemas dados.
- Discutir posibles modificaciones a problemas de geometría del espacio
- Realizar trabajo colaborativo en la construcción de nuevos problemas.

Sugerencias didácticas

Contenido

Esta actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes del desarrollo y construcción de sólidos geométricos. Se plantea como una guía para reforzar estos aprendizajes, con base en el proceso de resolución y planteamiento de problemas.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

Se aborda en la presente guía diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de problemas partiendo del desarrollo y construcción de sólidos geométricos.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución o el planteamiento de un problema, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Tiempo de trabajo: 1 hora 40 min.

Recursos: dispositivo electrónico, lápiz y papel.

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios:

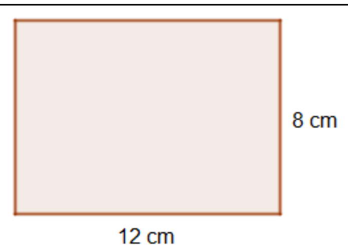
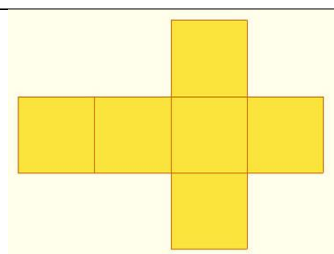
- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

El docente presentará la actividad explicando brevemente la idea de las situaciones estructuradas en el planteamiento de problemas, así como el contenido asociado a la actividad.

A continuación, se tendrá en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: se presenta a los estudiantes el problema y se les pide resolverlo.

Situación 1	
	Recortar un rectángulo de papel con las dimensiones indicadas. A partir de este rectángulo, ¿qué sólidos geométricos se pueden obtener?
Situación 2	
	Es conocido que esta figura corresponde al desarrollo de un cubo. ¿Qué otras maneras de juntar los cuadrados también son desarrollo de un cubo?

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.

4.2.3 Actividad 1.2 Deltaedros y secciones planas

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio

- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Trabajar colaborativamente en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

Esta actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes de generalidades de sólidos geométricos, pues lo relativo a secciones planas de sólidos no ha sido trabajado previamente por ellos. Se propone que los estudiantes formulen nuevos problemas a partir del enunciado de un problema inicial.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, láminas de acetato, cinta transparente, plastilina

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

- Observación del docente

- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: se presenta a los estudiantes el problema y se les pide resolverlo.

Situación 1	
	Se proporciona a cada grupo 10 triángulos equiláteros de acetato, además de cinta pegante. ¿Qué sólidos geométricos se pueden construir uniendo triángulos equiláteros?

Situación 2	
	Se proporciona plastilina para que los estudiantes elaboren un cubo sólido. ¿Qué figuras se pueden obtener al hacer diferentes cortes planos al cubo?

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.

4.2.4 Actividad 1.3 Cálculo del área superficial

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Realizar trabajo colaborativo en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

La presente actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes de cálculo del área superficial de distintos sólidos geométricos. Se plantea que los estudiantes planteen nuevos problemas a partir de un problema inicialmente propuesto.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, apuntes de clase

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

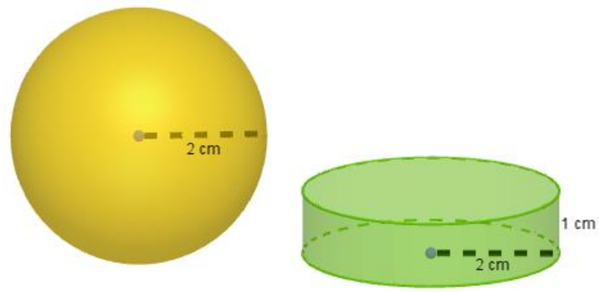
- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

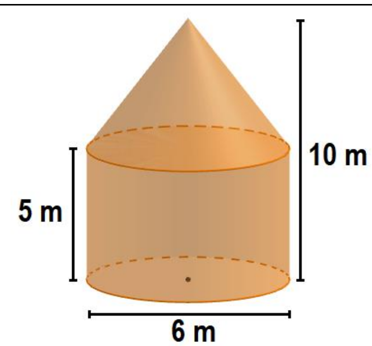
1. Resolución: se presenta a los estudiantes el problema y se les pide resolverlo.

SITUACIÓN 1



¿Cuál de los dos sólidos posee mayor área superficial?

SITUACIÓN 2



Hallar el área superficial de la figura mostrada

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.
3. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas en los grupos y se obtiene conclusiones de la actividad.

4.2.5. Actividad 2.1 Sólidos inscritos

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio en el contexto del planteamiento de problemas
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Colaborar con sus compañeros en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

La presente actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes en cuanto a generalidades de los sólidos geométricos, pues es nuevo para ellos la idea de inscribir un sólido en otro. Se propone que los estudiantes inventen un problema con base en la información presentada, lo resuelvan y procedan a plantear nuevos problemas a partir de este.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, apuntes de clase

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

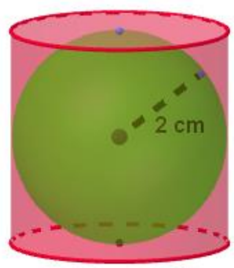
- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

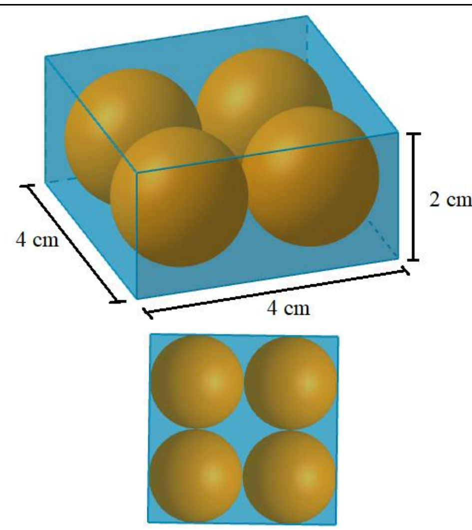
Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: a partir de cada una de las siguientes situaciones se pide a los estudiantes que planteen el enunciado de un problema y lo resuelvan.

SITUACIÓN 1



SITUACIÓN 2



(Vista superior)

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.
3. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas por los grupos y se obtienen conclusiones de la actividad.

4.2.6. Actividad 2.2 Diagonales y longitudes en sólidos

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Trabajar colaborativamente en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

Esta actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes acerca de generalidades de sólidos geométricos, ya que el concepto de diagonal de un poliedro o segmentos al interior de un sólido no ha sido trabajado por ellos. Se propone que los estudiantes inventen un problema con base en la información presentada, lo resuelvan y procedan a plantear nuevos problemas a partir de este.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, apuntes de clase

Evaluación

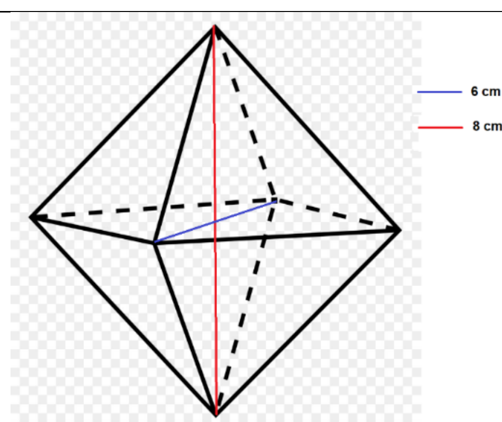
Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

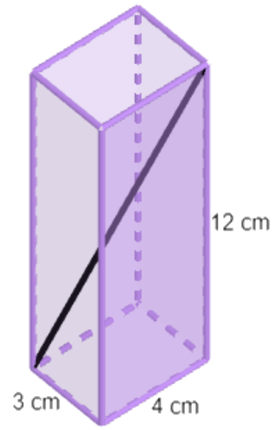
- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: a partir de cada una de las siguientes situaciones se pide a los estudiantes que planteen el enunciado de un problema y lo resuelvan.

SITUACIÓN 1


SITUACIÓN 2	
	Una diagonal de un poliedro es cualquier segmento que une vértices que no pertenecen a una misma cara.

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.

3. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas por los estudiantes y se obtienen conclusiones de la actividad.

4.2.7. Actividad 3.1 Objetos cotidianos. Tetraedro seccionado

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio.
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Colaborar con sus compañeros en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

Esta actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes de las generalidades sobre sólidos geométricos en un contexto aplicado. Se plantea que los estudiantes, dada la situación propuesta, establezcan un contexto para un problema, diseñen la información inicial y formulen el enunciado de un problema a ser resuelto, para luego plantear nuevos problemas a partir de este.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, apuntes de clase

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

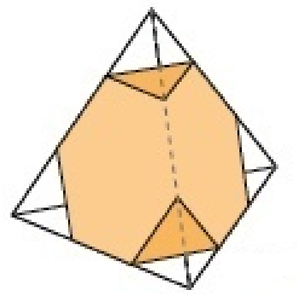
- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: a partir de cada una de las siguientes situaciones se pide a los estudiantes que planteen el enunciado de un problema y lo resuelvan.

SITUACIÓN 1
Plantear problemas acerca de objetos cotidianos con forma de sólidos geométricos.

SITUACIÓN 2
 La figura inicial es un tetraedro regular

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.
3. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas por los estudiantes y se obtienen conclusiones de la actividad.

4.2.8. Actividad 3.2 Esferas magnéticas. Cubo Rubik.

Objetivos

- Identificar conceptos de geometría del espacio
- Generar nuevos problemas a partir de problemas dados.
- Resolver problemas que involucran conceptos de geometría del espacio
- Trabajar colaborativamente en la construcción de problemas novedosos.

Sugerencias didácticas

Contenido

La presente actividad parte del conocimiento previo de los estudiantes de proyección de las generalidades acerca de sólidos geométricos, en un contexto más aplicado. Se propone que los estudiantes inventen un contexto para un problema, definan la información inicial, el enunciado del problema y a partir de este formulen nuevos problemas.

Organización de la enseñanza

Se desarrolla un encuentro presencial, en el que hay distintas etapas de organización que incluyen presentación por parte del docente, trabajo individual de los estudiantes, discusión grupal y socialización en plenaria.

En la presente guía se abordan diferentes situaciones problemáticas con base en las cuales se propone a los estudiantes la creación de nuevos problemas.

El profesor a través de preguntas heurísticas puede motivar que los estudiantes por sí mismos concreten la solución a un problema o el planteamiento, de acuerdo con la fase de la actividad que se esté desarrollando.

Recursos: lápiz y papel, apuntes de clase, esferas magnéticas

Evaluación

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios

- Observación del docente
- Revisión de escritos
- Autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación

Desarrollo de la actividad

Se tiene en cuenta el siguiente esquema:

1. Resolución: a partir de cada una de las siguientes situaciones se pide a los estudiantes que planteen el enunciado de un problema y lo resuelvan.

SITUACIÓN 1
 Inventar problemas con base en el material entregado (20 esferas magnéticas)

SITUACIÓN 2
Plantear problemas de geometría tridimensional que estén basados en el cubo de Rubik.

2. Planteamiento y resolución grupal estudiantes: se solicita a los estudiantes plantear nuevos problemas a partir del problema dado, resolver por lo menos uno de ellos.

3. Discusión plenaria: se discuten las respuestas obtenidas por los estudiantes y se obtienen conclusiones de la actividad.

4.3. Consideraciones para la implementación de actividades

Esencialmente, una tarea de planteamiento de problemas tiene lugar en alguna de las siguientes circunstancias:

1. Formulación de un problema a partir de una situación: se proporciona al estudiante una situación (que puede ser estructurada, semiestructurada o libre) a partir de la cual debe plantear uno o varios problemas. La situación puede ser ideada por el docente u obtenida de un problema rutinario o de libro de texto al que se le ha suprimido la pregunta. También puede ser una situación ideada por el

estudiante y que forma parte o no de un problema anteriormente planteado. Algunas de las tareas presentes en la literatura propuestas a partir de una situación son:

- Proponer al estudiante que plantee "tantos problemas como le sea posible" (Silver y Cai, 2005).
- Proporcionar al estudiante una operación específica y solicitarle que plantee un problema que involucre dicha operación (Silver y Cai, 2005).
- Solicitar al estudiante que plantee un problema dada una respuesta predeterminada (Silver y Cai, 2005).
- Exponer al estudiante ante un ejemplo de planteamiento de problemas con base en la situación y pedirle que haga lo propio con esa u otra situación (Kilpatrick, 1997).

2. Reformulación de un problema dado: se proporciona al estudiante un problema (previamente resuelto o no) y se propone que lo modifique. Dicho problema puede ser ideado por el docente o provenir de otra fuente, incluyendo al estudiante mismo. A partir de la idea de que, en la resolución de un problema, generalmente existe algún procedimiento que permite pasar de unos objetos iniciales a unos objetos resultantes, algunas tareas de este tipo son las siguientes:

- Modificar los objetos iniciales y usar el mismo procedimiento para obtener nuevos objetos resultantes. Un ejemplo es el típico ejercicio procedimental.
- Modificar los objetos iniciales y buscar el procedimiento adecuado para obtener los objetos resultantes. Este puede ocurrir cuando se aplica por ejemplo la estrategia "¿Qué si no?" de Brown y Walter (2005). Por ejemplo, cambiar los exponentes en el teorema de Pitágoras conduce a un problema notablemente más complejo. En este caso se ubica también el planteamiento de un problema general, especial o extendido en el sentido de Contreras (2007).

- Modificar los objetos iniciales y resultantes y buscar el procedimiento que permita pasar de los primeros a los últimos. Un ejemplo de esto ocurre cuando se plantea el recíproco de un problema de demostración en geometría (Contreras, 2007).

Entre las actividades de planteamiento de problemas están las secuencias de dos o más de las anteriores tareas diseñadas de forma articulada. Tal es el caso de la formulación de un problema Pre seguido de un problema Pos, tal como refiere Malaspina (2016).

Conclusiones del capítulo 4

Se plantea un sistema de actividades cada una de las cuales parte de situaciones de planteamiento de problemas. La propuesta para el sistema de actividades asociado al presente trabajo de grado se organiza en tres bloques de actividades, cada uno de los cuales involucra diferentes tipos de tareas, como los anteriormente enunciados. Los bloques de actividades son los siguientes:

- Bloque 1: actividades de planteamiento de problemas con base en situaciones estructuradas.
- Bloque 2: actividades de planteamiento de problemas a partir de situaciones semiestructuradas.
- Bloque 3: actividades de planteamiento de problemas a partir de situaciones libres.

CAPÍTULO 5. VALIDACIÓN DE LOS APORTES Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1. Análisis de los resultados de los instrumentos aplicados

5.1.1. Resultados de encuesta a docentes

Consideraciones a partir de las preguntas cerradas. A la pregunta "¿Considera usted que la resolución de problemas aporta al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes?, los docentes responden positivamente en un muy alto porcentaje correspondiente a los rangos "Siempre" y "Casi siempre". Adicionalmente, ninguno de los encuestados responde en el rango "Nunca". Lo anterior corresponde a la generalizada apreciación positiva de la resolución de problemas entre los encuestados.

Las respuestas a la pregunta "En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, ¿utiliza usted la resolución de problemas?" muestran que entre los encuestados hay una implementación regular de la resolución de problemas en el aula. Sin embargo, se puede inferir, comparativamente con la anterior pregunta, que hay un pequeño porcentaje de docentes que, aunque consideran importante la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, sólo la implementan en el aula algunas veces. También resulta interesante el hecho de que, pese a que un pequeño porcentaje de los encuestados consideran que la resolución de problemas nunca aporta al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, aun así, han implementado actividades de resolución de problemas en el aula. Incluso teniendo de presente estos casos especiales, se evidencia un uso amplio del enfoque por parte de los docentes encuestados

Los porcentajes de respuesta a la pregunta "Con respecto al tipo de problemas que usted propone ¿considera que éstos son susceptibles de diversas soluciones y les permite a sus estudiantes trabajar de manera independiente?" coinciden exactamente con los de la pregunta anterior. Se puede inferir en relación con la práctica de los docentes encuestados que, en general, cuando estos implementan resolución de problemas lo hacen a partir de actividades no rutinarias. Esto corresponde a una apropiación adecuada de este enfoque de Educación Matemática por parte de los docentes.

Con base en las respuestas a la pregunta “¿Considera usted que el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes contribuye a su creatividad matemática?” se pueden inferir algunos aspectos de interés. Un pequeño porcentaje de los encuestados consideran que el planteamiento de problemas no contribuye a la creatividad matemática de los estudiantes. Por otro lado, algunos de los encuestados que implementan la resolución de problemas en el aula en los rangos “siempre” y “casi siempre”, consideran que el planteamiento de problemas aporta a la creatividad matemática solo algunas veces. Lo anterior evidencia que, pese a que entre los encuestados existe una apropiación más o menos generalizada de la resolución de problemas, esto no garantiza que consideren suficientemente importante el planteamiento de problemas para la creatividad matemática de los estudiantes.

Con respecto a la pregunta “¿En sus clases de geometría, permite que sus estudiantes planteen problemas propios?”, no hay encuestados que respondan negativamente. Sin embargo, se puede observar que entre los encuestados que mayoritariamente consideran importante el planteamiento de problemas para la creatividad matemática, hay un porcentaje cercano al 20% que lo implementa en el rango “algunas veces” o “rara vez”. Se puede inferir que pese a la valoración positiva que dan al planteamiento de problemas, aun no la adoptan con suficiente regularidad en actividades prácticas de aula.

Con base en las respuestas a la pregunta “¿Utiliza algún software como herramienta de apoyo en el aprendizaje de la Geometría, para la resolución y planteamiento de problemas?” se puede evidenciar que sólo la mitad de los encuestados hacen un uso regular de software de geometría dinámica (en el rango “Casi siempre”), el resto se ubican en los rangos “algunas veces” y “rara vez”.

Consideraciones a partir de las preguntas abiertas. Con base en la pregunta "¿Cuáles son las mayores dificultades que ha observado en los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría?" se identifican las siguientes dificultades:

- Difícil retención de conceptos, teoremas, fórmulas y propiedades antes estudiadas
- Limitada comprensión del estudiante sobre el proceso de resolución de problemas
- Reconocimiento precario de los objetos que corresponden a un concepto matemático.
- Limitado manejo de representaciones visuales.
- Insuficiente rigor en la notación.
- Escaso rigor en la argumentación.
- Escaso conocimiento y manejo de estrategias en el planteamiento de problemas

Con base en la pregunta "¿Qué estrategias ha implementado usted con sus estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría a través de la resolución de problemas o planteamiento de problemas?" se identifican las siguientes estrategias:

- Principios, estrategias, reglas y preguntas heurísticas.
- Estimulación del razonamiento y uso de conocimientos propios.
- Uso de ejemplos y contraejemplos en la construcción de definiciones de objetos geométricos.
- Implementación de problemas basados en el contexto y experiencias previas.
- Trabajo colaborativo.
- Uso de materiales didácticos (concretos).
- Construcción con regla y compás desde etapas tempranas.
- Interdisciplinariedad.
- Uso de software matemático.

Entre las sugerencias propuestas por los docentes como respuesta a la pregunta "¿Qué sugerencias podría usted proporcionar en relación con la implementación del planteamiento de problemas de Geometría por parte de los estudiantes?" se destacan las siguientes:

- Involucrar la modelación matemática.
- Aplicar métodos heurísticos.
- Evidenciar en los estudiantes la aplicabilidad de las matemáticas (matematización).
- Plantear problemas retadores.
- Usar recursos visuales y manipularlos.
- Considerar objetos geométricos del entorno (contextualización).
- Identificar conceptos previos del estudiante.
- Problemas con diferentes métodos de solución.

5.1.2. Resultados de entrevista a exolímpicos

Importancia del aprendizaje basado en problemas geométricos. Con base en el criterio de dos exintegrantes de equipos de olimpiadas matemáticas, Nicolás de la Hoz de Colombia y Dagnier Curra de Cuba, los problemas geométricos poseen una serie de ventajas que les confieren un alto nivel de relevancia en el aprendizaje de los estudiantes. Entre otras señalan las siguientes:

- Permiten ampliar el alcance de los conocimientos, las habilidades y la capacidad imaginativa y creativa del estudiante.
- Contribuyen a la formación de un pensamiento integral, flexible y capaz de ofrecer soluciones alternativas.
- Fortalecen tareas de diagnóstico, planificación, diseño, fabricación, evaluación e interpretación.
- Favorecen el desarrollo cognitivo de los estudiantes, en función de lograr un aprendizaje significativo en el contexto que se estudia o analiza.

- Permiten evidenciar la importancia y utilidad práctica de la teoría, mediante la modelación de situaciones reales.

Limitaciones en el aprendizaje de la geometría. Los entrevistados identifican las siguientes limitaciones:

- Ausencia de una libertad imaginativa y creativa en el estudiante, propiciada por una enseñanza reproductiva y memorística.
- Insuficientes condiciones previas para abordar demostraciones geométricas que dificultan el análisis de los elementos geométricos presentes en una situación.
- Actitud ejecutora y óptima para dar respuestas a los problemas geométricos, contraria al camino no lineal que tiene la vía de resolución de un problema.
- Debilidad en la organización de las ideas del estudiante pues se requiere una solución formal bien estructurada.
- Escasa motivación en el estudiante por la resolución de problemas geométricos.
- Limitaciones en la orientación de un aprendizaje sobre la base del error y en la atención a diferencias individuales en el proceso de resolución de problemas geométricos.
- Poca exposición a la geometría en el colegio: no se realizan demostraciones formales y el nivel de abstracción es mínimo.

Características de un problema creativo. Sin desconocer la naturaleza subjetiva de la creatividad, los entrevistados consideran como características propias de un problema creativo las siguientes:

- El enunciado es simple, el resultado interesante y la solución llamativa.
- Requiere imaginación, a diferencia de un ejercicio tradicional.
- Acude a la capacidad de generar ideas del estudiante que lo conduzcan a pequeños descubrimientos (relaciones, conjeturas).

- El proceso de resolución o camino a transitar es siempre irregular y no obedece a patrones estipulados.
- No hay una fórmula predeterminada en el planteamiento de problemas.
- Requiere desarrollar varias ideas que luego se integran en resultados más concretos.
- El resolutor puede demorar horas e incluso días en su resolución.

Posibles estrategias para el planteamiento de problemas. Se destacan las siguientes:

- Uso de la imaginación.
- Uso de analogías.
- Aplicación de la experiencia en la solución de problemas.
- En ocasiones, desvinculación de problemas previamente conocidos e intento de formulación de algo completamente nuevo.

5.1.3. Entrevista a expertos

Se realiza una entrevista al doctor Alexander Soifer de la Universidad de Colorado, para indagar acerca de sus apreciaciones del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, así como de la resolución y planteamiento de problemas.

Concepción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El experto realiza las siguientes observaciones:

- No se trata de transmitir conocimientos.
- Se debe crear una atmósfera que permita a los estudiantes aprender matemáticas haciéndolas.
- El papel del docente es guiar paulatinamente a los estudiantes en la dirección correcta, quizás hacer algunas correcciones, mostrar perspectivas, etc.

Dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El experto considera que la principal dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría es la escasa interrelación que en la escuela se establece con otras ramas de la matemática, haciendo poco productivo el aprendizaje. Esta es una característica de la geometría euclidiana y la geometría analítica, que se estudian usualmente a nivel del colegio y la universidad. El experto manifiesta, de esta manera, que prefiere trabajar con geometría discreta porque favorece la coexistencia de geometría, álgebra y teoría de números trabajando juntas sobre problemas de corte geométrico.

Posibles estrategias para el aprendizaje. El experto señala que, en su mayoría, la solución de problemas en geometría se reduce al uso del razonamiento deductivo para probar una proposición B a partir de una proposición A. Adicionalmente a las pruebas analíticas, debe existir construcción de objetos geométricos que sirvan de ejemplos y contraejemplos.

Por otro lado, el experto considera que el docente debe estar dispuesto a ofrecer a los estudiantes problemas abiertos, no resueltos, de modo que puedan tener una idea de lo que hacen los matemáticos. Destaca como una buena idea proporcionar series de problemas, de modo tal que, resuelto un problema el estudiante esté listo para el siguiente, y conducirlo de esta manera incluso a asuntos que se encuentren en la vanguardia de las matemáticas.

Aspectos para la evaluación del planteamiento de problemas. De acuerdo con el criterio del experto, al evaluar una actividad de planteamiento de problemas se deben tener en cuenta las características de un buen problema. Este debe tener calidad estética y su resultado causar sorpresa. Un problema es bueno si es fácil de entender, pero no fácil de resolver. Su solución es breve y fácil de presentar, pero no es fácil encontrar dicha solución.

5.1.4. Resultados estudio exploratorio

Respuestas típicas. Dada la enseñanza tradicional recibida por los estudiantes previamente a la actividad, la totalidad de los problemas formulados por los estudiantes son de carácter métrico, en concreto, calcular alguna longitud, área o volumen. Los problemas más recurrentes formulados por los estudiantes solicitaban efectuar cálculos parciales o completos del área superficial o el volumen de los conos o del cubo que componen la figura y en algunos casos el área o el volumen de la figura compuesta.

Dificultades evidenciadas.

- Concepción limitada de problema y de su resolución.

Con base en el tipo de problemas planteados por la mayoría de los estudiantes, se puede detectar una concepción de la resolución de problemas geométricos como una tarea algorítmica consistente en aplicar alguna fórmula preestablecida para hallar un valor numérico acompañado o no por una unidad de medida, y en ocasiones sin una reflexión sobre el sentido del enunciado o la correspondencia de unidades de medida, como se muestra en la Figura 14.

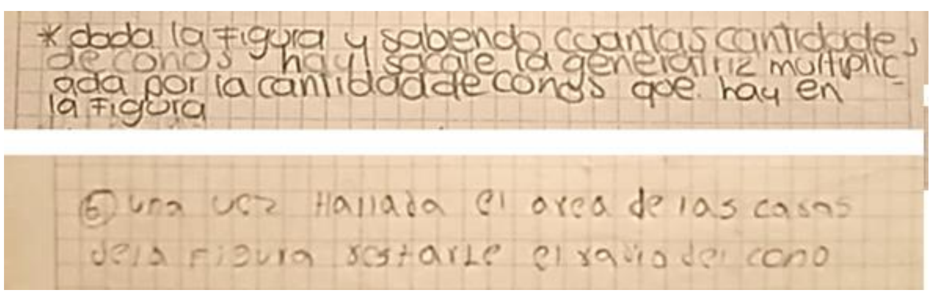


Figura 14. Limitaciones en interpretación de un problema

- Limitado manejo de conceptos y términos

Los problemas mostrados en la Figura ponen de manifiesto un desconocimiento o bien del concepto geométrico o bien de la terminología propia del lenguaje geométrico.

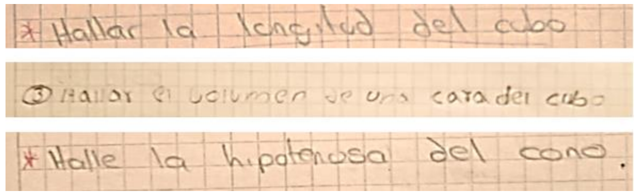


Figura 15. Problemas con limitaciones conceptuales o terminológicas

- Limitada reflexión en torno a la solución

Se introdujo intencionalmente una inconsistencia en el enunciado original indicando un valor para la longitud de la arista del cubo, menor que el del diámetro del cono. La estudiante se limita a aplicar las fórmulas de área y al efectuar la diferencia simplemente cambia el orden de los términos forzando a obtener una respuesta positiva pero no reflexiona acerca de un posible error en el enunciado (Figura 16).

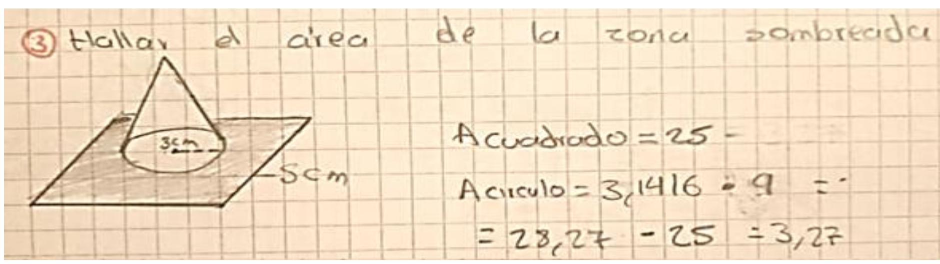


Figura 16. Aplicación irreflexiva de una fórmula

Problemas novedosos.

Los siguientes problemas planteados por tres estudiantes escapan al patrón de los problemas de cálculo de área o volúmenes de las figuras componentes del sólido presentado en el enunciado.

En la mayoría de los problemas que piden calcular una longitud, este cálculo es realmente un paso intermedio para calcular un área o un volumen (ejemplo: hallar la generatriz de un cono en este caso es un paso necesario para hallar su área superficial). La Figura muestra un problema que no se puede interpretar como paso intermedio y por tanto se considera de carácter novedoso.


* Halla la longitud de la diagonal del cubo

Figura 17. Problema no interpretable como paso intermedio

Los estudiantes interpretan el área como un conteo de unidades cuadradas, algunos de hecho plantean el cálculo del área de una figura en términos de cuántos cuadrados de lado unitario caben en su superficie. El problema presentado en la Figura 18 plantea el área en términos de unidades triangulares, se considera por tanto especial:

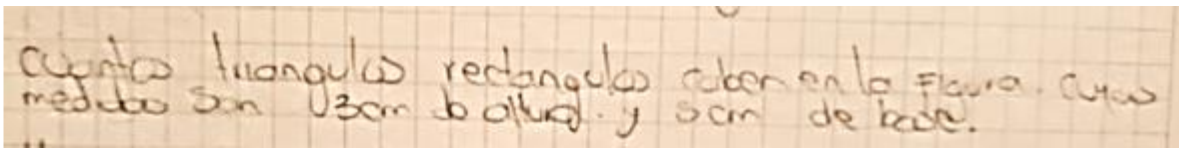

cuantos triangulos rectangulos caben en la figura. cuyas medidas son 43cm la altura y 5cm de base.

Figura 18. Problema de área con base en unidades triangulares

El problema mostrado en la Figura 19 recurre al triángulo implícito en el problema de calcular el área superficial del cono, cuyos lados son la base, la altura y la generatriz. En los problemas típicos, se solicita calcular la generatriz (o algún otro lado, conocidos los demás). En este caso, el estudiante considera interesante pensar en los ángulos y en el área del triángulo en cuestión.

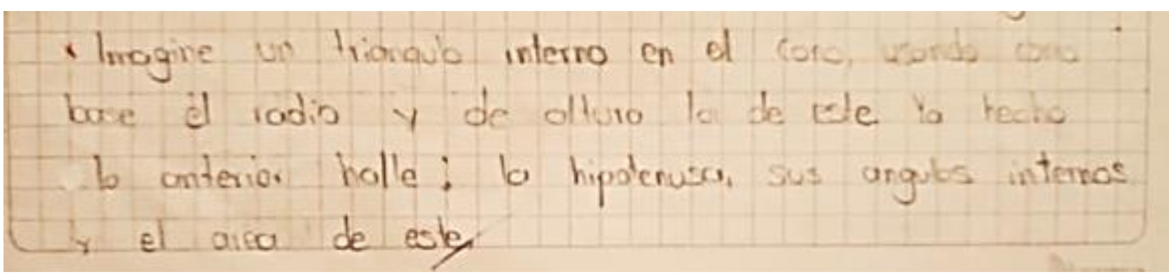

• Imagine un triangulo interno en el cono, usando como base el radio y de altura la de este. Ya hecho lo anterior halle: la hipotenusa, sus angulos internos y el area de este

Figura 1. Problema sobre triángulo en un cono

Todos los problemas considerados novedosos hasta el momento se pueden considerar de fácil obtención a partir de la familiaridad con los algoritmos de cálculo. El problema de la Figura 20 se considera esencialmente novedoso porque implica hacer uso de la imaginación para hacer encajar un cilindro en una figura que al menos explícitamente no lo contiene, aquel cuyas bases coinciden con las bases de los dos conos.

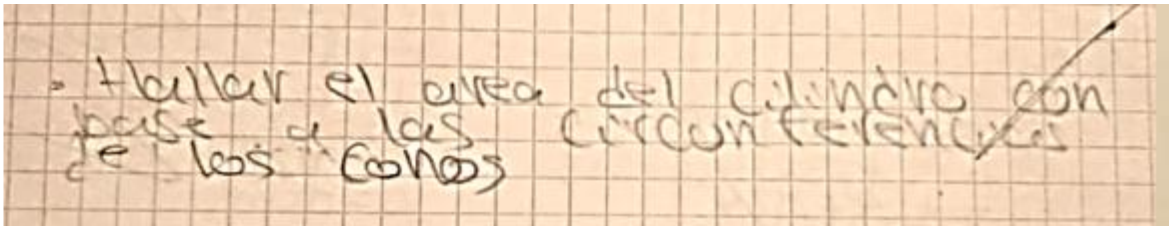


Figura 2. Problema sobre un cilindro imaginario

Todos los problemas hechos explícitos hasta el momento corresponden a la primera parte de la actividad. En la segunda parte (que invitaba a inventar una figura y plantear problemas con base en esta), solo una estudiante formula problemas esencialmente diferentes a los tradicionales con base en el dibujo mostrado en la Figura 21.

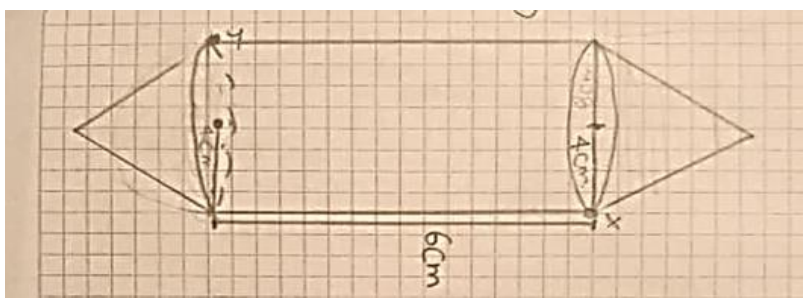


Figura 21. Sólido compuesto usado para crear problemas novedosos

Si bien plantea calcular el área superficial y el volumen de la figura, son de destacar los siguientes problemas adicionales:

En la Figura 22 se muestran dos problemas relativos a calcular una longitud no involucrada en el cálculo tradicional del área o volumen del cono o del cilindro. La primera es la distancia entre los dos vértices de los conos (que la estudiante llama altura). La segunda es la longitud de una línea que atraviesa al cilindro de forma oblicua.

1.3)

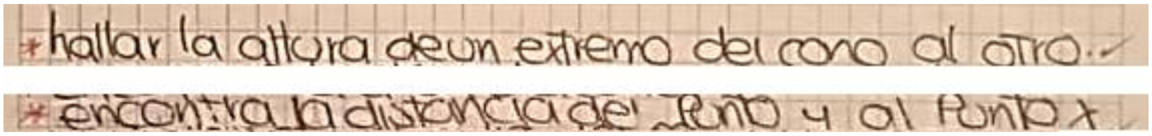

*hallar la altura de un extremo del cono al otro.
*encontra la distancia del punto y al punto x

Figura 3. Problemas sobre segmentos no usuales

La Figura 23 presenta dos problemas similares en los que la estudiante se imagina seccionar el cilindro y un cono. En el primer caso, los cortes son longitudinales y paralelos y en el segundo, paralelos a la base del cono. Aunque estos problemas son susceptibles de distintas interpretaciones, dado que no explicita la ubicación de los cortes, son ejemplos de problemas realmente originales en medio de un contexto tradicional.

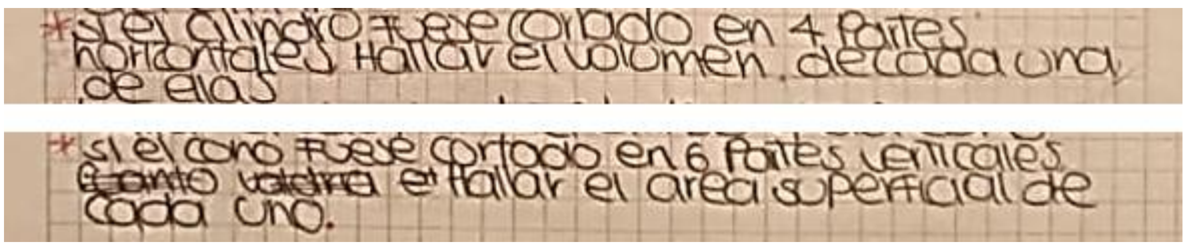

*si el cilindro fuese cortado en 4 partes horizontales Hallar el volumen de cada una de ellas
*si el cono fuese cortado en 6 partes verticales ~~cuanto valdria el~~ Hallar el area superficial de cada uno.

Figura 23. Problemas sobre cortes en un sólido compuesto

Conclusiones. Se evidencian limitaciones propias de una concepción tradicional de la enseñanza de la geometría, incluso limitaciones conceptuales más básicas. Sin embargo, es de destacar que, aunque en una muy pequeña proporción, los estudiantes realmente son capaces de generar problemas interesantes y originales.

5.2. Análisis de los resultados de la implementación del sistema de actividades

El sistema consta de ocho actividades organizadas de la siguiente manera:

- Una actividad de entrada (Actividad 0) con dos situaciones estructuradas, una semiestructurada y una libre.
- Tres actividades dedicadas exclusivamente a situaciones estructuradas (Actividades 1.1, 1.2 y 1.3)

- Dos actividades dedicadas exclusivamente a situaciones semiestructuradas (Actividades 2.1 y 2.2)
- Dos actividades dedicadas exclusivamente a situaciones libres (Actividades 3.1 y 3.2)

De acuerdo con el tipo de situación, el esquema de trabajo fue similar. Si la situación es estructurada, se plantea resolver el problema contenido en ella, y posteriormente inventar nuevos problemas basados en el problema inicial. Si la situación es semiestructurada, se propone que los estudiantes inventen un enunciado del problema asociado con la información dada, resuelvan este problema y a continuación procedan a crear otros nuevos problemas con base en el resuelto. Si la situación es libre, se propone que los estudiantes inventen un contexto para el problema, provean la información necesaria para resolverlo, planteen el enunciado, lo resuelvan e inventen nuevos problemas a partir de éste.

En general, cada actividad comienza con una presentación breve por parte del profesor de las normas de la clase y las indicaciones generales del trabajo a realizar. En todas las actividades los estudiantes estuvieron organizados en 9 grupos de máximo 4 estudiantes vinculados por afinidad. Aunque en algunas ocasiones fue necesario hacer algunos cambios por temas convivenciales o inasistencia de algunos estudiantes, en general no hubo cambios significativos en la composición de los grupos a lo largo de las ocho actividades. La intención es que el trabajo presentado se obtuviera mediante aportes de los integrantes del grupo, por esto, en algunos casos en el análisis se destaca posiblemente el aporte de un estudiante en concreto.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos a partir de las respuestas dadas por los estudiantes en las actividades de planteamiento de problemas aplicadas en el aula. Este análisis se hace considerando: desempeños de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad, logros y dificultades a partir de los diferentes componentes del modelo didáctico.

5.2.1. Resultados Actividad 0. Introducción al planteamiento de problemas

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Esta actividad fue desarrollada por todos los grupos, sin embargo, en algunos casos no en su totalidad.

Con relación al pensamiento geométrico, se destacan primordialmente las destrezas visuales (Hoffer, 1981) en la etapa correspondiente a las situaciones estructuradas, dado que la actividad propició construir poliedros y la visualización de estos les permitió delimitar aquellos que se ajustaban a las características solicitadas (fase de abordaje del problema en el modelo de Mason, Burton y Stacey, 2010). De igual manera se manifiestan las destrezas de dibujo en la representación pictórica que hicieron de los poliedros construidos. En la Figura 24 se evidencia que el grupo desarrolla una forma de representación, dibujando un punto en medio de la arista representada para indicar que esta mide el doble de la que no lo tiene.

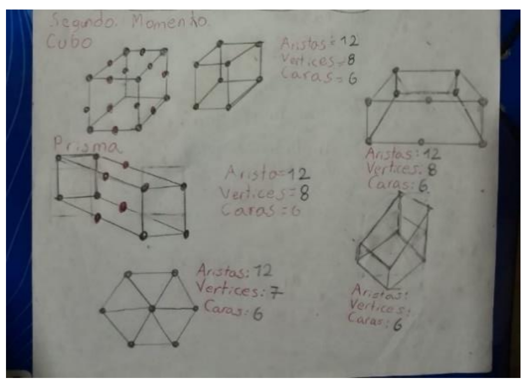
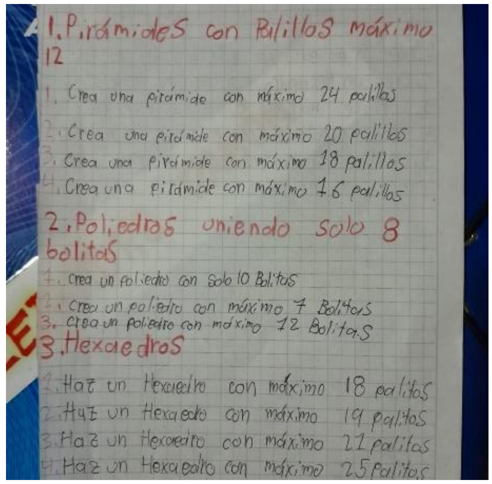


Figura 24. Destreza de dibujo en fase de abordaje de la situación 2

En la etapa de planteamiento de problemas se vio involucrada la destreza verbal, puesto que los estudiantes tuvieron que redactar el enunciado de los problemas que crearon.

En el componente heurístico del planteamiento de problemas, los estudiantes en la mayoría de los casos recurrieron a la variación de valores numéricos en el enunciado inicial de las situaciones (Figura 25).



1. Pirámides con Palillos máximo 12

1. Crea una pirámide con máximo 24 palillos
2. Crea una pirámide con máximo 20 palillos
3. Crea una pirámide con máxima 18 palillos
4. Crea una pirámide con máximo 16 palillos

2. Poliedros uniendo solo 8 bolitas

1. Crea un poliedro con solo 10 Bolitas
2. Crea un poliedro con máximo 7 Bolitas
3. Crea un poliedro con máximo 12 Bolitas

3. Hexaedros

1. Haz un Hexaedro con máximo 18 palitos
2. Haz un Hexaedro con máximo 19 palitos
3. Haz un Hexaedro con máximo 21 palitos
4. Haz un Hexaedro con máximo 25 palitos

Figura 25. Problemas planteados situaciones 1 y 2 del primer momento y 1 del segundo momento

Con respecto a los recursos didácticos, es importante notar que la manipulación de los palillos y la plastilina permitió a los estudiantes visualizar en el material concreto las características de los poliedros que construyeron (Figura 26), favoreciendo la comprensión de los conceptos asociados al momento de resolver la situación inicial, así como en el proceso de plantear problemas relacionados.

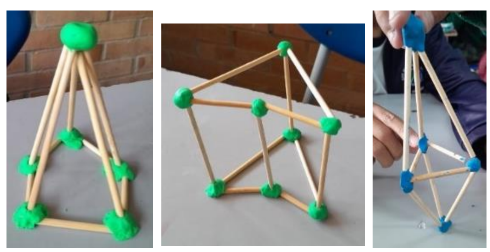


Figura 26. Uso del material didáctico (situaciones estructuras 1 y 2 y situación estructurada 1)

El contenido geométrico involucrado en el abordaje de las situaciones presentes en la actividad incluye el concepto de poliedro, así como los conceptos asociados de vértices, aristas y caras de un poliedro. La utilización de estos recursos permite fortalecer los conceptos en cuestión pues los estudiantes pueden asociarlos con objetos cercanos a sus experiencias previas.

Con respecto a la visualización, es de anotar que este proceso es fundamental en el desarrollo de la actividad puesto que, ya sea a partir de la creación de dibujos sobre el papel o a través de las imágenes formadas en la mente de los estudiantes, se favorece la construcción o fortalecimiento de los conceptos del contenido geométrico, asociados con las situaciones presentadas. La Figura 27 muestra un buen nivel de representación asociado a la visualización de los objetos construidos.

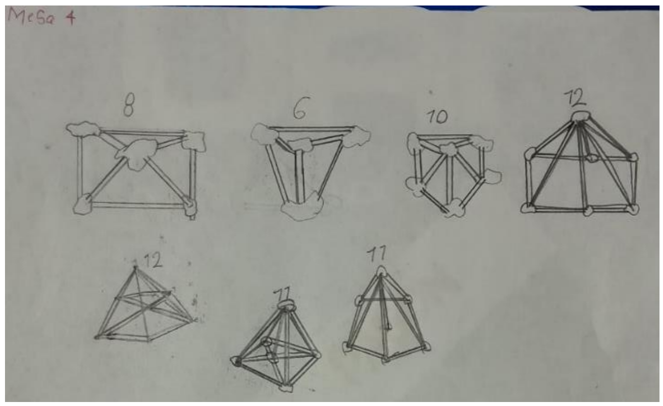


Figura 27: Representación pictórica de figuras construidas

Por otro lado, se puede destacar que las situaciones de planteamiento de problemas propuestas en esta actividad poseen rasgos que contribuyen a favorecer la interrelación entre conceptos. Por ejemplo, el enunciado inicial de la situación estructurada 1 solicitaba construir pirámides con a los más 11 vértices (número inicialmente tomado al azar), sin embargo, se puede notar que al cambiar esta cantidad por 12, la situación se vuelve más interesante e integradora de conocimientos, ya que el estudiante puede notar cómo, a medida que aumenta el número de lados de la base, la pirámide finalmente se transforma en un objeto plano. Infortunadamente hubo escasas respuestas a la situación planteada en el tercer momento (situación libre), en parte debido a la insuficiencia en el tiempo de la actividad, pero también posiblemente a la escasa relevancia que algunos estudiantes dieron a la propuesta de crear problemas propios.

Logros

- Hubo motivación e interés de los estudiantes por el desarrollo de la actividad gracias al uso de material concreto.
- Se promovió la destreza de representación geométrica por parte de los estudiantes luego de la manipulación del recurso didáctico.
- Se favoreció la destreza verbal al momento de abordar el planteamiento de problemas en los diferentes grupos.
- Se propició el planteamiento de problemas geométricos como una actividad válida para la clase de matemáticas.

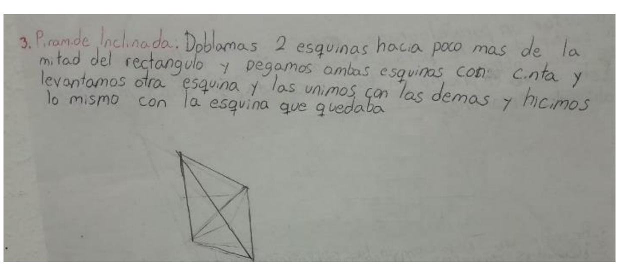
Dificultades

- Limitado tiempo para el desarrollo de la actividad.
- Casi la totalidad de los problemas creados por los estudiantes estuvieron muy ceñidos a la situación inicial.

5.2.2. Resultados Actividad 1.1 Construcción y desarrollo de sólido

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. En esta ocasión, aunque todos los grupos desarrollaron la actividad, para algunos casos el tiempo fue insuficiente.

Con relación al pensamiento geométrico, se destaca primordialmente la destreza verbal (Hoffer, 1981) en la fase de abordaje de los problemas de partida. En la Figura 28 se evidencia que el grupo intenta generar una descripción del proceso realizado para construir un sólido específico a partir del rectángulo dado.



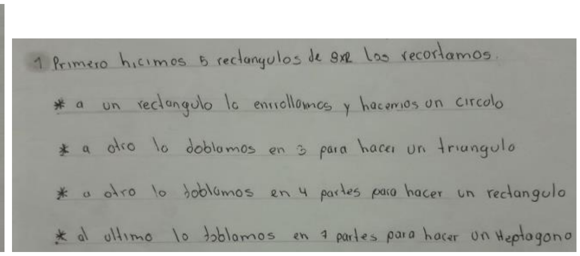


Figura 28. Destreza verbal en fase de abordaje de la situación 1

Una de las respuestas de uno de sus integrantes de un grupo, resulta interesante pues se puede considerar creativa y algo insólita, ya que para el estudiante es válido tomar la hoja de papel rectangular y compactarla lo máximo posible hasta formar una esfera. Por otra parte, el estudiante, al representarla pictóricamente (ver Figura 29), intenta intuitivamente hacer un trabajo de sombreado, hecho que permite afirmar que el componente de representación sobre el papel en la clase de geometría puede motivar el interés por lo artístico y esto se puede considerar parte de las destrezas de dibujo (Hoffer, 1981).

Figura 29. Respuesta insólita de un estudiante

En la etapa de planteamiento de problemas también se puede evidenciar la destreza verbal al momento de redactar los enunciados de los problemas creados.

En el componente heurístico del planteamiento de problemas se observa que, aunque los problemas en general son muy similares al original, en esta ocasión no hubo solamente variación en valores numéricos intrínsecos a la figura inicial, sino que también se observa variación en el tipo de figura del que parte el problema, como se puede apreciar en la Figura 30.

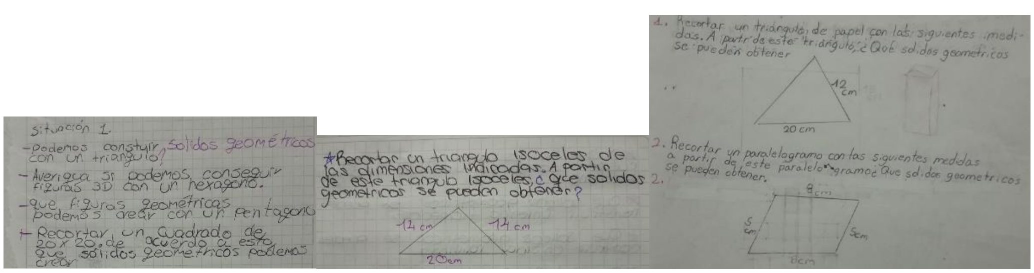


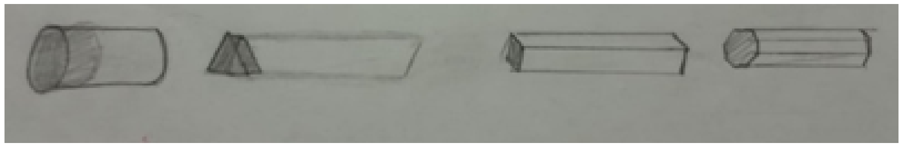
Figura 30. Problemas planteados a partir de la situación 1

Los recursos didácticos utilizados en esta actividad que fundamentalmente fueron papel en la primera situación y papel y tijeras en la segunda permitieron a los estudiantes experimentar, razonar y construir los sólidos que se les ocurrieron. Esto facilita la comprensión de los conceptos asociados. El experimentar con el rectángulo de papel, les permitió encontrar diversas soluciones, algunas más o menos naturales como cilindros y prismas y otras, menos inmediatas como un tetraedro irregular (ver Figura 31), la cual es una respuesta novedosa y original que solo se le ocurrió a un estudiante, quien logró llegar a esta a pesar de la dificultad que tuvo en su construcción.

Figura 31. Uso del material didáctico

El contenido geométrico involucrado en el abordaje de las situaciones presentes en la actividad incluye el concepto de poliedro y de cuerpo redondo, así como la idea de su desarrollo y construcción.

Con respecto a la visualización, se puede afirmar que, en términos generales, estuvo motivada por la manipulación de los recursos, acción que los llevó a establecer relaciones entre los elementos constitutivos de los objetos construidos que luego representaron pictóricamente (ver Figura 32).



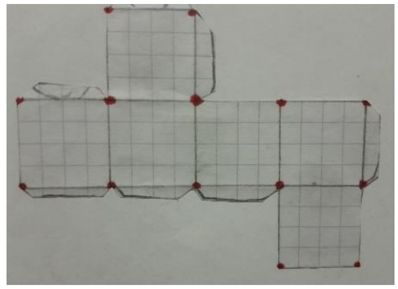


Figura 32. Representación pictórica de figuras trabajadas

De las situaciones de planteamiento de problemas es importante destacar que, por ejemplo, en la primera de ellas, las dimensiones del rectángulo presentado fueron escogidas de modo tal que este fue era de fácil manipulación para los estudiantes. El carácter retador tuvo lugar al momento de proponer que encontraran soluciones alternativas a las que parecían más evidentes.

Logros

- Fue llamativo para los estudiantes el hecho de utilizar el material didáctico y experimentar con él al resolver los problemas iniciales
- Se avanzó en cuanto al tipo de problemas planteados por los estudiantes con respecto a la Actividad 0 en la que en general sólo hubo variación numérica, mientras que en esta también hubo variación de la figura inicial.
- Se evidenció destreza verbal en la descripción que los estudiantes hicieron de cómo resolvieron el problema inicial, así como en los enunciados de los problemas planteados por ellos.
- La actividad aportó elementos dirigidos a fortalecer el conocimiento de los estudiantes en cuanto al paso de la geometría 2D a 3D, posibilitando identificar los elementos de la geometría plana en el espacio.

Dificultades

- Limitado tiempo para el desarrollo de la actividad.
- Pese al avance en el tipo de problemas creados, estos siguen siendo similares al de la situación inicial.

5.2.3. Resultados Actividad 1.2. Deltaedros y secciones planas

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Esta actividad contó con la participación de los mismos grupos constituidos desde la Actividad 0.

En cuanto al pensamiento geométrico se pueden destacar las destrezas visuales (Hoffer, 1981), facilitadas por el uso de los recursos didácticos (ver Figura 33). La manipulación de las láminas de acetato permitió visualizar en qué casos es posible construir un poliedro a partir de triángulos equiláteros, así como el manejo de la plastilina facilitó la identificación de las secciones planas del cubo.

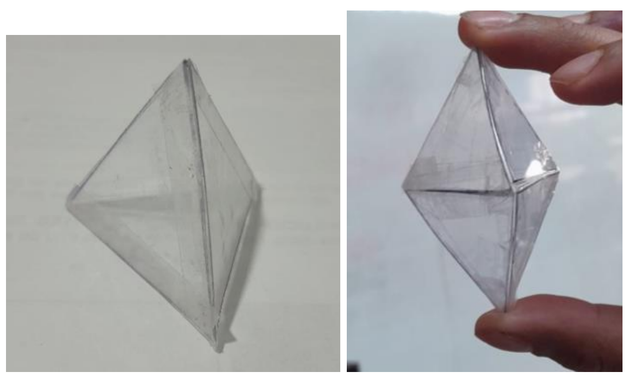


Figura 33. Construcción de deltaedros

También es importante destacar las destrezas de dibujo que los estudiantes manifestaron al resolver el problema planteado en la segunda situación, obteniendo representaciones pictóricas fácilmente comprensibles (Figura 34).

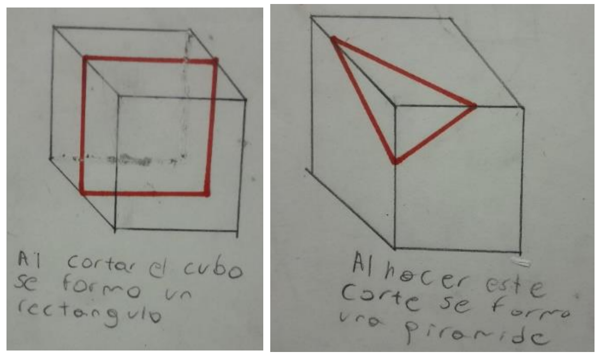


Figura 34. Dibujos a partir de la segunda situación

Con respecto a la heurística de planteamiento de problemas, se puede observar que algunos estudiantes efectuaron variaciones tanto numéricas como de figuras geométricas. La Figura 35 muestra distintos problemas creados por un grupo en los que se evidencia un buen manejo del proceso de variación, cercano a la variación sistemática. También es interesante notar que, por ejemplo, los dos últimos problemas planteados en la Figura 35, son de tipo abierto, dado que en las anteriores actividades los estudiantes pudieron notar que tanto la pirámide como el hexaedro se pueden concretar de formas distintas.

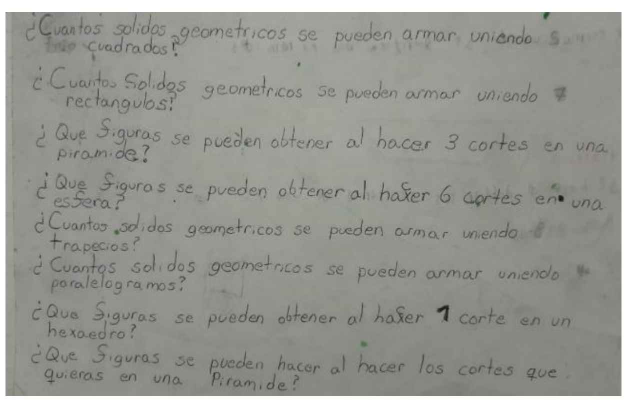

¿Cuantos solidos geometricos se pueden armar uniendo 5 cuadrados?
¿Cuantos Solidos geometricos se pueden armar uniendo 7 rectangulos?
¿Que figuras se pueden obtener al hacer 3 cortes en una piramide?
¿Que figuras se pueden obtener al hacer 6 cortes en una esfera?
¿Cuantos solidos geometricos se pueden armar uniendo 8 trapecios?
¿Cuantos solidos geometricos se pueden armar uniendo 4 paralelogramos?
¿Que figuras se pueden obtener al haser 1 corte en un hexaedro?
¿Que figuras se pueden hacer al hacer los cortes que quieras en una Piramide?

Figura 35. Variación en el planteamiento de problemas

En la Figura 36, se muestra un problema que retoma la idea de situaciones de actividades anteriores en las que una condición se da en términos de un número máximo o mínimo de objetos. Esto muestra cómo los estudiantes ganan experiencia a medida que se avanza a lo largo de las actividades propuestas.

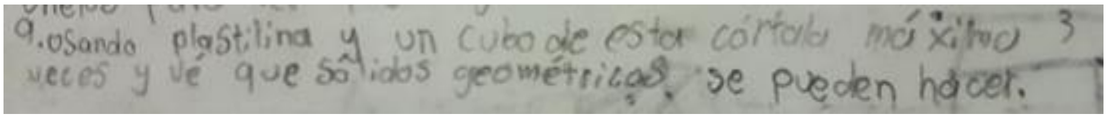

9. usando plastilina y un Cubo de estar córtalo máximo 3 veces y ve que sólidos geométricos se pueden hacer.

Figura 36. Condición en un problema creado por uno de los grupos

Con respecto al contenido geométrico de esta actividad, se puede observar que está centrado en la construcción de poliedros y también en rasgos bidimensionales que se pueden identificar en figuras 3D.

Los recursos didácticos, en este caso láminas de acetato de forma triangular unidas mediante cinta, así como plastilina y regla para seccionarla, fueron fundamentales para los procesos de visualización que permitieron a los estudiantes resolver la situación inicial para posteriormente plantear nuevos problemas. La Figura 37 da una idea del uso que hicieron los estudiantes de los recursos didácticos.

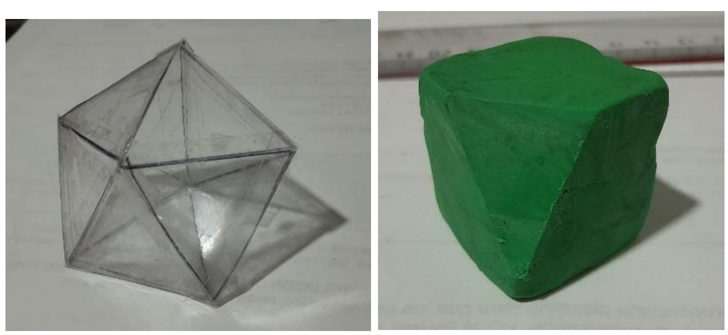


Figura 37. Uso de recursos didácticos

El impacto de la situación en cuanto a la solución y planteamiento de problemas se puede evidenciar en el hecho de que la mayoría de los grupos se sintieron motivados a abordarla y lograron identificar todos los deltaedros de a lo más 10 caras, y en el caso de la segunda situación encontraron diversos tipos de cortes en el cubo. Asimismo, aplicaron con mayor seguridad el procedimiento de variación al crear problemas. Un hecho interesante, es que uno de los problemas formulados en uno de los grupos indagaba por las secciones que se pueden hacer a un cono (Figura 38), asunto que, aunque está fuera del plan de estudios del grado séptimo, resulta ser uno de los temas más relevantes en el estudio de la geometría (secciones cónicas).

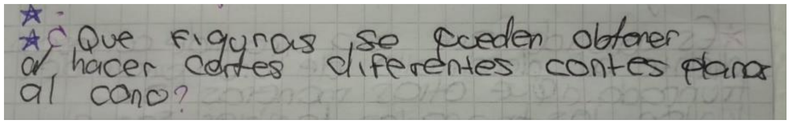


Figura 38. Pregunta acerca de las secciones cónicas

Es importante anotar la importancia de ofrecer un enunciado que se ajuste a los propósitos de aprendizaje. La Figura 34 muestra que el requerimiento en el problema de la situación 2 resultó ser ambiguo, pues no era claro para los estudiantes si las figuras solicitadas debían ser bidimensionales o tridimensionales. En este caso, realmente resultó interesante que los estudiantes respondieron con ambos tipos de figuras, pero esto evidencia que, en otros contextos, el enunciado debe ser claro en concordancia con los aprendizajes esperados.

Logros

- Hubo motivación de los estudiantes por el abordaje de las situaciones planteadas con buen proceso de resolución de los problemas dados.
- Se evidenció un mayor grado de confianza en los estudiantes al momento de realizar variaciones diversas sobre un problema dado, ya que estas fueron de distintos tipos, a diferencia de la mayoría de los casos en las anteriores actividades.

Dificultades

- Se requiere mejorar el componente reflexivo al crear nuevos problemas para que estos no se trivialicen.

5.2.4. Resultados Actividad 1.3. Cálculo del área superficial

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Se puede destacar que la mayoría de los grupos resolvieron los problemas iniciales de forma correcta a partir de los procedimientos explicados en clases anteriores de aplicación de las fórmulas para calcular el área superficial de sólidos geométricos, así como el teorema de Pitágoras.

Lo anterior evidencia un buen manejo del componente de medida y manipulación numérica. Este hecho se puede asociar con las destrezas lógicas para reconocer los procesos de cálculo adecuados y efectuarlos, máxime teniendo en cuenta que en la segunda situación es necesario seleccionar sólo aquellos términos de las fórmulas que pertenecen a la superficie externa del sólido en cuestión. Asimismo, tanto en la resolución como en el planteamiento de problemas, la mayoría de los estudiantes elaboraron representaciones pictóricas, evidencia de las destrezas de dibujo (ver Figura 39).

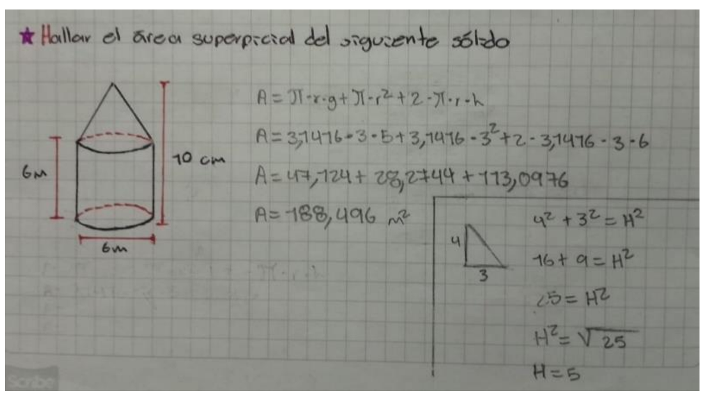


Figura 39. Cálculos adecuados, destrezas lógicas y de dibujo al abordar la situación 2

En relación con la heurística de planteamiento de problemas que se manifiesta en las respuestas de los estudiantes, se puede observar el uso de la variación, como en las anteriores actividades, destacando que además de la variación numérica y de figuras, también hay variación en la magnitud que se solicita calcular en el problema original (ver Figura 40). También se ´puede apreciar el uso de una forma de analogía, cuando el estudiante formula, con relación a un cubo, “si fuera una esfera, ¿cuál sería su radio?”.

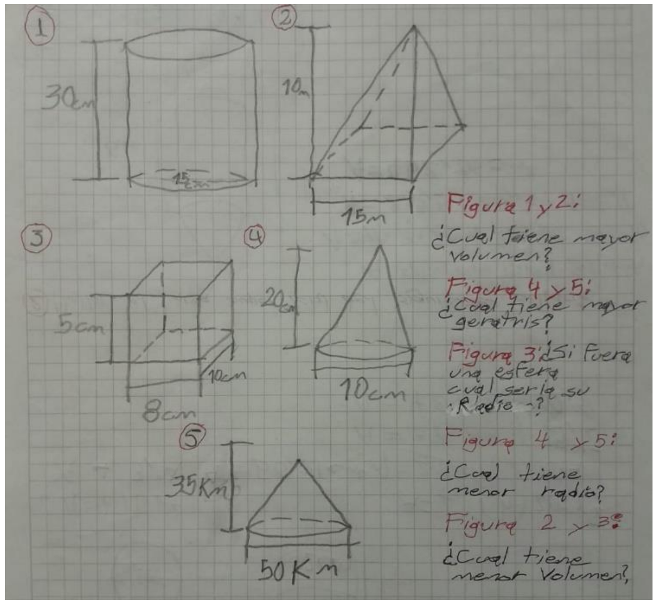


Figura 40. Problemas planteados por un grupo a partir de la situación 1

Adicionalmente a esto, se puede apreciar en la Figura 41 un problema planteado por uno de los grupos en el cual se establece una comparación métrica no entre dos sino entre tres sólidos. Esto no se considera variación sino introducción de información nueva a la situación, lo cual es cercano a la estrategia “¿qué si más?” de Kilpatrick.

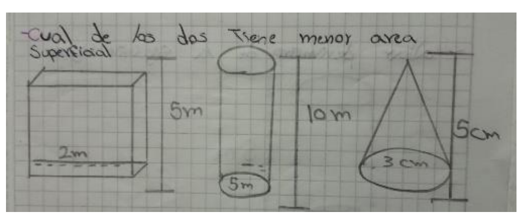


Figura 41. Comparación métrica entre más de dos sólidos

El contenido geométrico de esta actividad es el cálculo de área superficial de sólidos simples o compuestos. Gracias a la experiencia previa de los estudiantes en cuanto a ese tipo de procedimientos, pudieron resolver los problemas iniciales de forma relativamente fácil y esta confianza se puede considerar un factor de éxito en la posterior fase de plantear problemas.

Los recursos didácticos fueron básicamente lápiz y papel además de la imagen presentada en la guía en cada situación. El manejo anterior con este tipo de recursos y el reconocimiento de las figuras presentadas, así como las relaciones entre sus elementos, facilitaron a los estudiantes el abordaje adecuado de los problemas iniciales.

En el caso de esta actividad, las imágenes presentadas en la guía permitieron a los estudiantes reconocer relaciones entre las medidas de las figuras mostradas, y con el uso de la lógica poder aplicar los procedimientos aprendidos en clase con los datos que éstos requieren. Además de esto, la visualización de otros sólidos geométricos en la mente les permitió plantearlos como elementos de un problema propio.

Las situaciones de planteamiento de problemas que se presentan en esta actividad incidieron positivamente en el desempeño de los estudiantes dado que estaban cercanas a sus conocimientos previos. Es importante notar, que las situaciones se hacen más fructíferas por el hecho de que los estudiantes ya han tenido experiencia con otras. Por ejemplo, uno de los problemas creados por un grupo plantea la comparación entre las generatrices de dos conos (ver Figura 40), idea que no está explícita en la situación original pero que se puede atribuir a la reminiscencia de situaciones abordadas en anteriores actividades.

No obstante lo anterior, también es importante observar que la mayoría de los problemas planteados como respuesta a la situación 2, fueron muy cercanos a los que corrientemente aparecen en los libros de texto. Esto revela la importancia de que en las situaciones que se planteen a los estudiantes se eviten los enunciados tipo texto, ya que este tipo de enunciado condujo a que los estudiantes crearan problemas similares a los vistos en clase, en torno a sólidos simples, sin observar que lo novedoso de la situación no radicaba en la pregunta, sino en que involucraba sólidos compuestos.

Logros

- Las respuestas de los estudiantes evidenciaron un buen manejo de la parte operativa en el contexto del área superficial de sólidos conocidos.
- La experiencia con situaciones anteriores de planteamiento de problemas, permitió que las respuestas involucraran elementos que no aparecían de forma evidente en el enunciado inicial.

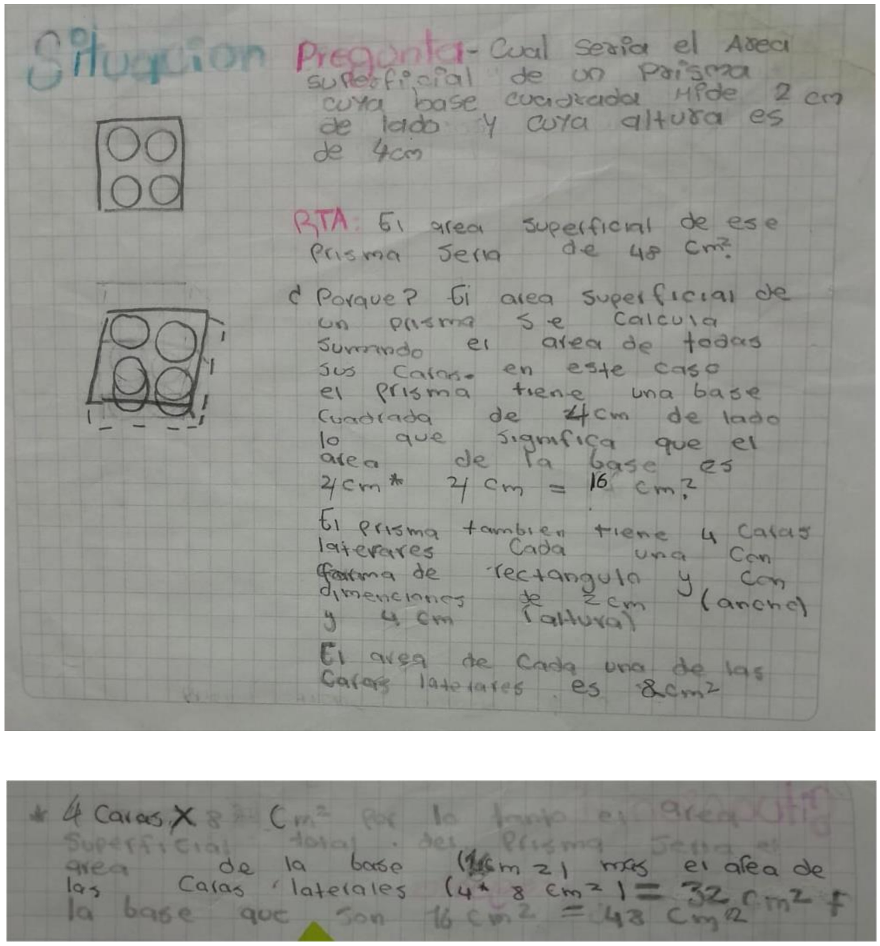
Dificultades

- El uso de un enunciado tipo texto en una de las situaciones, fue causa de que los estudiantes la abordaron creando problemas bastante elementales, comparados con otros ya creados en anteriores situaciones.

5.2.5. Resultados Actividad 2.1. Sólidos inscritos.

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. El profesor aclara la diferencia entre el tipo de situaciones de las dos actividades anteriores (estructuradas) y las presentadas en ésta (semiestructuradas).

En las respuestas de los estudiantes se puede apreciar de nuevo un buen manejo del componente procedimental al momento de resolver uno de los problemas planteados. En particular, uno de los grupos se destacó en su uso de la destreza verbal (Hoffer, 1981), al exponer, con todo detalle y en palabras, el proceso de resolución del problema que planteó (ver Figura 42).


Situacion Pregunta- Cual seria el Area superficial de un Prisma cuya base cuadrada Mide 2 cm de lado y cuya altura es de 4cm

RTA: El area superficial de ese Prisma Seria de 48 cm²

¿Porque? El area superficial de un prisma se calcula sumando el area de todas sus caras. en este caso el prisma tiene una base cuadrada de 4cm de lado lo que significa que el area de la base es 4cm * 4 cm = 16 cm²

El prisma tambien tiene 4 caras laterares cada una con forma de rectangulo y con dimenciones de 2cm (ancho) y 4 cm (altura)

El area de cada una de las caras laterales es 8cm²

* 4 caras X 8 cm² por lo tanto el area superficial total del Prisma Seria el area de la base (16cm²) mas el area de las caras laterales (4 * 8 cm²) = 32 cm² + la base que son 16 cm² = 48 cm²

Figura 42. Exposición detallada de la solución a un problema creado.

Uno de los grupos evidenció un uso interesante de las destrezas lógicas en el planteamiento de los problemas asociados con la primera situación. El grupo pudo identificar que, cuando un sólido está inscrito en otro, es posible que el conocimiento de algunas medidas en uno de ellos permita calcular magnitudes correspondientes al otro. Esta importante observación propició que el grupo elaborara problemas en los que se proporciona alguna medida de uno de los sólidos, pero el requerimiento es acerca del otro, como se puede apreciar en la Figura 43. Un aspecto de interés adicional es el hecho de que este grupo estaba conformado por estudiantes que en las clases regulares no habían manifestado un buen desempeño e incluso habían tenido dificultades convivenciales, entre ellas la evasión de clase. Al respecto, se puede afirmar que las actividades de planteamiento de problemas favorecieron el acercamiento a la geometría de estudiantes que, en principio, no mostraban interés en el tema.

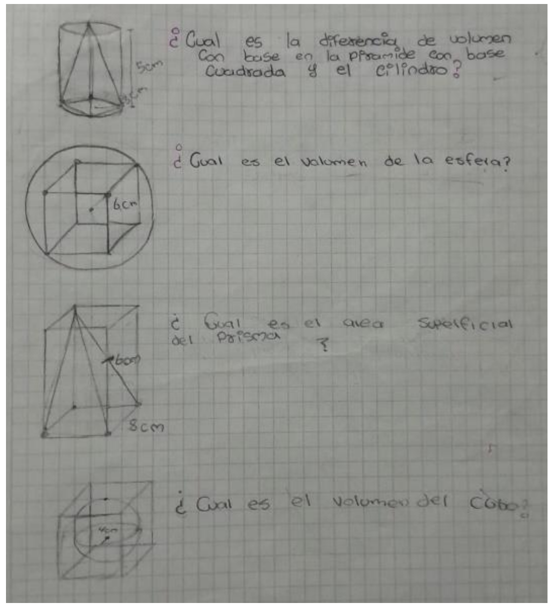


Figura 43 Problemas sobre sólidos inscritos planteados por un grupo

También se puede destacar el uso de la destreza aplicada, especialmente en la segunda situación, pues en algunos grupos se evidencia asociación entre la información dada y su experiencia con objetos reales, lo cual les conduce a formular una pregunta pertinente (ver Figura 44).

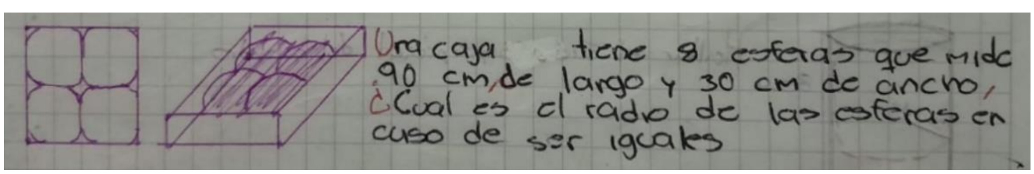


Figura 44. Destreza aplicada, evidenciada en el planteamiento de un problema

Además del procedimiento de variación en el planteamiento de nuevos problemas que se hizo patente en anteriores actividades, se destaca también como procedimiento heurístico el uso apreciable de la analogía, especialmente en los problemas presentados en la Figura 43, puesto que el grupo identificó el aspecto esencial que relaciona las medidas entre un sólido y otro inscrito en él, logrando que dicho aspecto fuera común a los problemas que plantearon a partir de la situación inicial.

El contenido geométrico asociado a esta actividad fue en torno a los conceptos de sólidos inscritos, circunscritos o adyacentes. Es de anotar que el abordaje de situaciones asociadas a este contenido fue motivador para los estudiantes, lo cual se evidencia en el buen desempeño en la resolución de problemas y la invención creativa de otros.

Llama la atención el hecho de que, pese a que los recursos didácticos estuvieron restringidos al uso de lápiz y papel, la información proporcionada en cada una de las situaciones fue suficientemente llamativa para los estudiantes. Gracias a esto y a su experiencia tanto con ejercicios procedimentales como con actividades previas de planteamiento de problemas, se obtuvieron buenos resultados en la mayoría de los grupos en el desarrollo de la actividad.

Se puede observar que luego de actividades en las que tuvo lugar predominantemente la visualización de objetos concretos, en esta actividad la visualización se restringió a su componente mental. Pese a ello, se obtuvieron respuestas novedosas e interesantes al abordar las situaciones propuestas. Este hecho es destacable dado que los estudiantes evidencian interiorizar ciertas relaciones espaciales que existen entre los elementos de diferentes sólidos geométricos.

Las situaciones presentadas en esta actividad tuvieron la capacidad de motivar la creación de problemas diversos y originales. Se debe destacar el impacto que las imágenes presentadas generaron en los estudiantes, al punto que produjeron resultados interesantes a pesar de no involucrar recursos didácticos más llamativos.

Logros

- Se observan avances en el tipo de procedimientos heurísticos que utilizan los estudiantes para crear problemas. Se destaca el uso notable de la analogía.
- Se evidencia un mayor desarrollo en las destrezas lógicas pues los estudiantes identifican y transfieren relaciones entre elementos de sólidos geométricos.
- Se manifiestan respuestas sobresalientes en un grupo de estudiantes que corrientemente se catalogaban como de bajo rendimiento.
- Los estudiantes muestran creatividad al plantear nuevos problemas.
- Se destaca el impacto de las situaciones presentadas pues fueron estimulantes pese a no incluir materiales concretos distintos de papel y lápiz.

Dificultades

- Si bien muchos de los problemas fueron interesantes, en algunos casos los estudiantes formularon problemas sin una reflexión acerca de si se puede resolver o no con la información que proporciona.

5.2.6. Resultados Actividad 2.2. Diagonales y longitudes de segmentos en sólidos.

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Debido a la cercanía de la semana de receso estudiantil varios de los estudiantes del curso estuvieron ausentes. Esto incidió en que el avance fuera más lento y, en algunos casos, incompleto.

Además de las destrezas de dibujo (Hoffer, 1981) que los estudiantes manifestaron en la resolución y planteamiento de problemas como en actividades anteriores, también demuestran sus destrezas visuales, dado que abordan la situación a pesar de que esta no involucre recursos adicionales que se puedan considerar motivadores. Este hecho se debe a que ponen en acción el componente mental de la visualización a partir de las imágenes presentadas en la guía y su recordación de objetos reales con los que han tenido experiencia.

En algunos grupos se planteó el problema de calcular la longitud de la diagonal. Pese a que fue necesaria la orientación del docente mediante preguntas heurísticas que permitieran al estudiante identificar la trayectoria a seguir, tras ello no hubo mayor dificultad en la resolución (ver Figura 45). Este hecho indica un buen manejo de los procedimientos de cálculo, pero evidencia que se requiere una mejor indagación autónoma del estudiante al abordar un problema.

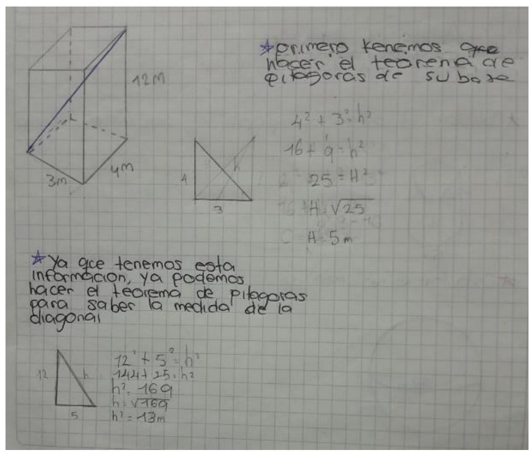


Figura 45. Resolución del problema de calcular la diagonal

En la mayoría de los casos los estudiantes se limitaron a crear problemas muy similares a los que se trabajaban en las clases regulares, indagando por el área superficial o el volumen de los sólidos geométricos involucrados en las situaciones dadas. Es de destacar que los estudiantes identificaron bien elementos o medidas requeridos para calcularlos, evidenciando un rasgo de destreza lógica. Sin embargo, solo algunos involucraron de manera directa la diagonal en el caso de la primera situación.

En general, en los problemas planteados por los estudiantes no se hicieron modificaciones significativas a la información contenida en las situaciones iniciales. Se puede ubicar este modo de trabajo dentro del procedimiento denominado “aceptar lo dado” por Brown & Walter (2010).

El contenido geométrico correspondiente a las situaciones presentadas es el concepto de diagonal de un poliedro. De igual manera aparecen los segmentos contenidos en poliedros que no se involucran normalmente en problemas rutinarios. Este contenido geométrico resultó un tanto extraño para los estudiantes, pues como se indicó, solicitaron la ayuda del profesor, dado que no habían trabajado con este tipo de elementos.

A pesar de que los recursos didácticos se limitaron a la guía, lápiz y papel, los problemas planteados por los estudiantes para ser resueltos evidenciaron buen manejo procedimental.

Los procesos de visualización que desarrollaron los estudiantes tuvieron lugar a través del contacto con las imágenes presentadas en la situación inicial, por tanto, se trató un proceso mental que fue posible desarrollar sin acudir a materiales concretos.

Las situaciones estaban diseñadas para que de forma sencilla se pudiera hallar las medidas necesarias para resolver problemas estándar, en particular las medidas que requieren usar el teorema de Pitágoras solo involucran números enteros. A pesar de que las imágenes presentes en las situaciones contenían elementos relativamente poco conocidos por los estudiantes, se puede destacar que algunos de ellos buscaron la forma de plantear algún problema que no fuera tipo texto y esto se puede considerar un aspecto retador de las situaciones. Por ejemplo, en la Figura 46 se muestra una variación a la situación original considerando el octaedro irregular compuesto por dos pirámides idénticas e indagando por el volumen de esta si su altura fuera igual a la longitud de los lados (de la base). Asimismo, en otro de los grupos se hace una variación a la segunda situación considerando la diagonal de un cubo e indagando por su longitud. En esta misma situación se pregunta por la suma de las medidas de las aristas de dicho cubo, una medida que usualmente no se trata en los libros de texto pero que se puede considerar una forma de generalización del perímetro de un polígono en 2D.

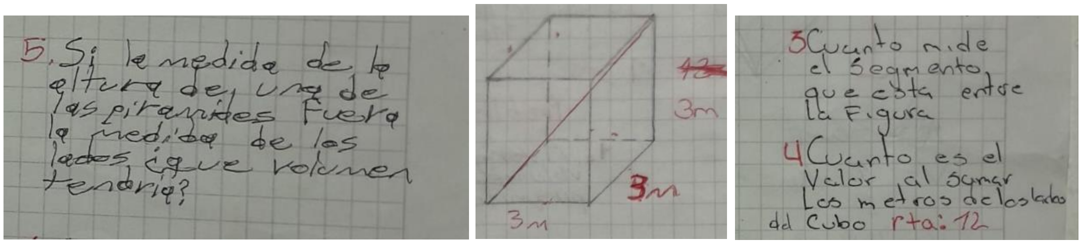


Figura 46. Búsqueda de invención de problemas no estándar

Logros

- Se evidenció una vez más el buen manejo en el cálculo de magnitudes mediante fórmulas conocidas.
- Las situaciones presentadas en la actividad exigían del estudiante un esfuerzo en la visualización pues no acudían a materiales concretos, pese a lo cual, los estudiantes presentaron buen desempeño procedimental.
- Los estudiantes buscaron maneras de plantear problemas no estándar aún en medio de una situación relativamente desconocida para ellos.
- Los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores contribuyeron al buen desempeño en la resolución de los problemas planteados.

Dificultades

- Circunstancias externas incidieron en la ausencia de varios estudiantes, lo cual afectó la dinámica de los grupos de trabajo.

5.2.7. Resultados Actividad 3.1. Objetos cotidianos. Tetraedro seccionado.

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. El docente explica a los estudiantes de modo general la diferencia entre las situaciones libres y las trabajadas en las 5 actividades anteriores.

En relación con las destrezas propias del pensamiento geométrico (Hoffer, 1981), es interesante observar que la primera situación permitió evidenciar en algunos estudiantes aspectos de las destrezas verbales al momento de plantear los problemas (Ver Figura 47).

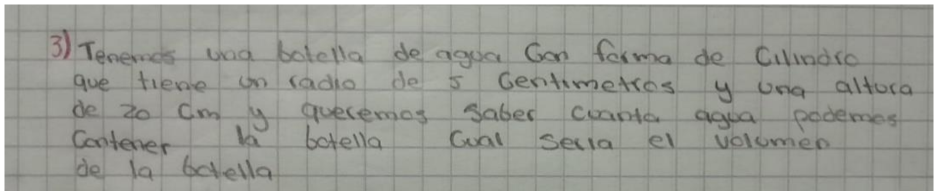


Figura 47 Destrezas verbales abordando la Situación 1

Por su parte, otros estudiantes hicieron manifiesta las destrezas de dibujo y las destrezas aplicadas al momento de asociar de manera adecuada un sólido geométrico con un objeto de la cotidianidad (ver Figura 48).

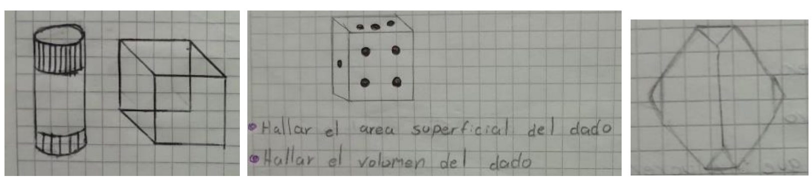


Figura 48. Destrezas aplicadas y de dibujo en el planteamiento de problemas

En relación con los aspectos heurísticos de planteamiento de problemas es importante notar que por lo general las situaciones libres se plantean de forma bastante amplia, por lo cual normalmente los estudiantes se mantienen dentro de los límites de la situación ya que esta da cabida a muchas posibilidades al inventar problemas. Por lo anterior, no se evidencia la aplicación del procedimiento de variación en estas situaciones. Lo que se puede apreciar es una forma básica de analogía en la que se plantean preguntas comunes para las nuevas figuras dadas, como en el caso del tetraedro seccionado de la Situación 2, o de las nuevas figuras concebidas por los estudiantes, como en el caso de la Situación 1 (ver Figura 49).

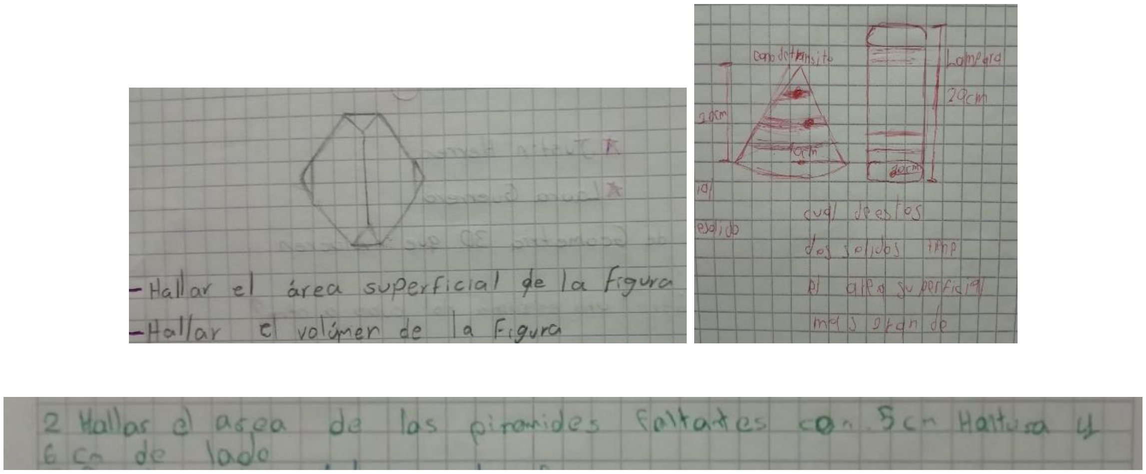


Figura 49. Preguntas tradicionales aplicadas a nuevas figuras

El contenido geométrico para esta situación abarca en general los conceptos asociados a sólidos geométricos, pero en un contexto más aplicado que teórico. La ventaja de apelar a este tipo de contenido es que los estudiantes pueden de manera más natural asociar los conceptos abstractos propios de la Geometría con objetos del mundo real.

Una vez más los recursos didácticos se limitaron al lápiz y papel, sin embargo, es importante tener en cuenta que la información contenida en la guía puede por sí misma constituirse en motivación para el planteamiento de problemas.

La visualización en esta actividad procede por reminiscencia de los objetos que poseen características propias de los sólidos geométricos abstractos, de manera que los estudiantes puedan plasmarlos en un enunciado o en un dibujo al crear un nuevo problema. Fueron muy diversos los objetos considerados por los estudiantes, pese a formular problemas del orden más básico.

El aspecto retador de las situaciones de planteamiento de problemas en esta actividad estuvo dado por la posibilidad de establecer analogías tanto con objetos reales como con otros sólidos geométricos, estableciendo relaciones conceptuales que los estudiantes explicitaron. Aparte de los enunciados elementales también encontramos algunos inspirados en problemas de situaciones anteriores, por ejemplo, aquel que plantea la posibilidad de inscribir una esfera en el tetraedro truncado de la Situación 2 (Figura 50).

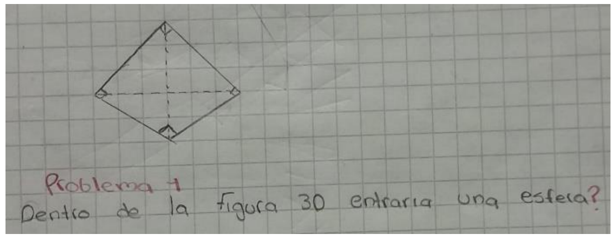


Figura 50. Problema inspirado en una actividad anterior

Un aspecto que es importante tener en cuenta cuando se plantean situaciones libres muy generales, es que las respuestas de los estudiantes pueden ser a su vez problemas muy generales, lo cual no siempre es lo deseado, tal como ocurre en la respuesta a la Situación 1 que se puede apreciar en la Figura 51.

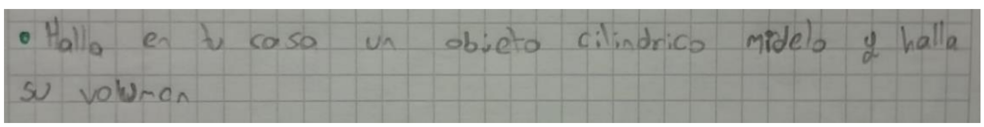


Figura 51. Problema general como respuesta a una situación libre general

Logros

- Los estudiantes acudieron a su experiencia con las anteriores actividades para abordar las situaciones libres que aparecen en esta actividad.
- Se evidencian destrezas aplicadas, de dibujo y verbales en los procesos de planteamiento de problemas de los estudiantes.
- Se muestra diversidad en el planteamiento de problemas en los estudiantes y algunos de ellos plantean su solución de forma correcta.

Dificultades

- Una situación libre demasiado general puede conducir a un problema planteado de forma muy general.

5.2.8. Resultados Actividad 3.2. Esferas magnéticas. Cubo Rubik.

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Los estudiantes trabajaron en los grupos ya establecidos y en su mayoría resolvieron la totalidad de la actividad.

Con respecto a la primera situación, en algunos grupos fue tomado como juego y esto incidió en el tiempo de trabajo y calidad de los problemas planteados. En la segunda hubo en general mayor interés.

Es posible identificar destrezas visuales, de dibujo y aplicadas (Hoffer, 1981) en las respuestas de los estudiantes como en actividades anteriores. No obstante, resulta interesante la manifestación de destrezas lógicas, como se puede apreciar en la Figura 52.

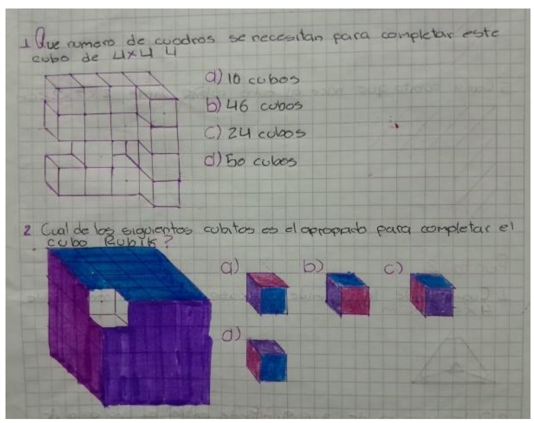


Figura 52. Destrezas lógicas en soluciones a la situación 2.

Se encontraron algunas respuestas interesantes que evidenciaron sobre todo la experiencia con anteriores actividades de planteamiento de problemas. En este caso se evidencian las destrezas aplicadas, al formular preguntas como hallar el radio de la esfera o su volumen (Situación 1), las cuales requieren de toma o estimación de las medidas del objeto real. Otras surgieron de manera espontánea motivadas por el hecho de estar imantadas, como en el problema que sugiere armar una pirámide con las esferas (ver Figura 53).

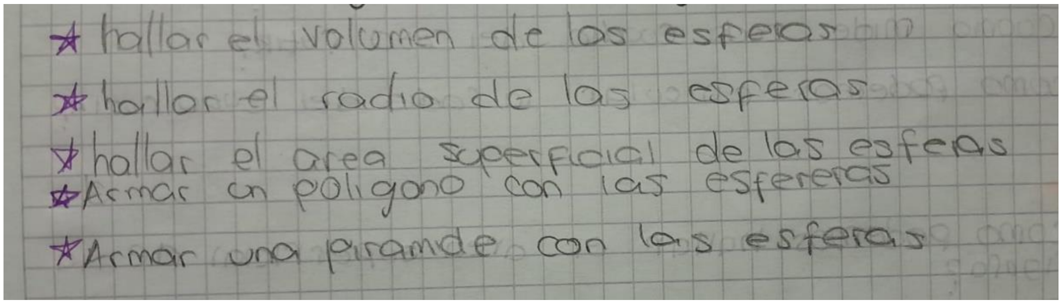


Figura 53. Algunos problemas planteados en la Situación 1

El planteamiento del anterior problema se puede considerar obtenido del procedimiento “¿qué si más?” de Kilpatrick. También se puede identificar el procedimiento de analogía en preguntas cómo las que se presentan en la Figura 54.

-¿Podemos meter 5 bolitas en un cubito y calcular el espacio restante?
-buscar cuántas bolitas se hecesita para poder hacer un cubo de 5 cm

Figura 54. Problemas obtenidos por analogía

Se puede identificar adicionalmente una tendencia a la generalización cuando en el abordaje de la Situación 1, los estudiantes hacen referencias a cubos de Rubik con mayor número de piezas por arista (Figura 55).

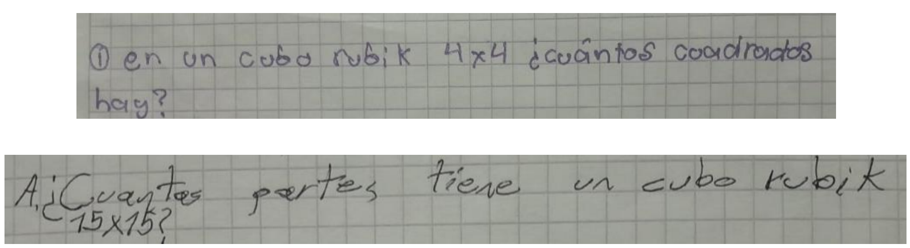


Figura 55. Tendencia a la generalización

El contenido geométrico presente en esta actividad tiene que ver con aspectos generales de los sólidos geométricos desde un punto de vista aplicado. De nuevo este hecho tiene incidencia en las relaciones que establecen los estudiantes con objetos de la cotidianidad.

Los recursos didácticos fueron más concretos en el caso de la Situación 1. La Situación 2, a pesar de tener un enunciado escrito, contenía un elemento de gran interés para los estudiantes, puesto que en el colegio se había desarrollado recientemente un concurso de cubo Rubik.

La visualización fue concreta en el caso de la Situación 1 y por asociación mental en el caso de la Situación 2. Las respuestas de los estudiantes permiten evidenciar el papel que cumple la visualización en los procesos de asociación con objetos reales y apropiación de las relaciones existentes entre sus elementos.

Las situaciones planteadas fueron motivadoras para los estudiantes, puesto que el material didáctico de la Situación 1 llamó su atención y el contexto de la Situación 2 fue para ellos cercano a sus intereses. En los problemas creados por los estudiantes se pueden identificar elementos basados en aprendizajes de anteriores actividades, como la longitud de una diagonal (ver Figura 56).

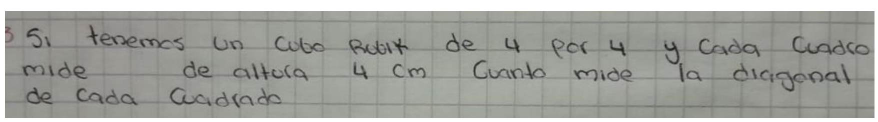

Si tenemos un Cubo Rubik de 4 por 4 y Cada Cuadro mide de altura 4 Cm Cuanto mide la diagonal de Cada Cuadrado

Figura 56. Problema basado en experiencia anterior

Por otro lado, también se pueden encontrar problemas que indagan por relaciones espaciales en el cubo de Rubik, aunque no formen parte explícitamente de los contenidos geométricos. Ejemplos de ellos se muestran en la Figura 57.

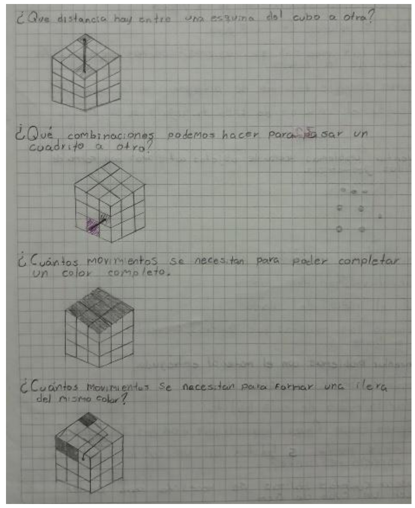


Figura 57. Problemas de la geometría específica del cubo Rubik

Logros

- Se evidenciaron los diferentes tipos de destrezas de pensamiento geométrico de Hoffer
- Al involucrar situaciones relacionadas con objetos del interés de los estudiantes se experimentó mayor motivación que en las 2 actividades anteriores.
- Las situaciones presentadas en esta actividad fueron muy motivadoras para la creación de problemas usando procedimientos heurísticos aprendidos en otras actividades.

Dificultades

- En la Situación 1, al comienzo los estudiantes tomaron el material entregado como juego.

5.3. Análisis de los resultados de la encuesta de satisfacción

Para valorar la efectividad de las actividades se aplica una encuesta de satisfacción a 12 estudiantes, cuyos resultados se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Respuestas a la encuesta de satisfacción

	5	4	3	2	1

a)	3	4	5	0	0
b)	6	4	0	2	0
c)	3	4	2	2	1
d)	7	4	1	0	0
e)	6	1	4	1	0
f)	7	2	2	0	1

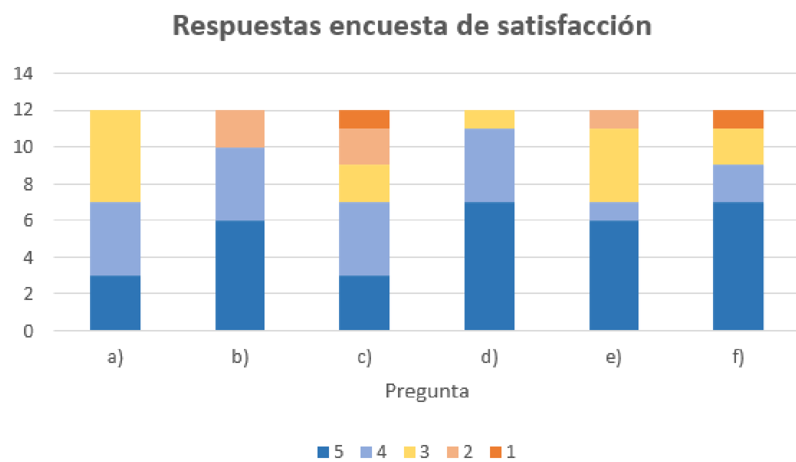
A continuación, se describen los aspectos más importantes que se pueden observar en las respuestas de los estudiantes.

- En el ítem a), 7 estudiantes ubicaron su respuesta en los niveles 4 y 5, mientras que 5 estudiantes respondieron en el nivel 3. Esto indica que, en general, los estudiantes consideran que las actividades de planteamiento de problemas motivan el estudio de la Geometría.
- Para el ítem b), 10 estudiantes respondieron en los niveles 4 y 5, contra 2 estudiantes en el nivel 2, lo cual evidencia que hay acuerdo entre los estudiantes, en que su desempeño mejoraría al aplicar este tipo de actividades con frecuencia.
- Con respecto al ítem c), 7 estudiantes respondieron en los niveles 4 y 5, frente a 5 en los niveles 1, 2 y 3. Esto pone de manifiesto que, en general, los estudiantes encuentran en las actividades de planteamiento de problemas un reto para ellos.
- En el ítem d), 11 estudiantes ubicaron su respuesta en los niveles 4 y 5, mientras que solo 1 en el nivel 3. Esto pone en evidencia que, por mayoría casi absoluta, los estudiantes consideran que, al desarrollar las actividades, experimentan un ambiente que propicia la creatividad en el aprendizaje de la geometría.
- El ítem e) obtuvo como resultado 7 estudiantes en los niveles 4 y 5, mientras que en los niveles 2 y 3 respondieron los 5 restantes. De esta manera, se puede afirmar que, en general, los estudiantes

se sienten motivados a abordar las actividades planteamiento de problemas de forma natural y autónoma.

- En el ítem f), 9 estudiantes respondieron en los niveles 4 y 5, frente a 3 estudiantes que respondieron en los niveles 1 y 3. Se puede afirmar, por tanto, que para los estudiantes es importante inventar sus propios problemas a partir de este tipo de actividades.

En la siguiente gráfica se muestran los resultados anteriormente explicados:



5.4. Validación del modelo didáctico y del sistema de actividades

Los resultados del proceso de validación que se presentan en este capítulo se desarrollan bajo el enfoque basado en argumentos (Kane, 2013). A continuación, se muestran las fuentes de donde se obtienen los argumentos.

Criterios de especialistas: se toman los argumentos de los investigadores Dra. María Falk de Losada, Dr. Juan Nápoles, Dr. Uldarico Malaspina y Dr. Miguel Cruz Ramírez, los cuales ofrecieron criterios favorables sobre el modelo y la estructura de las actividades.

Entrevistas en el campo: se entrevistaron a varios estudiantes, los cuales están motivados por las actividades desarrolladas y ofrecen argumentos a favor de estas.

Análisis de videos: permite identificar elementos relacionados con la creatividad en el planteamiento de problemas y el rol de los estudiantes, que enriquecen el sistema de actividades y el modelo didáctico. Además, los argumentos se consideran en la elaboración de las conclusiones de la tesis.

Encuesta de satisfacción: permite determinar argumentos de los estudiantes relacionados con la implementación de las actividades y sus conocimientos construidos o reforzados.

A continuación, se presenta la triangulación de los argumentos concebidos que muestran la validez del modelo didáctico y del sistema de actividades a partir de método de Kane (2013):

- Se considera que el desarrollo de las actividades proporciona importantes aportes en el aprendizaje de los estudiantes, en cada una de las fases que componen el sistema (actividad preliminar, situaciones estructuradas, situaciones semiestructuradas, situaciones libres). Por lo tanto, el diseño y organización del sistema de actividades hace una contribución significativa al aprendizaje de la geometría y a un proceso robusto de planteamiento de problemas.
- La interacción entre los aspectos teóricos y prácticos propuestos en el modelo didáctico dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje contribuye a favorecer notablemente el desarrollo del pensamiento geométrico y proporciona elementos a los docentes al momento de proponer actividades de planteamiento de problemas a sus estudiantes.
- El uso de diferentes recursos actúa positivamente en favor de la motivación de los estudiantes por el desarrollo de las actividades, sus habilidades de visualización y modelación y de resolución y planteamiento de problemas. Además, demandan del docente creatividad y disciplina.
- Las fases del modelo didáctico están concebidas de forma pertinente, incidiendo de forma positiva en la participación tanto del docente como de los estudiantes en la construcción de saber, aportando notablemente al desarrollo del pensamiento matemático.

- Se evidencia que el modelo didáctico es pertinente en virtud de los resultados obtenidos al aplicar el sistema de actividades.

Conclusiones del capítulo 5

El presente capítulo expone la aplicación y análisis de instrumentos (dirigidos a docentes, exolímpicos e investigadores) en los que se indaga acerca de distintos aspectos del aprendizaje de la geometría, particularmente relacionados con las limitaciones que los estudiantes manifiestan en este proceso y recomendaciones para superarlas. Con relación al primer asunto, hay acuerdo en que los estudiantes presentan poca motivación por las actividades propias de la clase de matemáticas, limitaciones para resolver problemas y bajo nivel de abstracción y argumentación matemática. En general, esto se atribuye a la predominancia de una clase magistral inscrita en un modelo de enseñanza tradicional, en el que las actividades son por lo general de tipo procedimental y mecánico, hay poca estimulación de la creatividad y de procesos como la indagación que se orienten a avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático.

En estos instrumentos también se indaga acerca de la pertenencia de implementar actividades de resolución y planteamiento de problemas en el aula de geometría. Se observa que, en general, existe la idea de que este tipo de actividades promueven la creatividad y contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Esto condujo a la aplicación de un estudio exploratorio para la clase de geometría en la secundaria que evidenció la presencia de las limitaciones anteriormente mencionadas, pero a su vez proporcionó argumentos para afirmar que las actividades de planteamiento de problemas resultan beneficiosas en el aprendizaje de la geometría.

En el estudio exploratorio se pudo constatar que una actividad de planteamiento de problemas permite al docente evidenciar las limitaciones en el aprendizaje de los estudiantes. A su vez, promueve en estos el uso de la creatividad y el sentido lógico. Asimismo, se observó que este tipo de actividades puede contribuir a involucrar estudiantes de bajo rendimiento (desde el punto de vista de la clase tradicional).

Con base en las anteriores observaciones y teniendo presente la estructura del modelo didáctico diseñado en el presente trabajo, se procedió a diseñar, aplicar y analizar un sistema de actividades basado en el planteamiento de problemas geométricos, cuyos resultados, en términos generales, muestran que en el proceso los estudiantes lograron aplicar todas las destrezas de pensamiento geométrico de Hoffer (1981), aprendieron diferentes procedimientos heurísticos, tuvieron un buen desempeño a nivel procedimental y se sintieron motivados hacia el desarrollo de este tipo de actividades.

Al final, se aplicó una encuesta de satisfacción cuyos resultados muestran que para los estudiantes el sistema de actividades fue motivador del aprendizaje de la geometría, fomenta el reconocimiento del planteamiento de problemas como una tarea válida en la clase y propició un ambiente favorable a la creatividad.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre el planteamiento de problemas, basado en un modelo didáctico que enfatiza en las situaciones retadoras, para desarrollar el pensamiento geométrico, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos propician destacar algunos elementos que resultan esenciales en la investigación, ellos son:

- El estado del arte recopilado en el presente trabajo permite dar una idea general de las investigaciones que se han abordado en torno al planteamiento de problemas geométricos en la educación secundaria. Estudios como los de Kilpatrick (1987) y Silver (1997) destacan la relevancia del planteamiento de problemas en el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de la creatividad, siendo trabajos pioneros en el área. Por su parte, estudios como los de Silver y Cai (2005), Chua y Wong (2012) y Cai y Hwang (2019) centran su atención en aspectos propios del trabajo en el aula como la interacción entre planteamiento y resolución de problemas, clasificación de los problemas planteados y criterios para la evaluación de este tipo de tareas. Asimismo, estudios como los de Silver (2013) y Cai et al. (2015), plantean preguntas y problemas posibles para trabajos futuros dentro de este enfoque.
- Por otro lado, Cruz (2002), Contreras (2007), Christou et al. (2005), Kontorovich et al. (2012) y Malaspina (2016) generan modelos que permiten estudiar los procesos subyacentes o asociados con el planteamiento de problemas. Por su parte, trabajos como Shriki y Lavy (2012), Contreras (2013), Leikin y Grossman (2013) y Cruz (2019) dedican sus esfuerzos a estudiar casos concretos de actividades de planteamiento de problemas en el aula, tanto en el caso de la secundaria cómo en la formación de profesores.
- El marco teórico del presente trabajo se sustenta en la interacción entre diferentes aspectos del aprendizaje de la geometría que se manifiestan al momento de resolver y plantear problemas. En

primera instancia, se revisan los aspectos normativos (MEN, 1998 y MEN, 2006) que tienen incidencia sobre el aprendizaje de la geometría a nivel de la educación secundaria. A partir de esto, se abordan los fundamentos del pensamiento geométrico con base en distintos autores. Para el nivel de la educación básica secundaria se considera el trabajo de Hoffer (1981), quien define cinco destrezas fundamentales en el aprendizaje de la geometría: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas. Asimismo, se hace hincapié en la implementación de tareas de resolución de problemas como una poderosa aproximación al aprendizaje de las matemáticas. Se retoma la definición de problema de Krulik y Rudnik (1987) y se asume el modelo para el proceso de resolución de problemas dado por Mason, Burton y Stacey (2010). Por otro lado, se determina la importancia de los procesos de visualización, particularmente en el aprendizaje de la geometría, a partir de Zimmerman y Cunningham (1991), asumiendo la perspectiva de Arcavi (2003).

- Adicionalmente, en el marco teórico del trabajo se determinan los aspectos a considerar con respecto al planteamiento de problemas, en particular su definición (Cai y Hwang, 2019), la especificación de diferentes procedimientos heurísticos de planteamiento de problemas (Kontorovich y Koichu, 2011), los fundamentos de heurística de su resolución (Torres, 2001), que se toman como base para definir elementos de la heurística de planteamiento de problemas. Se considera además el trabajo de Stoyanova y Ellerton (1996) en lo referente a la categorización de las situaciones de planteamiento de problemas en estructuradas, semi estructuradas y libres.
- El aporte teórico del presente trabajo consiste en un modelo didáctico que consta de cuatro fases, para el planteamiento de problemas geométricos en la educación secundaria. La primera fase corresponde a establecer los fundamentos del modelo, los cuales son filosóficos (Lakatos,1978 y Davis y Hersh,1989), psicológicos (Piaget, 1958), matemáticos (aspectos conceptuales de geometría tridimensional) y de Educación Matemática (principios didácticos en resolución y planteamiento de

problemas). La segunda fase del modelo corresponde a la caracterización de diferentes aspectos (docentes, estudiantes, proceso, contenidos, métodos, organización de la enseñanza y evaluación), que son esenciales para definir el estado de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la comunidad en que se hizo la intervención.

- La tercera fase del aporte teórico corresponde a la resolución del modelo. En esta se definen claramente los componentes (pensamiento geométrico, heurística de planteamiento de problemas, contenido geométrico, recursos didácticos y visualización) y se procede a establecer las distintas interrelaciones que existen entre ellos y el concepto emergente de situación retadora de planteamiento de problemas. De esta manera, el modelo propone que una adecuada interacción entre todos estos componentes propicia un proceso robusto de planteamiento de problemas. de acuerdo con esto, es preciso transitar por los tres tipos de situaciones, partiendo de las estructuradas, pasando por las semiestructuradas y finalizando en las libres. Se llega así a la cuarta fase que es la concreción práctica: concebir un sistema de actividades que estén en concordancia con el modelo planteado y evaluar el impacto que esta tiene sobre el aprendizaje a partir de un análisis basado en el modelo.
- El sistema de actividades diseñado en el presente trabajo consta de una actividad preliminar y 3 fases correspondientes a los tres tipos de situaciones de planteamiento de problemas. La actividad preliminar consiste en explorar el grado de acercamiento que los estudiantes puedan tener con actividades de planteamiento de problemas que involucran los tres tipos de situaciones. La primera fase consta de tres actividades en las que los estudiantes deben plantear problemas a partir de situaciones estructuradas. La segunda fase contiene dos actividades en las cuales los estudiantes parten de situaciones semiestructuradas y la tercera consta de dos actividades cuyas situaciones de partida son libres.

- La validación del modelo didáctico y el sistema de actividades se efectuó mediante aplicación de método de validación por argumentos de Kane (2013). Las fuentes que proporcionaron los argumentos fueron: criterios de especialistas, entrevistas en el campo, análisis de videos y encuesta de satisfacción. En términos generales, se destaca el aporte al aprendizaje de la matemática, la interacción entre los componentes teórico y práctico y la pertinencia de ambos, el impacto de los recursos didácticos y los resultados de aplicación del sistema de actividades.

A continuación, se explicitan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados de la aplicación del sistema de actividades.

- El recorrido que los estudiantes hicieron por las diferentes actividades permitió que al final de estas se pudieran evidenciar las cinco destrezas de pensamiento geométrico (Hoffer, 1981)
- A lo largo del desarrollo de las actividades, los estudiantes aplicaron y adquirieron seguridad en el manejo de diferentes procedimientos heurísticos como la variación, la analogía y la generalización.
- Los estudiantes demostraron un buen manejo del componente procedimental, en el momento de resolver los problemas propuestos por ellos mismos o planteados en las situaciones estructuradas. Esto indica que es importante no dejar totalmente de lado este tipo de tareas aunque el énfasis sea puesto en la resolución y planteamiento de problemas.
- El uso de material concreto contribuyó a la motivación de los estudiantes para desarrollar las respectivas actividades, favoreciendo la visualización y representación, así como la identificación de relaciones espaciales. No obstante, se evidenciaron también situaciones bastante motivadoras, aún sin requerir el uso de material manipulativo.
- Las situaciones de planteamiento de problemas propuestas en las actividades fueron en general retadoras y contribuyeron a motivar la creatividad de los estudiantes.

- Uno de los trabajos de mejor calidad entre las actividades fue desarrollado por un grupo de estudiantes que se consideraban de bajo rendimiento y tenían dificultades convivenciales.
- Los estudiantes efectúan mejores procesos de planteamiento de problemas cuando han resuelto otros problemas previos. Esto indica que el planteamiento debe interactuar con la resolución de problemas en el aula.
- Los resultados de las actividades enriquecen las relaciones entre los componentes de la fase de resolución del modelo (pensamiento geométrico, heurística de planteamiento de problemas, contenido geométrico, recursos didácticos, visualización y situación retadora).
- Es importante tener presente que los procedimientos heurísticos de planteamiento de problemas no se deben efectuar de forma mecánica. Estos requieren de una reflexión paralela que evite que los problemas creados sean absurdos o triviales.

RECOMENDACIONES

La implementación del sistema de actividades basadas en el modelo didáctico para el planteamiento de problemas que propicia el desarrollo del pensamiento geométrico requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Continuar la investigación en torno a los procesos de planteamiento de problemas matemáticos en el aula, estableciendo paralelismos entre ellos al abordan contenidos pertenecientes a diferentes ramas de la matemática, especialmente en aquellas en que no se evidencian estudios específicos (teoría de números, cálculo, trigonometría, etc.)
- Motivar a los investigadores a estudiar el planteamiento de problemas de los docentes en formación, de acuerdo con el nivel educativo en que ejercerán. En particular, en el caso colombiano se sugiere desarrollar este trabajo con docentes de primaria, ya que en su mayoría no cuentan con la formación específica en el área, y este enfoque ha demostrado favorecer los aprendizajes.
- Fomentar el estudio en los docentes en ejercicio de los procesos de planteamiento de problemas, así como su implementación, tanto en su elaboración dirigida a la resolución por parte de los estudiantes como en la proposición de actividades que los inciten a crear sus propios problemas.

BIBLIOGRAFÍA

Akveld, M., Cáceres, L., Nieto, J.H. y Sánchez, R. (2020). The Math Kangaroo Competition. *Espacio Matemático, 1*(2), 74-91.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Arcavi, A. (2015). Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education. *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica* Italiana, Serie 1, *8*(3), 143–160.

Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11* (1), 7-16.

Brown, S. y Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Bunge, M. (1997). *Ciencia, técnica y desarrollo*. Uruguay: Editorial Sudamericana.

Cai, J. (2023). *What research says about teaching mathematics through problem posing (P-PBL*). Conferencia plenaria en el Simposio MEM 2023. Universidad Antonio Nariño.

Cai, J. y Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001.*

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem posing research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). New York: Springer.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Castellanos, D. et al. (2001). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”, La Habana, Cuba

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 149–158.

Chua, P. H. y Wong, K. Y. (2012). Characteristics of Problem Posing of Grade 9 Students on Geometric Tasks. En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 202-208). Singapur: MERGA

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*(2), 115-140.

Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: using a Problem-Posing framework with prospective Mathematics teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15–23.

Contreras, J. N. (2013). Fostering mathematical creativity through problem posing and modeling using dynamic geometry: Viviani’s problem in the classroom. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 66-72.

Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática.* (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 468-477.

Cruz, M. (2019). Pensamiento geométrico en Educación Matemática. En clases de Seminario III. Relaciones entre el pensamiento matemático y la Educación Matemática. Programa de Doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño.

De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Cap. 0. El papel de la visualización*. Madrid: Pirámide.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 37-62). Dordrecht: Kluwer Academic.

Duval, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*,*10*, 5-53.

English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing Classroom. *Teaching Children Mathematics*, *4*(3),172-179.

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2020). La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. *Espacio Matemático, 1*(1), 1-18.

Florez Arco, A. (1991). *Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba*. (Tesis de Grado Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana.

Gutiérrez, A. (2005). *Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro. Curso 2005-06*. Valencia: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. *Educación Matemática*, 3(2), 49-65.

Harel, G. y Lesh, R. (2003). Local conceptual development of proof schemes in a cooperative learning setting. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 359-382). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación (Vol. 3)*. México: McGraw-Hill.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the Solution of Word Problems in Mathematics: An Exploratory Study.* (Tesis doctoral no publicada). Stanford University. Stanford, California.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. y Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 149–161.

Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Leikin, R. y Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 515-531.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research. ICME-13 Topical Study Groups*. Basel: Springer Nature Switzerland AG.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática, 11*(15), 321-331.

Malaspina, U. (2020). Indagación, creación y resolución de problemas de matemáticas. En Seminario de Educación matemática. Programa de Doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Malaspina, U. (2022). *Formación de profesores en modelización matemática mediante la indagación y la creación*. Conferencia paralela en el Simposio MEM 2022. Universidad Antonio Nariño.

Malaspina, U. (2023). *Creación de problemas de matemáticas: fases, estrategias y usos didácticos*. Cursillo en el Simposio MEM 2023. Universidad Antonio Nariño.

Mason, J. (2021). *Problem posing & problem solving, with special attention to the role of mental imagery*. Conferencia en el Seminario de Educación Matemática, miércoles 15 de septiembre de 2021. Universidad Antonio Nariño

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Miller, J. (1998). *The psychology mathematical.* Princenton University Press, Princenton.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia: Universidad del Zulia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Rotterdam: Sense.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.

Real Academia Española (2014). Visualizar. En Real Academia Española, *Diccionario de la lengua española* (Ed. Tricentenario). Recuperado de *https://dle.rae.es/visualizar*

Requesens, E. y Díaz, G. (2009). Una revisión de los modelos didácticos y su relevancia en la enseñanza de la ecología. *Revista Argentina de Humanidades y Ciencias Sociales*. *Volumen 7*, nº 1

Rizo C. y Campistrous, L. (2002). La calculadora en la escuela primaria, ¿Amiga o enemiga? *Revista UNO*, *29*, Competencias Matemáticas, 95-123.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Shriki, A. y Lavy, I. (2012). Problem posing in a dynamic geometry environment and the development of mathematical insights. *The International Journal of Learning, 18*(5), 61-70.

Sigarreta, J. (2001). *Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Cuba, p. 78.

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1), 53-66.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162.

Silver, E. (2023). *Problem posing and the quest for mathematical agency*. Conferencia plenaria en el Simposio MEM 2023. Universidad Antonio Nariño.

Silver, E. y Cai, J. (2005). Assessing Students' Mathematical Problem Posing. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 129-135.

Silver, E.A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29*(3), 75-80.

Solé, I., & Coll, C. (1993). Los profesores y la concepción constructivista. El constructivismo en el aula, 7-23

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996) A framework for research into students' problem posing. En: Clarkson, P. (Ed.). *Technology in Mathematics Education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Suárez, W. A., León Corredor, O. L. (2016). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 110-119.

Thompson, P. W. (2002). Didactic objects and didactic models in radical constructivism. *In Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 197-220). Springer, Dordrecht.

Topic Study Group (TSG). International Congress on Mathematical Education, ICME13. (2016). Recuperable el 29 de octubre de 2019 de la URL: *http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_19.pdf*

Topic Study Group (TSG). International Congress on Mathematical Education, ICME14. (2020). Recuperable el 29 de octubre de 2019 de la URL: *https://www.icme14.org/ueditor/jsp/upload/file/20190121/1548052369852001597.pdf*

Torres Ponjuán, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED, 20*(6), 161-174. Recuperado de *http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352009001200005&lng=es&tlng=es.*

Urchegui, P. (2015). *El pensamiento visual en la formación del profesorado: análisis de los componentes del pensamiento viso espacial y su importancia en la formación de los docentes de educación infantil y primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid. Valladolid, España. Recuperada de *https://uvadoc.uva. es/bitstream/10324/16661/1/Tesis927-160405.pdf*.

Van Harpen, X. y Presmeg, N. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 117-132.

Van Harpen, X. y Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics,* *82*(2), 201-221.

Zimmermann, W. y S. Cunningham (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo 1: Encuesta a docentes

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	ENCUESTA A DOCENTES DE MATEMÁTICAS FECHA: ____________	DOCTORADO EN EDUCACION MATEMATICA UNIVERSIDAD ANTONIO NARINO BOGOTA, COLOMBIA Estudiante: CARLOS PABON

Objetivo. Determinar fortalezas, dificultades y acciones posibles en torno al desarrollo del pensamiento matemático, a través del planteamiento de problemas de Geometría.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo. La resolución de problemas es una teoría o enfoque en Educación Matemática que en los últimos años ha evidenciado interesantes resultados en el desarrollo del pensamiento matemático. Asociado a este enfoque, el planteamiento de problemas ha mostrado ser de interés por sus implicaciones tanto para el proceso de resolver problemas, como para el desarrollo de la creatividad matemática.

Estimado docente: su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para esta investigación, que busca avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático a través del planteamiento de problemas de geometría. Muchas gracias por su colaboración.

I. Datos Generales.

1. Licenciado en matemáticas: Si __ No__

2. Postgrado: ____

3. Años de experiencia orientado cursos de matemáticas: _____

II. Cuestionario

Valore en una escala del (1) al (5), donde (5) es siempre, (4) es casi siempre, (3) es algunas veces, (2) es rara vez y (1) es nunca, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
1. En el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, ¿utiliza usted la resolución de problemas?					
2. Con respecto al tipo de problemas que usted propone ¿considera que éstos son susceptibles de diversas soluciones y les permite a sus estudiantes trabajar de manera independiente?					

3. ¿Considera usted que la resolución de problemas aporta al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes?					
4. ¿En sus clases de geometría, permite a sus estudiantes que planteen problemas propios?					
5. ¿Considera usted que el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes contribuye a su creatividad matemática?					
6. ¿Utiliza algún software como herramienta de apoyo en el aprendizaje de la Geometría, para la resolución y planteamiento de problemas?					

III. Preguntas abiertas

1. ¿Cuáles son las mayores dificultades que ha observado en los estudiantes durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría?

____

____

____

____

2. ¿Qué estrategias ha implementado usted con sus estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría a través de la resolución de problemas o planteamiento de problemas?

____

____

____

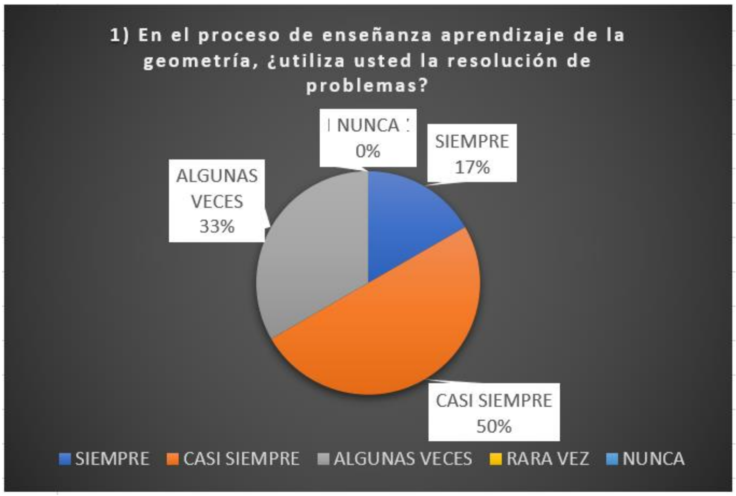
3. ¿Qué sugerencias podría usted proporcionar en relación con la implementación del planteamiento de problemas de Geometría por parte de los estudiantes?

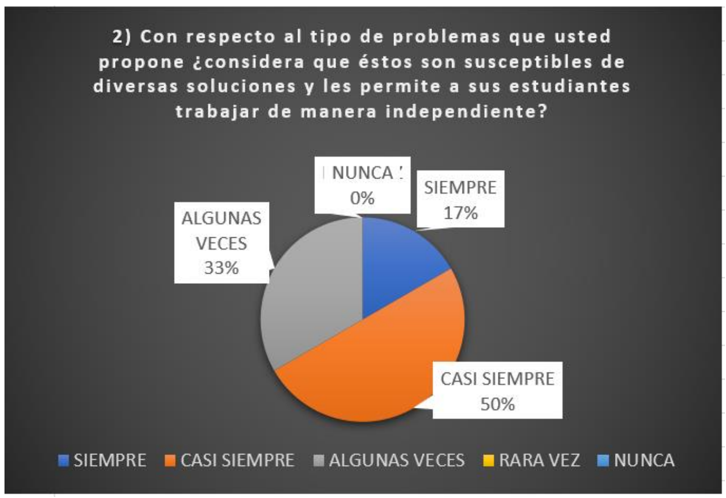
____

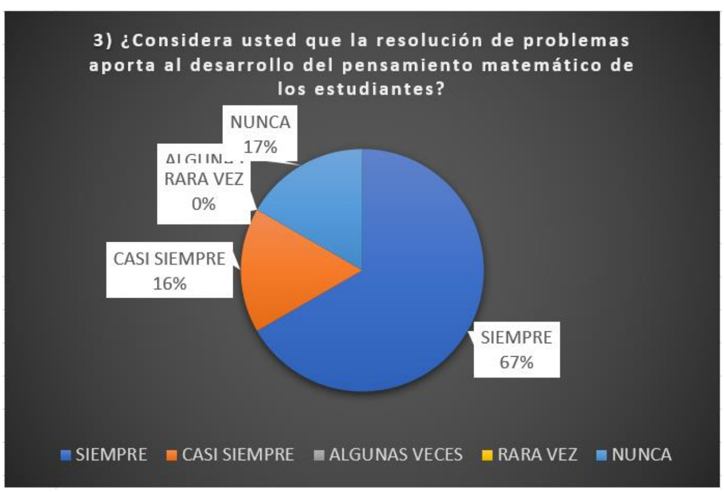
____

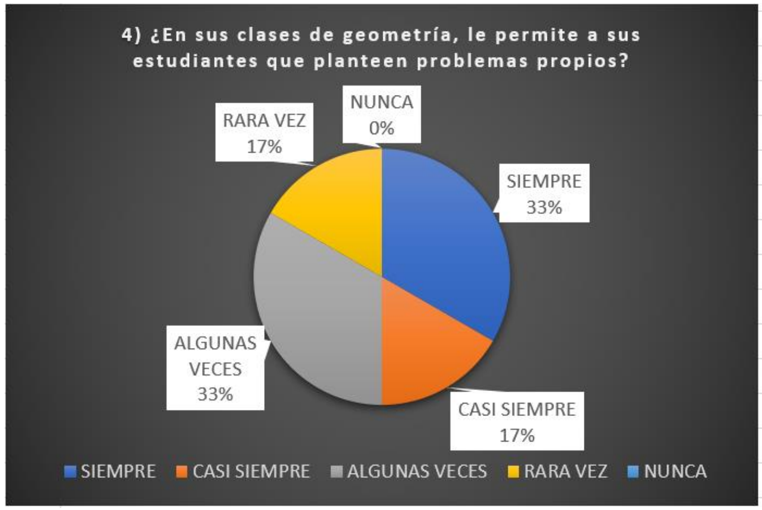
____

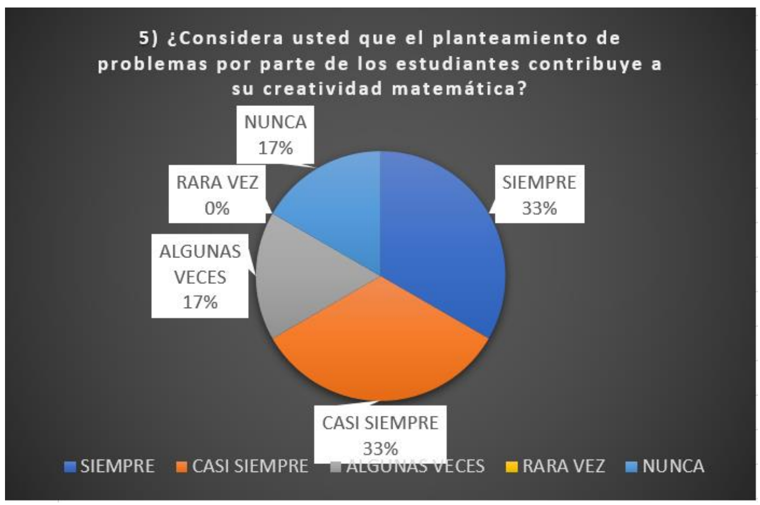
Anexo 2: Resultados de encuesta a docentes (preguntas cerradas)

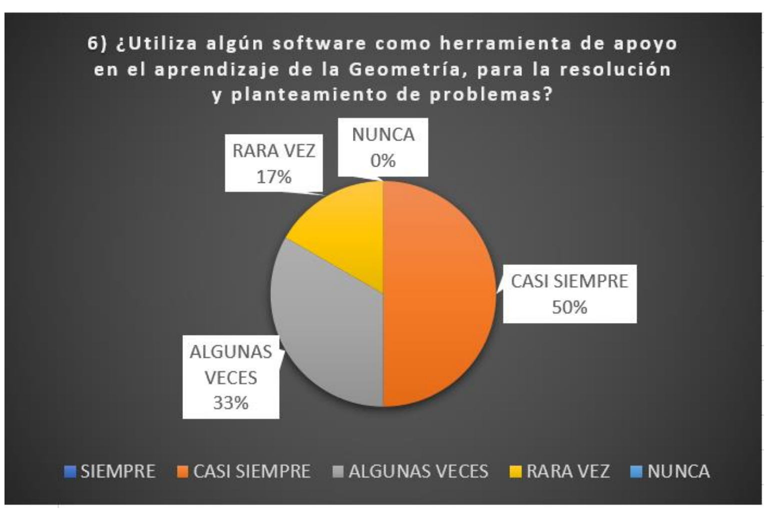







4) ¿En sus clases de geometría, le permite a sus estudiantes que planteen problemas propios?
NUNCA 0%
RARA VEZ 17%
SIEMPRE 33%
ALGUNAS VECES 33%
CASI SIEMPRE 17%
SIEMPRE
CASI SIEMPRE
ALGUNAS VECES
RARA VEZ
NUNCA


5) ¿Considera usted que el planteamiento de problemas por parte de los estudiantes contribuye a su creatividad matemática?
NUNCA 17%
RARA VEZ 0%
SIEMPRE 33%
ALGUNAS VECES 17%
CASI SIEMPRE 33%
SIEMPRE
CASI SIEMPRE
ALGUNAS VECES
RARA VEZ
NUNCA


6) ¿Utiliza algún software como herramienta de apoyo en el aprendizaje de la Geometría, para la resolución y planteamiento de problemas?
NUNCA 0%
RARA VEZ 17%
CASI SIEMPRE 50%
ALGUNAS VECES 33%
SIEMPRE
CASI SIEMPRE
ALGUNAS VECES
RARA VEZ
NUNCA

Anexo 3: Estudio exploratorio

COLEGIO SAN ISIDRO SUR ORIENTAL I.E.D.

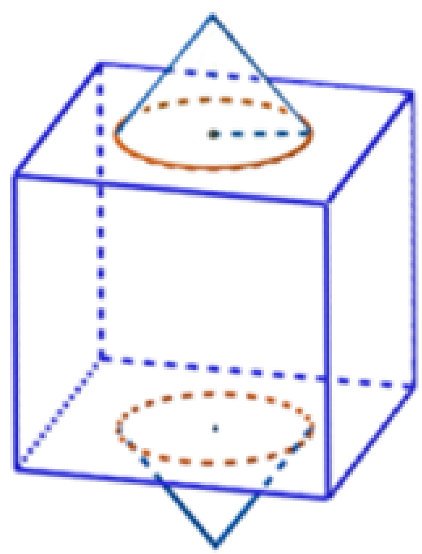
CAMPO DE PENSAMIENTO MATEMATICO

CICLO IV – DOCENTE: CARLOS PABON

OBJETIVO:

Realizar una actividad inicial de planteamiento de problemas a partir de una situación dada en el contexto de los sólidos geométricos.

1. Con base en la figura:

	La arista del cubo es de 5 cm, el radio del cono es de 3 cm y la altura de este mismo, 4 cm.

   a. Plantea un problema que se pueda resolver con la información dada en la figura y resuélvelo
   b. Plantea otros problemas que se puedan resolver con dichos datos (tantos como se te ocurran).

2. Construye una figura diferente a la presentada y plantea tantos problemas como puedas, resuelve uno para socializarlo a tus compañeros.

Anexo 4: Entrevista a (ex)olímpicos

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	ENTREVISTA A (EX) ESTUDIANTES DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS FECHA: ___________________	DOCTORADO EN EDUCACION MATEMATICA UNIVERSIDAD ANTONIO NARINO BOGOTA, COLOMBIA Estudiante: CARLOS PABÓN

OBJETIVO

Determinar fortalezas y dificultades, asi como posibles acciones al respecto, en el contexto del planteamiento de problemas geométricos.

Fuente: Elaboración propia

INTRODUCCIÓN A LA ENTREVISTA

La resolución de problemas es un enfoque en Educación Matemática que en los últimos años ha evidenciado interesantes resultados en el desarrollo del pensamiento matemático. Asociado a este enfoque, el planteamiento de problemas ha mostrado ser de interés por sus implicaciones para el proceso mismo de resolver problemas como para el desarrollo de la creatividad matemática.

Estudiante: ______________________________. Tengo conocimiento de su experiencia en competencias olimpicas en Matemáticas y en particular de su relación con el planteamiento de problemas matemáticos, por tal motivo solicito el favor de contestar las siguientes preguntas, teniendo en cuenta que su opinión es muy importante para el presente trabajo de investigación.

De antemano doy las gracias.

PREGUNTAS

1. Con base en su experiencia en Olimpiadas ¿qué dificultades cree que existen en el aprendizaje de la Geometría y cuáles serian sus causas?

2. De acuerdo con su experiencia en Olimpiadas de matemáticas, ¿por qué se puede considerar importante el aprendizaje de la geometria a través de problemas?

3. De acuerdo con su experiencia en el planteamiento de problemas, ¿podría señalar cómo identificar un problema creativo de uno que no lo es?

4. Finalmente ¿podría sugerir estrategias o aspectos para tener en cuenta al momento de plantear un problema original en Geometría?

Anexo 5: Entrevista a expertos

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	EXPERT INTERVIEW DATE: _____________	DOCTORADO EN EDUCACION MATEMATICA UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO BOGOTA, COLOMBIA Student: CARLOS PABON

OBJECTIVE

Determine strengths, difficulties and possible practical actions, in the context of the development of mathematical thinking through the approach of geometric problem posing.

Source: prepared by author

INTRODUCTION TO THE INTERVIEW

Problem-solving approach in Mathematics Education has been considered fundamental in the development of mathematical thinking. Associated with this approach, problem-posing has generated interest in researchers for its implications both for the problem-solving process and for the development of mathematical creativity.

QUESTIONS

PhD .___________________________________ I am aware of your research experience about Geometry teaching and learning process and, in particular, your experience in posing geometric problems. For this reason, I respectfully ask you to answer the following questions, considering that your opinion is very important for this research work.

I thank you in advance.

1. Based on your experience in Mathematics Education, how do you conceive Geometry teaching and learning process?

2. What difficulties do you think exist in Geometry teaching and learning process and what are the causes of these difficulties?

3. Based on your experience in Mathematics Education, what strategies could be used to strengthen Geometry teaching and learning process through problem solving?

4. Could you suggest activities or strategies to work in the classroom in order to improve Geometry teaching and learning process by applying problem posing?

5. What recommendations would you make when assessing an activity based on the geometric problem posing?

Anexo 6: Encuesta de satisfacción a estudiantes

Apreciado estudiante, una vez terminadas las actividades de planteamiento de problemas y a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas de 5 a 1, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación.

a. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la geometría?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

b. ¿Cree usted que su desempeño en geometría mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

c. ¿Las situaciones propuestas constituyeron un reto para usted?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

d. ¿Considera usted que durante el desarrollo de las actividades se vivió un ambiente que propicia la creatividad en el aprendizaje de la geometría?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

e. ¿Se sintió usted motivado a abordar las situaciones de forma natural y autónoma?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

f. ¿Considera usted importante que los estudiantes inventen sus propios problemas y no solamente el docente?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐