



INCIDENCIA DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y VISUAL EN LA ENSEÑANZA
APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN GRADO TERCERO

Diana Katherine Rodríguez Cabezas

Código: 10542011912

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Bogotá D.C.

2.021

INCIDENCIA DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y VISUAL EN LA ENSEÑANZA
APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA EN GRADO TERCERO

Diana Katherine Rodríguez

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magíster en
Educación Matemática

Director de tesis:

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez

Líneas de investigación:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Desarrollo del pensamiento matemático y avances en su caracterización.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Bogotá D.C.

2.021

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. noviembre 29 de 2021

AGRADECIMIENTOS

A Dios por siempre guiarme y acompañarme al mejor camino, ya que sin su ayuda no hubiera podido superar todas y cada una de las dificultades que se presentan en el diario vivir.

A la Universidad Antonio Nariño y a los docentes por brindarme la oportunidad de compartir este proceso y mejorar día a día.

Al asesor Osvaldo Jesús Rojas Velázquez que con su sabiduría y excelentes conocimientos orientó acertadamente esta tesis de maestría.

A mi familia por apoyarme incondicionalmente a lo largo de mi carrera profesional.

DEDICATORIA

*A mis padres y a mi familia por ser el pilar fundamental
en mi formación profesional y personal.*

*Además, por el apoyo incondicional en este proceso
que con orgullo estoy culminando*

CON AMOR

LA AUTORA

SÍNTESIS

La geometría es una de las ramas más importantes en las matemáticas (Dindyal, 2015), es por eso que la trazabilidad con el paso de los años escolares es muy importante, generando habilidades en los estudiantes, sin olvidar la formación, el interés y la motivación del docente, para comprender el contenido. La presente tesis contribuye al proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico, por medio del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero del Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría.

En esta investigación destaca la construcción de actividades bajo los cimientos de la teoría de la resolución de problemas, el pensamiento espacial y visual y la teoría de comunidad de práctica de Wenger. La metodología de la investigación se sustenta en un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación acción. Con la implementación de un sistema de actividades, se destaca la motivación del estudio por la geometría, el dominio en la resolución de problemas y el trabajo en grupos, permitiendo la construcción del pensamiento geométrico, lo cual favorece un robusto proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en estudiantes de grado tercero.

ABSTRACT

Geometry is one of the most important branches in mathematics (Dindyal, 2015), that is why the traceability over the school years is pretty important, generating skills in students, without forgetting the teacher's training, interest and motivation, to understand the content. This thesis contributes to the teaching-learning process of geometric content, through spatial and visual thinking in third grade students of the Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría.

In this research, it is highlighted the construction of the activities under the foundations of the theory of problem solving, spatial and visual thinking and Wenger's theory of community of practice. The research methodology is based on a qualitative approach, with an action research design. With the implementation of the activities system, it is worth to highlight the motivation of geometry study, the mastery in solving problems and working in groups, allowing the construction of geometric thinking, which favors a robust teaching-learning process of geometry in third grade students.

TABLA DE CONTENIDOS

PÁG.

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE	10
1.1. El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a través de la integración del pensamiento espacial y visual en congresos y reuniones en primaria	10
1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria	13
1.2.1. A gap between learning and teaching geometry.....	14
1.2.2. A kindergartner’s use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation	15
1.2.3. Drawing and geometry in elementary school: a long lasting marriage that ends with a contentious divorce	16
1.2.4. Geometry in the early years: a commentary	17
1.2.5. New opportunities in geometry education at the primary school	18
1.2.6. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report.....	20
1.3. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de la integración del pensamiento espacial y visual, en estudiantes del grado tercero de la escuela primaria	21
1.3.1. Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry	21
1.3.2. (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades.....	22
1.3.3. Empowering visuo-spatial ability in primary school: results from a follow-up study.....	24
1.3.4. Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention	25
1.3.5. Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization	26
1.3.6. Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school	28
1.3.7. In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding	29
1.3.8. Transforming the established perceptions of visuospatial reasoning: integrating an ecocultural perspective.....	31
1.3.9. First-graders’ spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations.....	32

1.3.13. Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9	38
1.3.14. Learning Through and from Drawing in Early Years Geometry	39
1.3.15. A Conceptual Framework for Facilitating Geospatial Thinking.....	41
1.3.16. The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?	42
1.3.17. Geometric maps as tools for different purposes in early childhood	44
1.3.18. Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training	45
1.4. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de la integración del pensamiento espacial y visual, en estudiantes del grado tercero de la escuela primaria en Colombia	47
1.4.1. Desarrollo de conocimiento geométrico euclidiano y uso de mapas.....	47
1.4.2. Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias	49
1.4.3. Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños.....	50
Conclusiones del capítulo 1.....	51
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	54
2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores.....	54
2.2. Referentes teóricos del pensamiento espacial en la escuela primaria.....	60
2.3. Fundamentos del pensamiento visual en la matemática de la escuela primaria	64
2.4. Fundamentos de la Teoría de Comunidad de Práctica de Wenger	70
Conclusiones del capítulo 2.....	73
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	75
3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación	75
3.2. Población y muestra (Unidad de análisis)	76
3.3. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados.....	76
3.4. Fases de la investigación	77
Conclusiones del capítulo 3.....	78
CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES.....	79
1.1. Fundamentos del sistema de actividades desde el marco teórico	79
1.2. Propuesta de actividades	81

1.2.1. Actividad 1. Cubos.....	81
4.2.2. Actividad 2. Prismas.....	84
4.2.3. Actividad 3. Pirámides.....	88
4.2.4. Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos	92
4.2.5. Actividad 5. Todos los cuerpos	97
Conclusiones del capítulo 4.....	101
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	102
5.1. Análisis de los instrumentos aplicados	102
5.1.1. Entrevista realizada a especialistas.....	102
5.1.2. Encuesta a los docentes de la institución.	105
5.2. Análisis de los resultados	106
5.2.1. Actividad 1. Cubos.....	106
5.2.2. Actividad 2. Primas.....	113
5.2.3. Actividad 3. Pirámides.....	119
5.2.4. Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos	126
5.2.5. Actividad 5. Todos los cuerpos	131
5.3. Resultados de la encuesta de satisfacción	138
Conclusiones del capítulo 5.....	141
CONCLUSIONES.....	143
RECOMENDACIONES	147
BIBLIOGRAFÍA	148
ANEXOS	165
11.1 Anexo 1. Entrevistas a especialistas.....	165
11.2 Anexo 2. Encuesta a docentes.....	166
11.3 Anexo 3. Validación de la encuesta por el método Delphi	169
11.4 Anexo 4. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 1. Cubos	171
11.5 Anexo 5. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 2. Primas	172
11.6 Anexo 6. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 3. Pirámides ...	173
11.7 Anexo 7. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos.	174

11.8 Anexo 8. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 5. Todos los cuerpos	175
11.9 Anexo 9. Encuesta de satisfacción a estudiantes.....	176

INTRODUCCIÓN

El National Committee of teachers of Mathematics (NTCM, 2000) proponen los estándares curriculares para la escuela como una estructura dirigida a la formación matemática de los estudiantes, desde preescolar hasta grado doce. Desde los estándares de matemáticas se propicia que los estudiantes aprendan a conocer, a hacer, a convivir y a ser, los cuales constituyen pilares básicos del aprendizaje, que la educación crea y desarrolla (Delors, et. al, 1987).

En los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias, se distinguen las matemáticas desde dos perspectivas. La primera es la aritmética, la cual centra su atención en los números con sus cuatro operaciones básicas; la segunda perspectiva es la geométrica, la cual se orienta a partir de un enfoque euclidiano. Esto genera una subdivisión del pensamiento matemático, desde lo numérico hasta lo espacial (geométrico); este último pensamiento lo abordan desde lo intuitivo y cualitativo, resaltando la no necesidad de términos métricos.

Dindyal (2015) toma a la geometría como una de las ramas más importantes de la matemática, donde enfatiza el papel fundamental del docente al relacionar el contenido geométrico con las necesidades que presenta el estudiante, lo cual genera un interés por el aprendizaje. Por otro lado, es de resaltar la contribución de la geometría al desarrollo escolar, por su marcado carácter formativo y su fuente de problemas (Rizo, 1987; Burgués, Alsina y Fortuny, 1989; Martínez y Rivaya, 1989; Barcia, 1999; Rojas, 2009).

Además, Dindyal (2015) determina las razones por las cuales se debe enseñar geometría y razonamiento espacial en la escuela, donde se beneficia el desarrollo del

pensamiento geométrico en los estudiantes, creando habilidades espaciales desde temprana edad.

Uribe, Cárdenas y Becerra (2014) se enfocan en la importancia del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, partiendo de la tendencia que existe actualmente en las escuelas de básica primaria, con la aplicación de fórmulas para hallar el área o el perímetro de una determinada figura. Estos autores consideran pertinente la introducción de conceptos euclidianos básicos para su comprensión, sin dejar de lado aspectos didácticos e históricos. Todo lo anterior, genera una dilución de la geometría y el pensamiento espacial en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el NCTM (2000) se proponen unos contenidos indispensables para la formación de los estudiantes desde la básica primaria, como lo son: analizar características y propiedades de las distintas figuras geométricas, usar la visualización para resolver problemas y el poder describir ubicaciones y relaciones espaciales.

Por otra parte, Jones (2000) identifica la evolución de la geometría en la escuela, donde se comprende en gran medida los aspectos visuales. El objetivo de la geometría es el uso de la naturaleza junto con sus aplicaciones, considerando la importancia del pensamiento espacial, la intuición geométrica y la capacidad de visualización. Esto proporciona en los estudiantes de grado tercero una experiencia en las distintas dimensiones (2D y 3D), lo cual genera habilidades por medio de la aplicación de situaciones problema con su contexto real inmerso.

El pensamiento espacial permite analizar características, propiedades y relaciones entre figuras en 2D y 3D; además, se construyen relaciones espaciales para dar

solución a problemas por medio de la visualización y del razonamiento espacial (Uribe, Cárdenas, Becerra, 2014).

Diversas son las investigaciones que centran su interés en el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de básica primaria (Gutiérrez, 2005; Cortés, Sandoval & Otálora 2013; Uribe, Cárdenas, y Becerra, 2014; Freitas, & McCarthy 2014). Cortés, Sandoval & Otálora (2013) plantean que el conocimiento geométrico implica construir representaciones aloécnicas en el espacio, donde el niño crea relaciones entre objetos y a su vez las puede alejar de su experiencia, llegando así a una representación egocéntrica. Este proceso genera en los estudiantes una estructura del espacio, donde pueden orientar, ubicar, tomar distancias y darles una dirección a las figuras y/o cuerpos geométricos.

Dindyal (2015) realiza una serie de comentarios sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en los primeros años de escolaridad. Aborda preguntas del ¿Qué, y por qué enseñar? Además, contrasta lo que los estudiantes a esa edad pueden desarrollar con un razonamiento espacial y lo compara con aquello que solicitan los docentes en el aula.

El pensamiento espacial y visual para la enseñanza aprendizaje de la Geometría en primaria se ha abordado en congresos y reuniones en el campo de la Educación Matemática. Entre los congresos se pueden destacar el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática

Educativa (RELME), entre otros. En estas reuniones se presentan las dificultades y experiencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría desde la integración del pensamiento espacial y visual, en los diferentes niveles educativos, particularmente en primaria.

En los diferentes ICME desde el año 2008 hasta el 2021, se aborda en los Topic Study Group (TSG) la enseñanza aprendizaje de la geometría a nivel primario. En el ICME 13 y 14, el TSG 12 y 8 hacen referencia a la geometría en la escuela primaria, donde centran su atención en las habilidades espaciales en dos y tres dimensiones, además, abordan las raíces psicológicas del pensamiento espacial, visual y geométrico.

En el CIBEM se realizan reflexiones teóricas y enfatizan experiencias relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Además, en los XV y XVI Congresos del PME presentan ponencias sobre el desarrollo de la visualización, para mejorar el desarrollo del pensamiento geométrico.

Por otra parte, en los Simposios del SEIEM 2013 y 2016 trabajan la visualización y sus habilidades desde el campo de la geometría y el razonamiento espacial. En los CERME 9, 10 y 11 contribuyen al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, con ayuda de diferentes herramientas visuales. Por último, pero no menos importante, el estudio ICMI (1995) aborda las diferentes tendencias en el área de la geometría, desde una perspectiva curricular y la preparación del maestro.

Una muestra de la actualidad en la presente temática lo constituye el número especial dedicado por la revista Mathematics Education Research Journal (MERJ) en el 2020. Esta edición presenta trabajos centrados con el razonamiento espacial, su relación y apoyo al aprendizaje de las matemáticas. Su objetivo es proporcionar un camino para

estudios aplicados, teniendo como base la integración de la parte conceptual con la práctica, para llegar a su generalización y crear impacto.

Cada uno de los artículos se focalizan en dos temas generales, primero se encuentran los vínculos teóricos y/o conceptuales entre el razonamiento espacial y las habilidades matemáticas; segundo, llevan a cabo la aplicación del aprendizaje teniendo como centro el razonamiento espacial en entornos matemáticos. Así mismo, los autores de este número especial sugieren para futuras investigaciones abordar la educación matemática desde una perspectiva psicológica. Los artículos abordan las aplicaciones prácticas que implica un aprendizaje espacial, por lo cual, lo relacionan con el nivel curricular, nivel del educador y por supuesto el nivel del estudiante.

Zapateiro, Poloche y Camargo (2016) abordan una propuesta didáctica con el objetivo de fortalecer el desarrollo de la orientación espacial por medio del juego. Este se determina por medio de escalas, partiendo de las cuatro competencias del pensamiento espacial: ubicación espacial y trayectoria intuitiva, organización espacial, modelos y mapas, coordenadas y estructuración espacial.

García, Villegas y González (2015) trabajan el dibujo como una herramienta donde los niños pueden demostrar sus nociones espaciales adquiridas por la experiencia. Los autores constatan en los dibujos tres tipos de espacios propuestos por Piaget, el topológico, el euclidiano y el proyectivo; concluyendo con la necesidad de educar al docente para que aborde en el aula de clase este tipo de conocimientos.

Esta investigación contribuye a los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría con estudiantes de grado tercero, teniendo en cuenta los beneficios de la integración entre el pensamiento espacial y visual. Así mismo, se generan aportes a la

educación matemática, con ayuda de la creación de un sistema de actividades formado por problemas retadores, donde en su resolución se integran el pensamiento espacial y visual.

La revisión de la literatura, la aplicación de entrevistas y encuestas, y la experiencia de la autora, permite constatar las oportunidades de mejora que se presentan a continuación:

- Uso de los materiales didácticos, por encima de la tendencia a la utilización de la tecnología.
- Actividades que promuevan la experimentación, búsqueda y comprensión del conocimiento geométrico por parte del estudiante.
- Los conocimientos existentes y experiencias de los estudiantes, para así tener un contexto en la construcción de las actividades.
- Diseñar actividades para desarrollar la imaginación mental por parte de los estudiantes, lo cual, propicia una comprensión de la geometría espacial.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo integrar el pensamiento espacial y visual en la enseñanza y aprendizaje del contenido geométrico en estudiantes del grado tercero en el Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en escuela primaria y se infiere como **objetivo general** favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, a través de un sistema de actividades sustentado en la integración del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado

tercero en el Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría. Como **objetivos específicos** se tienen:

- Diagnosticar el estado actual de las competencias matemáticas de los estudiantes de tercer grado de primaria de la institución educativa.
- Analizar los resultados del diagnóstico aplicado a los estudiantes de grado tercero para identificar las dificultades con respecto al diseño del sistema de actividades.
- Elaborar una propuesta didáctica para contribuir el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.
- Evaluar los aprendizajes de los estudiantes a través de los instrumentos de valoración.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría mediante la integración del pensamiento espacial y visual, a través de la resolución de problemas en estudiantes del grado tercero.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Qué tendencias determinan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente relacionado con el pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero de primaria?
2. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente referido al pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero de primaria?

3. ¿Cómo concebir un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, integrando el pensamiento espacial y visual en estudiantes del grado tercero?
4. ¿Cómo analizar la validez del sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes del grado tercero?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis son propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente relacionado con el pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero de primaria.
2. Determinar los fundamentos teóricos sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente referido al pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero de primaria.
3. Elaborar un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes del grado tercero.
4. Validar el sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes del grado tercero.
5. Análisis de resultados de la aplicación de las actividades.

El **aporte práctico** radica en un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes del grado tercero. Además,

se propone mostrar avances en la caracterización del Pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y 9 anexos. En el capítulo 1, se presenta el estado del arte con diferentes investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en estudiantes de grado tercero a nivel mundial. El capítulo 2, corresponde al marco teórico sustentado en la teoría de resolución de problemas, el pensamiento espacial en la escuela primaria, el pensamiento visual en la enseñanza aprendizaje de la matemática y la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. El capítulo 3, se evidencia la metodología con un enfoque cualitativo y un diseño de investigación acción.

En el capítulo 4, se aborda el sistema de actividades integrando el pensamiento espacial y visual, con el fin de contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría. Por último, en el capítulo 5 se denotan los resultados de la presente investigación.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En el capítulo se constatan investigaciones que sustentan el desarrollo de la presente tesis, recalcando la importancia y pertinencia del tema en el campo de la educación matemática. Además, se evidencia los aportes prácticos, teóricos, metodológicos y bibliográficos que realizan los autores para dar soluciones a la problemática planteada. Los diferentes epígrafes se ordenan de la siguiente manera: primero se identifican investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en congresos y reuniones a nivel primaria; en el segundo epígrafe se resaltan autores que abordan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria. Además, el tercer epígrafe centra su atención en la integración del pensamiento espacial y visual, en estudiantes del grado tercero de la escuela primaria a nivel mundial y el cuarto y último epígrafe se centra en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría con una integración del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero en Colombia.

1.1. El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a través de la integración del pensamiento espacial y visual en congresos y reuniones en primaria

En el ICME 14 (2020) el grupo TSG 8 aborda *la enseñanza y aprendizaje de la geometría en primaria*. La investigación tiene como objetivo la discusión de los procesos que se llevan a cabo en el aula de clase y las temáticas relacionadas con el uso de las herramientas y/o recursos manipulables. Para mejorar y fortalecer el campo de la geometría, llevan a cabo la resolución de problemas, el conocimiento y la preparación del profesorado en educación geométrica.

En el ICME 13 (2016), el grupo de estudio TSG 12 centra su atención en la *geometría y su proceso de enseñanza aprendizaje en primaria*. En él contemplan procesos y temáticas propias de la asignatura como los pre-conceptos para el aprendizaje, el uso de instrumentos manipulativos, la aplicación de la geometría en el mundo real y la formación del profesorado.

En el ICME 11 (2008), el grupo de debate TSG 12 aborda la *enseñanza y el aprendizaje de la geometría*. Donde establecen criterios para el desarrollo visual y habilidades espaciales necesarias para la enseñanza de la geometría, además, abordan características del pensamiento espacial que contribuyen a la formación del estudiante y la didáctica de la geometría que aporta a la formación de los futuros maestros.

En cuanto a los dos últimos congresos realizados por el CIBEM, se destacan algunas reflexiones teóricas o experiencias relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría por parte de docentes e investigadores.

En el VII CIBEM Montevideo 2013, se encuentra un taller llamado *una nueva mirada a la enseñanza de la geometría a través del plegado*, el cual alienta al maestro para realizar el plegado como un recurso didáctico a la hora de enseñar geometría. Reconocen la importancia que tiene el docente en el proceso de enseñanza aprendizaje, dado que el maestro es quien introduce los recursos al aula, para así crear habilidades por medio de la creatividad y la experiencia.

Más adelante, en los talleres del VIII CIBEM Madrid 2017, plantean una secuencia didáctica denominada *Mirar, sentir, pensar y crear desarrollo de habilidades básicas a través del estudio geométrico de mosaicos*, donde estudian los niveles de comprensión

de los niños frente al uso de mosaicos, los cuales generan experiencias sensibles por medio de ellos.

En un minicurso del presente congreso abordan *La geometría plana en la educación primaria: más allá del cálculo de perímetros y áreas*. Centran su atención en los contenidos geométricos como figuras planas, transformaciones geométricas y teselaciones del plano, teniendo en cuenta el contexto del alumno y el uso de materiales elaborados por el docente; todo ello favorece la comprensión de conceptos geométricos y genera una reflexión sobre la construcción de estos conocimientos.

En la reunión *Geometry Working Group durante el XV Congreso del PME* (Asís, Italia, 2018) y la *conferencia en comunicación del XVI Congreso del PME Group* (Durham, EE.UU., 2019), realizan ponencias sobre las destrezas en visualización, la representación de cuerpos geométricos espaciales y la importancia del manejo de diferentes materiales manipulables en el aula.

En el XVII Simposio SEIEM (Bilbao, 2013) realizan investigaciones acerca de la visualización como un gran tema de interés en el ámbito de la geometría y en el razonamiento espacial. Además, indagan acerca del conocimiento geométrico para la enseñanza en básica primaria.

En el XX Simposio SEIEM realizado en Málaga 2016, publican un poster acerca de *las habilidades de visualización en actividades de geometría espacial*. Presentan las habilidades de visualización que deben adquirir los estudiantes tales como: la conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio y reconocimiento de relaciones espaciales, lo que generan buenos resultados en las actividades propuestas.

En el CERME 11 (2019) abordan cuestiones clásicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En el CERME 10 (2017) realizan discusiones centrándose en tres temas principales: actividades con material; visualización y habilidades espaciales; lenguaje, prueba y argumentación. Por otro lado, en el CERME 9 (2015) realizan contribuciones a la enseñanza y aprendizaje de la geometría con ayuda de las transformaciones geométricas, la visualización de objetos en el plano y/o espacio y por supuesto la relación de los docentes en este proceso.

Por último, en International Commission on Mathematical Instruction (ICMI,1995) identifican las principales tendencias en geometría abordando las implicaciones y perspectivas de la enseñanza. Además, centran su atención en aspectos sociales y didácticos con ayuda del diseño curricular y la preparación del maestro.

En el ICMI (1995) abordan *las perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. En este documento discuten los retos y tendencias para un futuro, además, focalizan los impactos didácticos de la enseñanza para el aprendizaje de la geometría, a partir de los nuevos métodos y su aplicación en el aula. Destacan el uso de materiales didácticos manipulables y visuales, como un recurso importante para mejorar la calidad en la enseñanza de la geometría.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria

1.2.1. A gap between learning and teaching geometry¹

Vighi y Marchini (2010) realizan un estudio con alumnos italianos de 9 años, para así, encontrar errores y conceptos erróneos basados en la Geometría. Además, indagan en los comportamientos de los alumnos y las posibles raíces del razonamiento geométrico.

Los protocolos que abordan Vighi y Marchini (2010) sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas geométricos, se fundamentan en tres pasos, el primer paso construye sugerencias generales para la práctica docente; el segundo, relaciona el análisis a priori de la hoja de trabajo y el tercero, se centra en los resultados obtenidos y su respectiva interpretación.

En los protocolos abordan preguntas tales como *¿Cuál es el papel de las palabras en la geometría?*, *¿Qué significa "área" para los niños?* y *¿Qué significa "perímetro" para los estudiantes?* Para lo cual, llegan a la conclusión de que los italianos reducen los procesos de enseñanza aprendizaje a un cálculo de fórmulas, con datos conocidos y/o desconocidos siendo este último complejo para los estudiantes.

Vighi y Marchini (2010) centran su atención en el uso del papel en la enseñanza aprendizaje de la geometría, como uno de los factores indispensables en el proceso del estudiante. Las formas y el uso del papel determinan un enlace entre el objeto concreto y la figura geométrica ideal. Además, el aspecto geométrico de las formas condujo a renunciar a cualquier cálculo u operaciones extrañas sin sentido.

¹ Vighi, P. y Marchini, C. (2010). A gap between learning and teaching geometry. Conference Minutes of *Mathematics Department, University of Parma, Italy*. Recuperable el día 18 de Junio del 2020 en el siguiente link: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Vighi.pdf

Vighi y Marchini (2010) realizan actividades con los estudiantes italianos, presentando grandes diferencias con la educación colombiana y con otros países, aportando así en el presente trabajo de tesis al poder contrastar los resultados y ayudar en la elaboración y creación de las actividades.

1.2.2. A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation²

Elia, Evangelou, Hadjittoouli y Heuvel (2014) investigan las gesticulaciones en estudiantes de preescolar de un jardín de infantes público en Larnaca, Chipre. Abordan actividades geométricas con aspectos comunicativos, lo cual, brinda una investigación cualitativa, enfocado en estudiantes de 5 años en compañía de su maestra de geometría.

La actividad se basa en una configuración de formas como el rompecabezas, el cual, se presenta de forma virtual y física o tradicional. El objetivo es generar en el estudiante una comunicación de instrucciones claras y correctas al experimentador, para así, lograr completar una figura en un espacio determinado.

Para Elia et al. (2014) es indispensable tener acceso a los procesos mentales que realiza el estudiante a través de sus movimientos verbales y/o gestuales, además, de la descripción si el estudiante logra desarrollar la actividad de forma correcta.

Los resultados que arrojan muestran que el estudiante produce más gestos cuando usa la computadora que el material físico. Por lo cual, categorizan los gestos como

² Elia, I., Evangelou, K., Hadjittoouli, K. y Heuvel, M. (2014). A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation. *Latin American Journal of Research in Educational Mathematics. RELIME*, vol. 17, núm. 4- 1, 2014, pp. 199-220. Recuperable el día 30 de Junio del 2020 en el siguiente link: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644010>

deícticos e icónicos, donde los estudiantes pueden comunicar por medio de los gestos y conocimientos de rotación y traslación, facilitando el proceso de enseñanza aprendizaje.

Esta investigación es importante para el presente trabajo de tesis, por las diversas actividades que abordan y el contenido que orienta a futuros proyectos. La población con la cual trabajan es limitada, lo cual, incentiva al desarrollo de futuras investigaciones y contrastes de los resultados obtenidos.

1.2.3. Drawing and geometry in elementary school: a long lasting marriage that ends with a contentious divorce³

Leme da Silva (2014) analiza la trayectoria del dibujo y la geometría en la escuela primaria con estudiantes de São Paulo, con ello, busca reflexionar sobre las condiciones y contextos en los cuales se separan el dibujo y la geometría.

Leme da Silva (2014) reconoce el dibujo como aquella herramienta que ayuda a la introducción de figuras geométricas, además, de poder ver la geometría representada por dibujos. El objetivo es generar en el estudiante el trazo de figuras a mano alzada, por medio de la observación.

Leme da Silva (2014) cita a Rousseau quien describe que el estudiante debe medir con los ojos, por lo tanto, es fundamental el material original y no una representación. La autora reconoce la importancia de la geometría y el dibujo de forma conjunta,

³ Leme da Silva, M. (2014). Drawing and geometry in elementary school: a long lasting marriage that ends with a contentious divorce. *Revista História da Educação*, 18(42),61-73. Recuperable el día 25 de junio del 2020 en el siguiente link: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=3216/321629404004>

generando en el estudiante un aprendizaje significativo en el aula, sin dejar de lado las normas y decretos ya establecidos.

La investigación realizada por Leme da Silva (2014) confirma la necesidad de la investigadora de la presente tesis por el uso del dibujo para crear un pensamiento espacial en estudiantes de cualquier nivel educativo. Además, brinda ideas para la construcción de las actividades y/o materiales a usar.

1.2.4. Geometry in the early years: a commentary⁴

Dindyal (2015) realiza un comentario sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría en los primeros grados. La investigación consta de diversas investigaciones cualitativas, centrada en experimentos sobre la enseñanza de la geometría con estudiantes entre 4 y 8 años.

Los experimentos que realiza Dindyal (2015) tienen como base problemas que responden al ¿Qué y por qué enseñar? además, de la representación de ideas, el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y la evaluación que se genera a los estudiantes. Los temas que abordan son simetría, dibujos, construcción dimensional y deconstrucción, uso de definiciones, razonamiento espacial y resolución de problemas.

Dindyal (2015) considera que la representación en geometría se puede realizar a partir de un objeto concreto por medio de figuras. Este proceso propicia la importancia de generar un desarrollo físico y cognitivo en el estudiante, para que pueda representar y pasar de una dimensión 2D a 3D y viceversa. En la búsqueda de la representación se

⁴ Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education* 47, 519–529. Recuperable 1 de Junio de 2020 en el link: <https://ezproxy.uan.edu.co:2077/content/pdf/10.1007/s11858-015-0700-9.pdf>

pueden utilizar recursos didácticos, tales como: materiales e instrumentos tradicionales y recursos informáticos.

Las investigaciones en el desarrollo del pensamiento geométrico, se sustentan en dos tipos de teorías, la primera basada en la Tesis primaria Topológica (TPT) y la segunda se fundamenta en la teoría de Van Hiele.

Al evaluar a los estudiantes es fundamental que el maestro se enfoque en los procesos y no en el producto, lo cual, permite una evaluación más dinámica con el estudiante, donde se evidencie un aprendizaje futuro y no actual. En este proceso, la experiencia de los estudiantes antes de ingresar a la escuela es fundamental, generando a su vez conexiones entre la vida real y el contexto educativo.

Este artículo presenta investigaciones poco descriptivas con base a la población con la cual trabajan, siendo esto una dificultad a la hora de contrastar opiniones presentadas. Pero en otra medida, el autor evidencia opiniones y resultados significativos de investigaciones, la cual es fundamental para el presente trabajo de tesis.

1.2.5. New opportunities in geometry education at the primary school⁵

Sinclair y Bruce (2015) describen las oportunidades que se han generado para la enseñanza de la geometría de la escuela primaria con estudiantes de 4 a 8 años. Abordan temas de tendencias actuales, como el papel del razonamiento espacial y su

⁵ Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education* 47, 319–329. Recuperable 3 de Junio de 2020 en el link: <https://ezproxy.uan.edu.co:2077/content/pdf/10.1007/s11858-015-0693-4.pdf>

conexión con la geometría; la función del dibujo y las posibilidades con el uso de las tecnologías.

Sinclair y Bruce (2015) plantean dos niveles para el plan de estudios. El primer nivel busca identificar temas geométricos relevantes para los estudiantes utilizando la geometría euclidiana. El segundo nivel evidencia investigaciones que demuestran en los estudiantes un conocimiento informal de la geometría, donde no existe una formalidad en la construcción de su conocimiento.

Según Sinclair y Bruce (2015) las tecnologías digitales generan un potencial para implementar en el aula de clase, dejando de lado los softwares antiguos, es decir, el mouse y el teclado ya que generan dificultades motoras a la hora de usarlo; a su vez, presentan pantallas táctiles facilitando los entornos de aprendizaje.

Sinclair y Bruce (2015) cita a Schwart (1999), el cual establece tres propósitos en la escolarización, el primero es preparar a las personas para el mundo real (trabajo), segundo ayudar al crecimiento y desarrollo de los ciudadanos y por último el transmitir cultura y/o valores para la sociedad. Estos tres aspectos se consideran pertinentes para el trabajo de la geometría en el aula con estudiantes de grado tercero, esto genera un proceso de enseñanza aprendizaje significativo en los estudiantes.

La investigación es esencial por los conceptos aludidos, lo cual, ayuda como base teórica y/o conceptual para la presente tesis; además, de brindar referentes sólidos para futuras comparaciones y/o contrastes con diferentes investigaciones. Sinclair y Bruce (2015) muestran autores con una inclinación por el uso de los materiales tecnológicos en el aula, esenciales para el proceso de enseñanza aprendizaje en estudiantes de 4 a 8 años. En este trabajo no se describe investigaciones que utilicen

materiales manipulables y/o tradicionales, con sus respectivos beneficios en el aula de clase.

1.2.6. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report⁶

Sinclair, Bartolini, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens (2016) abordan siete hilos fundamentales para la enseñanza aprendizaje de la geometría, desde preescolar hasta la educación postobligatoria, incluyendo la formación de maestros.

El primer hilo, se basa en las teorías específicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, donde abordan teorías como: la aprensión figurativa y la deconstrucción dimensional. El segundo hilo, aborda las teorías generales aplicadas a los detalles de la educación en geometría, como la teoría de la variación, la cual, relaciona el aprendizaje y la conciencia. El tercer hilo, fundamenta los avances en la comprensión del razonamiento visoespacial, teniendo a su vez un significado indispensable en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

El cuarto hilo, se basa en el uso de diagramas y gestos, siendo este último uno de los aspectos fundamentales para la comprensión geométrica en el contexto educativo. Los avances en la comprensión del papel de las tecnologías digitales se encuentran en el quinto hilo, siendo esta la corriente principal en diversas investigaciones. El sexto hilo está constituido por los avances en la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las definiciones. El séptimo hilo, se centra en los avances y su comprensión en la

⁶ Sinclair, N., Bartolini, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education* 48, 691–719. Recuperable el 7 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

enseñanza y el aprendizaje del proceso de prueba, teniendo en cuenta el incremento de la tecnología educativa.

Sinclair, et al. (2016) abordan siete temas interesantes con base al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, la cual conlleva a varios énfasis ya vistos anteriormente. Además, brindan información reciente y las carencias que observan, como la falta de investigación en algunos hilos temáticos. En la presente tesis se toman elementos del primer y tercer hilo para la creación de las actividades propuestas y como base para la fundamentación teórica.

1.3. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de la integración del pensamiento espacial y visual, en estudiantes del grado tercero de la escuela primaria

1.3.1. Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry⁷

Xistouri, Pitta – Pantazi y Gagatsis (2014) investigan los factores y las habilidades que tienen los estudiantes para los conceptos de geometría transformacional. La población consta de 166 estudiantes de primaria (52 de cuarto grado, 53 de quinto, 61 de sexto). El instrumento de estudio es una prueba la cual aborda tres secciones: traslación, reflexión y rotación.

La primera actividad "imagen holística", abordan el posicionamiento del estudiante en la figura, sin comprender las propiedades de la misma. En la segunda actividad

⁷ Xistouri, X., Pitta - Pantazi, D. y Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1),149-164. ISSN: 1665-2436. Recuperable 14 de Abril de 2020 en el link: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33553644007>

"movimiento de un objeto", el estudiante logra la separación tangible de la figura (avión) en el plano, donde se determinan sus partes y los posibles movimientos sobre la misma. En la tercera actividad "mapeo de un objeto", el estudiante comienza una deconstrucción de 2D en lados 1D y luego reconstruye las figuras con ayuda de la definición y atributos.

La presente investigación es importante para la enseñanza – aprendizaje en la escuela primaria, ya que generan herramientas útiles para comprender la geometría transformacional. Además, guían a los maestros para ajustar los métodos de enseñanza y lograr en los estudiantes niveles altos en el rendimiento, lo cual, genera un nuevo enfoque al momento de introducir la geometría en escuela primaria y/o secundaria.

Xistouri, Pitta - Pantazi, & Gagatsis (2014) brindan ideas generales, más no descriptivas de lo que se puede realizar en el aula, teniendo en cuenta guías y/o recomendaciones en las cuales oriente el plan de estudios. Además, señalan las tareas realizadas con los estudiantes, lo cual enriquece el presente trabajo de tesis, ofreciendo una idea inicial para la elaboración de las actividades.

1.3.2. (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades⁸

Freitas y McCarthy (2014) centran su atención en los enfoques topológicos del espacio, a partir de las experiencias con 9 estudiantes de Nueva York, de grado quinto

⁸ Freitas, E. y McCarthy, M. (2014). (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades. *PNA*, 9(1), 41-51. Recuperable 20 de Abril del 2020 en el link: <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/33233/Freitas2014PNA9%281%29Dis%29orientation.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

hasta octavo, que hacen parte de los talleres de topología extracurricular en un periodo de tres meses.

Las actividades teóricas se focalizan en nudos donde el objetivo del estudiante es entrar y salir de una imagen, objeto y/o diagrama de forma mental y con ayuda de material concreto. Para ello, utilizan materiales como cuerdas, arcilla, ipads, papel, lápiz y/o softwares, los cuales generan privilegios en los estudiantes, ya que manipulan el nudo sin la necesidad de indicaciones directas por parte de los investigadores, lo que contribuye a un trabajo colaborativo, exploratorio y creativo.

En topología Freitas y McCarthy (2014) enfocan la capacidad que tiene la persona para moverse por el espacio y regresar a un punto particular. Además, se centran en la distorsión y estiramiento de una línea estática, transformándola en un objeto móvil que varía continuamente. Además, revelan como la orientación es un difícil componente del sentido espacial y los movimientos corporales de los estudiantes, teniendo en cuenta una perspectiva móvil en vez de una fija. Aquellos cambios visuales y de movimiento, se adaptan a los gestos mientras siguen una orientación cambiante del mismo.

La investigación realizada no comprende una muestra amplia, lo cual, lleva a generar preguntas sobre los posibles cambios si la muestra es proporcional al país o lugar al cual pertenecen. Por otra parte, Freitas y McCarthy (2014) aportan un contenido teórico y actividades importantes para el presente trabajo de tesis.

1.3.3. Empowering visuo-spatial ability in primary school: results from a follow-up study⁹

Fastame y Callai (2015) tienen como objetivo verificar el efecto de las capacitaciones, con el fin de incentivar las habilidades visuoespaciales por medio de la computadora o lápiz-papel. Cuentan con 120 estudiantes de diferentes escuelas italianas, que pertenecen a grados tercero y cuarto, para implementar las pruebas de habilidades Mentales Primarias (PMA).

La prueba PMA es una tarea centrada en imágenes, que evalúa la capacidad de solucionar problemas visoespaciales. Está compuesta por 25 problemas, cada pregunta tiene una figura incompleta y deben realizar diversas rotaciones mentales, para llegar así a la selección de la figura correspondiente. Además, evalúa en los estudiantes la velocidad y el vocabulario al momento de realizar esta prueba.

Las actividades por medio del computador, potencian la atención visual, la resolución de problemas, procesos visuo-constructivos y la comprensión de información topográfica. Las actividades por medio del lápiz y papel están destinadas a enriquecer la atención visuoespacial, la memoria a corto plazo, razonamiento no verbal, creatividad y socialización.

Fastame y Callai (2015) destacan tres resultados en el desarrollo de las actividades, el primero, se basa en las herramientas que llevaron a cabo y las cuales son indispensables para el desarrollo de habilidades visuoespaciales en estudiantes de

⁹ Fastame, M. y Callai, D. (2015). Empowering visuo-spatial ability in primary school: results from a follow-up study, *Educational Psychology in Practice*, 31:1, 86-98. Recuperable el día 13 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02667363.2014.989315>

tercer y cuarto grado. El segundo, centra su atención a las habilidades de velocidad y vocabulario al momento de realizar la prueba. El tercero, es el afianzamiento de los conocimientos luego de haber recibido las respectivas intervenciones.

Fastame y Callai (2015) resaltan la importancia de llevar a cabo este tipo de actividades al aula de clase en otro contexto que no sea el italiano, modificando y adaptando el proyecto según el idioma y demás aspectos. La presente investigación aporta una idea clara y concisa sobre actividades futuras teniendo en cuenta referentes teóricos y uso de material, lo cual fortalece su implementación a través de la pedagogía y técnica como herramienta de desarrollo.

1.3.4. Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention¹⁰

Hawes, Moss, Caswell, Naqvi y MacKinnon (2017) describen la implementación y efectos de una intervención realizada por un maestro en 32 semanas con 67 estudiantes de grados iniciales de 4 a 7 años (Ontario). Se centran en las habilidades de visualización espacial y su intervención, determinando el impacto de las actividades para mejorar el rendimiento de los estudiantes.

Abordan aspectos como el lenguaje espacial, la rotación mental 2D y la geometría visual-espacial integral. Este último aspecto es uno de los más importantes para

¹⁰ Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Naqvi, S. y MacKinnon, S. (2017). Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention, *Cognition and Instruction*, 35:3, 236-264, Recuperable el día 26 de marzo del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1080/07370008.2017.1323902>

Hawes, et al. (2017) quienes no solo apuntan a la habilidad espacial sino a un enfoque más integral, lo cual, garantiza un desarrollo del pensamiento espacial.

Cada una de las actividades o problemas propuestos no tienen como objetivo ser prescriptiva, dado que el docente podía confiar en su experiencia para adaptar las lecciones a su contexto. Al inicio y al final del proyecto realizan unas pruebas donde median aspectos de geometría visual-espacial. Esta consiste en 20 ítems las cuales contenían 5 diferentes tipos de preguntas, como: rompecabezas (2 tipos), plegado, composición / descomposición en 2D y disección de formas 2D.

Hawes, et al. (2017) revelan aportes significativos en los estudiantes, quienes demuestran una mejora en el pensamiento espacial por medio de un lenguaje característico, de una geometría visual-espacial y rotación mental 2D. Además, evidencian la importancia de potenciar un enfoque ecológicamente válido para dar instrucciones espaciales en la escuela, desarrollando habilidades de visualización con la ayuda de actividades desafiantes para los niños.

1.3.5. Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization¹¹

Elia, van den Heuvel y Gagatsis (2018) abordan su estudio de la geometría con 291 estudiantes en edades entre cuatro y ocho años, que cursan sus primeros grados del colegio.

¹¹ Elia I., van den Heuvel, M. y Gagatsis A. (2018). Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization. In: Kinnear V., Lai M., Muir T. (eds) *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning. Early Mathematics Learning and Development*. Springer, Singapore. Recuperable el día 3 de julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9_5

En un primer momento los estudiantes realizan dibujos de una serie de triángulos, cuadrados y rectángulos en forma de escalera, de mayor a menor tamaño o viceversa. Luego, deben colorear cada una de las figuras de un color distinto dependiendo las indicaciones que se brindan al inicio.

Elia, et al. (2018) identifican tres estrategias abordadas por los estudiantes conocidas como acción/ transformación. La primera estrategia (T) se basa en la conservación de la forma, por lo cual, va aumentando o disminuyendo ambas dimensiones de la figura. La segunda, se centra en una sola dimensión como fue en el caso de los triángulos, donde los estudiantes comienzan con el dibujo de un triángulo equilátero y culminan con un triángulo isósceles. Y la tercera estrategia (O), se fundamenta en producir series de figuras irregulares, por lo cual no mantienen ninguna dimensión fija.

Abordan la comprensión de las formas y del espacio, las cuales dan evidencia de la importancia de la visualización cuando se desea el desarrollo del pensamiento geométrico. Además, revelan la importancia de incluir la visualización desde los primeros años en contenidos geométricos y del espacio, aun así, presentan la difícil tarea sobre la seguridad en la interpretación que tiene el estudiante en su mente. Por ello, es fundamental la selección de tareas apropiadas, para así llevar a cabo procesos de visualización en los alumnos donde no se limiten a la percepción de figuras, sino logren el trabajo para la estimulación de conocimientos espaciales.

Las actividades que presentan Elia, et al. (2018) son importantes para el presente trabajo de tesis, donde brindan ideas apropiadas e interesantes para los estudiantes utilizando la visualización y donde se fortalece el desarrollo del pensamiento espacial.

1.3.6. Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school¹²

Mulligan, Woolcott, Mitchelmore, Busatto, Lai y Davis (2020) realizan un proyecto sobre el aprendizaje de las matemáticas a través del razonamiento espacial, por medio del Programa de Matemáticas del Razonamiento espacial (SRMP). La población consta de 30 estudiantes de tercer y cuarto grado del área metropolitana de Sydney, Australia. En este estudio se incorporan las habilidades de transformación con patrones repetitivos, relaciones entre las dimensiones 2D y 3D, estructuración de área y perímetro, direccionalidad y perspectiva (Mulligan, et al. 2020).

El programa Matemáticas de Razonamiento Espacial (SRMP) incluye construcciones de rotación mental, orientación espacial y visualización. Los objetivos de Mulligan, et al. (2020) es señalar los efectos de implementar el programa SRMP en el razonamiento espacial, el conocimiento del patrón, la estructura matemática y el rendimiento académico de los estudiantes.

En el programa Mulligan, et al. (2020) proporcionan tres sesiones de aprendizaje a los maestros, en el cual incluye pautas generales explícitas para cada lección. Al culminar, realizan un resumen de lo trabajado y la efectividad en el aprendizaje de los estudiantes, llegando así a un proceso cíclico de planificación, enseñanza, revisión y refinamiento.

¹² Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J. y Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Math Ed Res J* 32, 285–305. Recuperable el 9 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00324-z>

Mulligan, et al. (2020) concluyen la importancia del SRMP y la implementación en el aula de clase enriqueciendo el plan de estudios, de ante mano no generalizan los resultados pues es necesario una muestra lo suficientemente amplia. Resaltan la importancia de las capacitaciones a los maestros, para llevar a cabo su implementación en el salón de clases y de esta manera lograr un aprendizaje robusto de la geometría en los estudiantes, motivo por el cual se toma este artículo en la presente tesis.

1.3.7. In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding¹³

Lowrie, Resnick, Harris y Logan (2020) examinan las conexiones entre el razonamiento espacial y los logros matemáticos. Con ello, realizan una descripción sobre el abordaje del razonamiento espacial en psicología y educación.

Lowrie, et al. (2020) citan a Presmeg (1986) quien identifica cinco tipos de imágenes mentales, como: las concretas y/o pictóricas, de patrones, memoria de fórmula, cinestésicas y dinámicas. Argumenta que los estudiantes pueden generar diferentes tipos de problemas con ayuda de las imágenes.

Para la visualización le piden al evaluado que realice pliegues, cortes y despliegues generando el uso de la memoria. En la rotación mental, la imaginación apoya a la observación de una figura cuando está en movimiento y/o girando. Y la orientación

¹³ Lowrie, T., Resnick, I., Harris, D. y Logan, T. (2020) In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding. *Math Ed Res J* 32, 175–188 (2020). Recuperable el 9 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00336-9>

implica estar en una ubicación o posición distinta a la propia, tomando así una perspectiva diferente.

Lowrie, et al. (2020) determinan que la forma de evaluar el desarrollo espacial es por medio de una implementación con un laboratorio controlado. Este tipo de evaluación garantiza una generalización de resultados, así mismo, los análisis pueden variar según el entorno educativo.

Lowrie, et al. (2020) confirman que el mejoramiento del razonamiento espacial afecta positivamente a las matemáticas. En consecuencia, se debe alinear las habilidades espaciales con los conceptos matemáticos, inclusive el implementar actividades espaciales que impacten el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes. Por otro lado, es importante la relación entre el contexto matemático y el contexto real con el fin de generar un proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes abordando el razonamiento espacial.

La investigación presenta contribuciones teóricas sobre el razonamiento espacial y visualización, los cuales aportan al presente trabajo de tesis. Por otro lado, no se evidencia una investigación implementada con muestra, lugar y/o resultados concretos con el fin de contrastar información con otras investigaciones.

1.3.8. Transforming the established perceptions of visuospatial reasoning: integrating an ecocultural perspective¹⁴

Owens (2020) informa investigaciones centradas en experiencias ecoculturales, teniendo en cuenta la participación y el desarrollo del razonamiento visoespacial sobre el medio ambiente. Como consecuencia Owens (2020) realiza comparaciones de investigaciones de diferentes culturas, estudios propios y teniendo en cuenta la experiencia.

La mayoría de investigaciones se llevan a cabo por medio de etnometodologías, con personas de Papua (Nueva Guinea), colegas australianos y suecos. El trabajo de campo incluye observación y debate con base a las actividades, incluyendo las entrevistas realizadas. Visitan aproximadamente 60 aldeas en 15 provincias, realizando 16 entrevistas y un número aproximado de 252 respuestas a su cuestionario.

Owens (2020) observa que las matemáticas escolares hacen parte de una visión etnomatemática, teniendo en cuenta sus abstracciones y aplicaciones. Las capacidades espaciales fortalecen el razonamiento visoespacial en los niños, Owens (2020) cita a Newcombe y Stieff (2012) quienes determinan la importancia de un material útil para el estudiante, por ello, es fundamental la experiencia y el contexto del mismo.

¹⁴ Owens, K. (2020). Transforming the established perceptions of visuospatial reasoning: integrating an ecocultural perspective. *Math Ed Res J* 32, 257–283. Recuperable el 12 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00332-z>

La investigación tiene diversas narraciones, comprendiendo así, la importancia del razonamiento visoespacial en contextos culturales distintos. En consecuencia, es importante resaltar como el contexto de los estudiantes en actividades de la geometría 2D y 3D, son indispensables para el proceso de enseñanza aprendizaje. Cada una de las historias que aborda Owens (2020) ayudan a comparar las culturas y los avances que se generan en el desarrollo del pensamiento visoespacial y el cual aporta de manera significativa al presente trabajo de tesis.

1.3.9. First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations¹⁵

Bruce, Brent, Sinclair, Mcgarvey, Hallowell, Drefs, Francis, Hawes, Moss, Mulligan, Okamoto, Whiteley, y Woolcott (2016) tiene como objetivo principal explorar el razonamiento espacial en 36 estudiantes de primer grado de California, para ello, utilizan formas planas y solidas con diferentes tipos de representación geométrica. Los alumnos fueron entrevistados de forma individual, con una grabación de 30 minutos por estudiante, donde debían realizar un emparejamiento de formas 2D y 3D.

Para dar inicio a cada una de las actividades Bruce et. Al (2016) realizan capacitaciones a cada uno de los estudiantes para generar una familiarización con el contenido. Los elementos de estimulación se les presento a los estudiantes de forma 2D siendo más cotidiano para ellos. Además, pueden establecer propiedades de

¹⁵ Bruce, C., Brent, D., Sinclair, N., Mcgarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W. y Woolcott, G (2016). Understanding gaps in research networks: using "spatial reasoning" as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*. 1-19. Recuperable el día 20 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07370008.2017.1323902>

cuerpos geométrico; realiza composición y/o descomposición por medio de la relación que se observa con las figuras.

Una de las actividades que desarrollan los estudiantes, consta de la selección correcta de los cuerpos geométricos, los cuales están dibujados en una hoja. Esto se debe a identificación de características directas entre las formas planas y solidas con perfecta precisión.

Una dificultad que se presenta es cuando los estudiantes no comprenden la dimensión Z y para ellos es difícil realizar una imagen mental de ello. Además, se evidencia complejidad para trabajar distintas caras por separado y de forma coherente como es el caso del cono sólido. Esta investigación aporta actividades interesantes para el presente trabajo de tesis, aunque si genera una reflexión sobre el reto de crear actividades viso-espaciales en estudiantes de primaria.

1.3.10. Longitudinal contributions of executive functioning and visual-spatial skills to mathematics learning in young Chinese children¹⁶

Yang, Chung y McBride (2019) trabajan con 165 estudiantes de 5 a 6 años de Hong Kong, suministrando una serie de pruebas de matemáticas para los grados iniciales, donde se abordan las habilidades visuales-espaciales y el funcionamiento ejecutivo como lo son: la memoria de trabajo, inhibición, cambio y actualizaciones.

El Funcionamiento ejecutivo (EF) y las matemáticas tempranas es uno de los primeros aspectos que se abordan. El centro del EF es la memoria, donde se trabaja

¹⁶ Yang, X., Chung, K. y McBride, C. (2019). Longitudinal contributions of executive functioning and visual-spatial skills to mathematics learning in young Chinese children, *Educational Psychology*, 39:5, 678-704. Recuperable el día 27 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01443410.2018.1546831>

mentalmente con información suministrada, con ello Yang, et al. (2019) citan a Diamond (2013) quien define la memoria de EF como un almacenamiento temporal el cual es necesario para la cognición, donde cada uno de estos aspectos son fundamentales para los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Con base al funcionamiento ejecutivo, la memoria consiste en una prueba de extensión de dígitos hacia adelante y hacia atrás. Donde se les brinda una serie de números de dos y un dígito, pidiéndoles que repitan lo que escuchan de forma ordenada de atrás hacia delante o viceversa.

Yang, et al. (2019) presentan una serie de tarjetas con las cuales el estudiante está familiarizado, como lo son: los dígitos, formas, frutas, animales y colores. El objetivo es mostrarlas y al final los estudiantes describen el último recuerdo de las fichas mostradas anteriormente.

La memoria y la capacidad visual-espacial son independientes cada vez más con el paso del tiempo, precisamente por la falla en la memoria de los estudiantes al momento de escuchar instrucciones por parte del maestro. En el caso de la inhibición y el cambio están asociadas de forma significativa al aprendizaje de las matemáticas, más en pre jardín que en grado primero por la razón que se disminuye la interacción y las habilidades sociales en los niños.

Yang, et al. (2019) señala varias limitaciones en la presente investigación, una de ellas es la forma única en la que se evalúan cada uno de los aspectos nombrados anteriormente. Por otro lado, las medidas matemáticas se limitaron a problemas de suma, sin tener en cuenta otro tipo de operaciones y sus aplicaciones. Yang, et al. (2019) incentivan un trabajo con una amplia gama de posibilidades, lo cual es

interesante fortalecer y profundizar, para así comparar los resultados y hallazgos encontrados.

La investigación aporta al presente trabajo de tesis por sus actividades originales para crear habilidades visuales-espaciales en temprana edad, además, de tener un sustento teórico para la construcción de las mismas.

1.3.11. Towards Smart City Learning: Contextualizing Geometry Learning with a Van Hiele Inspired Location-Aware Game¹⁷

Rehm, Stan, Wøldike y Vasilarou (2015) presentan un enfoque de aprendizaje en el área de geometría basado en el juego, con 12 estudiantes de tercer grado de la escuela Internacional Skipper Clement de Aalborg (Dinamarca). Proporcionan una herramienta útil para su aprendizaje, realizando una conexión entre el mundo real y los conceptos geométricos, además, analizan sus trayectorias, las cuales se desencadenan con ayuda de las acciones en situ.

Estos procesos se basan en el enfoque de Van Hiele centrado en la visualización, con ello, relacionan y comparan formas geométricas con ayuda de un prototipo. El primer juego se basa en la memoria, donde su tarea es coincidir las figuras con los nombres y/o propiedades, el segundo juego es la manipulación de formas bidimensionales y tridimensionales que se mueven en la pantalla y el tercer juego es el reconocimiento de las formas, donde presentan figuras en 3D con la finalidad de identificarlas en dos dimensiones.

¹⁷ Rehm M., Stan C., Wøldike N. y Vasilarou D. (2015). Towards Smart City Learning: Contextualizing Geometry Learning with a Van Hiele Inspired Location-Aware Game. In: Chorianopoulos K., Divitini M., Baalsrud Hauge J., Jaccheri L., Malaka R. (eds) *Entertainment Computing - ICEC 2015. ICEC 2015. Lecture Notes in Computer Science*, vol 9353. Springer, Cham. Recuperable el día 7 de Julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-3-319-24589-8_32

Las observaciones se clasifican teniendo en cuenta tres fases, la primera fase es la identificación de comportamientos recurrentes como: la emoción debido a la novedad de las actividades; las discusiones sobre el juego ya inicia la interacción y comparación en los procesos; la discusión sobre la ubicación utilizando aspectos espaciales; las discusiones sobre la arquitectura debido a que los estudiantes comparan e investigan sobre los edificios y por último la navegación donde los estudiantes exploran el espacio inmerso.

La segunda fase es de localización donde identifican el entusiasmo, la inmersión y la frustración, cuando los estudiantes van realizando cada uno de los juegos. Y la tercera fase se basa en la entrevista donde relacionan el aprendizaje y sus consecuencias. Por lo tanto, tienen en cuenta el conocimiento adquirido, el valor educativo y la motivación por realizar las actividades.

Rehm, et al. (2015) realizan esta investigación para presentar un aprendizaje con un campo influyente donde reconocen una ubicación teniendo en cuenta un contexto. Además, reconocen la importancia del entorno natural o cotidiano de los estudiantes para así generar experiencias enriquecedoras, mejorando los resultados y la participación activa en el aprendizaje. Esta investigación aporta al presente trabajo de tesis por medio de las actividades influyentes para el proceso de enseñanza aprendizaje, involucrando la visualización y el pensamiento espacial.

1.3.12. The ability of young Korean children to use spatial representations¹⁸

¹⁸ Kim, M., Bednarz, R. y Kim, J. (2012). The ability of young Korean children to use spatial representations, *International Research in Geographical and Environmental Education*, 21:3, 261-277, Recuperable el día 31 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10382046.2012.698089>

Kim, Bednarz y Kim (2012) investigan el potencial que tienen los estudiantes coreanos para comprender la representación en forma de mapa, utilizando fotografías aéreas en diferentes escalas, siendo un instrumento de prueba principal. Para ello, se basan en dos grupos, uno de ellos comprende edades de 6 y 7 años y otro entre 4 y 5 años.

El experimento consta de cuatro partes, el primero se basa en la comprensión de la foto y la vista aérea, luego identifica las características en las fotografías, tercero navega de un lugar a otro y por último investiga el interés de los estudiantes en estas actividades. En el grupo mayor se evidencian respuestas sofisticadas, donde los estudiantes comprendían que el material era un mapa. A diferencia del grupo menor, donde muy pocos respondieron que era una fotografía y ningún estudiante reconoció que era un mapa, sin embargo, los estudiantes lograron identificar características generales de la misma.

Con base a las actividades, los estudiantes coreanos poseen la capacidad espacial al momento de leer una representación por medio de mapas. A pesar de que los niños más pequeños tuvieron dificultades, lograron con éxito identificar las características de la foto y así completar la tarea asignada. Por ello, Kim, et al. (2012) realizan la recomendación del uso de este tipo de actividad aprovechando que los estudiantes están listos para aprender y esto facilitaría el desarrollo del pensamiento espacial en grados posteriores. La investigación aporta a la presente tesis para el desarrollo de actividades y así incentivar el interés por parte de los estudiantes, facilitando así el proceso de enseñanza en el aula.

1.3.13. Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9¹⁹

Fujita, Kondo, Kumakura, Kunimune y Jones (2020) analizan las habilidades de los estudiantes al momento de resolver problemas que involucran geometría en 2D y 3D. Trabajan con 1357 estudiantes japoneses de cuarto hasta noveno grado, visualizando las formas de los diagramas y las propiedades de estas. Los estudiantes requerían de conocimiento previo sobre formas 3D como el uso de cubos, cuboides, prismas, pirámides, entre otros.

Fujita, et al. (2020) señalan el plan de estudios para estudiantes que pertenecen a él, determinando contenidos en los diferentes grados, como lo son: en cuarto y quinto introducen conocimientos, materiales y representaciones de cubos, cuboides, prismas y cilindros. De sexto a séptimo los estudiantes analizan las construcciones geométricas, simétricas y las propiedades de aquellos sólidos. Todo esto con el fin de llegar a grado noveno y su estudio del círculo, tratando temas como el teorema de Pitágoras con formas 2D y 3D.

Fujita, et al. (2020) realizaron una encuesta a 261 estudiantes de los distintos grados, con el objetivo de destacar el uso de las habilidades de razonamiento espacial y el dominio en los estudiantes con ayuda de las formas en tres dimensiones. La encuesta proporcionó varias conclusiones sobre lo que puede influir en los procesos que realizan los estudiantes sobre el razonamiento.

¹⁹ Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S. y Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Math Ed Res J* 32, 235–255. Recuperable el día 15 De Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>

Estos resultados implican una investigación que abarque una mejor y amplia comprensión de procesos al momento de usar sus habilidades de razonamiento espacial. Pero también, se debe enfatizar en el conocimiento y dominio específico, pues de una u otra manera puede verse influenciado por la apariencia visual de la geometría.

Fujita, et al. (2020) se basan en una investigación por medio de una encuesta, siendo esta una idea pionera para próximos estudios. Además, evidencian la falta de aspectos metacognitivos, los cuales pueden ser primordiales para futuras investigaciones. Esta idea inicial aporta al presente trabajo de tesis con el propósito de contrastar los resultados y/o hallazgos nombrados anteriormente.

1.3.14. Learning Through and from Drawing in Early Years Geometry²⁰

Sinclair, Moss, Hawes y Stephenson (2018) centran su investigación en la relación entre el razonamiento espacial, el dibujo y el aprendizaje de las matemáticas. Por lo cual, abordaron a once estudiantes de 5 a 6 años, los cuales fueron seleccionados por su maestro dependiendo las habilidades matemáticas de cada uno.

Desde la antigua Grecia el dibujo ha sido utilizado por los geómetras, en muchos libros de geometría el dibujo argumenta las construcciones y el conocimiento ya abordado con anterioridad. En este capítulo observan la complejidad del dibujo no siento una habilidad estática o innata, por lo cual, puede ser mejorada a través del lenguaje, los gestos y la visualización espacial.

²⁰ Sinclair N., Moss J., Hawes Z. y Stephenson C. (2018). Learning Through and from Drawing in Early Years Geometry. In: Mix K., Battista M. (eds) *Visualizing Mathematics. Research in Mathematics Education*. Springer, Cham. Recuperable el día 10 de Julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_11

Por otro lado, según Sinclair, et al. (2018) la geometría es una actividad compleja donde involucra diversos aspectos como el ver y el decir, en otras palabras, involucra la visualización y el lenguaje para nombrar o deducir propiedades de las figuras. Sinclair, et al. (2018) citan a Duval (2005) quien propone actividades para los estudiantes que implique la construcción y el poder pasar de una dimensión a otra. Además, del trabajo usando los gestos para así, los estudiantes logren expresarse de forma no verbal.

Sinclair, et al. (2018) realizan dos lecciones que constan de una serie de imágenes geométricas dentro de un cuadrado, el objetivo es la replicación de lo visto, por medio de una descripción. Las entrevistas y actividades abordadas, fueron grabadas capturando secuencias de los dibujos y los gestos realizados por los estudiantes.

Sinclair, et al. (2018) realizan esta investigación con la finalidad de obtener una idea de cómo los estudiantes pueden aprender a través del dibujo, teniendo en cuenta la visualización para llegar a un conocimiento o razonamiento espacial. Además, aporta a la presente tesis con una idea inicial para las actividades donde los estudiantes logren hablar y/o gesticular por medio del dibujo, todo se construye con el estudio de las propiedades bidimensionales de las formas y el estudio riguroso del razonamiento espacial.

1.3.15. A Conceptual Framework for Facilitating Geospatial Thinking²¹

Golledge, Marsh y Battersby (2008) realizan experimentos con estudiantes de grado tercero y sexto presentando una serie de actividades vinculadas a conceptos geoespaciales primitivos. Además, les piden un diario de actividades donde registran de una forma detallada lo realizado durante el desayuno, almuerzo y cena.

En la actividad de ubicación presentada a estudiantes de grado tercero, Golledge, Marsh y Battersby (2008) brindan una actividad de un cuadrado y una serie de cuadrados inmersos en él, luego de un tiempo los estudiantes deben replicar en una hoja lo observado anteriormente. Los resultados no fueron tan exitosos como se esperaba, evidenciando que a medida que aumentaba la complejidad del concepto, disminuía la capacidad para comprender y resolver las tareas.

En otro experimento trabajan con grado tercero y sexto, brindando unas instrucciones claras sobre relaciones entre objetos, ellos debían encerrar con un círculo las palabras relevantes según la información suministrada. Los resultados de este experimento constatan el limitado vocabulario de los participantes, donde no se desarrolla la naturaleza jerárquica del concepto en las tareas respectivas.

En el último experimento, los estudiantes crean una ruta pasando por distintos puntos, esta actividad es para estudiantes de grado sexto donde no lograron llevar a cabo la tarea, evidenciando la dificultad con la combinación de formas y tamaños; además del esfuerzo de ellos frente a la organización por magnitudes.

²¹ Golledge, R., Marsh, M. y Battersby, S. (2008). A Conceptual Framework for Facilitating Geospatial Thinking. *Annals of the Association of American Geographers*, 285-308, Recuperable el día 2 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00045600701851093>

Golledge, Marsh y Battersby (2008) sugieren que en el proceso de aprendizaje los estudiantes comprendan plenamente un concepto, introduciendo conceptos relevantes de orden inferior al más complejo. Además, reconocen los objetos para luego abordar las relaciones espaciales, siendo estas últimas las más complejas de comprender por su nivel de abstracción.

La investigación aporta a la presente tesis por sus actividades y sustento teórico para su construcción, llevando actividades innovadoras aportando al pensamiento espacial en estudiantes de grado tercero.

1.3.16. The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?²²

Bruce y Hawes (2015) presentan los resultados de un equipo de profesores-investigadores en Canadá que participan en el estudio de lecciones para desarrollar una mejor comprensión teórica, así como aplicaciones prácticas en un programa de geometría que incorpora rotaciones mentales 2D y 3D. Son 42 estudiantes comprendidos entre los 4 y 8 años de Ontario, los cuales participan en un Estudio de Lección para demostrar grandes avances en sus habilidades de rotación mental durante 4 meses de intervención.

Para Bruce y Hawes (2015) un tipo de razonamiento espacial es la habilidad de realizar rotaciones mentales, lo cual, implica mover objetos 2D y 3D alrededor de uno o más ejes en el ojo de la mente (Shepard & Metzler, 1971), a menudo esto se mide cuando

²² Bruce, C. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM Mathematics Education* 47, 331–343. Recuperable el día 10 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0637-4>

las personas identifican imágenes de forma coincidente, las cuales se presentan en diferentes orientaciones.

La tarea de rotación mental 2D la adaptan a 16 items, donde los estudiantes identifican la figura correcta luego de una rotación realizada. La segunda tarea es una rotación mental 3D, la cual requiere que los estudiantes examinen una figura en 3D luego de haberla rotado, con el fin de que los estudiantes escojan la figura idéntica a la inicial.

Los resultados de este estudio muestran que es posible acelerar el crecimiento de las habilidades de rotación mental en los estudiantes a través de una variedad de lecciones y actividades impartidas por los maestros. Entonces, si bien el diseño de la presente investigación permite identificar la estrategia que se llevó a cabo para mejorar las habilidades de rotación mental, Bruce y Hawes (2015) demuestran que los maestros de la primera infancia son efectivos tanto en el diseño como en la implementación de un currículo espacial altamente efectivo.

Una limitación de la investigación es la muestra con la cual trabajaron, lo cual, puede generar un cambio en próximas investigaciones si se toma una población amplia. Por último, el programa de Matemáticas para niños pequeños logra los dos propósitos descritos por Stylianides y Stylianides (2013), primero por la mejora de la práctica en el aula y segundo por la profundización en la comprensión teórica que ocurre en el aula y los posibles problemas que se pueden presentar. Las actividades que implementan aportan a la presente tesis, primero por la población con la cual trabajan y segundo por la descripción detallada en su trabajo realizado.

1.3.17. Geometric maps as tools for different purposes in early childhood²³

Salsa, Gariboldi, Vivaldi, y Rodríguez (2019) realizan su estudio con estudiantes de 3 y 4 años en Argentina, para determinar el uso espontáneo de mapas geométricos con dos propósitos diferentes: determinar y representar la ubicación de los objetos.

Como introducción a la tarea, el experimentador declaró que su objetivo es esconder una serie de objetos. Primero, les presentó el juguete (Winnie the Pooh) y su habitación (espacio de referencia) luego les mostró y señaló una serie de cajas. A continuación, les dijo que Winnie the Pooh tiene diferentes lugares favoritos, esto los utiliza para esconderse cuando desea jugar con sus amigos. Winnie the Pooh muestra sus lugares favoritos usando una foto de su casa. En ese momento el experimentador entrega uno de los mapas, en el señalan dichos lugares.

El diseño fue una prueba retadora para los estudiantes ya que deben utilizar sus habilidades de lectura de mapas por tres razones. Primero, el mapa está ubicado en una mesa al exterior y en la misma orientación que la habitación. En segundo lugar, debido a que la forma y el color no estaban disponibles como pistas, la información espacial sirve para identificar los objetivo en el mapa respectivo. Finalmente, el experimentador nunca llamó la atención de los estudiantes sobre la ubicación entre la habitación y el mapa, sin nombrar la importancia del símbolo para poder resolver las tareas.

²³ Salsa, A., Gariboldi, M., Vivaldi, R. y Rodríguez, J. (2019). Geometric maps as tools for different purposes in early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*. 186. Recuperable el día 5 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.05.004>

Usualmente el uso de mapas geométricos ayuda a representar la ubicación de un objeto oculto, pero no para ubicar el objeto en un espacio de referencia, lo cual genera una complejidad en los estudiantes. Adicionalmente, encuentran un patrón en relación con los dos mapas geométricos utilizados; primero, el poder cambiar los mapas y los arreglos espaciales de los escondites con ayuda del espacio de referencia, esto genera facilidad y reduce los errores para resolver la actividad. Segundo, la comprensión de los mapas está estrechamente relacionada con la forma en que los estudiantes requieren herramientas simbólicas, para representar o determinar la ubicación de objetos en un espacio.

La investigación aporta a la presente tesis con una idea general del uso de mapas para crear habilidades espaciales en los estudiantes, además, presentan las posibles dificultades al momento de trabajar con estas herramientas y contribuye a la creación de las actividades.

1.3.18. Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training²⁴

Burte, Gardony, Hutton y Taylor (2017) llevan a cabo la prueba Make-A-Dice con 92 estudiantes de tercero a sexto de escuelas rurales de nueva Inglaterra, para abordar la visualización espacial combinada con la aptitud matemática. El pensamiento espacial debe considerarse como una habilidad cognitiva fundamental, por lo cual, la

²⁴ Burte, H., Gardony, A., Hutton, A. y Taylor, H. (2017). Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training. *Cognitive research: principles and implications*, 2(1), 13. Recuperable el día 11 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1186/s41235-017-0052-9>

presente investigación examina el impacto del programa de capacitación espacial para estudiantes de primaria.

Según Burte, et al. (2017) los individuos son mejores en el pensamiento espacial, mediante tareas cognitivas como el plegado de papel mental, la rotación mental y las visualizaciones de rotación de Purdue, las cuales se consideran actividades significativas para la creación de habilidades espaciales.

El think3d se diseña para desarrollar y fortalecer el pensamiento visoespacial a través de actividades de origami y papel emergente. Doblar y desplegar, además de cortar papel físicamente e interpretar y construir diagramas, genera habilidades en el pensamiento espacial. A medida que construyen un objeto, realizan pruebas de rotación mental o rotaciones de Purdue, generando transformaciones dinámicas de 2D a 3D. El origami lo consideran Burte, et al. (2017) como actividades que comprenden fácilmente los estudiantes ya que está inmerso al mundo real.

La segunda prueba Paper Folding evalúa la visualización espacial o la capacidad de imaginar objetos 3D, cada elemento es una serie de diagramas que muestran una hoja de papel que se dobla de una a tres veces y luego se perfora un agujero. Los estudiantes eligen el diagrama correcto, sobre la configuración del papel con sus orificios luego de desplegar el papel.

La prueba de Rotaciones de Purdue, se da por medio de un diagrama con un objeto 3D antes y después de la rotación. Luego, los estudiantes ven otro objeto en tres dimensiones y seleccionan la opción que lo representa de la misma manera que el primer objeto, esto evalúa la rotación mental y el razonamiento por semejanza.

El plegado de papel y las rotaciones de Purdue muestran mejoras con Think3d, además de una participación por parte de los estudiantes ya que están desarrollando un pensamiento espacial. Esta investigación aporta a la presente tesis con la creación de actividades particulares las cuales generan un pensamiento espacial en el estudiante con ayuda de materiales cotidianos e inmersos al contexto del estudiante.

1.4. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de la integración del pensamiento espacial y visual, en estudiantes del grado tercero de la escuela primaria en Colombia

1.4.1. Desarrollo de conocimiento geométrico euclidiano y uso de mapas²⁵

Cortés, Sandoval y Otálora (2013) muestran un gran interés por el desarrollo del razonamiento espacial y geométrico en estudiantes de básica primaria, para lo cual, se sustentan en la representación del espacio en función de tres propiedades de la geometría euclidiana (longitud, ángulo y sentido). Para el estudio participaron 64 estudiantes (mestizos, blancos y afrocolombianos) organizados en tres grupos de edad: 23 estudiantes de cuatro años, 20 estudiantes de seis años y 21 estudiantes de ocho años de un colegio público ubicado en Cali.

Según Cortés, et al. (2013) el uso de mapas es una metodología novedosa y apropiada para los estudiantes ya que es una herramienta simbólica creada para comunicar la estructura del espacio, la cual, necesita de las tres habilidades cognitivas, la primera se basa en la correspondencia simbólica del mapa, mientras tanto la segunda es una

²⁵ Cortés, S., Sandoval, S. y Otálora, Y. (2013). Desarrollo de conocimiento geométrico euclidiano y uso de mapas. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 31(3), 556-574. Recuperable Abril 12 del 2020 en el link: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-47242013000300009&lng=en&tling=es

correspondencia entre objetos de 2 y 3 dimensiones para que al final realicen una representación mental de los dos espacios simultáneamente.

En los recursos utilizan mapas en hojas blancas bond laminadas en 2D y estructuras en tres dimensiones, realizadas en madera pintadas en color marrón con algunas especificidades, el objetivo de estos materiales es la ubicación de un conejo de peluche para al final el estudiante llegue a él con ayuda de instrucciones. Las tareas a las cuales se enfrentan son de forma individual, pero con una observación constante del experimentador (fase familiarización), luego de una aprehensión de las tareas, se le presentan 18 situaciones de prueba a cada estudiante sin retroalimentación (fase de aplicación).

Como resultados se evidencia que la edad del niño es un factor dominante en la evolución del conocimiento geométrico ya que durante los 4 y 5 años están inmersos en un período crítico de este conocimiento euclidiano. Además, la comprensión de las tres propiedades (longitud, ángulo y sentido) da un cambio significativo entre los cuatro y los seis años de edad, luego de esta edad no muestran cambios significativos en el desarrollo de las actividades.

La presente investigación es enriquecedora por la descripción detallada de la población, actividades propuestas y resultados; lo que ayuda establecer comparaciones, además, de evidenciar la importancia de la visualización y acompañamiento por parte del docente en ciertos años de formación de los estudiantes.

1.4.2. Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias²⁶

Zapateiro, Poloche y Camargo (2016) desarrollan una propuesta didáctica que favorece el desarrollo de la orientación espacial por medio del juego. Esta necesidad surgió por los resultados de las pruebas saber en estudiantes de primaria y bachillerato los cuales no alcanzan los resultados anhelados especialmente en Geometría, situando a Colombia en los últimos puntajes.

Para ello, determinan la importancia del trabajo constante de las cuatro competencias del pensamiento espacial en el aula de clase: ubicación espacial y trayectoria intuitiva, organización espacial, modelos y mapas, coordenadas y estructuración espacial.

Zapateiro, et al. (2016) realizan descriptores para el aprendizaje de la orientación espacial, los cuales se implementan en una propuesta didáctica que consta de 4 juegos inspirados en el autor Ricochet Robots (caminando a ciegas, destino Saturno, Chiarezza, rescatando animales) estos se juegan teniendo en cuenta niveles de exigencia cognitiva. Esta propuesta la implementan con estudiantes de tercero y quinto de primaria del colegio Escuela Normal Superior Distrital María Montessori (Bogotá).

Como resultados, los estudiantes evidencian una correspondencia geométrica entre las distintas escalas (tablero, papel) para poder dibujar y resolver exitosamente el juego número tres. La dificultad más notoria era el no uso de la estructura espacial del tablero del juego correspondiente ya que el jugador se ubica en su posición espacial

²⁶ Zapateiro, J., Poloche, S., y Camargo, L. (2016). Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 43, 119-136. Recuperable 22 de Abril del 2020 en el link: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142018000100119&lang=es

externa y no como aquel jugador interno, lo cual, no genera una comunicación adecuada con base a los movimientos respectivos.

Como conclusión Zapateiro, et al. (2016) evidencian el gran aporte fundamentado en la orientación espacial por medio del juego, además, de despertar el interés y la motivación por aprender generando un desarrollo integral en el estudiante.

La investigación no presenta datos estadísticos sobre los resultados que describen de forma cualitativa, además no se evidencia el número de estudiantes que participaron en las pruebas piloto. Por otro lado, los autores detallan las actividades propuestas para los grados tercero y quinto los cuales brindan ideas para futuras investigaciones, además, de generar posibles contrastes con la información brindada anteriormente.

1.4.3. Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños²⁷

Uribe, Cárdenas y Becerra (2014) comparten un trabajo realizado con estudiantes de 5 a 11 años, esta propuesta consta de una serie de teselaciones, las cuales, son creaciones artísticas con polígonos regulares o irregulares repetidos en un plano, los que a su vez completan una región sin vacíos. El objetivo fundamental es desarrollar y fomentar habilidades del pensamiento espacial y construcción de conocimientos geométricos euclidianos en estudiantes de primaria.

Uribe, et al. (2014) plantean una propuesta didáctica con unidades, las cuales, integran elementos propios de la geometría, el pensamiento espacial y la expresión artística.

²⁷ Uribe, S., Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educ. mat [online]*. 2014, vol.26, n.2, pp.135-160. ISSN 1665-5826. Recuperable 8 de abril de 2020 en el link: <http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-2-5.pdf>

En las unidades se destacan los tipos de teselaciones con formas poligonales (se forman con cualquier polígono), regulares (se construye con polígonos regulares), semiregulares (combinan dos o más polígonos regulares) y poligonales no regulares (utilizan la técnica del “mordisco”).

La metodología se basa en las teselaciones con ayuda del modelo de Van Hiele, el cual, describe los niveles de razonamiento que deben tener los estudiantes como el reconocimiento, análisis, clasificación y deducción.

Esto da un gran impacto, además, de ser un intento por dar al currículo un nuevo saber matemático que incluye lo artístico generando habilidades como localización, orientación y ubicación espacial de una forma creativa para que así el estudiante pueda enfrentar los retos que establece la sociedad. Por otro lado, se puede observar estrategias para la integración de áreas de conocimiento y exploración de nuevas rutas de trabajo.

Esta actividad propuesta por Uribe et al. (2014) puede ser profundizada utilizando un contraste de resultados desde preescolar, básica primaria y secundaria, observando las habilidades que generan los estudiantes siendo una alternativa didáctica escolar distinta. En particular este artículo aporta a la presente tesis con la construcción de nuevas ideas innovadoras, para el currículo o plan de estudio presente en cualquier colegio, con el fin de corroborar los resultados previstos en el mismo.

Conclusiones del capítulo 1

La revisión de la literatura aunado a las entrevistas aplicadas a los especialistas, ha permitido constatar las siguientes tendencias sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria, específicamente en grado tercero:

Actividades en papel. En esta tendencia diferentes investigadores ofrecen recursos y sus formas de trabajo para el aula. Enfatizan en el plegado, dibujos, construcción de figuras con papel emergente y teselaciones. Este tipo de actividades generan en el estudiante desafíos a nivel mental, construyendo significativos aprendizajes. Además, aportan actividades y estrategias didácticas para el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos geométricos del espacio a través del trabajo con papel (Golledge, Marsh y Battersby 2008; Vighi y Marchini 2010; Uribe, Cárdenas y Becerra 2014; Leme da Silva 2014; Freitas y McCarthy 2014; García, Villegas y González 2015; Burte, Gardony, Hutton y Taylor 2017; Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Gagatsis 2018; Sinclair, Moss, Hawes, Stephenson 2018; Yang, Chung y McBride 2019; Lowrie, Resnick, Harris y Logan 2020).

Manipulación con material concreto y/o manipulable. Los investigadores aportan actividades con ayuda de material de fácil acceso y cotidiano para el estudiante, donde utilizan figuras en 3D, rompecabezas, fotografías, mapas, entre otros. Consideran que estas herramientas simbólicas permiten la comunicación de la estructura del espacio. Además, aportan al proceso de aprendizaje de los diferentes contenidos abordando el pensamiento espacial por medio de la manipulación con material concreto (Kim, Bednarz y Kim 2012; Cortés, Sandoval y Otálora 2013; Xistouri, Pitta – Pantazi y Gagatsis 2014; Hawes, Moss, Caswell, Naqvi y MacKinnon 2017; Dindyal 2015; Salsa,

Gariboldi, Vivaldi y Rodríguez 2019; Rehm, Stan, Wøldike y Vasilarou 2015; Troncoso 2018).

Contrastes entre material tradicional y tecnológico. Las investigaciones realizan una comparación entre las diferentes herramientas tradicionales y tecnológicas que se pueden implementar en el aula. Emplean computadores, tablets, celulares y todo tipo de reproducción visual. A su vez, comparan cada uno de los materiales y las dificultades que presenta el estudiante en la enseñanza aprendizaje de la geometría de grado tercero (Elia, Evangelou, Hadjittoouli y Heuvel 2014; Fastame & Callai 2015; Zapateiro, Poloche y Camargo 2016; Sinclair y Bruce 2015.)

Entrevistas, encuestas y/o cuestionarios. Los autores generan diferentes estrategias para observar el proceso de enseñanza aprendizaje del pensamiento espacial en estudiantes de primaria, específicamente en grado tercero. Manejan procesos cíclicos, de planificación, enseñanza, revisión y refinamiento en el desarrollo de las actividades. Además, generan grabaciones y recursos físicos con el fin de ver detenidamente el desarrollo de cada una de las actividades propuestas por los investigadores (Fujita, Kondo, Kumakura, Kunimune y Jones 2020; Mulligan, Woolcott, Mitchelmore, Busatto, Lai, & Davis 2020; Bruce, Brent, Sinclair, Mcgarvey, Hallowell, Drefs, Francis, Hawes, Moss, Mulligan, Okamoto, Whiteley, & Woolcott 2016; Owens 2020; Bruce y Hawes 2015; Sinclair, Bartolini, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens 2016; Owens 2020).

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hace referencia al marco teórico, el cual sustenta esta investigación. Los referentes teóricos están relacionados con la teoría de resolución de problemas, incluyendo problemas retadores; el pensamiento espacial; el pensamiento visual para el proceso de enseñanza aprendizaje y la comunidad de práctica de Wenger.

2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores

El MEN (2006) plantea el aprendizaje de los estudiantes por competencias, su objetivo es el poder solucionar problemas, garantizando la construcción de su propio conocimiento. Así mismo, el MEN (2006) afirma que las competencias matemáticas se desarrollan teniendo en cuenta distintos niveles de dificultad al solucionar situaciones problemas, por lo cual, se deben generar diversos ambientes de aprendizaje adecuados para los estudiantes. MEN (2006) menciona y describe cinco procesos generales que se llevan a cabo en las clases de matemáticas, los cuales son: razonamiento; comunicación; modelación; elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; resolución y planteamiento de problemas.

La resolución de problemas se ha convertido en una teoría abordada por diferentes investigadores, como lo son: Pölya (1965), Schoenfeld (1985), Labarrere (1996), Sigarreta (2004), Pochulu y Rodríguez (2012), Liljedahl y Santos-Trigo (2019), entre otros. Estos investigadores, entre otros, hacen de la resolución de problemas un constructo teórico.

Si se centra la atención en la definición sobre el término problema, Pölya (1965) define que *“Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata”*²⁸.

Por su parte, Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema es *“... una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”*²⁹.

Los problemas propuestos en esta investigación constituyen un reto para los estudiantes. Pérez (2004) plantea que los problemas retadores *“... invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento”*³⁰. Las actividades de la tesis se basan en estos criterios, propiciando que el estudiante construya su contenido geométrico.

Las diferentes definiciones de problemas abordadas comparten rasgos comunes, según lo planteado por Campistrous y Rizo (1996), en cada una de las definiciones se precisa:

- Existencia de condiciones iniciales o finales, las cuales expresan la necesidad de transformación.
- Existe una contradicción o exigencia desconocida.
- Se encuentra una necesidad por parte del estudiante por resolver la contradicción.

²⁸ Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas. p. 28.

²⁹ Krulik, S., y Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.p. 4.

³⁰ Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Por su parte, Pochulu y Rodríguez (2012) plantean rasgos similares que distinguen las diferentes definiciones de problema, abordadas por los investigadores en esta temática: existe un sujeto que requiere resolverlo, existe un punto inicial y una meta por conseguir, existe un bloqueo lo cual impide el acceso a la meta de forma inmediata.

Pólya (1945), Schoenfeld (1985), Mason, Burton y Stacey (2010), entre otros, han abordado diferentes fases o estrategias para el proceso de la resolución de problemas.

Además, Kintsch y Greeno (1985) centran su atención en una estrategia para solucionar problemas, esta consiste en realizar una modificación de cada enunciado a una representación mental coherente a la situación inicial. Por lo tanto, se debe realizar una adecuada representación mental con el fin de facilitar y no inhibir la solución.

Para esta investigación se asume las fases de Mason, Burton y Stacey (2010). Estas fases se determinan por: *abordaje*, *ataque* y *revisión* (ver Figura 1).

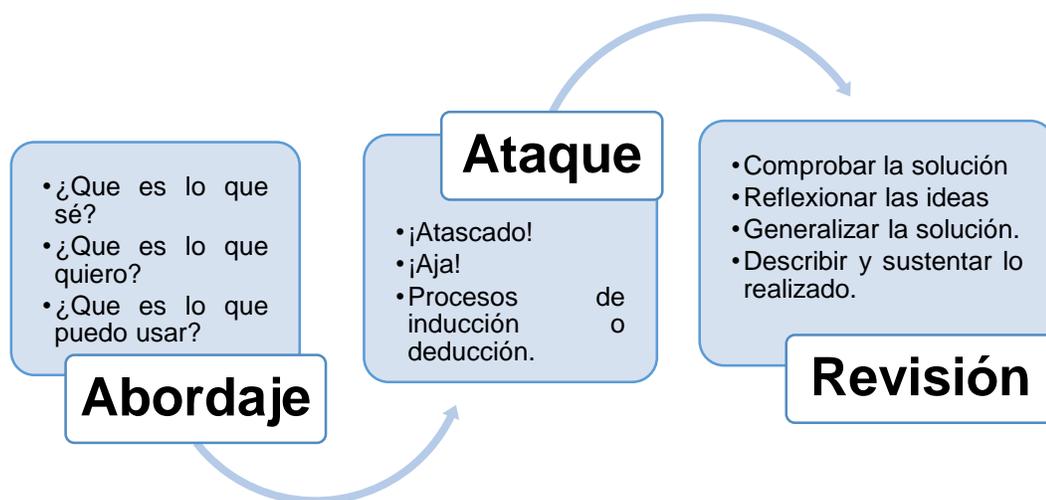


Figura 1. Fases del proceso de resolución de problemas según Mason, Burton y Stacey (2010).

En cada una de estas fases, de ser necesario se pueden proponer preguntas heurísticas a los estudiantes que manifiesten dificultades, para que lleguen a resolver un problema de forma autónoma. A continuación, se detallan estas fases con sus respectivas preguntas heurísticas.

En la fase de abordaje el estudiante comprende el problema, además, de responder detenidamente las siguientes preguntas: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? Y ¿Qué es lo que puedo usar? Por todo lo nombrado anteriormente, el estudiante debe tener un tiempo considerado para la solución de las mismas. Esta fase se culmina cuando el estudiante es capaz de representar y organizar su información de forma escrita y verbal. Como complemento, el docente puede realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿Qué tipo de figura estoy abordando?, ¿Tengo algún conocimiento de esta figura?, ¿El problema tendrá algún patrón?, ¿Comprendes la ubicación espacial para poder resolver el problema?

La fase de ataque es una de las más completas y complejas, en la cual, el estudiante puede experimentar para la búsqueda de la solución al problema. El objetivo es relacionar la información que se obtiene en la primera fase, para ello, se generan diversas estrategias para acercarlo a la solución del problema. Los estados de ánimo que puede presentar el estudiante corresponden a ¡Atascado! (Cuando requiere algún tipo de ayuda, ya que no la evidencia de inmediato) y el ¡Aja! (Cuando es clara la información hasta el momento sobre las ideas para resolver el problema).

A su vez, el estudiante genera dos procesos matemáticos, primero, la inducción donde puede realizar conjeturas para así llegar a la solución y segundo, la deducción donde puede justificar las conjeturas mediante las leyes lógicas con ayuda de los teoremas.

En el ataque de ser necesario, el docente puede formular las siguientes preguntas: ¿te parece similar a algún problema ya resuelto?, ¿conoce información que le pueda ser útil?, ¿puede imaginarse otro problema semejante?, ¿puede justificar cada uno de los pasos de la solución en su problema? ¿puede observar notoriamente que su solución es correcta?

La fase de revisión consta de ciertas características: comprobar la solución con su respectivo proceso; reflexionar con cada una de las ideas expuestas, las cuales son claves para la solución del problema; generalizar lo realizado con el fin de determinar la posibilidad de resolverlo de otra manera y por último describir la solución dejando explícito lo realizado y la sustentación del mismo. En esta última fase el docente realiza las siguientes preguntas heurísticas: ¿puede comprobar el resultado?, ¿puede obtener una solución diferente a la obtenida?, ¿este proceso lo puede emplear en algún otro problema?

Los problemas retadores conforman el sistema de actividades de la presente investigación. Los cuales *“exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior”*³¹.

Falk (2001) afirma que un problema retador *“propicia en el estudiante establecer redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos”*³². Además, de generar motivación

³¹ Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

³² Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, p.16.

e interés al momento de solucionarlo, este tipo de problema tiene tres características “... *estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata*”³³.

En los problemas retadores se pueden evidenciar las siguientes características: desarrolla el razonamiento, creación de una oportunidad para involucrarse con las aplicaciones de la matemática, desarrolla clases interesantes y desafiantes para los estudiantes. Además, brinda estrategias para solucionar problemas, generando una excelente base en las matemáticas.

La resolución de problemas es uno de los pilares fundamentales en los cuales se debe formar al estudiante, generando situaciones donde se debe enfrentar y buscar posibles caminos de solución. A su vez, se implementan problemas retadores donde el estudiante es quien debe pensar de forma autónoma, para llegar a la construcción de su razonamiento.

Para que el estudiante alcance el objetivo propuesto (solución de problemas), existen investigadores que proponen vías de solución como lo son Mason, Burton y Stacey (2010) los cuales brindan unas fases como construcción para la solución de problemas. Estos autores ayudan al razonamiento por medio de preguntas heurísticas, las cuales, orientan y guían al estudiante para llegar a lo que se requiere.

Con la resolución de problemas se quiere llegar a una formación integral para los estudiantes desde los grados iniciales, con el fin de incentivar este tipo de pensamientos e ir enriqueciendo su razonamiento con el paso de los años.

³³ Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, VIII (1).

2.2. Referentes teóricos del pensamiento espacial en la escuela primaria

La geometría es la rama de la matemática que tiene más aplicaciones al contexto del estudiante, por tal motivo, se hace necesario desde edades tempranas contribuir al dominio del contenido geométrico, para potenciar el pensamiento geométrico en cada uno de ellos. Según Elia, van den Heuvel, y Gagatsis (2018) la geometría requiere una priorización en los planes de estudio, teniendo en cuenta los programas educativos desde la primera infancia; donde se debe incluir con un carácter dinámico e imaginativo las relaciones espaciales con objetos tridimensionales y bidimensionales, basados en el contexto del estudiante.

El Ministerio de Educación Nacional (1998) en los Lineamientos Curriculares para matemáticas plantea que el pensamiento geométrico es “... *el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales*”³⁴.

Según el MEN (1998) este pensamiento propicia la construcción y manipulación de representaciones mentales de objetos de tres dimensiones y la observación desde diferentes perspectivas. En los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional en el 2006 se plantean tres momentos en la construcción del pensamiento geométrico: el establecimiento de la noción de posición absoluta o relativa de los objetos; una cuantificación de la posición dada por el concepto de

³⁴ Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. MEN. Bogotá, p. 56.

medida; los teoremas formales de la geometría euclidiana (esto corresponde a un pensamiento formal).

Por su parte, Florez (1991) plantea que el pensamiento geométrico espacial es el *“...pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional, como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y se sistematiza y generaliza con el estudio de los contenidos geométricos en la escuela”*³⁵.

Para Kinach (2012) el pensamiento espacial *“adopta una variedad de formas, incluida: la construcción y manipulación de objetos bidimensionales y tridimensionales; percibir un objeto desde diferentes perspectivas; y el uso de diagramas, dibujos, gráficos, modelos y otros medios concretos para explorar, investigar y comprender conceptos abstractos como fórmulas o modelos algebraicos del mundo físico”*³⁶.

Metoyer, Bednarz y Bednarz (2015) consideran el pensamiento espacial como un beneficio donde los estudiantes pueden usar el espacio de una forma real y/o teórica, además, se puede estructurar problemas, para así encontrar y expresar las posibles soluciones. Las herramientas que comúnmente se utilizan son los mapas, gráficos, imágenes, cuerpos sólidos o representados por sus aristas, entre otros; los cuales fundamentan el pensamiento espacial.

³⁵ Flórez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba. 1991. (Tesis de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana. p. 10.

³⁶ Kinach, B. (2012). Fomentar la comprensión espacial versus métrica en geometría. El profesor de matemáticas, 105 (7), p. 535.

Por otro lado, Burte, Gardony, Hutton y Taylor (2017) consideran al pensamiento espacial como aquellas relaciones que se generan con los objetos, con el fin de razonar y comprender el contenido. Sin olvidar, que este pensamiento se aplica en situaciones problemas teniendo en cuenta el contexto del estudiante.

Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) determinan las características del razonamiento espacial, siendo este inmerso en el pensamiento geométrico, algunas de estas son: la habilidad que tiene el estudiante para explorar y manipular los objetos; crea relaciones espaciales entre los objetos; se mejora la habilidad con el paso de los años y de su experiencia adquirida. Por otra parte, los investigadores plantean unas estrategias que pueden ser implementadas en el aula, tales como: experimentar un lugar determinado, estimar una distancia entre los diferentes objetos inmersos en él y el poder realizar rotaciones o giros mentalmente, entre otros.

Al Yagoub (2020) determina la importancia de generar habilidades espaciales en los estudiantes, por lo cual, cita a Maier (2009) quien clasifica las habilidades en cinco categorías:

- Percepción espacial (evalúa los objetos con respecto a las direcciones brindadas).
- Visualización espacial (evalúa los objetos en movimiento y su relación con respecto a otras figuras).
- Rotación mental espacial (evalúa la rotación de manera mental de los objetos en tres dimensiones).
- Orientación espacial (reconoce y relaciona las partes de un objeto en tres dimensiones).

- La capacidad de entrar en situaciones espaciales.

Para Al Yagoub (2020) es fundamental determinar las etapas en las cuales los estudiantes pueden desarrollar habilidades espaciales, por lo tanto, cita a Piaget (1956), quien determina las habilidades topológicas en la primera etapa las cuales adquieren en sus primeros años de vida, éstas requieren de figuras bidimensionales, lo cual, permite reconocer distancias entre los objetos de su contexto.

En la segunda etapa, el estudiante observa los objetos tridimensionales y descubre en ellos las diferentes dimensiones que contiene por medio de la rotación mental. En esta etapa se encuentran los adolescentes, quienes deben formar una relación y coherencia con las figuras en su contexto. Si no se presenta de esta manera, el estudiante puede llegar a mostrar dificultades para visualizar los objetos más adelante.

La tercera etapa desarrolla habilidades de proyección, es decir, pueden concebir las medidas de las figuras de forma integrada (rotación, traslación, distancia, entre otros).

Ramful, Lowrie y Logan (2016) plantean tres ideas que pueden incluirse en los planes de estudio y a su vez evaluarlas en la escuela. La primera se determina como la orientación mental, es decir, la habilidad que tiene el estudiante para ver imágenes desde diferentes perspectivas; segunda, se centra en la rotación mental, donde un objeto lleva a cabo movimientos en la mente del estudiante; por último, se observa la visualización espacial, donde se genera una manipulación de información que se presenta espacialmente.

El pensamiento geométrico espacial es uno de los contenidos que requiere trabajo constante desde los grados iniciales. Actualmente, se han rescatado diferentes

investigaciones que brindan la importancia de crear habilidades espaciales, con ayuda de diferentes herramientas y/o estrategias que aportan a la formación del estudiante.

Piaget (1956) crea una estructura según la edad en el cual está inmerso. Aquí se observa, que los contenidos topológicos no se implementan en el aula especialmente en la sección de primaria y bachillerato.

Así como lo nombran Ramful, Lowrie y Logan (2016) el pensamiento espacial requiere que se refuerce en las aulas de clase, llevando actividades innovadoras y retadoras para los estudiantes. Donde manipulen diferentes figuras sin importar su dimensión, además, de poder diferenciarlas según sus propiedades y/o características inmersas.

El pensamiento espacial, sus actividades y futuras proyecciones se evidencian en un número especial que realiza la revista Mathematics Educations Research Journal (2020). Además, reúnen investigaciones en educación matemática que abordan el razonamiento espacial con el fin de generar un aprendizaje y cambio en las matemáticas.

En el pensamiento espacial se requiere el uso del contexto, en el cual se encuentra el estudiante, aportando de manera significativa en el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico. En la elaboración de las actividades de la presente tesis se construyen problemas evidenciando figuras geométricas en contexto con el fin de que sus experiencias aporten al proceso de los estudiantes.

2.3. Fundamentos del pensamiento visual en la matemática de la escuela primaria

El proceso que ha llevado a cabo el pensamiento visual con el paso de la historia, reconoce que el cerebro crea imágenes mentales, por ello, resulta importante las experiencias que tiene el estudiante dentro y fuera del aula (Púñez, 2019).

Según Púñez (2019) el ser humano piensa en imágenes antes de comunicarse, todo esto genera un pensamiento visual emergente, el cual, impulsa a las células neuronales de tal forma que pueda expresar, opinar, describir, comunicar e imaginar contenidos geométricos espaciales.

Varios investigadores brindan su experiencia en el aula, enfatizan en la importancia del desarrollo de este pensamiento en edades tempranas. Arheim (1969) describe el aprendizaje de sus estudiantes por medio de materiales como lo son el papel y/o arcilla, los cuales generan una manipulación y observación constante. En la etapa inicial los docentes son quienes disponen de un ambiente lleno de creatividad para llegar a una amplia imaginación y con el paso de los años a la creación de un pensamiento crítico e ingenioso, sustentado en el pensamiento visual, en estudiantes de primaria.

Para Púñez (2019) evidentemente estas habilidades van disminuyendo en los estudiantes con el paso de su vida escolar, se observa un predominio por áreas fundamentales para su vida profesional. Todo esto es generado para la creación de competencias cognitivas, las cuales, pertenecen a uno de los hemisferios del cerebro; pero a su vez, no se percatan que en la formación del ser humano se requiere de un equilibrio de los dos hemisferios correspondientes.

Según Púñez (2019) la expresión pensamiento visual fue concebida por primera vez a Rudolf Arnheim en 1969, quien publica el libro *El pensamiento visual*, determinando

diferentes estudios sobre vista, imágenes, educación, entre otros; para lo cual, se requiere una percepción y concepción del mismo. A su vez, diferentes autores como Sibbet (2013), Roam (2009), Molla (2016) y Álvarez (2016) centran su atención en el pensamiento visual mediante una técnica llamada facilitación gráfica.

Roam (2009) establece al pensamiento visual como la capacidad que tiene el ser humano de ver con ayuda de sus ojos y, el poder observar procesos realizados por el cerebro mediante la interpretación de imágenes, esto beneficia el descubrimiento de ideas poco evidentes. Por otra parte, Molla (2016) considera al pensamiento visual como una capacidad que se tiene para recopilar información y a su vez poderla expresar de forma visual, un ejemplo breve es el poder contar una historia, quien fácilmente puede seguir el hilo conductor del mismo.

Así mismo, se requiere una diferencia entre pensamiento visual y facilitación gráfica, para lo cual Álvarez (2016) puntualiza que el pensamiento visual es aquel cúmulo de ideas que se llevan a cabo en nuestro cerebro. Mientras tanto, la facilitación gráfica es una manera que se genera por medio del lenguaje como el escuchar, dibujar y organizar con ayuda de algunos recursos creativos, tales como: los portafolios, murales, carteles, entre otros. Esto genera una síntesis atractiva del contenido geométrico por medio del pensamiento visual y facilitación gráfica para el estudiante, reconociendo la importancia de las estructuras fundamentales para el proceso de enseñanza aprendizaje de este contenido.

Gutiérrez (2013) plantea que el pensamiento visual es un proceso “... *que consiste en manipular ideas a través de dibujos simples y fácilmente reconocibles, creando conexiones entre sí por medio de mapas mentales, con el objetivo de entenderlas*

*mejor, definir objetivos, identificar problemas, descubrir soluciones, simular procesos y generar nuevas ideas*³⁷

Por otra parte, Giaquinto (2007) aborda el pensamiento espacial como aquella percepción de imágenes, las cuales “... pueden ilustrar los casos de una definición, lo que da una idea real de sus aplicaciones; pueden ayudarnos a comprender la descripción de una situación matemática o los pasos de un razonamiento secuencial; donde pueden sugerir una propuesta de investigación o una idea para una prueba”³⁸. Con ayuda de las imágenes que genera el estudiante, se plasma situaciones en contexto utilizando figuras geométricas y/o sólidos, lo cual, conlleva un pensamiento espacial enriquecido con una fundamentación robusta frente a la construcción y solución de problemas.

Urchegui (2015) define el pensamiento visual como “Una forma específica de conocimiento y un estilo de comunicación. Una forma de recibir información a partir de la interpretación de imágenes y una manera de transmitir información y comunicar a partir de la construcción de imágenes”³⁹. Esta definición sustenta la presente tesis, teniendo en cuenta la importancia del contenido geométrico y el manejo constante de figuras geométricas y propiedades de las mismas, además se requiere fundamentalmente del pensamiento visual para poder recibir, interpretar y transmitir información y así construir un proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico.

³⁷Gutiérrez, L. (2013). ¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo? <https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/>

³⁸ Giaquinto, M (2007). Visual thinking in mathematics. Oxford University press. Printed in Great Britain.

³⁹ Urchegui B, P. (2015). El Pensamiento Visual en la Formación del Profesorado / Visual Thinking in Teacher Education. 10.13140/RG.2.2.11390.79682. P. 25

Para Urchegui (2015) el pensamiento visual es indispensable en el campo educativo, por las diferentes habilidades que se genera el estudiante no solo a nivel artístico, sino como las competencias visuales que se requiere para un proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Según Puñez (2019) antiguamente el ser humano expresa sus pensamientos e identidad por medio de una comunicación visual. Esta comunicación se puede generar por medio de diferentes representaciones como lo son: murales, pancartas, tejidos, piedras esculpidas, dibujos entre otros; a su vez, se encuentran inmersas figuras, relaciones y propiedades entre las figuras geométricas y sólidos.

Pró (2003) fundamenta que la imagen se encuentra inmersa en la cultura, las personas de hoy en día están rodeadas de todo tipo imágenes de incluyendo las figuras geométricas y de sólidos, las cuales son expresiones que tiene el ser humano. Es por ello, que el pensamiento visual genera una relación estrecha con aspectos como la teoría de color, la psicología cognitiva y con ello diferentes tipos de aprendizaje que se pueden llevar a cabo en el campo educativo.

Como consecuencia, en esta nueva era es fundamental trabajar en la construcción de un pensamiento visual, además, de tener un dominio amplio de las herramientas que se pueden llevar a cabo en el aula para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Puñez (2019) afirma que el pensamiento visual crea en el estudiante creatividad y motivación hacia el contenido, en particular al geométrico espacial. Además, garantiza al docente que el aprendizaje sea dinámico y didáctico en todo momento. Esto se puede implementar, si el docente genera un clima adecuado para el estudiante, donde

él sienta confianza y tranquilidad por este nuevo proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico.

Púñez (2019) determina que el pensamiento visual y la facilitación gráfica genera un gran impacto si se *“...trabaja de manera colaborativa dentro de contextos que requieren la escucha activa, las relaciones de trabajo y la toma de decisiones, así el trabajo colaborativo afianza el rol que todo agente de cambio se propone”*⁴⁰. Este trabajo es necesario para desarrollar un proceso robusto del contenido geométrico en primaria.

Además, de la facilitación gráfica se requiere de la documentación gráfica para la enseñanza aprendizaje del contenido geométrico espacial en grado tercero que según Púñez (2019) se debe trabajar constantemente y en tiempo real durante las clases. Esto permite reflejar la información que se requiere, con ciertas técnicas acordes para que el estudiante centre su atención al mismo. A su vez, el docente contiene una herramienta dinámica y retadora para sus estudiantes generando un desafío a nivel mental, lo que conlleva a resultados significativos en el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico espacial.

A continuación, se establecen algunos recursos propuestos por Púñez (2019) para generar un pensamiento visual, contextualizado al contenido geométrico de lo que se está investigando:

- Los comics: contienen figuras y cuerpos geométricos para generar personajes, texto para describir propiedades y relaciones entre los objetos, brindando una

⁴⁰ Púñez, N. (2019). El Pensamiento visual: una propuesta didáctica para pensar y crear. *Horizonte De La Ciencia*, 7(12), p. 166.

experiencia cargada de pensamiento visual desde un mundo interno y externo al estudiante.

- Mapas mentales: generan habilidades para sintetizar información de figuras y cuerpos geométricos, expresándolas de forma ordenada, lo cual, permite orientar y centrar a los estudiantes en el contenido geométrico.
- Toma de notas: organizar y representar el contenido geométrico por medio de palabras, dibujos y/o simbologías.

Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) describe “... que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas”⁴¹

De esta forma se reitera la necesidad de generar un pensamiento visual, por las herramientas que posibilita para el desarrollo de un pensamiento geométrico espacial.

El pensamiento visual en la enseñanza del contenido geométrico conlleva beneficios, las cuales son descritos por el investigador Pou (2002):

- Se incrementa las capacidades de los estudiantes a nivel deductivo y argumentativo.
- Beneficia las interpretaciones que realiza el estudiante por medio de las imágenes teniendo en cuenta su nivel de complejidad.
- Genera un proceso de aprendizaje dinámico, evitando una recepción pasiva por parte del estudiante.

2.4. Fundamentos de la Teoría de Comunidad de Práctica de Wenger

⁴¹ Domenicantonio, Costa & Vacchino. La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/27/union_027_010.pdf p.3

Wenger (2001) estructura tres características que se llevan a cabo en la comunidad de práctica, esto también genera una particularidad y diferencia de cualquier otra:

1. El *dominio* genera la orientación, teniendo en cuenta un interés común.
2. La *comunidad* construye compromisos a cada uno de los miembros, con el fin de ayudar y compartir información y relaciones entre ellos.
3. La *práctica* se lleva a cabo por medio de relaciones con su comunidad por medio de los intereses, además, del contenido y/o recursos que pueden brindar con cada uno de ellos, con base a sus experiencias e historias.

Wenger (1998) construye ideas fundamentales sobre el conocimiento y a su vez una contribución al proceso de aprendizaje: los seres humanos son seres sociales, siendo este un aspecto fundamental para el aprendizaje; los conocimientos se fundamentan en competencias; la participación es la base para generar compromisos; la experimentación y el compromiso generan un significado para así llegar a un aprendizaje. Las ideas nombradas anteriormente conducen a un aprendizaje del contenido geométrico enriqueciendo de participación y las prácticas, lo que conlleva a una comunidad construida desde lo social y la identidad.

Wenger (1998) llega a la construcción de una participación social sobre la base de un proceso de aprender y de conocer, esta teoría se sustenta en cuatro componentes:

1. El *significado*, el cual brinda al ser humano la posibilidad de considerar el mundo a nivel individual y colectivo, teniendo en cuenta las experiencias.
2. La *práctica*, se conforma por cada uno de los recursos y marcos de referencia los que conllevan a generar un compromiso en su labor.

3. La *comunidad*, son aquellos aportes que se generan a la empresa como las configuraciones sociales y la participación.
4. La *identidad*, genera un cambio sobre ¿quiénes son? y el ¿cómo se crean historias utilizando el contexto?

Estos componentes nombrados anteriormente se relacionan entre sí, creando a su vez la teoría de comunidad de práctica. Así como se muestra a en la Figura 2.

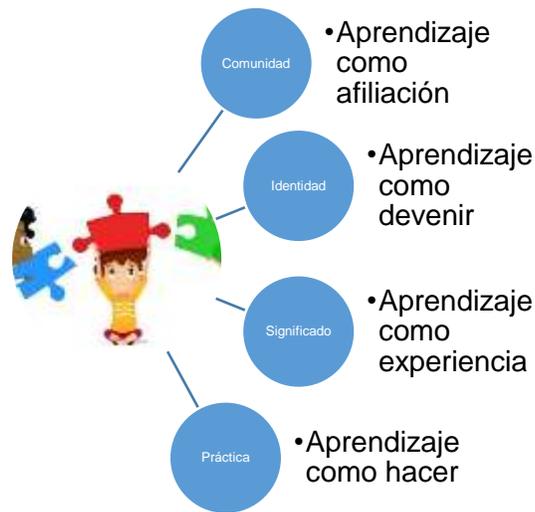


Figura 2. Componentes de la teoría social de aprendizaje.

Wenger, McDermott y Snyder (2002) consideran a la comunidad de práctica como aquel grupo de personas que participan debido a una preocupación, así mismo, contienen interés común por un tema. Por ello, lo describen como “la gente participa por diferentes motivos: algunos porque la comunidad les proporciona directamente un valor, otros por la conexión personal y otros por la oportunidad de mejorar sus habilidades”⁴². Esta definición es fundamental para la presente tesis debido al interés que se genera para el desarrollo de las actividades, los participantes tienen una gran

⁴² Wenger, E., McDermott, R., y Snyder, W (2002) Cultivating Communities of Practice. https://www.researchgate.net/publication/265678077_Seven_Principles_for_Cultivating_Communities_of_Practice. p.5.

motivación por el contenido geométrico espacial y a su vez generar habilidades en el dominio del mismo.

Camargo (2010) precisa aspectos sobre la comunidad de práctica con ayuda de Wenger (1998), donde aborda los contenidos matemáticos determinando las necesidades para la solución de problemas. Además, las ideas que producen los estudiantes se centran en el trabajo conjunto incluyendo la socialización en el aula.

Para la construcción de un pensamiento geométrico espacial, Púñez (2019) determina dos aspectos fundamentales para trabajar y es el pensamiento visual y la facilitación gráfica, estos a su vez generan un gran impacto si se *“...trabaja de manera colaborativa dentro de contextos que requieren la escucha activa, las relaciones de trabajo y la toma de decisiones, así el trabajo colaborativo afianza el rol que todo agente de cambio se propone”*⁴³. Evidentemente, la geometría espacial requiere un trabajo conjunto con los estudiantes; por lo tanto, en las actividades propuestas en la presente tesis se aborda el trabajo colaborativo y la socialización conjunta con el fin de generar un robusto proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico espaciales.

Conclusiones del capítulo 2

La autora de esta investigación considera la importancia elaborar actividades para el aula sustentada en estos elementos teóricos, para así generar un desarrollo de competencias geométricas espaciales en los estudiantes.

⁴³ Púñez, N. (2019). El Pensamiento visual: una propuesta didáctica para pensar y crear. *Horizonte De La Ciencia*, 7(12), p. 166.

Es importante en un trabajo investigativo considerar referentes teóricos que permitan la construcción colectiva de conocimiento matemático con estudiantes de grado tercero de primaria, en la cual, pretende llevar a cabo una comunidad de práctica (Paden, 1998). Según Camargo (2010) el autor determina aspectos sobre la comunidad de práctica como lo estableció Wenger (1998), donde las ideas que producen los estudiantes se debe al trabajo conjunto con sus compañeros y luego de una socialización en el aula.

La resolución de problemas, donde en su solución el estudiante haga uso de rotaciones, manipulación de materiales reales o virtuales, construcción-deconstrucción, entre otras, constituye un espacio para compartir, socializar y defender las diversas ideas que surgen en este proceso, para llegar a un consenso de las posibles respuestas y de esta forma enriquecer el pensamiento espacial-visual y fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría de grado tercero.

La Comunidad de Práctica de Wenger en el contexto de aula del grado tercero permite que los estudiantes establezcan relaciones sociales de colaboración y comprensión a medida que constituyen una comunidad, evidenciándose la confianza entre los miembros, además se observan como los responsables de encontrar solución a los retos.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría, presenta algunas dificultades que limita su desempeño durante el mismo. La presente tesis se enfoca en la construcción de actividades para favorecer este proceso a través de la integración del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero. Con el fin de alcanzar los objetivos de la investigación se precisa el diseño metodológico, donde se constata el tipo de investigación, el alcance del estudio y los métodos utilizados.

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

La tesis asume un paradigma de investigación cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo. Hernández, Fernández y Baptista (2014) determinan este enfoque con una orientación en aspectos lógicos teniendo en cuenta un proceso inductivo, como lo es explorar y describir, para generar en segunda instancia perspectivas teóricas.

Por otra parte, la investigación se estructura bajo un diseño de investigación acción. Este diseño según Hernández, Fernández y Baptista (2014) aporta una guía para la toma de decisiones con base a proyectos, procesos y/o reformas estructurales. Las tres fases que aborda este tipo de diseño es observar, pensar y actuar las cuales se desarrollan de forma cíclica, llegando al resultado deseado.

El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría teniendo en cuenta el desarrollo del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero, se establece y se enriquece con los aportes que brinda un diseño de investigación acción. Al aplicar este

diseño en una investigación relacionada con el contenido geométrico, se favorece la experimentación, búsqueda y exploración, estimulando los procesos de aprendizaje e independencia cognoscitiva del estudiante. Además, permite proyectar, expresar y evidenciar cada una de las ideas, para así compartirlas y confrontarlas junto con los estudiantes de clase, y llegando a la aplicación de la resolución de problemas geométricos espaciales en contexto.

3.2. Población y muestra (Unidad de análisis)

La población es conformada por estudiantes de grado tercero del Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría y la muestra de la investigación está integrada por 5 estudiantes con características homogéneas.

3.3. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se conciertan métodos y técnicas de investigación científica, desde un nivel teórico hasta el empírico. En los métodos teóricos se aborda el:

Análisis de fuentes: se establece en la elaboración del estado del arte y para sentar las bases teóricas que sustentan la investigación.

Histórico-lógico: para el estudio de la evolución y desarrollo que ha tenido la incidencia del pensamiento espacial y visual en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en grado tercero.

Análisis-Síntesis: en la elaboración del estado del arte y determinación de las tendencias actuales sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio en grado tercero en la escuela. Además, se aplica para la construcción de los fundamentos teóricos y en el análisis de los resultados de las actividades, y en la

elaboración de las conclusiones.

A nivel empírico, se abordan los siguientes métodos e instrumentos:

Observación participante: para recopilar información en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, desarrollando un pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero.

Entrevista: para intercambiar información con especialistas sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría considerando la incidencia del pensamiento visual y espacial, a través de una entrevista semiestructurada.

Encuesta: para obtener información sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría teniendo en cuenta el pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero, mediante un cuestionario aplicado a maestros quienes tienen una amplia experiencia en el campo educativo.

Encuesta de satisfacción a los estudiantes: se aplica para determinar el impacto de las actividades propuestas y desarrolladas en cada una de las sesiones correspondientes.

Método Delphi: se utiliza en el proceso de validación de la encuesta.

Bitácora: para abordar lo trabajado por los estudiantes en cada una de las actividades y su proceso durante las mismas, en él se destacan los métodos y estrategias utilizadas, ideas, conceptos, entre otros.

3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se determinan las siguientes fases:

Fase diagnóstica: se determina la formulación y delimitación del tema, realizando una revisión de la literatura, una construcción del marco teórico y el diseño de los instrumentos con el fin de realizar una triangulación.

Fase de diseño: se elabora un sistema de actividades.

Fase trabajo de campo: se aborda la selección de la población y muestra, se aplican los métodos e instrumentos y las actividades construidas.

Fase analítica: en esta fase se enfatiza en la recolección de datos, análisis e interpretación de los resultados.

Fase informativa: corresponde a la evidencia de la investigación culminada, es decir, en sustentación de la tesis, participación en congresos y publicación de artículos.

Conclusiones del capítulo 3

El trabajo asume un paradigma de investigación cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo y un diseño de investigación acción. Además, se abordan métodos de nivel teórico como lo son el *análisis de fuentes, histórico-lógico y análisis-síntesis* y métodos empíricos como *la observación participante, encuesta, entrevista, encuesta de satisfacción, método Delphi y diario de campo*.

La aplicación de la metodología propuesta permite el análisis de las actividades para lograr los resultados esperados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, donde se considera la incidencia del pensamiento espacial y visual.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES

El desarrollo del pensamiento espacial y visual que conlleve un proceso de construcción de significado mediante la comprensión y solución de problemas en contexto, con apoyo de la comunidad de práctica de Wenger (1998), es la inherencia de este capítulo.

1.1. Fundamentos del sistema de actividades desde el marco teórico

El sistema de actividades que se propone en esta investigación permite la experimentación, la exploración, la conjeturación y el desarrollo de habilidades con el uso de material concreto, para la búsqueda del contenido geométrico. Este sistema se fundamenta en la teoría de la resolución de problemas, el pensamiento espacial en la escuela primaria, el pensamiento visual en la matemática y la comunidad de práctica de Wenger. La interrelación e integración entre estos componentes teóricos favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría mediante la integración del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero en el Colegio Parroquial Santa Isabel de Hungría (ver Figura 3).

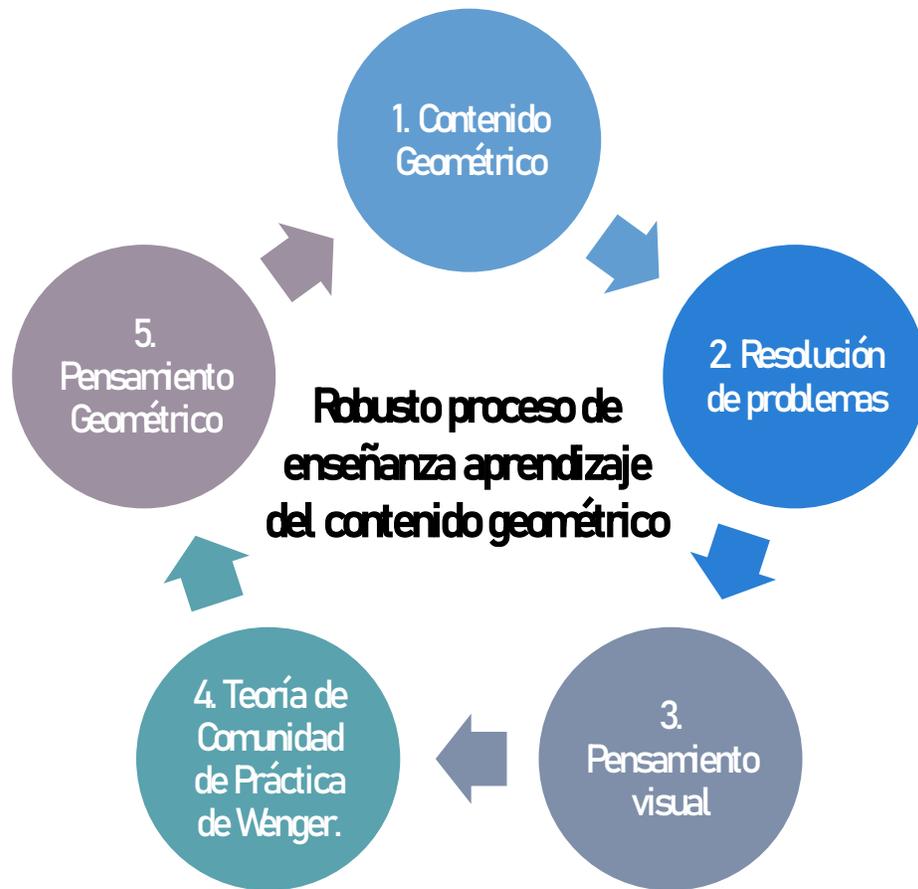


Figura 3. Interrelación e integración entre los componentes teóricos.

Para el desarrollo de la presente investigación se implementa la siguiente metodología:

- La docente le entrega a cada estudiante su guía y material concreto.
- Se precisa a los estudiantes la importancia de la comprensión lectora y la manipulación de material concreto, para poder identificar la solución y comprensión en cada uno de los problemas de manera individual y autónoma.
- Luego se socializa cada uno de los problemas que contiene la actividad, en los grupos establecidos según la comunidad de práctica de Wenger; donde se identifica las propuestas de los estudiantes y los argumentos que conllevan a dicha solución.

- Teniendo en cuenta los aportes realizados por el grupo de trabajo y con asistencia de la docente, se retroalimenta las respuestas con ayuda del material concreto. Por lo tanto, se comparan los resultados y se realiza un proceso de reflexión frente a lo construido con los estudiantes.

Las actividades se estructuran de la siguiente manera: título, objetivo, metodología, recursos y propuesta de los problemas graduados por niveles de complejidad.

1.2. Propuesta de actividades

A continuación, se presenta el sistema de actividades donde se abordan diferentes cuerpos geométricos, como lo son: cubos; prismas; pirámides; cuerpos redondos, cilindros y conos; todos los cuerpos.

1.2.1. Actividad 1. Cubos

Objetivo: favorecer el pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero por medio de actividades donde se aborde la construcción y deconstrucción de cubos, la rotación y orientación mental.

Sugerencia metodológica: la actividad aborda un contenido relacionado al cubo como figura geométrica. En el desarrollo de la actividad los estudiantes trabajan en grupo pequeños de máximo tres estudiantes bajos las condiciones de la comunidad de práctica de Wenger.

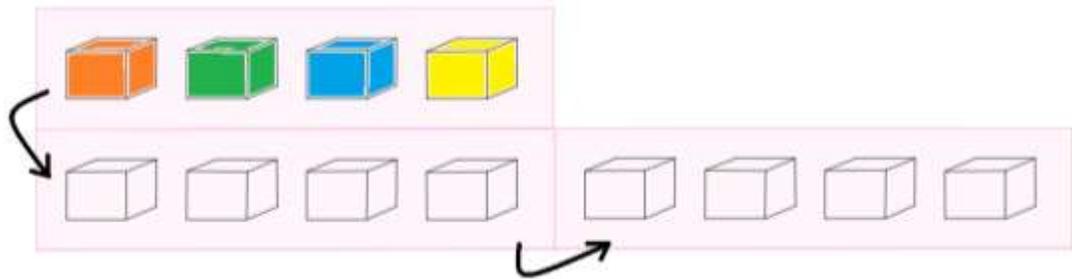
Los problemas de cada una de las actividades son propuestos para que los estudiantes trabajen de forma independiente, en la búsqueda del contenido geométrico. Es de destacar que, si algún estudiante presenta dificultades, se dirige a la docente, la cual, a través de preguntas heurísticas hace posible que el estudiante busque y se apropien

de este contenido. En el proceso se socializa las respuestas de cada estudiante, mostrando la incidencia del pensamiento visual en la construcción del pensamiento geométrico, lo cual, propicia y enriquece la construcción del mismo.

La evaluación se lleva a cabo por la docente a través de la observación sistemática de la actividad y la co-evaluación solicitada a los estudiantes.

Materiales a utilizar: hojas, lápiz, colores, borrador, tablero, marcadores y material concreto brindado por la docente.

1. La siguiente tarjeta se encuentra sobre un escritorio, está se voltea y se gira de forma simétrica hacia abajo y luego hacia la derecha, así como se muestra a continuación:

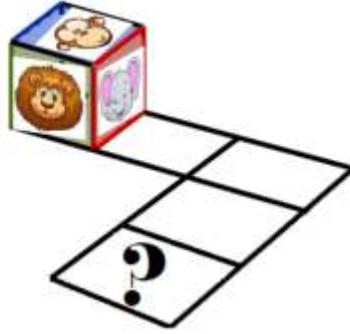


¿Cómo se observará la tarjeta con los respectivos cubos de colores, luego de realizar los diferentes giros y/o movimientos?

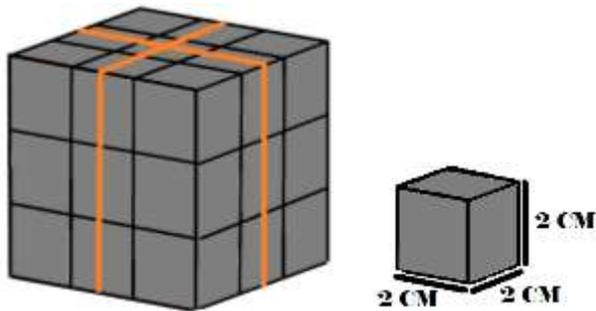
2. Realice los diferentes movimientos y giros del cubo, tener en cuenta la siguiente información:

En la cara opuesta del mono se observará un koala, en la cara opuesta del elefante se observará un tigre, en la cara opuesta del león se observará un castor.

Al finalizar el camino observado ¿qué animal se encuentra en la cara superior?



3. El siguiente cubo está conformado por tiene 27 cubos individuales en total, con una medida de 2 cm de lado en cada cubo, como se observa en la imagen, además, el cubo lo recubre una cinta de color naranja, ¿cuándo mide en total la cinta?



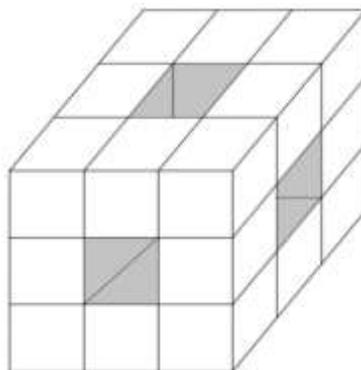
4. A continuación, observas la imagen de un cubo de 4 x 4 X 4 de color verde. Si se retiran todos los cubos de color verde, se pueden evidenciar cubos de color rosado.

¿Cuántos cubos hay en total de color verde? _____

¿Cuántos cubos hay en total de color rosado? _____



5. En la siguiente imagen encuentras un cubo de 3X3X3, a su vez se le han quitado una serie de cubos en el centro de cada cara hasta llegar al lado opuesto.
- ¿Cuántos cubos unitarios hay en total? _____
 - ¿Cuántos cubos unitarios faltan para completar un cubo de 3x3x3? _____



4.2.2. Actividad 2. Prismas

Objetivo: contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje por medio de la elaboración de problemas para estudiantes de grado tercero, donde se desarrolla el reconocimiento del espacio circundante, manipulación de material concreto (prismas) y el uso de la creatividad en la resolución de problemas.

Sugerencia metodológica: la actividad desarrolla un contenido concerniente a los prismas, donde requiere que los estudiantes trabajen en grupo pequeños de máximo tres estudiantes bajos las características de la comunidad práctica de Wenger.

Cada problema sustentado en la actividad es propuesto de tal forma que los estudiantes lo aborden de forma independiente, para llegar al contenido geométrico. Si algún estudiante presenta dificultades en la resolución de un problema, se dirige a la docente encargada, la cual, lo orienta a través de preguntas heurísticas generando una comprensión y apropiación del contenido geométrico. Luego se socializa lo trabajado por parte de los estudiantes, mostrando la importancia de un desarrollo del pensamiento espacial y visual lo cual enriquece la construcción del pensamiento geométrico.

A través de la observación constante durante la presente actividad se realiza la evaluación y la co-evaluación solicitada a los estudiantes.

Materiales a utilizar: hojas, lápiz, colores, borrador, tablero, marcadores y material concreto brindado por la docente.

1. En una caja con las dimensiones observadas en **Figura A**, se quiere empaquetar unos prismas de 1×3 y 1×2 como se observan en la **Figura B**. Con esta información, responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la cantidad máxima de prismas 1×2 que puede contener la caja?

- ¿Cuál es la cantidad máxima de prismas 1×3 que puede contener la caja?

- ¿Se puede completar la caja con cinco prismas de 2×1 y 5 prismas de 1×3 ?
SI o NO
¿POR QUÉ? _____

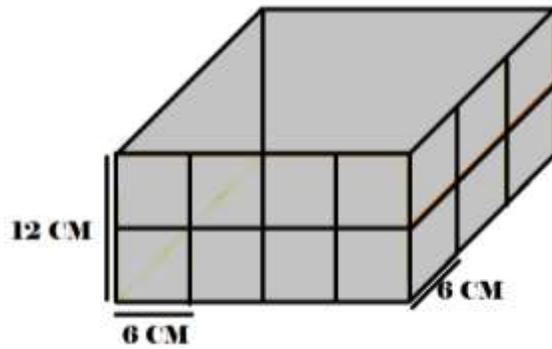


Figura A

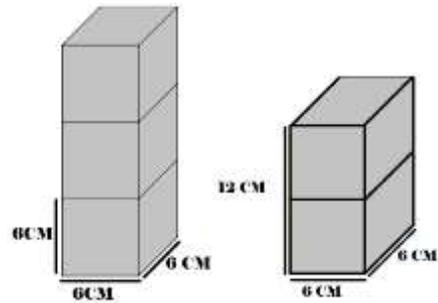
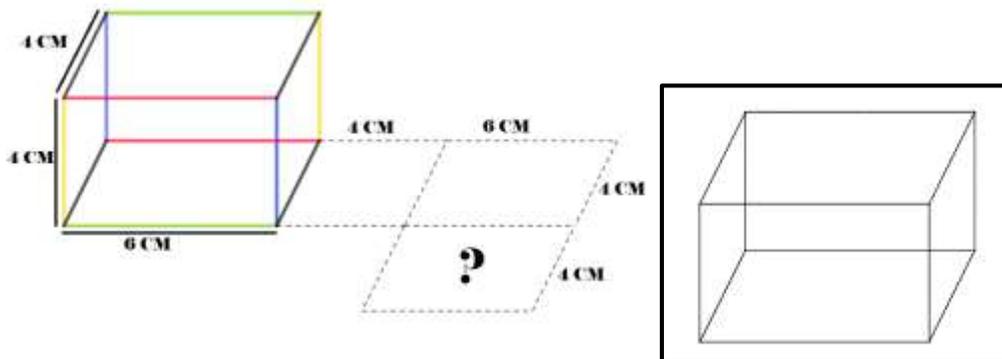
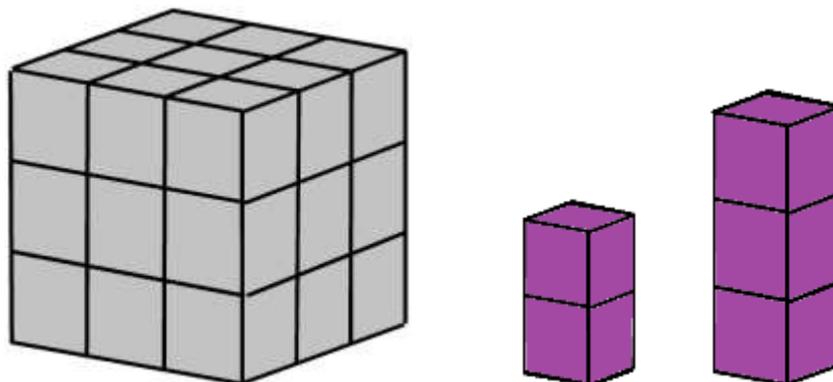


Figura B

2. En la siguiente imagen se observa un prisma con las aristas de diferentes colores, este realiza tres movimientos y/o giros. Al final del recorrido, ¿cuál sería la ubicación de los colores en cada una de las aristas del prisma?

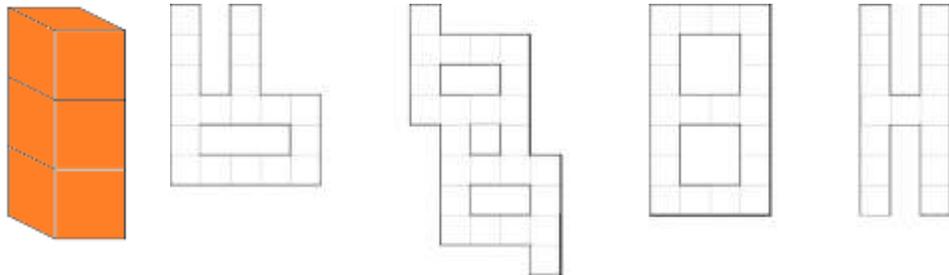


3. Con la ayuda de seis prismas de 2x1 y cinco prismas de 3x1, construir un cubo de 3x3x3.



4. Con la ayuda de prismas 1x3, determine si las figuras observadas desde la parte superior se pueden construir sin dejar espacios en blanco.

- Encierra con un círculo la figura que no se pueda construir con prismas de 3x1.
- Explica ¿por qué no se puede construir?



5. La figura A fue construida con solo prismas y se desea empacar en una caja de tal forma que se utilice la menor cantidad de espacio posible. ¿Cuáles serían las dimensiones de la caja?

NOTA: Cada cubo unitario mide 1cm x 1cm x 1cm

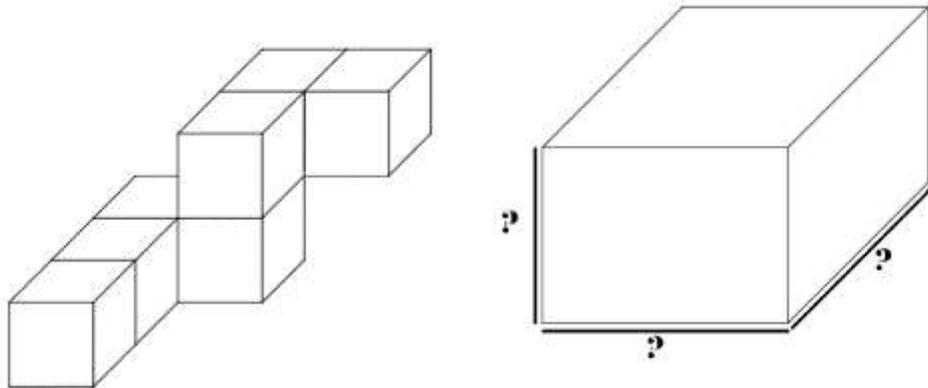


Figura A

4.2.3. Actividad 3. Pirámides

Objetivo: desarrollar el pensamiento espacial en estudiantes de grado tercero por medio de actividades y manipulación de material concreto, lo cual genera una vinculación al pensamiento visual para la construcción de un pensamiento geométrico llevando a cabo la rotación y giros de pirámides en diferentes dimensiones.

Sugerencia metodológica: la actividad se sustenta en un contenido exclusivamente de pirámides, donde requiere que los estudiantes trabajen bajo las indicaciones propuestas desde la comunidad práctica de Wenger, por lo cual, conforman grupos pequeños de mínimo dos y máximo tres estudiantes.

Cada problema se construye de tal forma que los estudiantes trabajen de forma independiente, para obtener una construcción del contenido geométrico. Si los estudiantes presentan dificultades en la resolución de un problema, se dirige a la docente encargada, la cual, lo guía a través de preguntas heurísticas generando una apropiación de la actividad. Luego se retroalimenta lo trabajado por parte de los estudiantes en sus grupos de trabajo, evidenciando la importancia del desarrollo de un pensamiento espacial y visual que enriquece la construcción del pensamiento geométrico.

Por medio de la observación continua en el desarrollo de la actividad se determina la evaluación y co-evaluación por parte de los estudiantes.

Materiales a utilizar: hojas, lápiz, colores, borrador, tijeras, pegante, tablero, marcadores y material concreto brindado por la docente.

1. A continuación, se observa una pirámide desde diferentes perspectivas, si la pirámide se apoya en la cara de color rojo y se gira en contra de las manecillas del reloj 7 veces y por último la giras a favor de las manecillas del reloj 3 veces. ¿En qué color queda recostada la pirámide?
-



2. La figura A muestra una pirámide cuyas caras opuestas tienen los mismos colores. Si se observa la misma pirámide desde la parte superior ¿qué colores les corresponden a los espacios en blanco en la figura B?

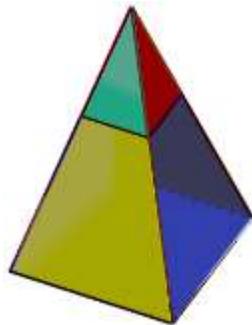


Figura A

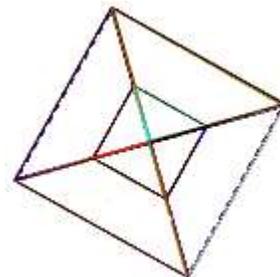
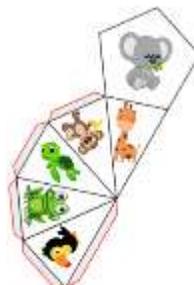


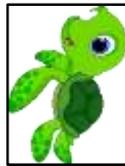
Figura B

3. Una pirámide se quiere construir, para ello, se genera una plantilla con un estilo particular, así como se muestra a continuación:



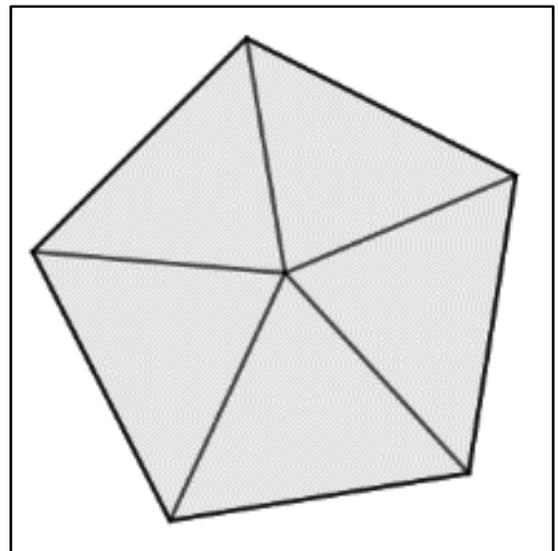
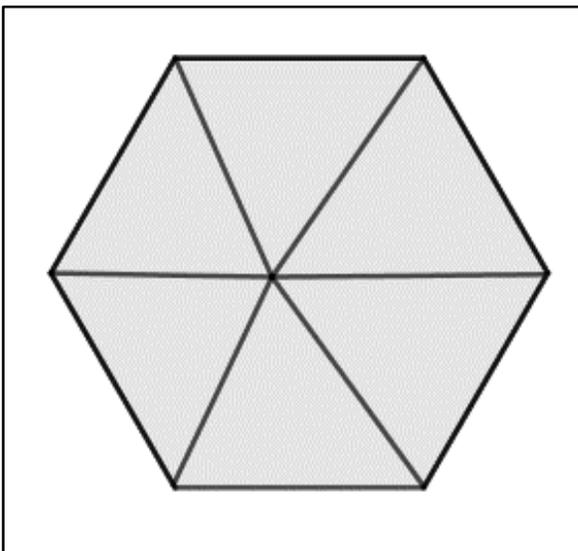
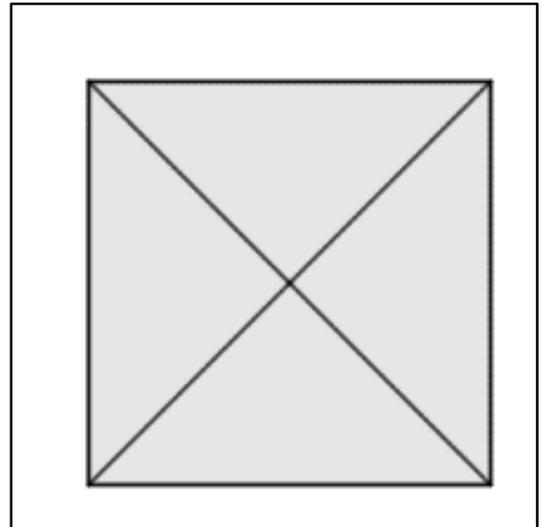
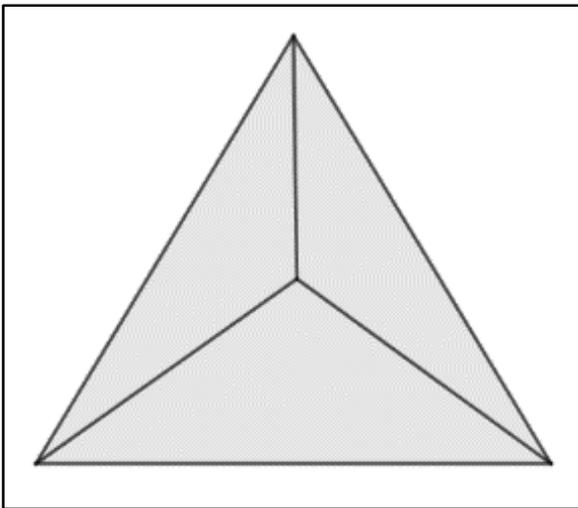
Material para la construcción

Recortar los siguientes animales



¿Cómo queda al final la pirámide si se observa desde la parte superior?

Escoge el estilo correspondiente para la construcción y pega los animales.



4. Armar el octaedro con ayuda de la plantilla observada en la figura A.

Ahora, si se arma este mismo solido utilizando pirámides de base cuadrada

¿cuantás pirámides se requiere para su construcción? _____

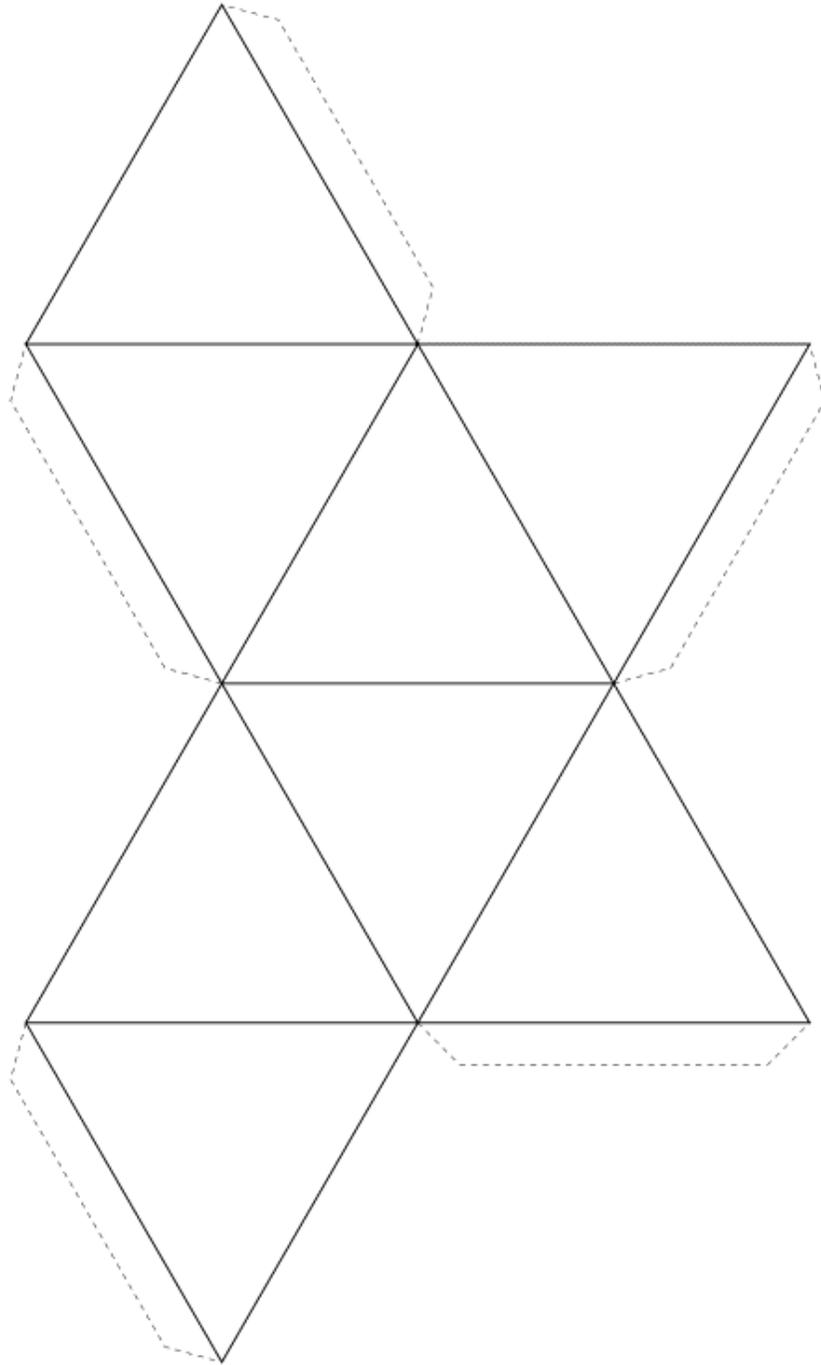


Figura A

5. A continuación, se presenta un rompecabezas de una pirámide deconstruida en diez partes como se observa en la siguiente imagen, construya con ayuda del material dado la pirámide correspondiente:



4.2.4. Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos

Objetivo: desarrollar actividades que conciban un pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero por medio de la manipulación de figuras geométricas, del reconocimiento del espacio y el reconocimiento de una figura desde diversas perspectivas.

Sugerencia metodológica: el contenido que aborda la presente actividad es referente a cuerpos redondos, cilindros y conos. En su desarrollo los estudiantes trabajan en grupo pequeños de máximo tres y mínimo dos estudiantes bajo las condiciones propuestas en la comunidad práctica de Wenger.

Cada problema propuesto en la actividad contiene un espacio para que los estudiantes trabajen de forma autónoma, en la búsqueda del contenido geométrico. Es de destacar que, si un estudiante manifiesta dificultades en el desarrollo de la actividad, la docente

encargada será quien formula preguntas heurísticas para que así el estudiante logre la apropiación del contenido geométrico. En este proceso se socializa las respectivas ideas propuestas, evidenciando la importancia del pensamiento espacial y visual en la construcción del pensamiento geométrico.

La docente realiza la evaluación y co-evaluación en los estudiantes a través de la observación continua en la actividad.

Materiales a utilizar: hojas, lápiz, colores, borrador, tablero, marcadores y material concreto brindado por la docente.

1. A continuación, se observa unas figuras geométricas las cuales están sobre la tapa superior de un cubo, sus cuatro caras laterales están enumeradas como se observa en la figura A. Ahora, debe realizar los siguientes movimientos: inicia en la cara 1, luego gira el cubo en contra de las manecillas del reloj tres veces quedando en la cara 4 y luego gira a favor de las manecillas del reloj 2 veces. Si se detalla el cubo desde la última cara en la cual quedo ubicada, y desde la parte superior, ¿cómo se verían las figuras geométricas y sus colores correspondientes?

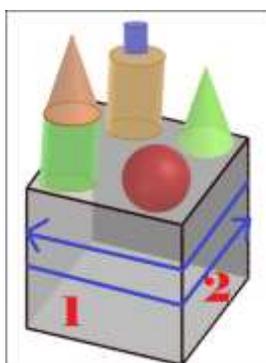


Figura A

2. En la figura A se observa una imagen de frente, la cual, está conformada por diferentes cilindros y una esfera sobre una tabla. Si se detalla desde la parte superior, ¿cuál sería la serie de colores que se pueden observar en las figuras? y ¿cuál de las tres opciones es la más adecuada? Colorea.

NOTA: la opción 3 corresponde a una idea diferente a las anteriores, en el caso de no estar de acuerdo con las establecidas.

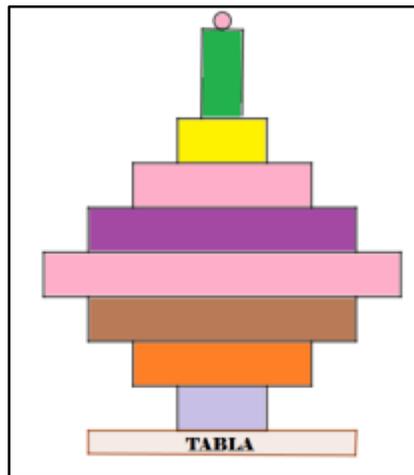
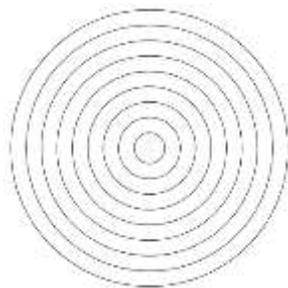
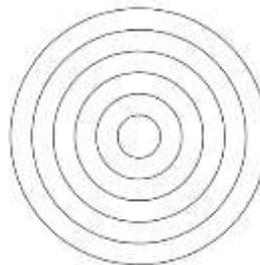


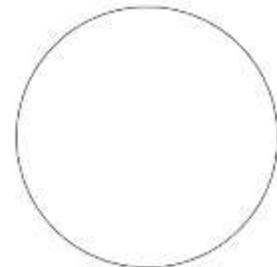
Figura A



Opción 1

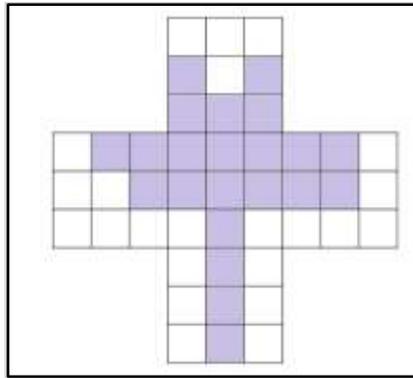


Opción 2

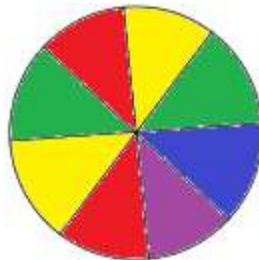


Opción 3

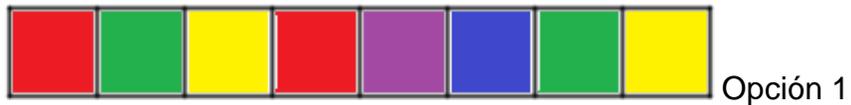
3. Utilizando cinco plantillas, las cuales corresponden una a la base de un cubo (centro de la cruz) y los cuatro laterales de un cubo. Completar con esferas los lugares de color morado y deja en blanco los demás espacios.



4. En la siguiente figura se observa una esfera desde la parte superior, la cual esta coloreada como se muestra.



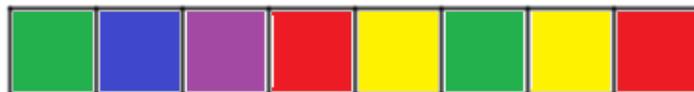
A continuación, encontrarás unas opciones de secuencia, una de ellas corresponde correctamente a la de la esfera. En el caso de no estar de acuerdo con ninguna, en la opción 4 puedes construir la que consideres correcta.



Opción 1



Opción 2

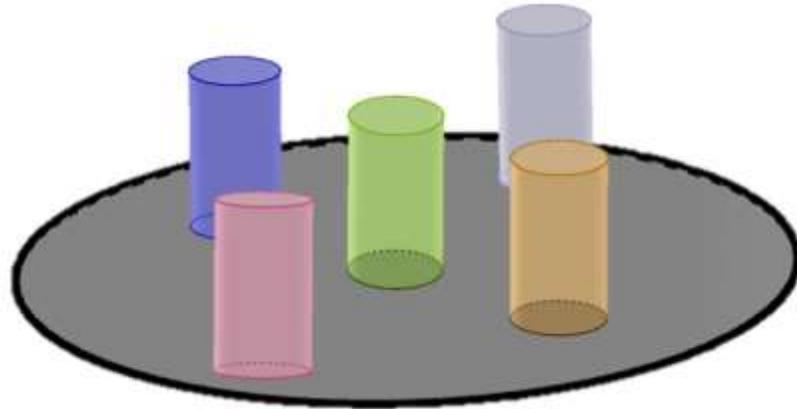


Opción 3



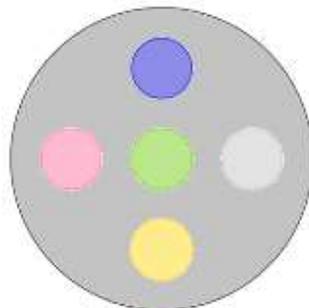
Opción 4

5. Se encuentran unos cilindros cuyos diámetros son iguales, ellos están ubicados en una tabla como se encuentran a continuación:

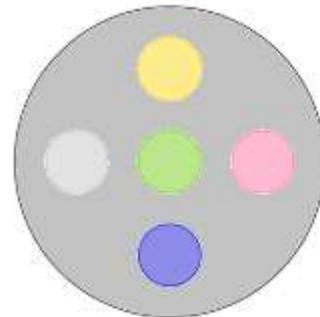


Si se desean encajar otras tablas tipo rompecabezas, donde los colores son aquellos huecos que tiene la tabla para que ingresen los cilindros. ¿Cuál de las siguientes opciones no encaja en el material?

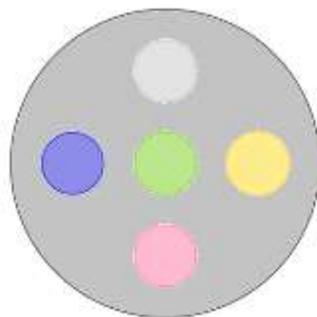
¿Por qué? _____



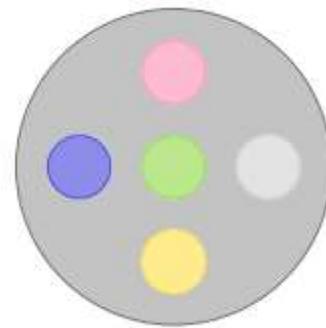
Opción 1



Opción 2



Opción 3



Opción 4

4.2.5. Actividad 5. Todos los cuerpos

Objetivo: construir problemas que desarrollan un pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero con ayuda de figuras geométricas en diversas dimensiones, sustentado en la manipulación, construcción, deconstrucción de cuerpos geométricos y la percepción cambiante generada por la rotación.

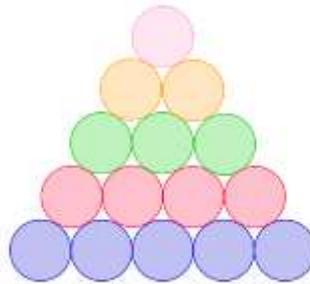
Sugerencia metodológica: la presente actividad contiene problemas con todos los cuerpos que se trabajan en anteriores guías. En su desarrollo los estudiantes trabajan en grupo pequeños de máximo tres y mínimo dos estudiantes bajos los parámetros propuestos en la comunidad práctica de Wenger.

Cada problema de la actividad es propuesto para que los estudiantes lo aborden individualmente, para llegar a la construcción del contenido geométrico. Sin olvidar que el estudiante tiene un acompañamiento por parte del docente, quien orienta su proceso por medio de preguntas heurísticas, para que así logre la apropiación del contenido y no presente dificultades en la resolución de los problemas. En este proceso se retroalimenta las ideas propuestas, resaltando la importancia de una incidencia del pensamiento espacial y visual en la construcción de este pensamiento.

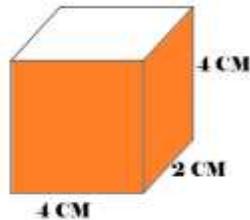
Se desarrolla la evaluación y coevaluación por parte de la docente hacia los estudiantes, por medio de la observación continua en el desarrollo de la actividad.

Materiales a utilizar: hojas, lápiz, colores, borrador, tablero, marcadores y material concreto brindado por la docente.

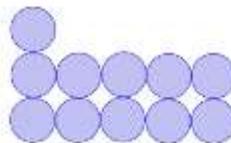
1. En la siguiente imagen se observan círculos que representan las esferas de una de las caras de la pirámide de base cuadrada, cada uno de los niveles de la pirámide tienen la misma longitud en sus lados.
 - a. ¿Cuántas esferas se requiere para la construcción de la pirámide? _____
 - b. ¿Cuántas esferas de color rojo se requieren para la construcción de la pirámide? _____



2. Se observan unas cajas con las dimensiones correspondientes



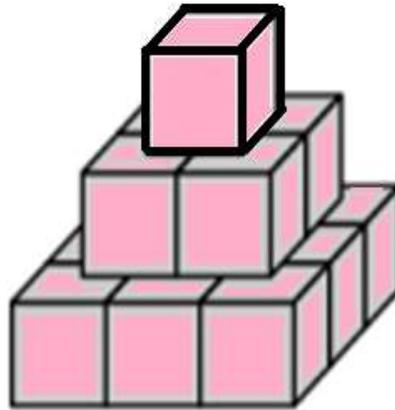
Se desea empaquetar esferas de 1 cm de diámetro, de la siguiente manera:



- a. ¿Cuántas esferas caben en la caja naranja? _____
- b. ¿Cuántas esferas caben en la caja verde? _____
- c. ¿En cuál de las cajas caben mayor cantidad de esferas?

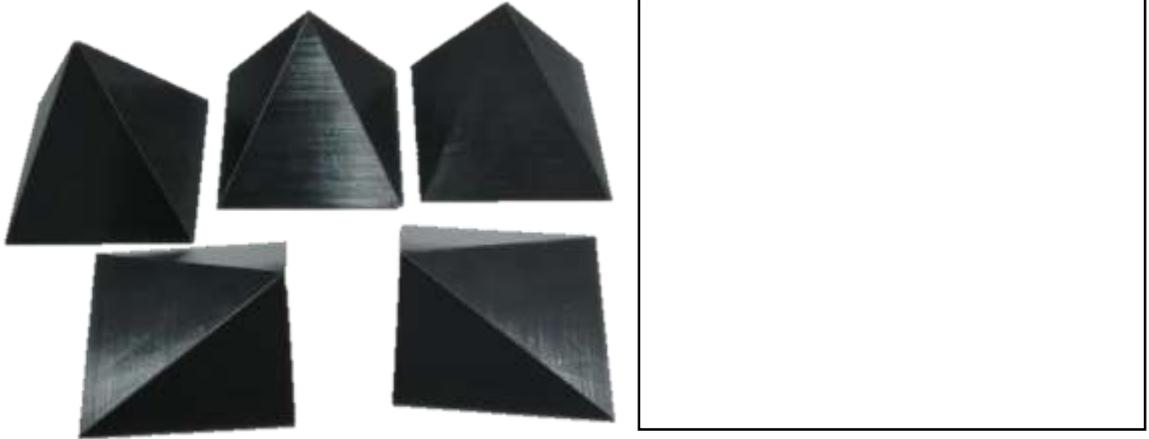
3. Construir una pirámide cuadrangular de base 5x5 utilizando cubos, el objetivo es tener la menor cantidad de cubos posibles, llegando así a una pirámide hueca.

¿Cuántos cubos se necesitan para su construcción? _____

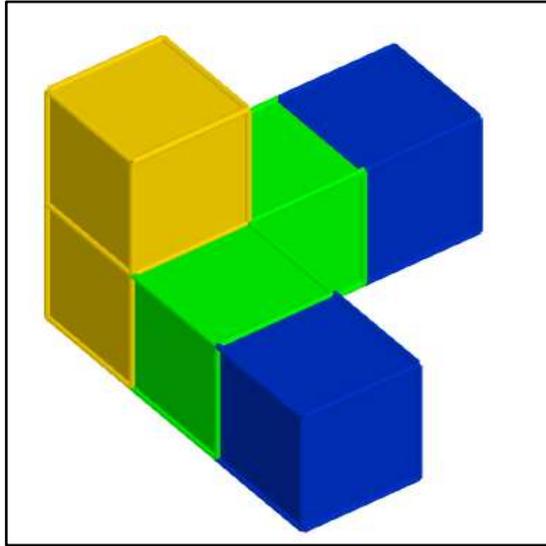


Ejemplo

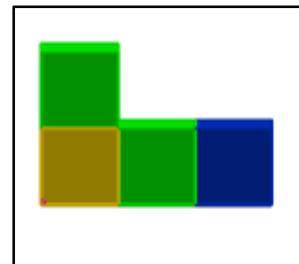
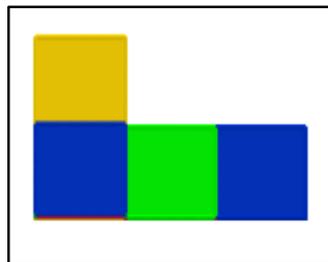
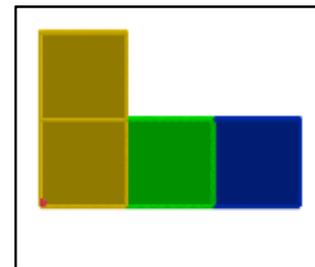
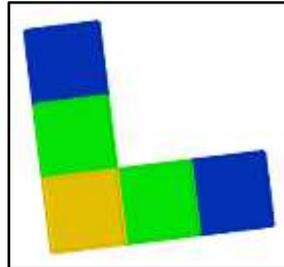
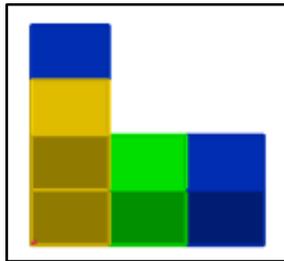
4. Con ayuda de las siguientes pirámides, construir un cubo



5. Se realiza una construcción con cubos, así como se muestra a continuación:



Si observas la figura desde diferentes perspectivas ¿cuál de las opciones no es correcta? **Marca con una X**



Conclusiones del capítulo 4

Se presentan cinco actividades basadas en problemas retadores, que en su proceso de resolución necesitan del pensamiento espacial y visual, las cuales se desarrollan en comunidades de práctica, con el fin de construir un robusto proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido geométrico en estudiantes de grado tercero.

Con la resolución de los problemas y su contribución en el proceso de enseñanza aprendizaje, se determinan aspectos fundamentales en la construcción de las actividades; según las necesidades que presentan los estudiantes. De igual manera se desarrolla el pensamiento espacial y visual, con una fuerte motivación por el nuevo contenido.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se establece un análisis de los resultados obtenidos en la implementación de las actividades propuestas para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, a través de la incidencia del pensamiento espacial y visual, en estudiantes de grado tercero. En cada actividad se destaca su desempeño, motivación, logros y dificultades presentadas. También se denotan evidencias del trabajo realizado en cada una de las sesiones propuestas.

5.1. Análisis de los instrumentos aplicados

5.1.1. Entrevista realizada a especialistas

Teniendo en cuenta los objetivos de la presente investigación se destaca el siguiente análisis a cada una de las preguntas realizadas a los especialistas Dr. Leonor Camargo, Colombia; Dr. Hermes Nolasco, México; Dr. José Carlos Pinto Leivas, Brasil y Dr. Ángel Gutiérrez, España (ver Anexo 1).

1. ¿Cómo concibe el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría para la construcción de un conocimiento matemático?

Este proceso lo conciben como un medio para proporcionar a los niños información, en lo cual, lo frecuente en la transmisión de información es la clasificación de figuras geométricas.

Además, si se observa desde las reformas de México, los docentes tienen enfoques específicos, los cuales fortalecen el proceso de enseñanza aprendizaje. Algunos docentes tienen un enfoque de una geometría moderna basada en el conocimiento de los libros de texto, donde les interesa solo la

geometría métrica, observando como el pensamiento visual ha quedado fuera de este tipo de geometría. Es importante resaltar y recordar que la geometría no es estática sino en movimiento.

2. ¿Qué dificultades concibe en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?

En la Geometría no se les brinda un tiempo adecuado en el aula de clase. Además, en la Licenciatura en matemáticas no se evidencia una solidez en el conocimiento que los estudiantes deben apropiarse, por lo cual, no generan fundamentos llegando así a la reproducción de la teoría dada en los libros. En diversos casos, las carreras no brindan un espacio de aprendizaje exclusivamente espacial, lo cual genera inconvenientes a largo plazo con el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes que pertenecen a los Colegios.

Otra dificultad que se evidencia en el proceso de enseñanza aprendizaje en la escuela primaria es el acceso a profesionales licenciados, se observa frecuentemente a docentes con amplia experiencia en la sección más no por el título en especial.

En la escuela primaria se observa un uso frecuente de fórmulas, más que la clasificación de las figuras, incluyendo el estudio de propiedades dando una relación con el contexto diario del estudiante.

Si se detalla en la estructura curricular se evidencia una jerárquica de lo intuitivo a lo formal, pero en la geometría es importante destacar que no es jerárquica

ya que es más cognitiva, por lo cual el pensamiento visual es fundamental para poder aprender significativamente dicho conocimiento.

Otra dificultad que se evidencia es la preparación que tiene el docente frente al uso de todo tipo de materiales, lo cual, afecta el proceso de aprendizaje del estudiante frente al contenido geométrico.

La mayor dificultad que puede presentar un estudiante es el poder pasar de una dimensión 3D a 2D y viceversa, ya que se pierde información por la imaginación mental incompleta de los objetos establecidos.

3. ¿Qué recursos didácticos utiliza para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?

Los recursos didácticos que se pueden manejar varían dependiendo el grado en el cual pertenece el estudiante, en el caso de primero a tercero es recomendable trabajar con formas concretas (cuerpos, formas planas). En el caso de 4 y 5 grado se pueden estudiar las formas concretas y las representaciones respectivamente, para llegar al final con un uso básico de medidas con herramientas como la regla, plantillas, entre otros.

Por otro lado, el uso de la regla y compás, geoplano, geoespacio, tangram, para conocer propiedades para así construir su conocimiento.

Para finalizar la papiroflexia se puede implementar para los estudiantes que apenas están cursando sus primeros años escolares.

4. ¿Qué alternativas pedagógicas y/o didácticas donde se integre el pensamiento espacial y visual sugiere usted para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?

Se puede realizar trabajo con solución de problemas teniendo en cuenta o involucrando el pensamiento visual, de acuerdo con la edad que tenga el estudiante, por lo tanto, se puede implementar diversos niveles de dificultad.

Una de las alternativas que se pueden llevar a cabo en el aula es el uso de material concreto, para que así, el estudiante estructure mentalmente cada uno de los cuerpos y/o figuras geométricas.

5.1.2. Encuesta a los docentes de la institución.

Teniendo en cuenta la finalidad y objetivo de la presente investigación, se realiza una encuesta a trece docentes (ver Anexo 2) cuya experiencia es en la escuela primaria y a su vez son licenciados en matemáticas. Además, se valida este instrumento por medio del método Delphi (ver Anexo 3). Una síntesis del análisis de los resultados de la encuesta se muestra a continuación:

- Las preguntas cumplen con el objetivo de la presente investigación.
- Se evidencian aportes significativos lo cual genera una contribución basada en la experiencia de los docentes.
- Las preguntas de la encuesta se encuentran en los dos primeros puntos de corte, lo cual, corrobora la creación correcta de las preguntas en la encuesta.
- Los docentes concuerdan que el uso de material didáctico (tarjetas, pelotas y todo tipo de juego) incentiva el aprendizaje del contenido geométrico.
- Las dificultades que presentan con mayor frecuencia según los docentes, son: dibujo de cuerpos geométricos, uso incorrecto del lenguaje geométrico, dificultades en la percepción visual y el no tener acceso a un espacio apropiado

para que el estudiante experimente brindando un proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico.

- Las actividades que sugieren los docentes son: reconocimiento del espacio circundante en el cual se encuentra el estudiante, manipulación de material concreto para reconocer los cuerpos geométricos, análisis de un mapa de acuerdo a unos parámetros brindados en un inicio,

5.2. Análisis de los resultados

A continuación, se evidencia el análisis del desarrollo de cada una de las actividades, con cinco estudiantes de grado tercero. Además, se presenta la descripción de cada uno de los problemas, precisando motivación, logros y dificultades durante el desarrollo de las mismas.

5.2.1. Actividad 1. Cubos

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. La presente actividad se desarrolla en dos momentos. El primero consta en la ubicación de los estudiantes de manera individual, cada uno con su guía y material correspondiente; el segundo, es un trabajo por grupos (de dos a tres estudiantes organizados de forma aleatoria) generando una retroalimentación de cada uno de los problemas.

En el problema 1 se evidencia que los estudiantes 1, 3 y 5 presentan dificultades con la secuencia relacionada con los giros y/o movimientos respectivos de la tarjeta; por lo cual, la ubicación de los colores es un desafío para ellos. En este problema en especial, el estudiante requiere del material físico para poder llegar a su solución.

Se observa en los estudiantes, según Kinach (2012) el desarrollo de un pensamiento espacial donde la persona es quien percibe un objeto desde diferentes perspectivas, abordando rotación, translación, giros y/o movimientos en figuras bidimensionales o tridimensionales, todo ello ayuda a la solución de diferentes problemas.

En las Figuras 4 y 5 se muestran los resultados de los estudiantes, lo cual constata la dificultad para realizar giros y/o movimientos mentales sobre una figura, reconociendo el espacio en el cual se encuentra la tarjeta.

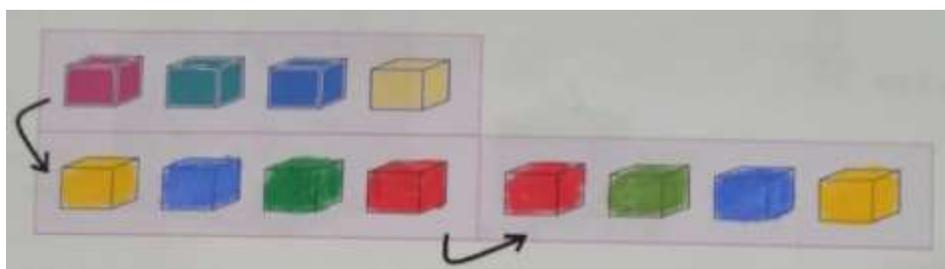


Figura 4. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1 - Problema 1-Estudiante 1

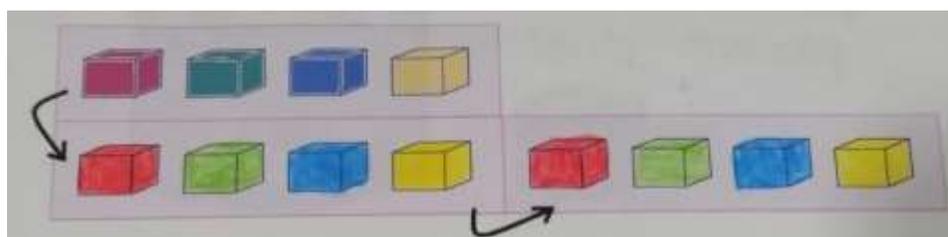


Figura 5. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1 - Problema 1-Estudiante 3

En el problema 2 solo el estudiante número tres responde correctamente, desarrollando procesos a nivel mental (rotación, giros y ubicación de cada animal según la cara del cubo), así como se evidencia en la Figura 6. En el presente problema se destaca el desarrollo de un pensamiento espacial y visual que para Roam (2009) esto se lleva a cabo cuando el estudiante expresa y descubre ideas invisibles, además,

desarrolla de forma rápida e intuitiva los problemas, compartiendo su conocimiento de tal forma que sus compañeros comprendan estas imágenes y/o información fácilmente.

Los estudiantes realizan diversos intentos para llegar a la respuesta, pero les falta considerar ciertos aspectos (comprender en que consiste la cara opuesta en una figura, establecer las relaciones entre las dimensiones 2D y 3D) para culminar de manera correcta el problema.

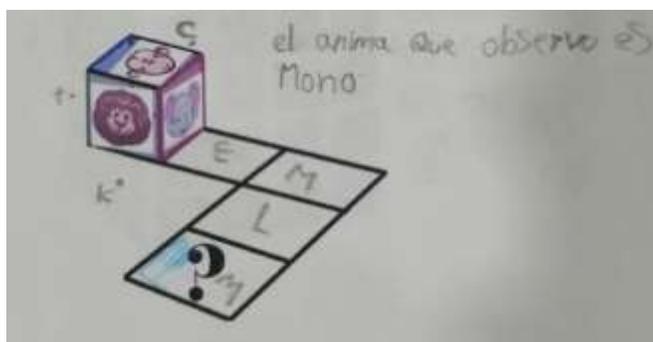


Figura 6. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1 - Problema 2-Estudiante 3

El problema 3 la mayoría de los estudiantes lo realizan correctamente, excepto el estudiante 2, el cual, presenta dificultades en el desarrollo de la misma. En la resolución del problema se evidencia la comprensión por parte del estudiante, pero este presenta una dificultad en la suma, la cual está desarrollada de forma incorrecta (ver Figura 7).

En el problema 3 se evidencia según Kinach (2012) un desarrollo del pensamiento espacial por medio de la manipulación de objetos bidimensionales y tridimensionales, llevando a cabo habilidades de dirección, distancia y posición de una figura. Se observa un dominio por parte de los estudiantes en la resolución del problema debido

al reconocimiento de las caras por medio de la construcción y deconstrucción en figuras bidimensionales.

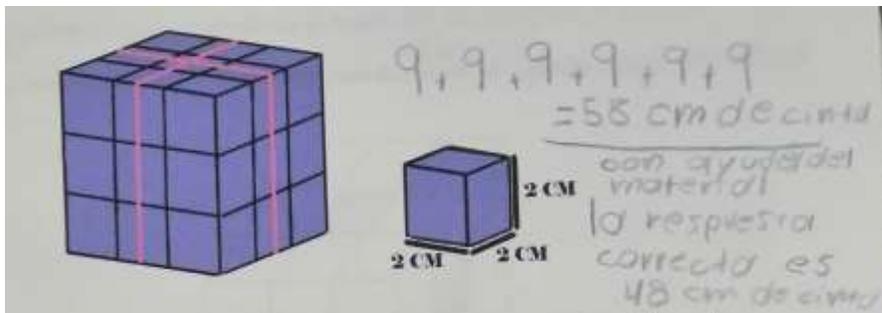


Figura 7. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1-Problema 3 -Estudiante 2

En el problema 4 se evidencia un desarrollo correcto en el estudiante tres, el cual realiza una descomposición de la figura para poder hallar el resultado al problema; llegando a su vez a respuestas satisfactorias (ver Figura 8). El estudiante según Roam (2009) desarrolla un pensamiento visual gracias a las imágenes que realiza mentalmente, las cuales puede desarrollar rápidamente e instruir en su conocimiento a las demás personas de manera sencilla.

En el estudiante tres se evidencia el dominio de los atributos y propiedades de objetos tridimensionales, a su vez de la construcción y deconstrucción de la figura, lo cual, le permite generar procesos evidentemente correctos en su mente.

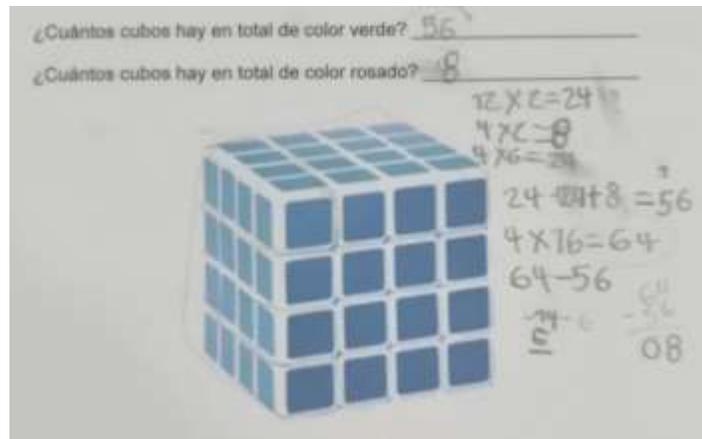


Figura 8. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1 -Problema 4 –Estudiante 3

En el problema 5 nuevamente el estudiante que resuelve el problema correctamente es el número tres, donde realiza una construcción mental de los lados faltantes, donde utiliza un pensamiento visual para la construcción de los lados del cubo (ver Figura 9).

Para Ramful, Lowrie y Logan (2016) el estudiante tres lleva a cabo una de las ideas fundamentales que se pueden implementar en el aula llamada orientación mental, en la cual, el estudiante desarrolla la habilidad para ver imágenes desde diferentes perspectivas y posiciones con el fin de determinar la respuesta a un problema.

En este problema se evidencia en los estudiantes una dificultad para llevar a cabo una imaginación mental del cubo, teniendo en cuenta las especificaciones del mismo. Por ello, se debe considerar que es un cubo tres por tres, con unos espacios vacíos que van de extremo a extremo con respecto a las caras opuestas, así como se evidencia en la Figura 9.

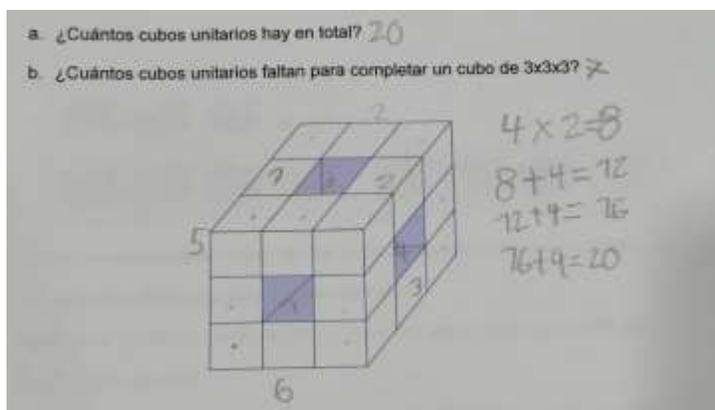


Figura 9. Respuesta de los estudiantes a la actividad 1-Problema 5 - Estudiante 3

Por otro lado, los estudiantes 1, 2 y 4 no detallan correctamente los cubos que pertenecen a la figura, respondiendo a la primera pregunta de forma incorrecta. En cambio, en la segunda pregunta se determinan respuestas correctas, generando un pensamiento visual adecuado para la solución. Cada uno de los estudiantes comprenden que dentro del cubo se forma una cruz según las especificaciones del problema.

Para finalizar, el estudiante cinco, no responde correctamente a las preguntas que se le plantean, presentando dificultades al construir y reconstruir la figura tridimensional de forma mental.

En el *Anexo 4* se muestran evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la resolución de los problemas de la actividad, donde se pudo constatar su creatividad en el desarrollo de las mismas, para generar un pensamiento espacial y visual en cada una de ellas.

Motivación. Los estudiantes se sienten motivados en cada uno de los problemas, pues realizan varios intentos para llegar a la respuesta, además se resalta el trabajo y

dedicación para poder resolver la actividad 1, por la nueva dinámica a la cual se encuentran inmersos por primera vez. Por otro lado, el material manipulable causa en los estudiantes un interés por el aprendizaje y la comprensión en cada uno de los problemas.

Logros. A continuación, se muestran los logros de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad:

- Reconocen atributos y propiedades del cubo.
- Comprenden rotaciones a nivel mental y se confirma su proceso con ayuda de material concreto.
- Desarrollan habilidades de dirección, distancia y posición con ayuda de un cubo.
- Desarrollan procesos mentales para la construcción y deconstrucción de un cubo.
- Aplican movimientos y/o giros mentales de un cubo.
- Desarrollan la orientación espacial teniendo en cuenta figuras en el plano con proyecciones en tres dimensiones.

Dificultades. A continuación, se precisan las dificultades encontradas en la resolución de los problemas:

- El tiempo es un factor que influye en los resultados de los estudiantes, dado que se requiere de un espacio considerable para su solución.
- Algunos estudiantes presentan dificultades con la secuencia de figuras geométricas llevando a cabo los giros y/o movimientos en diferentes dimensiones.
- En algunos estudiantes se evidencia la dificultad en la construcción y deconstrucción de cubos en figuras bidimensionales.

5.2.2. Actividad 2. Primas

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. En la actividad número dos se lleva a cabo dos momentos durante el desarrollo de la misma. El primero se constituye por el trabajo de los estudiantes de forma individual, cada uno con su guía y material correspondiente; el segundo, es un trabajo colaborativo (de dos a tres estudiantes organizados de forma aleatoria) llevando así una socialización de cada uno de los problemas.

En el problema 1 se evidencia dificultades en los estudiantes para determinar mentalmente el interior de una caja que se construye con unas dimensiones, adicionado a ello, la posición en la cual los prismas se deben acomodar de tal forma que no quede espacio alguno (hueco) o una figura por fuera de la caja. En la primera pregunta, ningún estudiante llega a la respuesta correcta; en la segunda pregunta, los estudiantes 1, 2 y 3 responden correctamente; y en la tercera pregunta, todos los estudiantes brindan sus argumentos correctos frente a la misma.

Las dificultades que presentan los estudiantes se debe al no desarrollo de un pensamiento visual y espacial acorde para poder resolver el problema. Por lo cual, Roam (2009) determina que los estudiantes desarrollan estos pensamientos cuando tienen la capacidad de ver con ayuda de sus ojos, además, de poder desarrollar procesos realizados por el cerebro con ayuda de la interpretación de imágenes, lo cual beneficia el descubrimiento de ideas poco evidentes.

En las figuras 10, 11 y 12 se constatan dificultades en la pregunta número uno, donde los estudiantes no ubican mentalmente las figuras dentro de la caja, no se evidencia

un pensamiento visual y espacial para la construcción mental de una caja con prismas de ciertos tamaños dentro de ella.

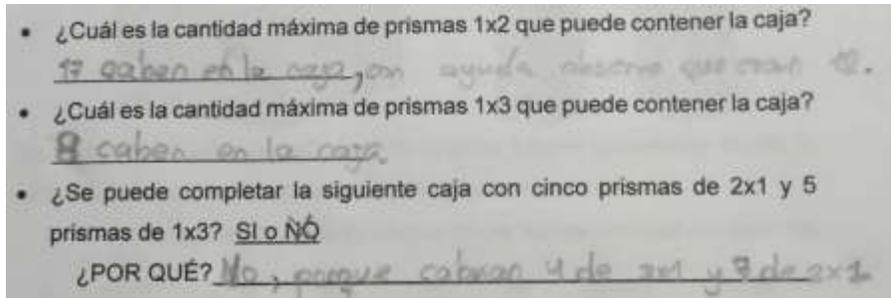


Figura 10. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2 - Problema 1-Estudiante 1

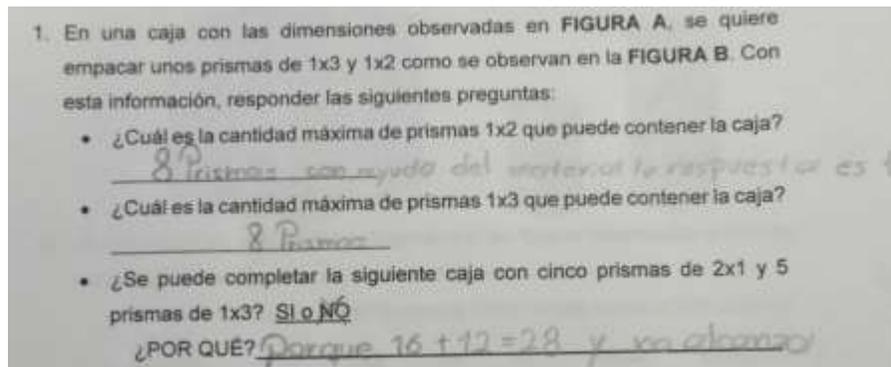


Figura 11. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2 - Problema 1-Estudiante 2

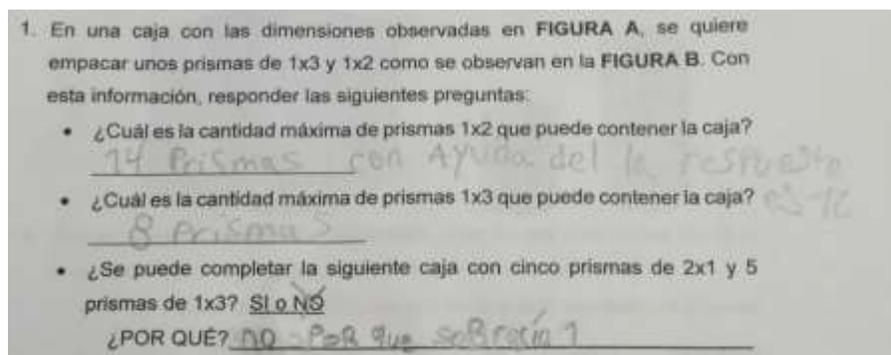


Figura 12. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2 -Problema 1- Estudiante 3

En el problema 2, ningún estudiante presento dificultades para la solución del mismo, llegan así a la respuesta correcta sobre la posición de las aristas según los

movimientos que se observan. Se evidencia dominio del espacio cuando las figuras realizan movimientos mentales, llevando a cabo un pensamiento espacial y visual en su solución.

Según Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) el estudiante desarrolla un pensamiento espacial cuando puede realizar rotaciones o giros mentalmente con diferentes figuras, así como se evidencia en la figura 13 con algunas respuestas por partes de los estudiantes:

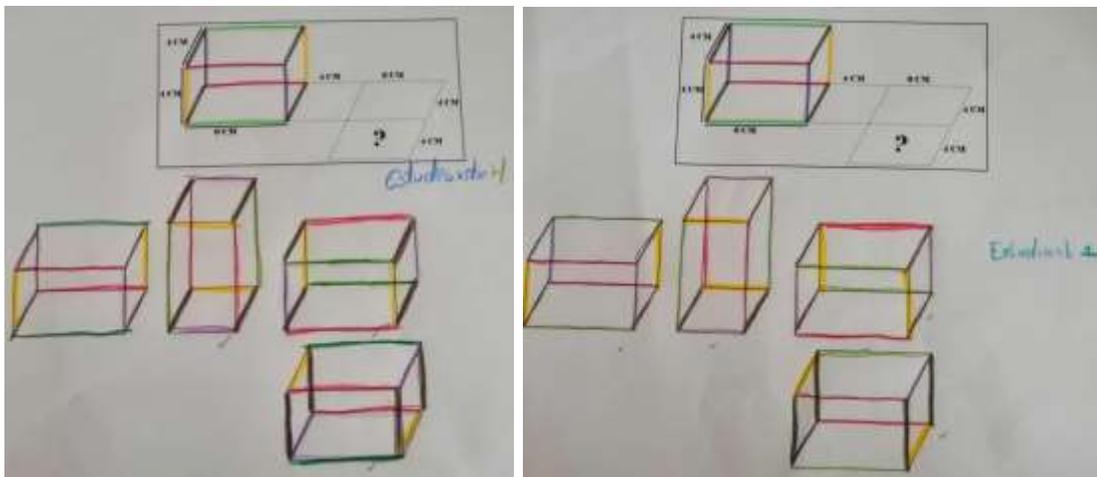


Figura 13. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2 - Problema 2

En el problema 3, ningún estudiante presentó dificultades al armar un cubo con los diferentes prismas otorgados en el mismo. Se determina en los estudiantes el reconocimiento del espacio inmerso en él, llevando así relaciones espaciales adecuadas para la construcción del cubo con ayuda de los prismas.

Según Burte, Gardony, Hutton y Taylor (2017) los estudiantes generan un pensamiento espacial por medio de relaciones que se generan con los objetos, con el fin de razonar

y comprender el contenido geométrico, así como evidencia en la figura 14 con la solución de uno de los estudiantes.

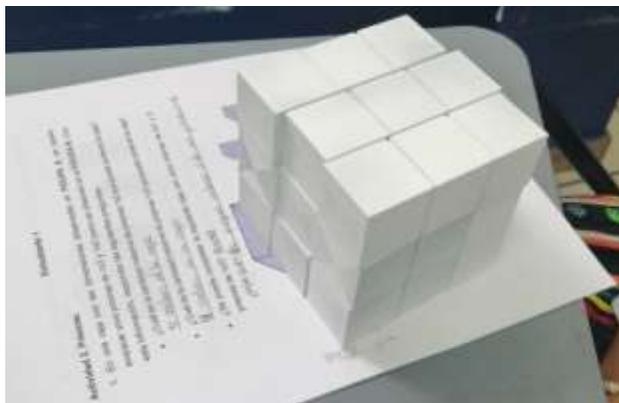


Figura 14. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2-Problema 3 -Estudiante 1

En el problema 4, los estudiantes no presentan dificultad al solucionarlo. A su vez, se observa la creatividad y facilidad por parte de los estudiantes para poder solucionar el problema, utilizando colores y ubicándolos de diferentes maneras llegando así a la respuesta del mismo. Según Shepard (1978), los estudiantes generan habilidades espaciales cuando llevan a cabo su creatividad en la solución de problemas, esto se debe a la capacidad que tiene una persona para la comprensión de los conceptos espaciales utilizando su creatividad.

En las figuras 15 y 16 se determina como los estudiantes ubican un objeto de tres dimensiones en un espacio de dos dimensiones, generando a su vez un pensamiento espacial adecuado con ayuda de un pensamiento visual, llegando así a la organización correcta de cada prisma.

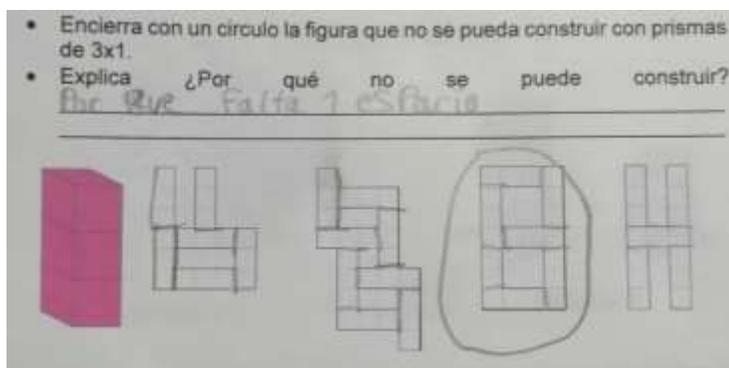


Figura 15. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2-Problema 4-Estudiante 3

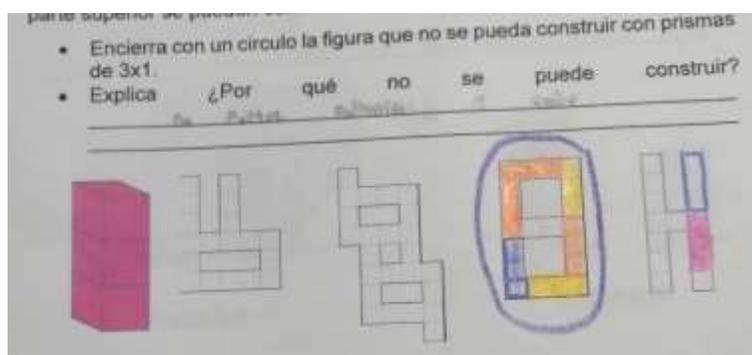


Figura 16. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2-Problema 4-Estudiante 5

En el problema 5, ningún estudiante presentó dificultades para llegar a la solución correcta. Se evidencia un proceso espacial y visual para la construcción de la caja, algunos proyectándola sobre la figura A y otros contando los espacios faltantes para llegar así al tamaño mínimo. Según el MEN (1998) el pensamiento espacial propicia la construcción y manipulación por medio de representaciones mentales de objetos de tres dimensiones, además, de la observación de las figuras desde diferentes perspectivas. A continuación, se presentan las figuras 17, 18 y 19 las cuales, determinan el desarrollo del pensamiento espacial y visual en los estudiantes:

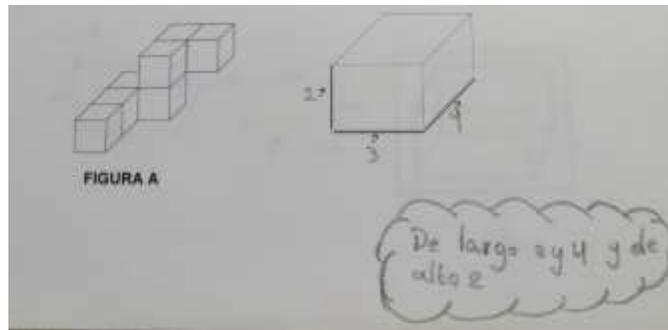


Figura 17. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2-Problema 5 -Estudiante 1

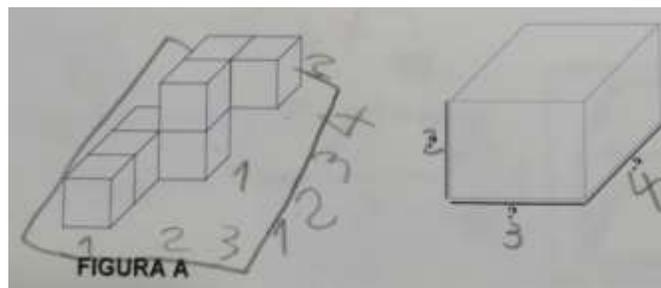


Figura 18. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2 -Problema 5 -Estudiante 3

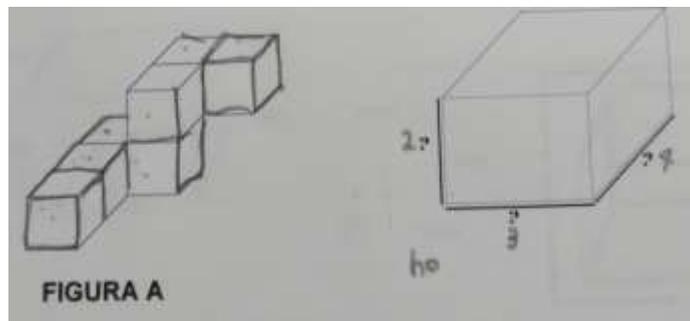


Figura 19. Respuesta de los estudiantes a la actividad 2-Problema 5-Estudiante 5

Otras evidencias de la resolución de problemas sobre prismas en los estudiantes, se constatan en el *Anexo 5*.

Motivación. Los estudiantes presentan interés en cada uno de los problemas, generando un reto en su formación y aprendizaje. En algunos problemas se evidencia

diferentes intentos para llegar a su solución, se observa creatividad, esfuerzo y compromiso por el desarrollo de la presente.

Logros. El análisis en la actividad permite constatar los siguientes logros:

- Construir y reconstruir figuras en tres dimensiones (cubo y prisma).
- Los estudiantes determinan características de los cubos y prismas.
- Comprenden las rotaciones mentales con ayuda del material manipulable.
- Desarrolla habilidades de ubicación y reconocimiento de su propio espacio.
- Determina relaciones entre figuras en diferentes dimensiones.
- Construye imágenes mentales llevando a cabo rotaciones, giros y movimientos.
- Reconoce el espacio circundante en el cual se encuentra, para establecer medidas.

Dificultades. A continuación, se precisan las dificultades encontradas en la resolución de los problemas:

- El tiempo es un factor que influye en el proceso y, por lo tanto, en los resultados de los estudiantes, esto se debe al tiempo considerable que requiere para desarrollar la actividad.
- Una dificultad que presentan los estudiantes es la construcción mental del interior de una caja que se determina con unas dimensiones concretas.

5.2.3. Actividad 3. Pirámides

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Esta actividad se lleva a cabo en dos momentos. El primero consta de un espacio individual donde los estudiantes trabajan con su guía y material correspondiente; el segundo, es un trabajo

por grupos (de dos a tres estudiantes organizados de forma aleatoria) para llevar a cabo un consenso de los problemas.

En el problema 1, los estudiantes 2 y 5 presentan dificultades para la resolución del problema. Esto se debe a la ubicación incorrecta con base a las manecillas del reloj y la dirección a la cual va dirigida la pirámide según las condiciones iniciales.

Según Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) es fundamental que el estudiante manipule objetos en diferentes dimensiones, aplicando rotaciones y/o movimientos de forma mental para poder llegar a la respuesta de cualquier problema.

En la figura 20 se evidencia en el estudiante 2 la manipulación mental de la pirámide de manera incompleta ya que, gira siete veces en contra de las manecillas del reloj y no realiza los tres giros adicionales a favor de las manecillas del reloj.

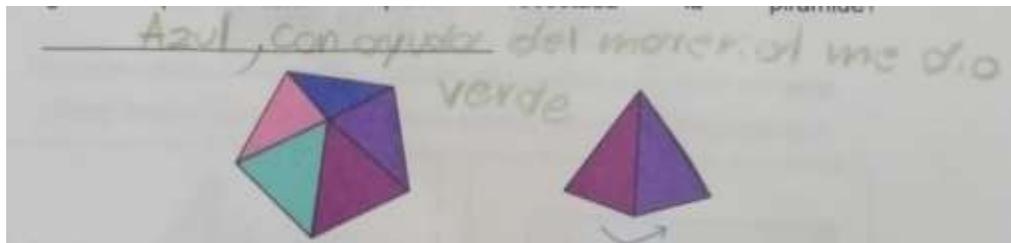


Figura 20. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 1 - Estudiante 2

En cambio, el estudiante 5 lleva a cabo un proceso incorrecto frente a la posición de en contra y a favor de las manecillas del reloj. Primero el estudiante gira la pirámide a favor de las manecillas del reloj 7 veces y luego en 3 veces en contra de las manecillas del reloj. Esto genera que el resultado final sea el que se observa en la figura 21:

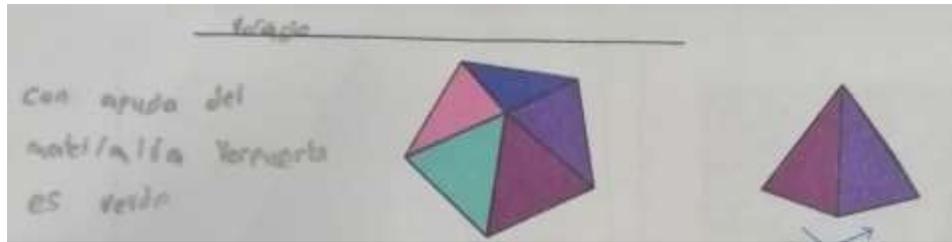


Figura 21. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 1 - Estudiante 5

En el problema 2, el estudiante dos fue el único en presentar dificultades frente al problema. Se evidencia inconvenientes en la comprensión de la cara opuesta en una pirámide, por lo cual, el pensamiento espacial y visual no se observan en el desarrollo del problema. Según Maier (1998) los estudiantes desarrollan una de las cinco habilidades espaciales por medio de este problema, llamada orientación espacial, donde se reconoce y se crea una relación con las partes de un objeto en tres dimensiones, lo cual, brinda un apoyo para establecer una correspondencia entre las caras opuestas de cualquier figura, a continuación, se observa el proceso del estudiante:

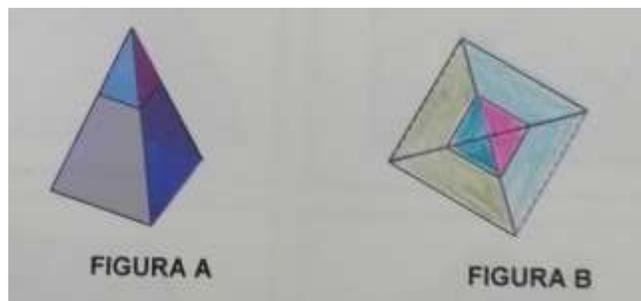


Figura 22. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 2-Estudiante 2

En el problema 3, los estudiantes 1, 3 y 4 realizan correctamente la construcción de la pirámide con los animales. Ellos concluyen que en la base de la pirámide se encuentra el Koala y que por ello no se evidencia este animal si se observa la pirámide desde la

parte superior. Además, se constata un pensamiento espacial y visual para la construcción de la pirámide (ver figuras 23, 24 y 25).

Según Molla (2016) el estudiante lleva a cabo un pensamiento visual cuando genera una capacidad para capturar información e ideas con gran impacto; además, motiva para que las personas creen y narren una historia proyectando así sus ideas durante su proceso en la resolución de problemas. Todo ello, se confirma en la solución que generan los estudiantes con el presente problema, quienes con sus ideas y creatividad brindan sus ideas y así mismo puede sustentarla con palabras y verbalmente.



Figura 23. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 -Problema 3 -Estudiante 4



Figura 24. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 -Problema 3- Estudiante 3



Figura 25. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 -Problema 3- Estudiante 1

En el problema 4, ningún estudiante presenta dificultad para resolver de forma correcta. Cada uno construye en un primer momento el octaedro, teniendo en cuenta la plantilla de la presente guía; en un segundo momento utiliza pirámides de base cuadrada para responder la pregunta del problema.

Según Al Yagoub (2020) los estudiantes generan diferentes habilidades espaciales por medio de la resolución de problemas, en este caso particular llevan a cabo la rotación mental espacial tras la evaluación que realizan los estudiantes de forma mental con la rotación y construcción de los objetos en tres dimensiones. Además, se evidencia la capacidad que tienen los estudiantes para entrar y salir de situaciones espaciales, esto se observa a continuación, con el paso a paso (figura 26,27 y 28) por parte de los estudiantes:

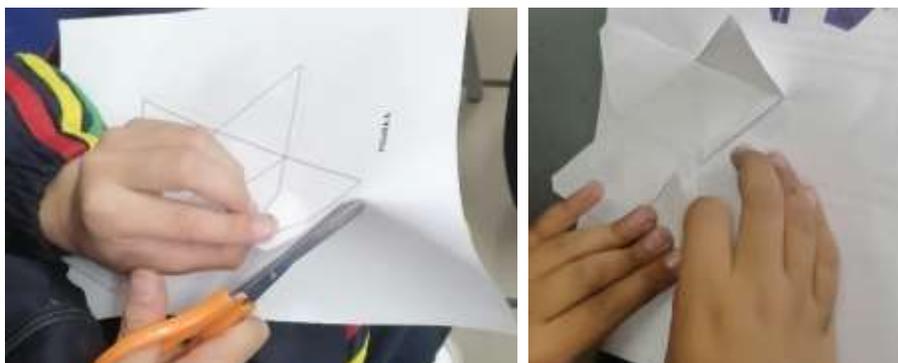


Figura 26. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 4.1

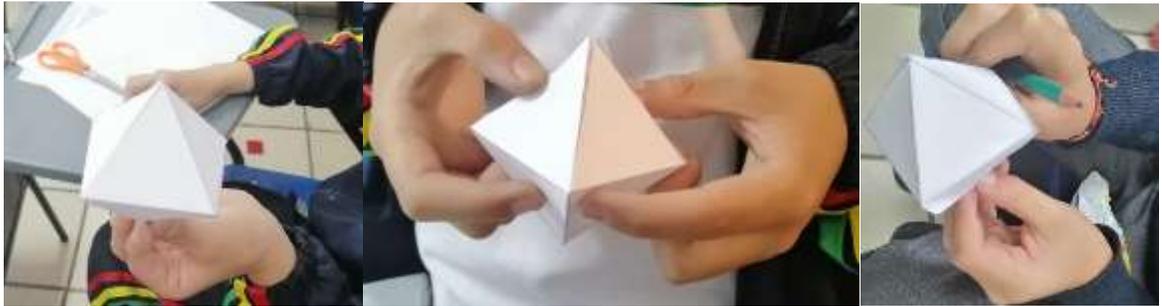


Figura 27. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 4.2



Figura 28. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 - Problema 4.3

Para finalizar, en el problema 5 los estudiantes no presentan dificultad en la construcción de la pirámide. Se observa la construcción de un cuerpo utilizando figuras tridimensionales, además, del conocimiento del espacio circundante en el cual se encuentra inmerso el estudiante. Según Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) es fundamental que los estudiantes desarrollen un pensamiento espacial y visual por medio de la manipulación entre figuras geométricas, teniendo en cuenta las rotaciones o giros que se pueden realizar con el material manipulable, los resultados que evidencian lo nombrado anteriormente se constatan en la figura 29:



Figura 29. Respuesta de los estudiantes a la actividad 3 – Problema 5

Otras evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la resolución de los problemas de la presente actividad se encuentran en el *Anexo 6* donde se constata los procesos realizados, generando a su vez una integración del pensamiento espacial y visual en cada una de ellos.

Motivación. Con la actividad de pirámides, los estudiantes presentan interés para la solución de cada uno de los problemas, llevando a cabo un análisis profundo, un desarrollo del pensamiento espacial y visual acorde a lo requerido. Conjuntamente, el material manipulable en la presente actividad causa en los estudiantes un apoyo fundamental para el aprendizaje y la comprensión en cada uno de los problemas.

Logros. En el desarrollo de la presente actividad es preciso señalar los siguientes logros:

- Reconoce las características y propiedades de una pirámide.
- El estudiante realiza rotaciones a nivel mental.
- Desarrolla un pensamiento geométrico mediante la construcción y deconstrucción de pirámides.

- Desarrolla habilidades en 2 y 3 dimensiones, para la construcción de pirámides.
- Construye pirámides con ayuda de material manipulable.

Dificultades. Se precisan las siguientes dificultades en el desarrollo de la resolución de los problemas:

- El tiempo es un elemento que interviene en el proceso de los estudiantes, debido al desarrollo detallado que generan los estudiantes en la actividad.
- Algunos estudiantes presentan dificultades con el dominio de la expresión ‘A favor y en contra de las manecillas del reloj’.
- Algunos estudiantes manifiestan tener dificultades en la construcción mental de una pirámide, para poder determinar caras opuestas de la presente figura.

5.2.4. Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. En el desarrollo de la presente actividad se establecen dos momentos. El primero es un espacio independiente para cada estudiante donde trabajan con su guía y material correspondiente; en el segundo, se organizan por grupos (de dos a tres estudiantes de forma aleatoria) para socializar los problemas.

En el problema 1, los estudiantes dos y cinco presentan sus ideas de una forma distinta a la solicitada, donde se evidencia comprensión parcial del problema, más se observa una dificultad en la expresión ‘*desde la parte superior del cubo*’, esto genera que los estudiantes representen de otra manera la resolución del problema.

Según Al Yagoub (2020) los estudiantes deben desarrollar habilidades espaciales para poder resolver este tipo de problemas, por lo cual, determina que una falencia es la no

comprensión con base a la percepción espacial teniendo en cuenta aspectos puntuales del problema, es por ello, que las dirección u orientación fue lo que intervino para la no comprensión del problema. A continuación, en la figura 30 y 31 se encuentran las respuestas de los estudiantes:

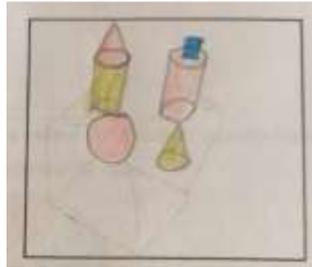


Figura 30. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4– Problema –Estudiante 2

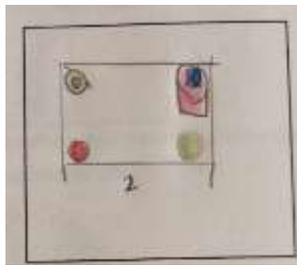


Figura 31. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4–Problema 1–Estudiante 5

En el problema 2, los estudiantes uno, dos, tres y cuatro realizan correctamente lo solicitado. Llevan a cabo un pensamiento visual y espacial, además, de un dominio de las dimensiones (2D y 3D) lo cual facilita la comprensión y el desarrollo del mismo. Se constata la comprensión de las figuras en distintos tamaños, representando correctamente el espacio, por otro lado, Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) considera que las relaciones espaciales entre los objetos son fundamentales para el desarrollo de un pensamiento espacial y visual, teniendo en cuenta las diferentes perspectivas de una misma figura (ver figura 32).

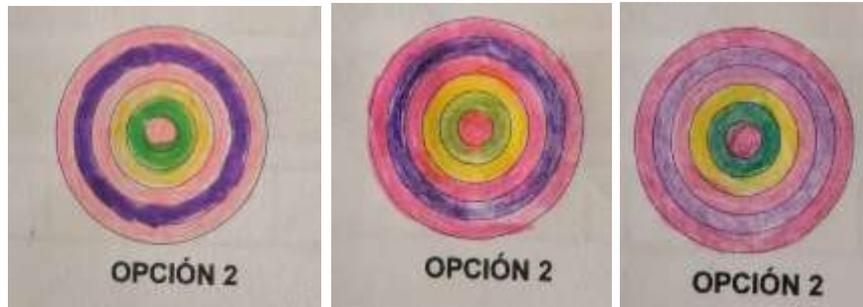


Figura 32. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4 – Problema 2

En el problema 3, todos los estudiantes realizan la construcción de la figura con ayuda del material; se evidencia un dominio del espacio inmerso para poder solucionar el problema. Además, no presentan dificultades con la manipulación de las esferas y al final presentan el resultado que se requiere. Según Metoyer, Bednarz y Bednarz (2015) los estudiantes les beneficia usar el espacio de una forma real como lo son cuerpos sólidos para así sustentar el pensamiento espacial (ver figura 33).



Figura 33. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4 – Problema 3

En el problema 4, ningún estudiante presentó dificultades con su solución. Cada uno lleva un proceso para determinar en donde empezaba la secuencia y donde terminaba. Se evidencia habilidades para llevar a cabo procesos de dirección, distancia y posición

en el espacio con base a una figura, lo cual construye un pensamiento espacial y visual en el desarrollo del presente problema. Según Kinach (2012) es indispensable que los estudiantes usen dibujos y así poder percibir un objeto en diferentes perspectivas, llegando así a un pensamiento espacial y visual en la resolución de los problemas (Ver figura 34).

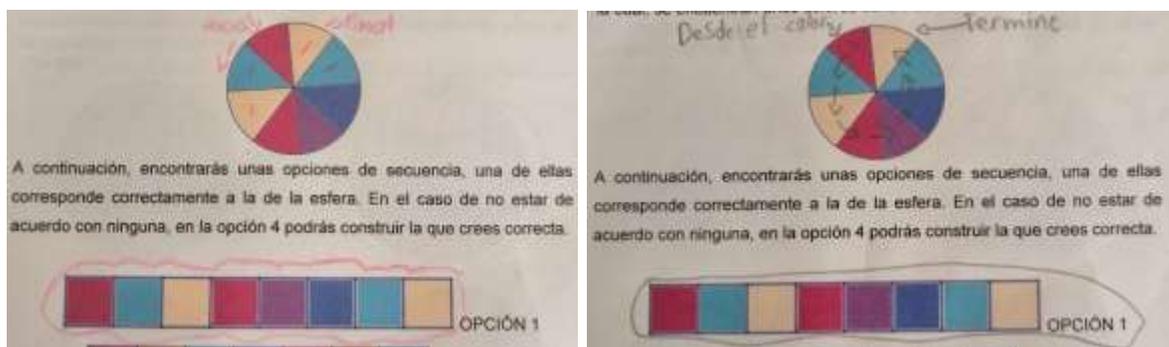


Figura 34. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4 – Problema 4

En el problema 5, los estudiantes dos, tres y cinco presentan dificultades para resolver correctamente lo solicitado, como: representación incorrecta del espacio, no realiza giros sobre una figura, no tiene presente la posición en el espacio y no lleva a cabo una rotación sobre el mismo. Todo ello genera una selección equivocada de la respuesta al problema. Según Kinach (2012) el pensamiento espacial requiere que los estudiantes manipulen los objetos en las diferentes dimensiones, además, de crear una relación con ellas desde diferentes perspectivas, lo cual, beneficia en la solución de diferentes problemas (ver figura 35).

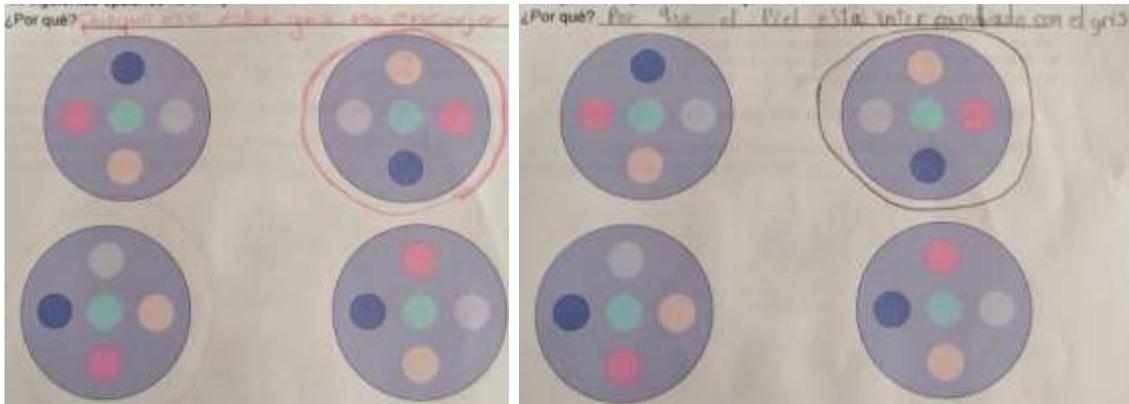


Figura 35. Respuesta de los estudiantes a la actividad 4 – Problema 5

Las evidencias de la presente actividad se encuentran en el *Anexo 7*, en él se constatan los procesos realizados por parte de los estudiantes, quienes llevan a cabo una integración del pensamiento espacial y visual en cada una de ellos.

Motivación. Con la actividad de cuerpos redondos, cilindros y conos, los estudiantes generan un interés particular por la actividad y la solución de cada uno de los problemas, esto se debe al limitado conocimiento que tienen los estudiantes debido al grado escolar en el cual se encuentran y por ende al aprendizaje que hasta el momento tienen apropiado. De manera conjunta, el uso de material manipulable en la actividad genera un valor adicional para su comprensión y así mismo, generar un proceso de aprendizaje teniendo en cuenta la integración del pensamiento espacial y visual.

Logros. A continuación, se destacan los siguientes logros:

- Determinan diferencias entre los cuerpos redondos, cilindros y conos por medio de sus propiedades.
- Comprenden el espacio circundante en el cual están inmersos las figuras.

- Desarrollan una integración entre el pensamiento espacial y visual mediante la relación que se genera en las dimensiones (2D y 3D) con ayuda de figuras geométricas.
- Desarrollan habilidades de posición de una figura desde diferentes dimensiones.
- Reconocen el espacio circundante en el cual se encuentra inmersos por medio de la construcción de figuras.

Dificultades. Las dificultades que se presentan en el desarrollo de la resolución de los problemas son las siguientes:

- Un factor que interviene en el proceso de los estudiantes, es el intervalo de tiempo en el cual, deben estructurar una solución a cada uno de los problemas.
- Algunos estudiantes presentan dificultades para realizar rotaciones y/o movimientos, lo cual, afecta en la creación de perspectivas de una misma figura.

5.2.5. Actividad 5. Todos los cuerpos

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. En la presente actividad se llevan a cabo dos momentos. El primero es un espacio individual donde cada estudiante trabaja con su guía y material correspondiente; en el segundo, se organizan por grupos (de dos a tres estudiantes de forma aleatoria) para recopilar todas las ideas que se generan en los problemas.

En el problema 1, ningún estudiante presenta dificultad con su solución, ellos comprenden con exactitud cómo son los niveles de la pirámide y así mismo, la cantidad de esferas que hacen parte de ella. En el problema, se evidencia un reconocimiento del espacio circundante, en el cual, se encuentra el estudiante; además, del excelente

trabajo a nivel espacial y visual para poder determinar la cantidad de esferas que se encuentran en cada nivel. Según Kinach (2012) es fundamental que los estudiantes lleven a cabo los dibujos para generar una comprensión de problemas de pensamiento espacial, esto con lleva un dominio de lo que ocurre dentro y fuera de las figuras que en ocasiones no se pueden observar de manera sencilla. A continuación, se presenta algunas evidencias registradas por los estudiantes (ver figura 36 y 37).

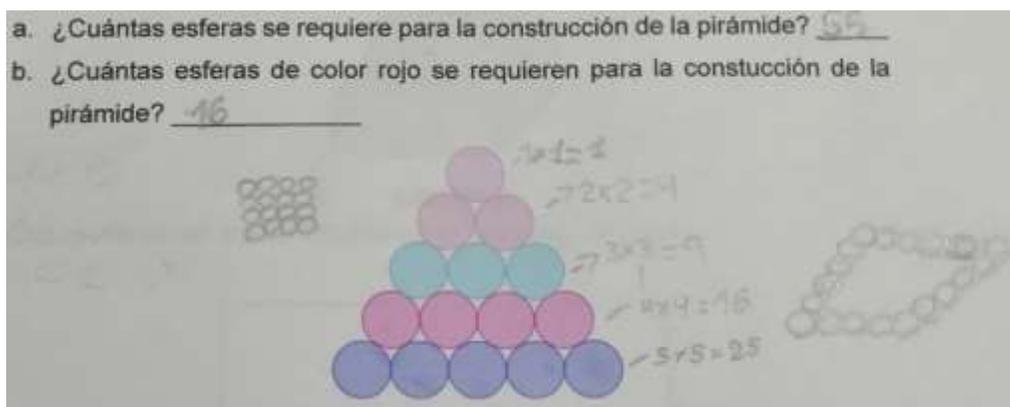


Figura 36. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5–Problema 1–Estudiante 1

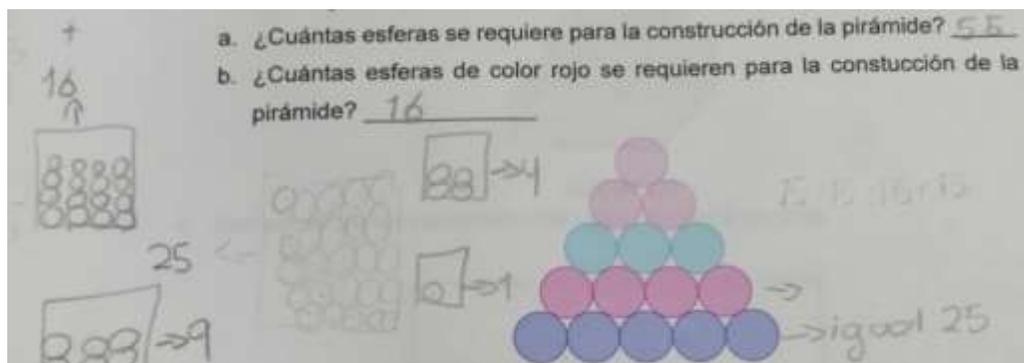


Figura 37. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 –Problema 1–Estudiante 2

En el problema 2, los estudiantes dos y cuatro responden correctamente las preguntas llevando a cabo un pensamiento espacial y visual acorde a la información brindada. La mayor dificultad que se presenta a los demás estudiantes es la comprensión del

espacio interno de la caja para llegar así al número exacto de esferas que pertenecen, según las condiciones. Según Maier (1998) los estudiantes desarrollan una orientación espacial, donde reconoce y relaciona un objeto en tres dimensiones lo cual sustenta el proceso que realiza el estudiante 2 (ver Figura 38).

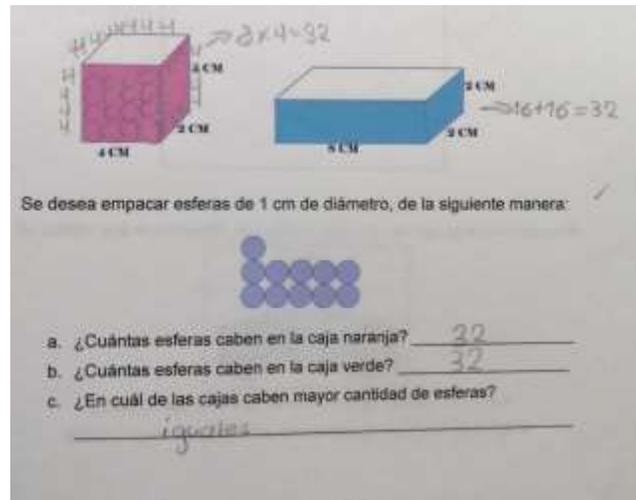


Figura 38. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 –Problema 2–Estudiante 2

En el problema 3, se observan diferentes respuestas por parte de los estudiantes. Esto se debe a la metodología que se lleva a cabo para la resolución del problema, en un primer momento los estudiantes lograron realizar imágenes mentales para la construcción de la pirámide sin tener en cuenta un material que lo soporte.

Según Shepard (1978), la habilidad espacial también está relacionada con la creatividad, ya que la capacidad de un individuo se detalla en la comprensión de los conceptos espaciales, los cuales, se relacionan directamente con la creatividad. Es por ello, que para este problema los estudiantes llevaron a cabo diferentes estrategias para su solución teniendo en cuenta la creatividad en sus procesos.

El estudiante 3, toma la base de la pirámide de forma sólida para que los diferentes niveles no cayeran por ser vacía en su interior, por lo cual, contiene un total de 37 cubos (ver figura 39).



Figura 39. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 –Problema 3–Estudiante 3

Por otro lado, el estudiante 2 presenta una idea de cómo se puede construir la pirámide con solo los bordes de cada nivel correspondiente, generando un total de 42 cubos (ver figura 40).



Figura 40. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 –Problema 3–Estudiante 2

En cambio, el estudiante 1 genera una estrategia para armar la pirámide de tal forma que se mantuviera en pie y adentro de ella fuera hueca. En la base de la pirámide deja unos cubos de apoyo; a continuación, en la figura 41 se observa el proceso numérico que desarrollo el estudiante:



Figura 41. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 –Problema 3–Estudiante 1

Para comprobar cada una de las respuestas de los estudiantes, se lleva a cabo la solución de ellos con ayuda del material manipulable. En el cual, la única construcción que mantuvo las condiciones iniciales, fue la del estudiante 3 (ver imagen 42).

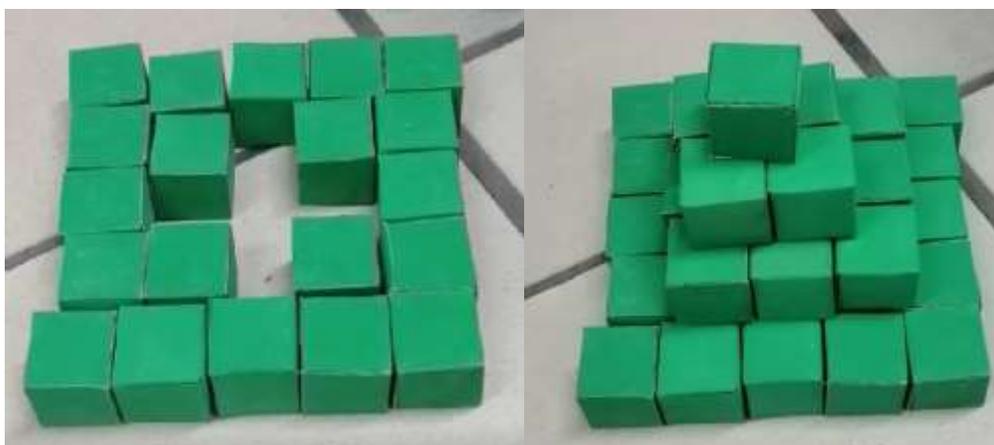


Figura 42. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 – Problema 3

En el problema 4, se evidencia en todos los estudiantes la comprensión del espacio circundante, desarrollando habilidades de posición con las figuras. Ningún estudiante presentó dificultades en la construcción del cubo con ayuda de las pirámides. Según el MEN (1998) los estudiantes construyen y manipulan objetos de tres dimensiones desde diferentes perspectivas lo cual genera un desarrollo del pensamiento espacial, así como se evidencia en la figura 43.



Figura 43. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 – Problema 4

En el problema 5, los estudiantes tres, cuatro y cinco resuelven correctamente lo solicitado. Llevando a cabo un reconocimiento de la figura en distintas posiciones, teniendo en cuenta los colores, los cuales hacen parte de ella. Según Woolcott, Le Tran, Mulligan, Brent y Mitchelmore (2020) los estudiantes deben realizar rotaciones o giros mentalmente teniendo en cuenta las diferentes perspectivas de las figuras geométricas, así como lo llevaron a cabo los siguientes estudiantes (ver figura 44).

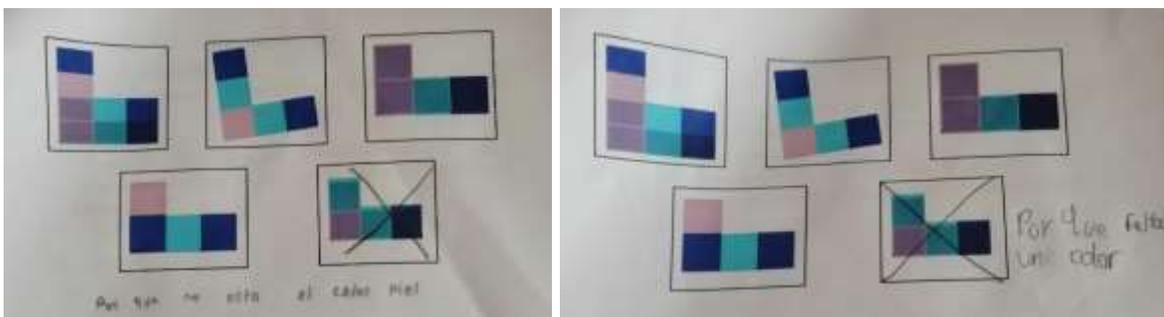


Figura 44. Respuesta de los estudiantes a la actividad 5 – Problema 5

Otras evidencias del trabajo realizado se encuentran en el *Anexo 8* donde se constatan los procesos realizados por cada estudiante, además, se detalla la integración del pensamiento espacial y visual en cada uno de los problemas propuestos.

Motivación. En la presente actividad los estudiantes expresan su interés y motivación por la actividad. De manera conjunta, el uso de material manipulable en la actividad genera una mejor comprensión de los problemas, generando un proceso de aprendizaje significativo para los estudiantes debido a que conocen las figuras trabajadas con las anteriores actividades. Por último, pero no menos importante se observa una integración del pensamiento espacial y visual para llegar a resolución de los problemas, por medio de los procesos que realizan los estudiantes.

Logros. Se constatan los siguientes logros en el desarrollo de la presente actividad:

- Reconocimiento de cada una de las figuras trabajadas en anteriores actividades.
- Comprenden las rotaciones sobre una figura teniendo en cuenta los colores que pertenecen a ella.
- Desarrollan una integración entre el pensamiento espacial y visual mediante imágenes mentales de una figura.
- Desarrollan habilidades de posición y distancia por medio del material manipulable.
- Construyen figuras llevando a cabo un pensamiento espacial y visual con ayuda del material manipulable.

Dificultades. En la presente actividad se destacan las siguientes dificultades en el desarrollo de la resolución de los problemas:

- El tiempo es limitado para la intervención que realizan los estudiantes en cada uno de los problemas.
- Algunos estudiantes presentan dificultades en la comprensión de la estructura interna de una caja con unas dimensiones en concreto.
- Algunos estudiantes no realizan rotaciones y/o movimientos adecuados en figuras tridimensionales, afectando la creación de diversas perspectivas de una misma figura.

5.3. Resultados de la encuesta de satisfacción

Para verificar los resultados se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes (ver anexo 9), la cual está construida por cinco preguntas cerradas, donde los estudiantes expresan su opinión con base al desarrollo de las actividades.

En la primera pregunta se aborda la motivación que se genera con el desarrollo y solución de la actividad, a lo cual, el 100% de los estudiantes consideran los problemas acordes al aprendizaje que se aborda en grado tercero. Al respecto, se destaca una afirmación que realiza una estudiante *“este tipo de actividades nos ayudan a mejorar, porque se estudian cosas nuevas que me aportan para los próximos años”*⁴⁴.

En la segunda pregunta se determina el impacto que se puede generar la implementación frecuente de este tipo de actividades en el aula de clase, para lo cual el 60% de los estudiantes consideran pertinente llevar a cabo este tipo de actividades en aula considerando las habilidades que desarrollan en su resolución. Por otro lado, el 30% de los estudiantes manifiestan una preocupación por el contenido numérico

⁴⁴ Opiniones de los estudiantes.

que se lleva a cabo de forma cotidiana en el aula de clase, por ello, destaco la afirmación que realiza el estudiante *“si se implementa este tipo de actividades frecuentemente, dejaríamos de lado lo que estamos viendo y eso afectaría mi proceso”*⁴⁵. Por lo cual, es importante recalcar que en la institución educativa realizan un proceso integral a los estudiantes, pero llevan a cabo una separación notoria con los contenidos (numérico, geométrico y estadístico) por ello, los estudiantes les preocupa que se evidencie un desbalance en su contenido y les afecte en un futuro.

En la pregunta tres, el 100% de los estudiantes consideran las actividades y los problemas como retos. Donde afianzan su conocimiento, construyendo y generando habilidades de pensamiento espacial - visual lo cual beneficia su formación de manera integral.

El 100 % de los estudiantes en la pregunta cuatro, consideran que se generó un ambiente de aprendizaje teniendo en cuenta los diferentes momentos en su desarrollo. Destaco la siguiente afirmación realizada por un estudiante *“ el espacio que compartimos con mis compañeros y la profesora fue muy bueno, ya que aprendí a escucharlos, entender las ideas que ellos daban y explicarles como lo desarrolle”*⁴⁶. Esto confirma la importancia de un ambiente ameno en las aulas de clases y más aún cuando un estudiante está en su proceso de aprendizaje, cuando no siente temor a expresarse, a manifestar sus ideas estén o no correctas.

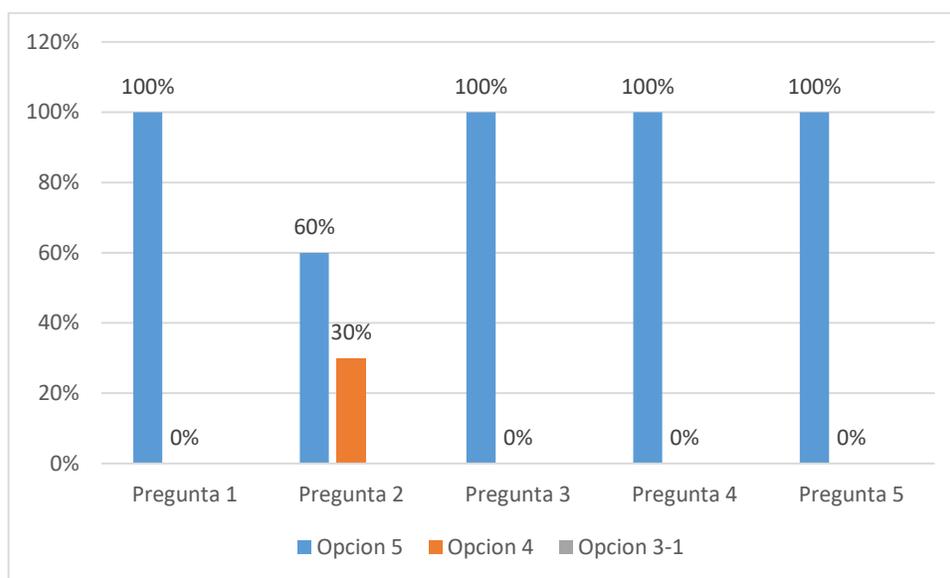
En la pregunta cinco, el 100% de los estudiantes se sintió motivado para el desarrollo de las actividades de manera natural y autónoma. Haciendo alusión a la siguiente

⁴⁵ Opiniones de los estudiantes.

⁴⁶ Opiniones de los estudiantes.

afirmación “aprendí junto a mis compañeros, me apoyaban cuando algo no lo realizaba bien, podía dar mis ideas sin miedo a sacar una mala nota”⁴⁷. Todo esto corrobora la motivación que sentían los estudiantes en todo momento, por aprender y realizar cada actividad con la mayor disposición para aprender y mejorar en sus procesos académicos.

En la gráfica 2, se evidencia los resultados de cada una de las preguntas



Gráfica 2. Resultados de encuesta de satisfacción en estudiantes.

El análisis de los resultados adquiridos por medio de la implementación de las actividades, se constatan durante el desarrollo del mismo, destacando el desarrollo de la actividad, la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades presentadas.

El proceso que se lleva a cabo destaca primordialmente a los recursos materiales, donde el material concreto que manipula el estudiante es fundamental en la

⁴⁷ Opiniones de los estudiantes.

construcción del pensamiento geométrico, esto se debe a la edad y el grado en el cual se encuentran. Constatando, la formación y las habilidades mentales que se están desarrollando en esta etapa.

Ahora bien, la creatividad y la construcción de un pensamiento espacial - visual en los estudiantes para así llegar a la resolución de cada uno de los problemas es indispensable, por lo tanto, se debe crear espacios adecuados de aprendizaje para que el estudiante realice un proceso significativo en cada sesión, sin olvidar aquellas preguntas heurísticas que aportan a la comprensión de los estudiantes frente a las dificultades que se le pueden presentar en el desarrollo de las actividades.

Conclusiones del capítulo 5

Los resultados que se destacan en las actividades se constatan teniendo en cuenta la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades presentadas. En el desarrollo de las actividades propuestas se precisa que los estudiantes demuestran motivación por la resolución de los problemas y por ende de cada una de las actividades. En este proceso se resaltan las habilidades que se generan en los estudiantes a nivel mental (rotación; giros; construcción y deconstrucción de cuerpos; establecer relaciones espaciales; manejo de posición, distancia dentro y fuera de los cuerpos; entre otros), lo cual contribuye al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría desarrollando a su vez un pensamiento espacial y visual en los estudiantes de grado tercero.

En las actividades presentadas, se destaca la resolución de problemas a través del pensamiento espacial y visual, resaltando el uso de material concreto, lo cual le permite constatar al estudiante las respuestas y los niveles de complejidad en cada

una de las actividades. Además, se rescata la importancia del trabajo en grupo para así socializar y corroborar los argumentos de los compañeros de aula.

Las evidencias de los resultados obtenidos en el desarrollo de las actividades, para contribuir al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría por medio del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero, se muestran del anexo 4 al anexo 8.

CONCLUSIONES

En el proceso de la presente tesis sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido geométrico por medio de la incidencia del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero, permite dar respuesta al objetivo propuesta. Los resultados a destacar en el presente trabajo, son:

- Investigadores como Lowrie, Resnick, Harris y Logan (2020); Yang, Chung y McBride (2019); Troncoso (2018); Hawes, Moss, Caswell, Naqvi y MacKinnon (2017); Zapateiro, Poloche y Camargo (2016); Bruce y Hawes (2015); Leme da Silva (2014), entre otros, resaltan las principales tendencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela primaria, en especial grado tercero. Además, destacan estrategias, metodologías y actividades dirigidas por los investigadores favoreciendo los procesos en el campo de la geometría.
- La teoría de la resolución de problemas es indispensable para el desarrollo de habilidades que propicien el trabajo en el aula, relacionada con la contribución del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero. En la presente tesis se abordan las ideas propuestas por Pölya (1965), Schoenfeld (1985), Pochulu y Rodríguez (2012), Liljedahl y Santos-Trigo (2019), los cuales establecen definiciones, fases y estrategias para la resolución de problemas, las cuales contribuyen a la propuesta de las actividades descritas.
- El pensamiento espacial en la escuela primaria se aborda desde los documentos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, determinando las características y requerimientos ineludibles que requieren los estudiantes en los diferentes niveles de escolaridad. Así mismo, investigadores como Yagoub (2020);

Ramful, Lowrie y Logan (2016); Metoyer, Bednarz y Bednarz (2015); Kinach (2012); Florez (1991); entre otros, establecen definiciones, características y clasificación según las habilidades que se determinan en este pensamiento; sin olvidar la importancia que genera en los estudiantes el dominio del presente contenido en situaciones reales.

- El pensamiento visual y su importancia en la formación de los estudiantes lo establecen investigadores como Púñez (2019); Molla (2016); Álvarez (2016) Sibbet (2013), Roam (2009), Arheim (1969); entre otros. Estos investigadores centran su atención en la definición, características y estrategias que se pueden llevar a cabo en el aula de clase para que así, los estudiantes se beneficien de las capacidades a nivel deductivo y argumentativo, y de las interpretaciones por medio de imágenes, entre otros, lo cual determina el desarrollo del pensamiento visual acorde al nivel en el cual se encuentran.
- En la comunidad de práctica se genera una comprensión y socialización enriquecida por parte de los estudiantes, por medio de la interacción con sus compañeros en el aula de clase, lo cual permite construir un robusto proceso de enseñanza aprendizaje del contenido. Por medio de las características determinadas en la comunidad de práctica sustentada en sus cuatro componentes (significado, práctica, comunidad e identidad), favorece la construcción del conocimiento, por medio de la participación e imaginación que aporta el estudiante para la búsqueda de su identidad.
- La aplicación de instrumentos a expertos y a docentes, cuya experiencia se encuentra en la escuela primaria, consolida la presente investigación, teniendo en

cuenta algunas ideas aportadas para la creación de actividades. Además, aportan al desarrollo de un marco teórico sólido el cual sustenta la presente tesis.

- Como resultados de la implementación de las actividades, se destacan:
 - La motivación e interés por parte de los estudiantes de grado tercero en su proceso de aprendizaje, lo cual muestra que es indispensable trabajar en la resolución de problemas con un enfoque en el pensamiento geométrico (pensamiento espacial y visual).
 - Los estudiantes desarrollan habilidades a nivel mental (rotación; giros; construcción y deconstrucción de cuerpos; establecen relaciones espaciales; llevan a cabo un manejo de posición, distancia dentro y fuera de los cuerpos; entre otros), lo cual constata la contribución al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, por medio de la incidencia del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero.
 - Los logros a los cuales llegan los estudiantes por medio de la implementación de las actividades son: reconocer los atributos y propiedades de los cuerpos geométricos; comprenden rotaciones a nivel mental y confirma su proceso con ayuda del material concreto. Además, desarrollan habilidades de dirección, distancia y posiciones de los cuerpos geométricos; desarrollan habilidades de orientación espacial teniendo en cuenta las figuras geométricas en el plano y proyecciones en tres dimensiones. Por último, reconocen el espacio circundante en donde se encuentra el estudiante para establecer medidas de las figuras geométricas, igualmente construyen y reconstruyen cuerpos geométricos según las condiciones iniciales.

- El uso de material concreto incrementa el interés por parte de los estudiantes, lo cual beneficia el proceso mental que construyen con el paso de las actividades y de los problemas propuestos.
- La importancia del trabajo y socialización por grupos, bajo las condiciones de la comunidad de práctica de Wenger genera comunicación con sus compañeros de aula, y permite consolidar los argumentos por medio de la experiencia con las actividades.
- En el análisis de la encuesta de satisfacción en los estudiantes, se constatan la motivación y trabajo constante que se desarrolla en el proceso enseñanza y aprendizaje del contenido geométrico. Cada uno de los problemas propuestos para el estudiante significaba un reto, el cual, lograba la solución de forma autónoma y favoreciendo un ambiente adecuado para la situación.

RECOMENDACIONES

Con la implementación de las actividades sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría por medio de la incidencia del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero, se requiere considerar las siguientes recomendaciones:

- Generar nuevos problemas retadores para el trabajo en aula con estudiantes de grado tercero.
- Motivar a los docentes e instituciones educativas para la implementación y búsqueda de problemas retadores que incentiven la construcción de un pensamiento geométrico basado en la incidencia del pensamiento espacial y visual en estudiantes de grado tercero.
- Ampliar esta investigación a nuevos grados de escolaridad con el fin de incrementar los niveles de dificultad a los problemas propuestos y así generar habilidades en los estudiantes frente al proceso de aprendizaje del contenido geométrico.
- Caracterizar el pensamiento visual involucrado por medio de la resolución de problemas donde se determine un pensamiento espacial en estudiantes de grado tercero para contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico.
- Fomentar el trabajo en comunidades de práctica, además, del uso de materiales didácticos en las aulas de clase, con el fin de construir un robusto proceso de enseñanza aprendizaje del contenido geométrico.

BIBLIOGRAFÍA

Al Yagoub, H. (2020). A Systematized Review of the Students' Upbringing Influence on their Spatial Reasoning. Recuperado el día 7 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://peer.asee.org/a-systematized-review-of-the-students-upbringing-influence-on-their-spatial-reasoning>

Álvarez, M. (2016) Documentación gráfica y pensamiento visual. Recuperado el día 21 de julio del 2021 por el siguiente link: <http://www.marceloalvarez.cl/que-es/>

Arheim R. (1969). El pensamiento visual. Argentina: Paidós. Recuperado el día 5 de octubre del 2021 por el siguiente link: <https://www.departamentoesteticas.com/SEM%201/PDF/2017/Arnheim%20Rudolf%20-%20El%20Pensamiento%20Visual.pdf>

Barcia, R. (2000). La preparación geométrica de los estudiantes en Educación Primaria. --2000. (Tesis doctoral), Universidad de Cienfuegos, Cuba

Bruce, C. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?. *ZDM Mathematics Education* 47, 331–343. Recuperado el día 10 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0637-4>

Bruce, C., Brent, D., Sinclair, N., Mcgarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W. y Woolcott, G (2016). Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in*

Mathematics. 1-19. Recuperado el día 20 de Julio del 2020 en el siguiente link:

<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07370008.2017.1323902>

Burgués, C., Alsina, C., y Fortuny, J. (1989). Materiales para construir la geometría. Editorial Síntesis. Madrid.

Burte, H., Gardony, A., Hutton, A. y Taylor, H. (2017). Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training. *Cognitive research: principles and implications*, 2(1), 13. Recuperado el día 11 de Enero del 2021 en el siguiente link:

<https://doi.org/10.1186/s41235-017-0052-9>

Cakmak, S., Isiksal, M. y Koc, Y. (2014). Investigating Effect of Origami-Based Instruction on Elementary Students' Spatial Skills and Perceptions, *The Journal of Educational Research*, 107:1, 59-68, Recuperado el día 14 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00220671.2012.753861>

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

Campistrous, L. y Rizo. C. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos.

Proyecto TEDI. La Habana.

Conference of European Research in Mathematics Education (CERME). (2019). Acta de evento. Países bajos. Recuperado el día 1 de Abril del 2020 en el siguiente link :

<http://www.mathematik.uni->

[dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf)

Conference of European Research in Mathematics Education (CERME). (2017). Acta de evento. Irlanda. Recuperado el día 3 de Abril del 2020 en el siguiente link:

http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/erme_temp/CERME10_Proceedings_final.pdf

Conference of European Research in Mathematics Education (CERME). (2015). Acta de evento. Republica Checa. Recuperado el día 5 de Abril del 2020 en el siguiente link:

http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/erme_temp/CERME9_Proceedings_final.pdf

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). (2019). Acta. Estados Unidos. Recuperado el día 6 de Abril del 2020 en el siguiente link: <http://www.igpme.org/>

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). (2018). Acta. Rancagua. Recuperado el día 7 de Abril del 2020 en el siguiente link: <http://www.igpme.org/>

Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM). (2013). Acta. Madrid. Recuperado el día 8 de Abril del 2020 en el siguiente link:

https://cibem.semrm.com/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_Talleres.pdf

Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM). (2017). Acta. Madrid. Recuperado el día 8 de Abril del 2020 en el siguiente link:

https://cibem.semrm.com/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_Talleres.pdf

Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). (2008). Acta de encuentro. México. Recuperado el día 10 de Abril del 2020 en el siguiente link:

<http://oapen.org/search?identifier=1002263>

Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). (2016). Acta de encuentro. Alemana. Recuperado el día 10 de Abril del 2020 en el siguiente link:

<https://www.springer.com/series/15585>

Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). (2020). Acta de encuentro. Recuperado el día 10 de Abril del 2020 en el siguiente link:

<https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1585712168638>

Contreras, M., Meneghetti, C., Uttal, D., Fernández, L., & Rodan, A., & Montoro, P. (2020). Monitoring the Own Spatial Thinking in Second Grade of Primary Education in a Spanish School: Preliminary Study Analyzing Gender Differences. *Education Sciences*. 10, 237; Recuperado el día 23 de Enero del 2021 en el siguiente link:

<https://www.mdpi.com/2227-7102/10/9/237>

Cortés, S., Sandoval, S. y Otálora, Y. (2013). Desarrollo de conocimiento geométrico euclidiano y uso de mapas. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 31(3), 556-574.

Recuperado Abril 12 del 2020 en el link:

http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-47242013000300009&lng=en&tlng=es

Delors, J. (1987). La Educación encierra un tesoro. Informe de la UNESCO de la Comisión internacional sobre la Educación para el siglo XXI.

Diezmann, C, Lowrie, T. (2012). LEARNING TO THINK SPATIALLY: WHAT DO STUDENTS 'SEE' IN NUMERACY TEST ITEMS?. *Int J of Sci and Math Educ 10*, 1469–1490. Recuperado el día 15 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s10763-012-9350-3>

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education 47*, 519–529. Recuperado 1 de Junio de 2020 en el link: <https://ezproxy.uan.edu.co:2077/content/pdf/10.1007/s11858-015-0700-9.pdf>

docente desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires. Argentina.

Domenicantonio, Costa & Vacchino. La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/27/union_027_010.pdf p.3

Elia, I., Evangelou, K., Hadjittoouli, K. y Heuvel, M. (2014). A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation. *Latin American Journal of Research in Educational Mathematics. RELIME*, vol. 17, núm. 4- 1, 2014, pp. 199-220. Recuperado el día 30 de Junio del 2020 en el siguiente link: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644010>

Elia, I., van den Heuvel, M. y Gagatsis, A. (2018). Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization. In: Kinnear V., Lai M., Muir T. (eds) *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning. Early Mathematics Learning and Development*. Springer, Singapore. Recuperado el día 3 de julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9_5

Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, p.16.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, VIII (1).

Fastame, M. y Callai, D. (2015). Empowering visuo-spatial ability in primary school: results from a follow-up study, *Educational Psychology in Practice*, 31:1, 86-98. Recuperado el día 13 de Julio del 2020 en el siguiente link:
<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02667363.2014.989315>

Flórez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba. 1991. (Tesis de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana. p. 10.

Freitas, E. y McCarthy, M. (2014). (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades. *PNA*, 9(1), 41-51. Recuperado 20 de Abril del 2020 en el link:
<https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/33233/Freitas2014PNA9%281%29Dis%29orientation.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S. y Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Math Ed Res J* 32, 235–255. Recuperado el día 15 De Junio del 2020 en el link:
<https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>

García, M. Villegas, M. González, F. (2015). La noción del espacio en la primera infancia: Un análisis desde los dibujos infantiles. *Paradigma*, 36(2), 223-245.

Recuperado 24 de abril de 2020 en el link:

http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000200011&lng=es&tlng=es

Giaquinto, M (2007). Visual thinking in mathematics. Oxford University press. Printed in Great Britain.

Golledge, R., Marsh, M. y Battersby, S. (2008). A Conceptual Framework for Facilitating Geospatial Thinking. *Annals of the Association of American Geographers*, 285-308, Recuperado el día 2 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1080/00045600701851093>

Gutiérrez, A. (2005). Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro. Curso 2005-06. Universidad de Valencia. Departamento de Matemática.

Gutiérrez, L. (2013). ¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo? Recuperado el día 10 de Octubre del 2020 en el siguiente link <https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/>

Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Naqvi, S. y MacKinnon, S. (2017). Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention, *Cognition and Instruction*, 35:3, 236-264, Recuperado el día 17 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07370008.2017.1323902>

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación: Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio* (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). (2013). Acta de evento 22. Inglaterra. Recuperado el día 15 de Abril del 2020 en el siguiente link de: <https://www.mathunion.org/icmi/conferences/icmi-study-conferences/icmi-study-22-conference-proceedings>

International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). (2015). Acta de evento 23. China. Recuperado el día 3 de Abril por el siguiente link: <https://www.um.edu.mo/fed/ICMI23/proceedings.html>

International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). (2013). Acta de evento 24. Japón. Recuperado el día 3 de Abril del 2020 por el siguiente link: <http://www.human.tsukuba.ac.jp/~icmi24/>

Kim, M., Bednarz, R. y Kim, J. (2012). The ability of young Korean children to use spatial representations, *International Research in Geographical and Environmental Education*, 21:3, 261-277, Recuperado el día 5 de Febrero del 2021 en el siguiente link: [10.1080/10382046.2012.698089](https://doi.org/10.1080/10382046.2012.698089)

Kinach, B. (2012). Fomentar la comprensión espacial versus métrica en geometría. *El profesor de matemáticas*, 105 (7), p. 535.

Kotsopoulos, D., Makosz, S., Zambrzycka, J. y Dickson, B. (2019). Individual differences in young children's visual-spatial abilities, *Early Child Development and*

Care, Recuperado el día 23 de Julio del 2020 en el siguiente link:

<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03004430.2019.1699918>

Krulik, S., y Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.p. 4.

Leme da Silva, M. (2014). Drawing and geometry in elementary school: a long lasting marriage that ends with a contentious divorce. *Revista História da Educação*, 18(42),61-73. Recuperado el día 25 de junio del 2020 en el siguiente link:

<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=3216/321629404004>

Liben, L., Myers, L., Christensen, A. y Bower, C. (2013). Environmental-scale map use in middle childhood: links to spatial skills, strategies, and gender. *Child development*, 84(6), 2047–2063. Recuperado el día 21 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1111/cdev.12090>

Lourenco, S., y Huttenlocher, J. (2007). Using geometry to specify location: implications for spatial coding in children and nonhuman animals. *Psychological research*, 71(3), 252–264. Recuperado el día 17 del 2021 en el siguiente link:

<https://doi.org/10.1007/s00426-006-0081-3>

Lowrie, T., Resnick, I., Harris, D. y Logan, T. (2020). In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding. *Math Ed Res J* 32, 175–188 (2020). Recuperado el 9 de Junio del 2020 en el link:

<https://doi.org/10.1007/s13394-020-00336-9>

Maier, P. (1998). Spatial geometry and spatial ability – How to make solid geometry solid? In Elmar Cohors-Fresenborg, K. Reiss, G. Toener, and H.-G. Weigand, editors,

Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996, Osnabrueck, pag 63–75.

Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24 (3). pp. 7-32. ISSN 1665-5826. Recuperado el día 19 de Enero del 2021 en el siguiente link: <http://funes.uniandes.edu.co/13251/1/Marmolejo2012La.pdf>

Martínez, A. y Rivaya, F. (1989). Metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría. Editorial Síntesis. Madrid.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Harlow: Pearson

Metoyer S., Bednarz S., Bednarz R. (2015). Spatial Thinking in Education: Concepts, Development, and Assessment. In: Muñiz Solari O., Demirci A., Schee J. (eds) *Geospatial Technologies and Geography Education in a Changing World. Advances in Geographical and Environmental Sciences*. Springer, Tokyo. Recuperado el día 17 de marzo del 2021 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-4-431-55519-3_3

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. MEN. Bogotá, p. 56.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá.p.49. Recuperado el día 10 de Mayo del 2020 en el siguiente link http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Molla, P. (2016) Blog ideas dibujadas “Pensamiento Visual”. Recuperado el 01 de junio del 2021 en el siguiente link: <http://facilitaciongrafica.blogspot.pe/p/contratar.html>

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J. y Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Math Ed Res J* 32, 285–305. Recuperado el 9 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00324-z>

Owens, K. (2020). Transforming the established perceptions of visuospatial reasoning: integrating an ecocultural perspective. *Math Ed Res J* 32, 257–283. Recuperado el 12 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00332-z>

Paden, D. (1998). Development of a community of mathematicians in the elementary classroom. Proceedings of mathematics Education and Society International Conference. Recuperado el 16 de septiembre de 2021 en el siguiente link: <http://nothingham.ac.uk/csme/meas/papers/paden.html>

Patahuddin, S., Rokhmah, S. y Ramful, A. (2020). What does teaching of spatial visualisation skills incur: an exploration through the visualise-predict-check heuristic. *Mathematics Education Research Journal*, 32(2), 307-329. Recuperado el día 27 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00321-2>

Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Piaget, Jean and Barbel Inhelder. The Child's Conception of Space. Humanities Press, New York, N.Y. 1956.

Pittalis, M. y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212.

Recuperado el día 14 de Febrero del 2021 en el siguiente link:

<https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9251-8>

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). Educación Matemática. Aportes a la formación

Polinsky, N., Flynn, R., Wartella, E. y Uttal, D. (2021). The role of spatial abilities in young children's spatially-focused touchscreen game play. *Cognitive Development*, 57,

100970. Recuperado el día 10 de Febrero del 2021 en el siguiente link:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0885201420301246>

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas. p. 28.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

Pou, C. (2002). El programa educativo "Mira" del Laboratorio de las artes: un instrumento para la escuela primaria (Texto sin publicar, investigación financiada por la Fundación "la Caixa").

Pró, M. (2003). Incidencia y uso de la imagen en las estrategias de aprendizaje. Paidós. Argentina.

Puñez, N. (2019). El Pensamiento visual: una propuesta didáctica para pensar y crear. *Horizonte De La Ciencia*, 7(12), 161-177. Recuperado el 5 de Junio del 2020 en el link: <http://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/353>

Ramful, A., Lowrie, T. y Logan, T. (2016). Measurement of Spatial Ability: Construction and Validation of the Spatial Reasoning Instrument for Middle School Students. *Revista de evaluación psicoeducativa*, 35 (7), 709 - 727. Recuperado el día 10 de Octubre en el siguiente link <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0734282916659207>

Rehm M., Stan C., Wøldike N. y Vasilariou D. (2015). Towards Smart City Learning: Contextualizing Geometry Learning with a Van Hiele Inspired Location-Aware Game. In: Chorianopoulos K., Divitini M., Baalsrud Hauge J., Jaccheri L., Malaka R. (eds) *Entertainment Computing - ICEC 2015. ICEC 2015. Lecture Notes in Computer Science*, vol 9353. Springer, Cham. Recuperado el día 7 de Julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-3-319-24589-8_32

Rizo, C. (1987). Investigación sobre la estructuración del curso de geometría de 4to. a 6to. grados, basada en las transformaciones y la congruencia. 1987. Tesis doctoral. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Ministerio de Educación de Cuba.

Roam, D. (2009). La clave es la servilleta. Edit. Norma. Colombia. Recuperado el día 1 de octubre del 2021 por el siguiente link: <https://emprendimarketingblog.files.wordpress.com/2016/09/la-clave-es-la-servilleta.pdf>

Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

Salsa, A., Gariboldi, M., Vivaldi, R. y Rodríguez, J. (2019). Geometric maps as tools for different purposes in early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*. 186. Recuperado el día 5 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.05.004>

Seah, R. y Horne, M. (2020). The influence of spatial reasoning on analysing about measurement situations. *Math Ed Res J* 32, 365–386. Recuperado el día 31 de Enero del 2021 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00327-w>

[Shepard, R. \(1978\). The mental image. *American psychology*, 33, 125-137.](#)

Sibbet, D. (2013). Liderazgo visual. Edit. Anaya. España.

Sinclair N., Moss J., Hawes Z. y Stephenson C. (2018). Learning Through and from Drawing in Early Years Geometry. In: Mix K., Battista M. (eds) *Visualizing Mathematics. Research in Mathematics Education*. Springer, Cham. Recuperado el día 10 de Julio del 2020 en el siguiente link: https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_11

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education* 47, 319–329. Recuperado 3 de Junio de 2020 en el link: <https://ezproxy.uan.edu.co:2077/content/pdf/10.1007/s11858-015-0693-4.pdf>

Sinclair, N., Bartolini, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education* 48, 691–719. Recuperado el 7 de Junio del 2020 en el link: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). (2013). Acta Bilbao. Recuperado el día 16 de Abril del 2020 en el siguiente link: <https://www.seiem.es/act/simposios.shtml?17>

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). (2016). Acta Málaga. Recuperado el día 16 de Abril del 2020 en el siguiente link: <https://www.seiem.es/act/simposios.shtml?20>

Urchegui B, P. (2015). El Pensamiento Visual en la Formación del Profesorado / Visual Thinking in Teacher Education. 10.13140/RG.2.2.11390.79682. P. 25

Uribe, S. Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educ. mat [online]*. 2014, vol.26, n.2, pp.135-160. ISSN 1665-5826. Recuperado 8 de abril de 2020 en el link: <http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-2-5.pdf>

Van de Weijer, E., Kroesbergen, E. y Van Luit, J. (2015). Verbal and visual-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Mem Cogn* 43, 367–378. Recuperado el día 24 de Noviembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.3758/s13421-014-0480-4>

Vasilyeva, M. y Bowers, E. (2010). Exploring the effects of similarity on mapping spatial relations. *Journal of experimental child psychology*, 106(4), 221–239. Recuperado el día 27 de Diciembre del 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.04.003>

Vighi, P. y Marchini, C. (2010). A gap between learning and teaching geometry. Conference Minutes of *Mathematics Department, University of Parma. Italy*. Recuperado el día 18 de Junio del 2020 en el siguiente link: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Vighi.pdf

Wenger, E. (1998). Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.

Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. (2002). Cultivating Communities of Practice. https://www.researchgate.net/publication/265678077_Seven_Principles_for_Cultivating_Communities_of_Practice

Woolcott, G., Le Tran, T., Mulligan, J., Brent, D. y Mitchelmore, M. (2020). Towards a framework for spatial reasoning and primary mathematics learning: an analytical synthesis of intervention studies. *Math Ed Res J*. Recuperado el día 30 de Noviembre de 2020 en el siguiente link: <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00318-x>

Xistouri, X., Pitta - Pantazi, D. y Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1),149-164. ISSN: 1665-2436. Recuperado el día 14 de Abril de 2020 en el link: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33553644007>

Yang, X., Chung, K. y McBride, C. (2019). Longitudinal contributions of executive functioning and visual-spatial skills to mathematics learning in young Chinese children, *Educational Psychology*, 39:5, 678-704. Recuperado el día 27 de Julio del 2020 en el siguiente link: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01443410.2018.1546831>

Zapateiro, J., Poloche, S. y Camargo, L. (2016). Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 43, 119-136. Recuperado el día 22 de Abril del 2020 en el link: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142018000100119&lang=es

ANEXOS

11.1 Anexo 1. Entrevistas a especialistas

Objetivo: Corroborar el diagnóstico sobre proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria en la actualidad.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo: Estimado doctor, su opinión y experiencia como docente de Geometría es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca indagar la incidencia del pensamiento espacial y visual en el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la resolución de problemas retadores.

Recuerde que en todo momento las preguntas están dirigidas a la clase de geometría en la escuela primaria. Muchas gracias por su colaboración.

I. Cuestionario

1. ¿Cómo concibe el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría para la construcción de un conocimiento matemático?
2. ¿Qué dificultades concibe en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?
3. ¿Qué recursos didácticos utiliza para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?
4. ¿Qué alternativas pedagógicas y/o didácticas donde se integre el pensamiento espacial y visual sugiere usted para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?

11.2 Anexo 2. Encuesta a docentes

Objetivo: Diagnosticar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria en la actualidad.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo: Estimado docente, su opinión y experiencia como docente de Geometría en la escuela primaria es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca estudiar la incidencia del pensamiento espacial y visual en el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la resolución de problemas retadores.

Muchas gracias por su colaboración.

I. Datos generales

NOMBRE: _____

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS: SI ____ NO ____

AÑOS DE EXPERIENCIA ORIENTANDO GEOMETRÍA EN BÁSICA PRIMARIA: ____

II. Cuestionario

Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿Considera usted que la resolución de problemas geométricos aporta al desarrollo del pensamiento espacial?					
2. ¿Los estudiantes presentan dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría?					
3. ¿Considera importante la construcción del pensamiento visual para la solución de problemas geométricos?					
4. ¿Considera usted que el desarrollo del pensamiento visual aporta a la construcción de un pensamiento espacial?					
5. ¿Utiliza materiales didácticos que fomenten el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en clase?					
6. ¿Considera que el uso de instrumentos o materiales didácticos en la clase de geometría fomenta el desarrollo del pensamiento espacial y visual?					
7. ¿Considera que sus estudiantes solucionan problemas geométricos llevando a cabo construcciones visuales?					

III. Responda las siguientes preguntas

1. Mencione materiales didácticos más frecuentados por usted a la hora de realizar una clase de geometría con ayuda del pensamiento visual.

2. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de a geometría en la escuela primaria?
3. ¿Usted considera que se puede llevar a cabo la construcción de un pensamiento espacial sin el uso del pensamiento visual?
4. Sugiera una actividad realizada en clases de geometría, donde se evidencie la relación entre pensamiento espacial y visual.

11.3 Anexo 3. Validación de la encuesta por el método Delphi

Objetivo: validar la encuesta aplicada a los docentes por el método Delphi

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
1	9	4	0	0	0
2	0	8	5	0	0
3	13	0	0	0	0
4	12	1	0	0	0
5	5	3	5	0	0
6	9	4	0	0	0
7	3	5	5	0	0

Tabla 1. Valores absolutos

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
1	9	13	13	13	13
2	0	8	13	13	13
3	13	13	13	13	13
4	12	13	13	13	13
5	5	8	13	13	13
6	9	13	13	13	13
7	3	8	13	13	13

Tabla 2. Valores absolutos acumulados

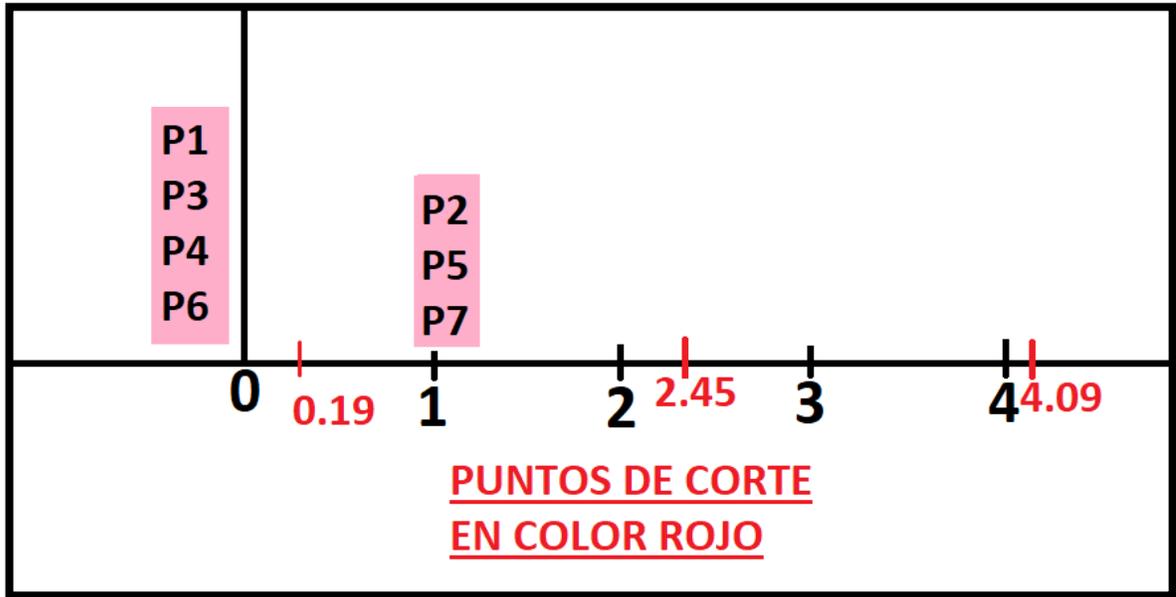
PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
1	0.69	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0	0.61	1.0	1.0	1.0
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	0.92	1.0	1.0	1.0	1.0
5	0.38	0.61	1.0	1.0	1.0
6	0.69	1.0	1.0	1.0	1.0
7	0.23	0.61	1.0	1.0	1.0

Tabla 3. Distribución de frecuencias relativas acumuladas

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	NU	SUMA	PROM	N-P
1	0.50	4.09	4.09	4.09	4.09	16.86	3.37	-0.39
2	-4.09	0.28	4.09	4.09	4.09	8.46	1.69	1.29
3	4.09	4.09	4.09	4.09	4.09	20.45	4.09	-1.11
4	1.41	4.09	4.09	4.09	4.09	17.77	3.55	-0.57
5	-0.30	0.28	4.09	4.09	4.09	12.25	2.45	0.53
6	0.50	4.09	4.09	4.09	4.09	16.86	3.37	-0.39
7	-0.73	0.28	4.09	4.09	4.09	11.82	2.36	0.62

SUMA	1.38	17.2	28.63	28.63	28.63	104.47	20.88	
PUNTOS DE CORTE	0.19	2.45	4.09	4.09	4.09	14.91	/7	2.98
PP						/5	2.98	

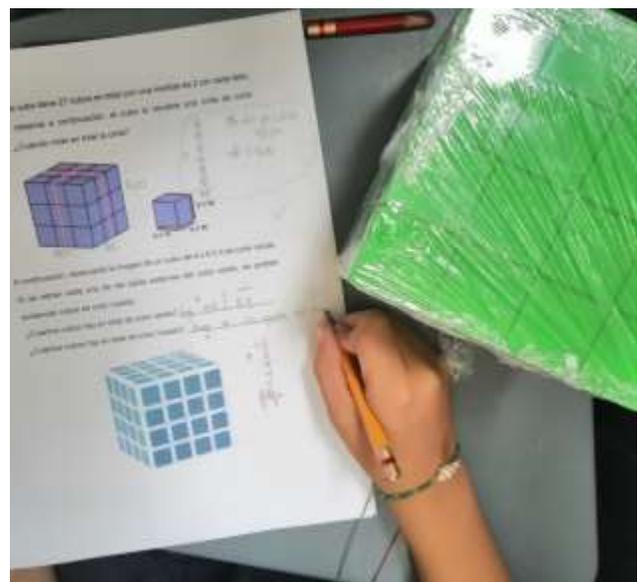
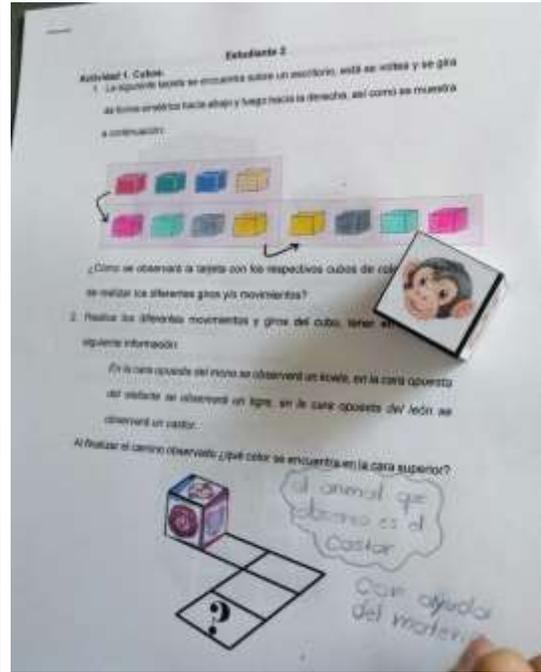
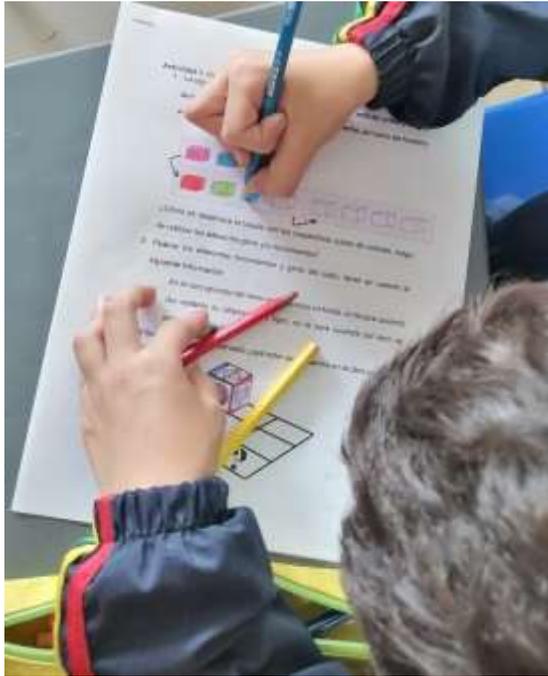
Tabla 4. Función recíproca de la distribución normal y determinación de los puntos de corte o límites



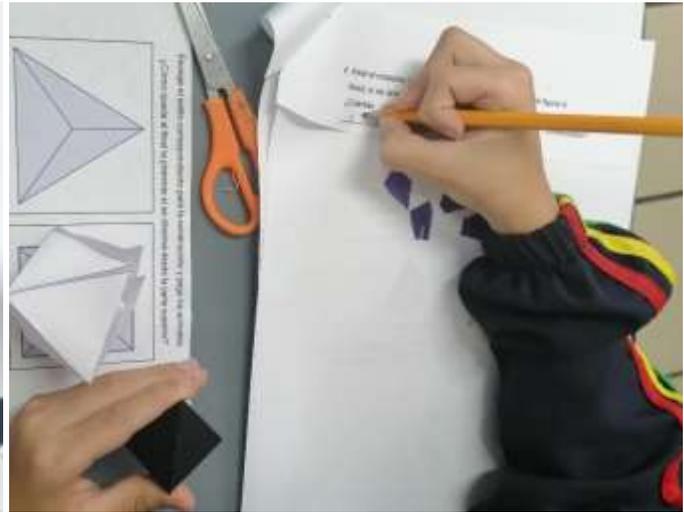
Gráfica 1. Validación por método Delphi

Análisis de los resultados: De acuerdo con los puntos de corte, los puntos (A, B, C, D, E, F) que representan cada pregunta y ubicándolos sobre la gráfica, se observa que todas las preguntas están dentro del primer y segundo intervalo ($x < 2.45$) de los puntos de corte, por lo tanto, se puede inferir que las preguntas son adecuadas para el objetivo propuesto en la presente investigación.

11.4 Anexo 4. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 1. Cubos



11.6 Anexo 6. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 3. Pirámides

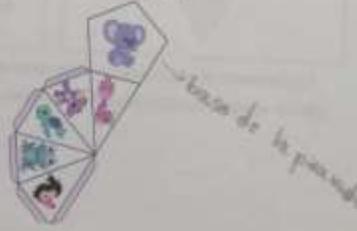


2. La figura A muestra una pirámide cuyas caras opuestas tienen los mismos colores. Si se observa la misma pirámide desde la parte superior ¿Qué colores les corresponden a los espacios en blanco en la figura B?

FIGURA A

FIGURA B

3. Una pirámide se quiere construir, para ello, se genera una plantilla con un estilo particular, así como se muestra a continuación:



base de la pirámide

(el zoolo es el animal que sobrevive)

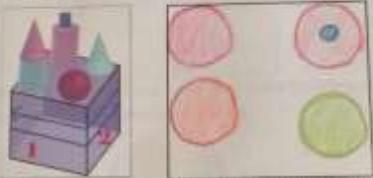
11.7 Anexo 7. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos.

Estudiante 1

Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos

1. A continuación, se observa unas figuras geométricas las cuales están sobre la tapa superior de un cubo. Si el cubo se observa de frente, encontramos la tapa 1, ahora, debe girar el cubo en contra de las manecillas del reloj tres veces quedando en la tapa 4 y luego se gira con base a las manecillas del reloj 2 veces quedando en la tapa 2. Si se detalla desde la parte superior ¿Cómo se verían las figuras geométricas y sus colores correspondientes?

NOTA: Para mayor facilidad, los círculos se pueden realizar con una moneda.



2. En la figura A se observa una imagen de frente, la cual, está conformada por diferentes cilindros y una esfera sobre una tabla. Si se detalla desde la parte superior ¿Cuál sería la serie de colores que se pueden observar en las figuras?

NOTA: Selecciona ¿cuál de las tres opciones es la más adecuada? y colorea.

La opción 3 corresponde a una idea diferente a las anteriores, en el caso de no estar de acuerdo con las anteriores.



FIGURA A



OPCIÓN 1



OPCIÓN 2



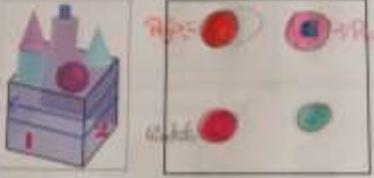
OPCIÓN 3

Estudiante 4

Actividad 4. Cuerpos redondos, cilindros y conos

1. A continuación, se observa unas figuras geométricas las cuales están sobre la tapa superior de un cubo. Si el cubo se observa de frente, encontramos la tapa 1, ahora, debe girar el cubo en contra de las manecillas del reloj tres veces quedando en la tapa 4 y luego se gira con base a las manecillas del reloj 2 veces quedando en la tapa 2. Si se detalla desde la parte superior ¿Cómo se verían las figuras geométricas y sus colores correspondientes?

NOTA: Para mayor facilidad, los círculos se pueden realizar con una moneda.



2. En la figura A se observa una imagen de frente, la cual, está conformada por diferentes cilindros y una esfera sobre una tabla. Si se detalla desde la parte superior ¿Cuál sería la serie de colores que se pueden observar en las figuras?

NOTA: Selecciona ¿cuál de las tres opciones es la más adecuada? y colorea.

La opción 3 corresponde a una idea diferente a las anteriores, en el caso de no estar de acuerdo con las anteriores.



FIGURA A



OPCIÓN 1



OPCIÓN 2



OPCIÓN 3



4. En la siguiente figura se observa una esfera vista desde la parte superior, en la cual, se encuentran unos colores dentro de ella.



A continuación, encontrarás unas opciones de secuencia, una de ellas corresponde correctamente a la de la esfera. En el caso de no estar de acuerdo con ninguna, en la opción 4 podrás construir la que crees correcta.



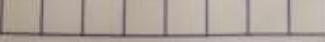
OPCIÓN 1



OPCIÓN 2



OPCIÓN 3



OPCIÓN 4

11.8 Anexo 8. Evidencia del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 5. Todos los cuerpos



Actividad 8 "Todos los cuerpos"

1. En la siguiente imagen se observan varias, las cuales constituyen una pirámide cuadrangular, cada uno de los cuales de la pirámide forman la misma longitud en sus lados.

a. ¿Cuántas esferas se requieren para la construcción de la pirámide? 10

b. ¿Cuántas esferas de color rojo se requieren para la construcción de la pirámide? 4

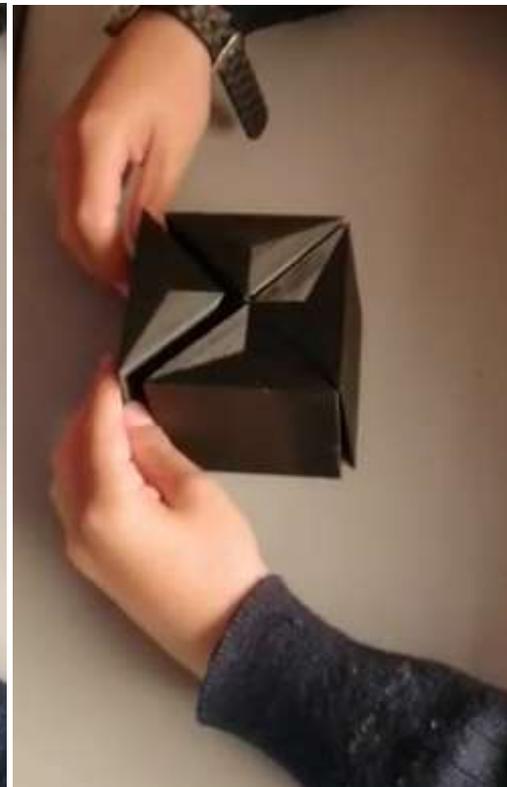
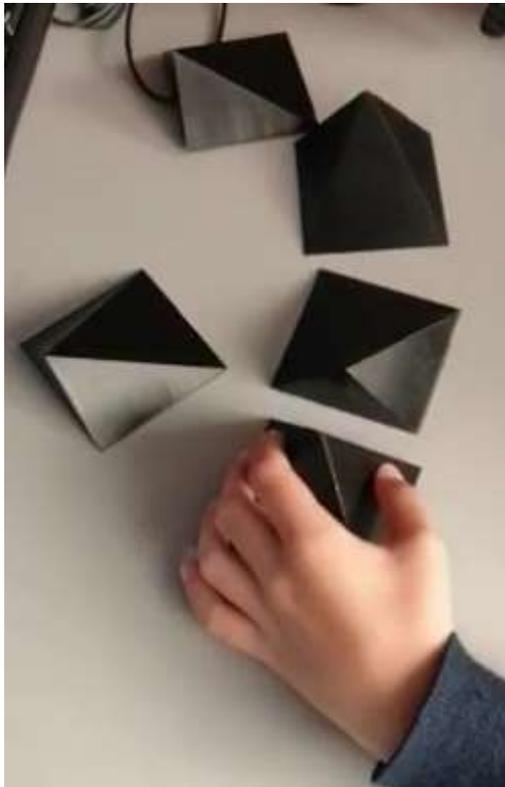
2. Se observan unas cajas con las dimensiones correspondientes.

Se desea empacar esferas de 1 cm de diámetro, de la siguiente manera:

a. ¿Cuántas esferas caben en la capa superior? 16

b. ¿Cuántas esferas caben en la capa inferior? 16

c. En cuál de las capas caben mayor cantidad de esferas? en la capa superior y en la inferior



11.9 Anexo 9. Encuesta de satisfacción a estudiantes

Estimado estudiante, una vez culminadas las actividades de geometría abordando el pensamiento espacial y visual, además, de su experiencia como participante, responda por favor las siguientes preguntas de 5 a 1, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la calificación más baja.

- a. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la geometría?

5 4 3 2 1

- b. ¿Cree usted que su desempeño en el área de matemáticas mejoraría si estas actividades se implementan con mayor frecuencia en el aula de clase?

5 4 3 2 1

- c. ¿Las actividades propuestas establecen un reto para usted?

5 4 3 2 1

- d. ¿Usted considera que durante el desarrollo de las actividades se creó un ambiente que enriquece el aprendizaje del contenido geométrico?

5 4 3 2 1

- e. ¿Se sintió usted motivado al desarrollar los retos (problemas) de forma natural y autónoma?

5 4 3 2 1