MODELO PEDAGÓGICO PARA LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA USANDO COMO HERRAMIENTA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado científico de Doctor en Educación Matemática

Mg. Alfonso Romero Huertas

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C., Colombia

2022

MODELO PEDAGÓGICO PARA LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA, USANDO COMO HERRAMIENTA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado científico de Doctor en Educación Matemática

Mg. Alfonso Romero Huertas

Director de tesis

Dra. Mary Falk de Losada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá D.C., Colombia

2022

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, diciembre 10 del 2022

AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento especial a la Doctora Mary Falk de Losada por sus valiosos aportes, liderazgo y motivación que hicieron posible este proyecto de investigación, igualmente por su entrega a la formación de investigadores en el campo de la Educación Matemática.

A los docentes del programa Doctorado en Educación Matemática, por su dedicación e interés de brindar siempre una formación de calidad.

A los jurados, los doctores Miguel Cruz Ramírez, Osvaldo de Jesús Rojas y Rafael Sánchez Lamoneda, por sus conceptos, sugerencias y recomendaciones fundamentales para consolidar el proyecto de investigación.

DEDICATORIA

A mis padres María y Enrique, por ser la luz que desde el cielo iluminan y hacen posible cumplir mis sueños.

A la razón de mi existir Andrés Felipe, Juan Pablo y Emmanuel, mis hijos.

A mi esposa, mis hermanos y sobrinos, por su apoyo incondicional.

SÍNTESIS

Esta investigación tuvo como propósito construir un modelo de formación continua para los docentes en ejercicio en el nivel de educación básica primaria que atienden el área de matemáticas en colegios del Departamento de Cundinamarca, usando como herramienta el laboratorio, y a través del cual se fortalezca el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área en mención.

A partir del estado de arte, y la consolidación del marco teórico, los manipulativos asumen un papel protagónico y fundamental en la investigación. Por lo tanto, se ha considerado pertinente la metodología investigación basada en diseño, dentro del enfoque cualitativo, para dirigir la propuesta y construir el modelo a medida que avanza el desarrollo del proyecto. Para tal fin, se diseñan y aplican a través de un diplomado 11 actividades que incluyen manipulativos concretos y virtuales, juegos de mesa y tradicionales, entre otros. Estas fueron desarrolladas en ambiente de laboratorio y distribuidas en cuatro grupos (iteraciones) en atención a los componentes del área (numérico, espacial, aleatorio y variacional); A través de ellas los docentes progresivamente, y mediante cada iteración, han fortalecido el conocimiento disciplinar y simultáneamente el conocimiento pedagógico del contenido en el área de matemáticas.

ABSTRACT

The purpose of this research was to build a continuous training model for practicing teachers at the basic primary education level who work in the area of mathematics in the Department of Cundinamarca's schools, using the laboratory as a tool through which is strengthened the disciplinary and pedagogical knowledge of the content in the area in question.

From the state of the art and the consolidation of the theoretical framework, manipulatives assume a leading and fundamental role in the research; therefore, the research methodology based on design, within a qualitative approach, has been considered relevant for shaping and orienting the proposal and building the model as the development of the project progresses. With that purpose, 11 activities are designed and

applied in a professional development course which include concrete and virtual manipulatives, board and traditional games, among others. These were developed in a laboratory environment and distributed in four groups (iterations), according to the components of the area (numerical, spatial, random and variational). With these, teachers progressively and through each iteration, have strengthened their disciplinary knowledge and simultaneously their pedagogical knowledge of the content in the area of mathematics.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En Colombia se ha implementado una variedad de iniciativas dirigidas a la formación docente a través de programas que se han fortalecido significativamente en la última década, los cuales buscan incrementar la participación y mejorar el desempeño escolar de los estudiantes. Sin embargo, estos programas aún no logran un impacto significativo en los aprendizajes de los estudiantes y en sus resultados de evaluaciones nacionales e internacionales. Luego, es evidente que el mejoramiento de la educación básica en Colombia requiere cambios significativos en la política y en la práctica. Los maestros, escuelas y colegios deben garantizar que los currículos, las evaluaciones y el tiempo que se invierte en los diferentes espacios académicos sean empleados de forma eficaz para facilitar el desarrollo de competencias, y más allá el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Específicamente, en educación básica primaria, nivel en el cual se enmarca este proyecto de investigación y dentro de las estrategias antes mencionadas, el Ministerio de Educación implementa el Programa para la Excelencia Docente y Académica "Todos a Aprender", como una de las principales estrategias para promover la excelencia docente y la profesionalización de su labor, con el objetivo de mejorar los aprendizajes de los estudiantes de transición a quinto grado en las áreas de matemáticas y lenguaje, en los establecimientos educativos de más bajo desempeño, según pruebas SABER, a través del mejoramiento de las prácticas de aula de sus docentes. Sin embargo, los resultados esperados según ISCE[1] aún no se evidencian, presentándose en el área de matemáticas las mayores dificultades de los estudiantes.

[1] El Índice Sintético de Calidad Educativa, es la herramienta que permite evaluar de 1 a 10 el proceso educativo de los colegios según pruebas de Estado, con el fin de poder determinar los planes y acciones que se deberán llevar a cabo para lograr el mejoramiento y excelencia educativa en el país.

Igualmente, la experiencia en el acompañamiento a docentes en algunos municipios del Departamento de Cundinamarca, a través del programa Todos a Aprender, anteriormente mencionado, ha brindado la oportunidad de identificar fortalezas como también dificultades y riesgos en la educación básica primaria. Dentro de las fortalezas se encuentran las actividades lúdicas, el trabajo con material concreto, la resolución de problemas contextualizados y el uso de tecnología en el desarrollo de las prácticas pedagógicas; estas generan impacto positivo en los estudiantes en cuanto a la interacción en el grupo, la relación con el contexto y la disposición de ellos hacia el logro de los objetivos de aprendizaje. Dentro de las dificultades, se evidencia un mínimo conocimiento disciplinar en los docentes que imparten la formación en matemáticas del nivel de educación básica primaria, lo cual es un obstáculo para profundizar de manera didáctica y efectiva en el desarrollo de los procesos del pensamiento matemático que necesita el estudiante en su formación y desarrollo cognitivo.

No obstante, los proyectos de formación docente que dirige el gobierno nacional a través del MEN en su mayoría, y entre ellos el ya mencionado “Todos a Aprender”, son programas de momento de un gobierno de paso, generando el riesgo o tendencia a desaparecer, principalmente cuando no se trabaja de manera eficaz en la consolidación de procesos y en la capacidad instalada en las instituciones educativas.

Según estudios preliminares, en algunos países del mundo el laboratorio de matemáticas es una estrategia que ha impactado positivamente en la formación de estudiantes y docentes. Por ejemplo, según Bartolini Bussi y Maschietto (2006), su “Laboratorio de Máquinas Matemáticas (MMLab)”, en el Departamento de Matemáticas de Módena Italia, contiene una colección de instrumentos geométricos (máquinas matemáticas), las cuales se han reconstruido con un objetivo didáctico, según el diseño descrito en textos históricos desde la Grecia clásica hasta el siglo XX. El MMLab trabaja tanto para la investigación didáctica como para la divulgación de las matemáticas. Este trabajo fue el punto de partida del proyecto “Ciencias y Tecnología - Laboratorio de Matemáticas” para la formación de profesores (2008-

2013), en el que muchos profesores construyeron y propusieron sesiones de laboratorio con máquinas matemáticas para sus prácticas pedagógicas.

Igualmente, en estudios sobre didáctica de las matemáticas desarrollados en las últimas décadas se evidencia un interés creciente por destacar el impacto de los manipulativos concretos y materiales didácticos en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, y se analiza las ventajas y oportunidades de su implementación en el aula (Godino, 1998; Thompson, 1990). Es entonces en esta línea que se considera la formación basada en el laboratorio de matemáticas una estrategia apropiada para que, desde este espacio, se diseñen con los docentes actividades que generen aprendizaje significativo, apoyadas en manipulativos concretos y virtuales, o sea, aquellos asociados a la tecnología.

Desde las primeras décadas del siglo XX los manipulativos han ocupado un lugar relevante en las investigaciones realizadas en relación con la construcción y evolución de conceptos en los niños (Dewey, 1938; Bruner, 1960; Dienes, 1969; Piaget, 1971). Estos autores, entre otros, sugieren a través de sus estudios que los conceptos evolucionan en los niños a través de la interacción directa con el entorno, destacando a los manipulativos como medios que permiten que esto suceda.

Piaget, J (1982), citado por Arce, J. (2004), en este sentido afirma: *"un niño familiarizado con el plegado y desplegado de formas de papel durante su labor escolar esta dos o tres años adelantado con respecto a los niños que carecen de esta experiencia"*. Luego, a través de la relación que se establece entre actividades matemáticas y materiales, se logra construir pensamiento matemático desde una forma diferente a la tradicional en cuanto se tiene la posibilidad de interactuar en equipo, experimentar, manipular materiales y resolver problemas a través de diferentes estrategias.

Por lo anterior y desde las demás investigaciones que se han analizado de diferentes partes del mundo, se indica que la formación docente debe contar con un enfoque más práctico que teórico a fin de preparar adecuadamente a los maestros; luego siguiendo esta línea se contempla, a través del presente proyecto el cual tiene como propósito construir y desarrollar un modelo de formación continua de docentes mediante la implementación de un laboratorio de matemáticas, formar a los maestros que atienden el nivel de educación básica primaria, específicamente en el área de matemáticas.

El modelo de formación docente tendrá como herramienta fundamental el laboratorio de matemáticas, el cual contará con su espacio físico diferente del aula, como una estrategia pedagógica que se implementará con el objetivo de utilizar material manipulativo, herramientas que ofrece la tecnología, talleres lúdicos y diversidad de recursos didácticos en actividades dirigidas a la resolución de problemas retadores, cuidadosamente diseñadas para formar a los docentes en el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área de matemáticas, teniendo como referencia las dificultades que presentan los maestros en el ejercicio de su práctica pedagógica, los aprendizajes de los estudiantes y sus desempeños en las pruebas de estado en cada uno de los componentes (tipos de pensamiento) que el Ministerio de Educación establece a través de los RCE[2] para el área de matemáticas en la educación básica primaria.

Como se ha descrito anteriormente, la mínima formación en matemáticas de los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria en esta área y la poca efectividad de los programas de formación que dirige el estado, no garantizan una educación de calidad en los primeros ciclos de formación del estudiante. Por tal motivo se plantea el siguiente problema de investigación. ¿Cómo fomentar la formación en el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, en el docente de la educación básica primaria en el área de matemáticas?

Igualmente, se plantean como preguntas auxiliares las siguientes:

[2] Referentes de Calidad Educativa según el Ministerio de Educación Nacional: Lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias.

1. ¿Qué investigaciones se han realizado y cómo abordan estas la formación de docentes que atienden el nivel de educación básica primaria en el área de matemáticas?

2. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan la formación en el conocimiento disciplinar del área de matemáticas y el conocimiento pedagógico del contenido del docente no licenciado en este campo?

3. ¿Cómo se fortalece el pensamiento matemático en los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria a través del laboratorio de matemáticas y los recursos tecnológicos?

4. ¿Cuál es la percepción que tienen los docentes sobre el nivel de aprendizaje de las matemáticas que tienen sus estudiantes, a qué aspectos atribuyen las dificultades de comprensión que ellos presentan y cómo influyen al respecto desde su rol como docente del área en mención?

5. ¿Cómo validar el modelo pedagógico y el sistema de actividades asociado, para favorecer la construcción de pensamiento matemático en el contexto de la formación de los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria en el área de matemáticas?

Se precisa como objeto de estudio el conocimiento disciplinar del área de matemáticas y el conocimiento pedagógico del contenido del docente no licenciado en este campo, que atiende el nivel de educación básica primaria. Se infiere como objetivo general, construir un modelo de formación continua para los docentes de la educación básica primaria de colegios del Departamento de Cundinamarca, a través del cual se fortalezca el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área de matemáticas. Además, se plantean como objetivos específicos:

- Fortalecer el pensamiento matemático en los docentes de la educación básica primaria, mediante actividades a desarrollar en el laboratorio de matemáticas, y dirigidas a la resolución de problemas retadores.
- Lograr en los docentes un empleo habitual de los manipulativos concretos y virtuales para favorecer, facilitar, motivar y estimular el pensamiento matemático de ellos y de sus estudiantes.

- Validar una estrategia de formación en matemáticas de los docentes de educación básica primaria, que no han sido formados en ese campo a nivel de sus estudios post secundarios.

Acorde con el objetivo, el campo de acción se precisa como la formación de docentes para la enseñanza de las matemáticas en el nivel de educación básica primaria a través de actividades enfocadas en la resolución de problemas a desarrollar en el laboratorio de matemáticas.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presenta la siguiente hipótesis de investigación: Un modelo de formación en matemáticas de los docentes de la educación básica primaria, mediante actividades a desarrollar en el laboratorio de matemáticas, y dirigidas a la resolución de problemas retadores, como una forma innovadora con respecto a los tradicionales programas de formación, conlleva a fortalecer estratégicamente el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, en docentes no licenciados en matemáticas que atienden el nivel de educación básica primaria.

En aras de dar cumplimiento al objetivo planteado, resolver el problema descrito y guiar el curso de la tesis se proponen las siguientes tareas de investigación:

1. Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el proceso de formación de docentes de la educación básica primaria en el área de matemáticas.

2. Determinar los medios y/o herramientas que según el estado del arte son apropiados para el diseño del laboratorio de matemáticas a utilizar en la formación de los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria.

3. Diseñar las actividades a realizar en el laboratorio de matemáticas, así como los instrumentos para recolectar la información.

4. Aplicar las actividades, observar analíticamente su desarrollo y resultados obtenidos.

5. Generar y aplicar métodos de valoración de las experiencias implementadas en relación con los fines que se persigue.

Aportes

El aporte práctico de la investigación consiste en el diseño de actividades a desarrollar en el laboratorio de matemáticas, basadas en la resolución de problemas en el área en mención y otros contextos que se apoyan en las matemáticas, con el objetivo de fortalecer el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área de matemáticas en los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria.

El aporte teórico de la investigación consiste en generar y validar un modelo pedagógico de formación docente en el laboratorio de matemáticas, dirigido a fortalecer el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido, en los docentes de la educación básica primaria, teniendo en cuenta que ellos no son licenciados en matemáticas.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

Diversas son las investigaciones que han trabajado sobre la formación en matemáticas de los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria, a través de diferentes herramientas, manipulativos tanto concretos como virtuales y el uso de la tecnología principalmente. El laboratorio de matemáticas igualmente se destaca en la formación de futuros docentes de matemáticas, evidenciando principalmente la ejecución de actividades centradas en la implementación de entornos didácticos, que fomentan enseñanza y aprendizaje activo.

Los puntos de vista de estas investigaciones se presentan teniendo en cuenta las siguientes categorías:

- Investigaciones que evidencian el impacto del laboratorio de matemáticas en la formación de futuros docentes, y docentes en ejercicio que atienden el nivel de educación básica primaria.
- Investigaciones que evidencian el impacto del laboratorio de matemáticas apoyado en herramientas tecnológicas en la formación de estudiantes de los niveles de educación básica primaria y secundaria.
- Investigaciones que evidencian el uso de manipulativos concretos y virtuales en la educación básica primaria.
- Investigaciones que evidencian la integración de matemáticas y ciencias, a través de actividades experimentales en la formación de estudiantes del nivel de educación básica primaria y secundaria.

1.1 Investigaciones que evidencian el impacto del laboratorio de matemáticas en la formación de futuros docentes y docentes en ejercicio que atienden el nivel de educación básica primaria.

A continuación, se analizarán algunas investigaciones de gran importancia que evidencian el uso del laboratorio en la formación de docentes en el área de matemáticas.

1.1.1 The Laboratory of Mathematical Machines of Modena[3]

Desde la antigüedad, los instrumentos tangibles (como la regla y el compás) forman parte de la experiencia matemática y de la iconografía de las matemáticas; este trabajo de Michela Maschietto da cuenta del Laboratorio de Máquinas Matemáticas, en adelante el MMLab, establecido en el Departamento de Matemáticas de la universidad de Módena. El laboratorio contiene una colección de instrumentos geométricos también llamados máquinas matemáticas; fueron reconstruidas con un objetivo didáctico, según el diseño descrito en textos históricos desde la Grecia clásica hasta el siglo XX. El MMLab trabaja tanto para la investigación didáctica como para la divulgación de las matemáticas.

El objetivo de este trabajo es presentar el MMLab, como un caso inusual de laboratorio de matemáticas que se dio a conocer a través de exposiciones públicas en la ciudad de Módena, Italia inicialmente, luego por diferentes países de Europa.

Además de producir modelos físicos de trabajo, el MMLab entró en el campo de la multimedia. Después de la producción de imágenes en movimiento relativas a pencils of conics[4], en los años 90, el MMLab comenzó a producir copias "virtuales" de instrumentos, mediante diversos programas informáticos del ámbito didáctico (por ejemplo, Cabri-géomètre) o profesional (por ejemplo, Cinema4d y Java).

De este proyecto se destacan los resultados que a continuación se describen. Los profesores de matemáticas pueden aprender de las estrategias utilizadas en el aprendizaje informal y fomentar una actitud positiva hacia las matemáticas haciendo hincapié en el descubrimiento y el disfrute de los aspectos de la actividad matemática, concientizar a la gente de que las matemáticas son una parte del desarrollo de la cultura humana relacionada con el arte, la tecnología y la vida cotidiana.

---

[3] Maschietto, M. (2005). The laboratory of mathematical machines of Modena. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *57*, 34-37

[4] *"In geometry, a pencil is a family of geometric objects with a common property, for example the set of lines that pass through a given point in a plane, or the set of circles that pass through two given points in a plane"*
Recuperado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Pencil_(mathematics).

El trabajo con el uso de copias de instrumentos históricos tiene el potencial de abordar cuestiones culturales y afectivas, y, por otro lado, responde a la necesidad de construir el significado de los objetos matemáticos y de practicar procesos matemáticos como la conjetura y la demostración. Por estas razones, la actividad con los instrumentos del MMLab puede interactuar eficazmente tanto con el aprendizaje informal como con el formal.

Finalmente, teniendo en cuenta este proyecto, se establece que un laboratorio de matemáticas es más bien una metodología, basada en actividades diversas y estructuradas, destinada a la construcción de significados de objetos matemáticos, en la cual los docentes o estudiantes aprenden haciendo, viendo, imitando, comunicándose entre sí, es decir, practicando. En las actividades de laboratorio, la construcción de significados está estrictamente ligada por un lado al uso de herramientas y, por otro, a las interacciones entre personas que trabajan juntas sin distinguir entre profesores y alumnos.

Este trabajo y su análisis aporta a la investigación propuesta en el presente documento, para reproducir algunas máquinas matemáticas y proponer actividades a desarrollar en el laboratorio con los docentes de la educación básica primaria, y sensibilizarlos con respecto al trabajo mediante secuencias didácticas que surjan de la relación entre conceptos matemáticos y elementos del contexto que permitan la construcción de significado robusto de conceptos y la resolución de problemas retadores.

1.1.2 Machines as tools in teacher education[5]

Este trabajo de Maria G. Bartolini Bussi y Michela Maschietto tiene como objetivo presentar algunas cuestiones relativas a la formación del profesorado, tanto en la enseñanza primaria como en la secundaria, basándose en la actividad del Laboratorio de Máquinas Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Módena y Reggio Emilia.

---

[5] Bussi, M. G. B., & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 183-208). Brill Sense.

El marco teórico en este trabajo se estructura a partir de los siguientes componentes analíticos: un componente epistemológico, con atención al significado matemático; un componente didáctico, con atención a los procesos del aula; y un componente cognitivo, con atención a los procesos de aprendizaje (Arzarello y Bartolini Bussi, 1998).

Este enfoque de la actividad en las aulas de primaria y secundaria se lleva a cabo en la formación de futuros profesores y profesores en ejercicio que tiene lugar en la Facultad de Educación de la Universidad de Modena y Reggio Emilia. De acuerdo con la normativa gubernamental italiana de 1998, la formación del profesorado se organiza en torno a tres tipos principales de actividades: conferencias (para grandes grupos de futuros profesores, hasta 100 o más), aprendizaje en la escuela (participación individual en las actividades normales del aula, bajo la supervisión de profesores expertos) y laboratorios.

La metodología que se utiliza consiste en que los futuros profesores exploran máquinas geométricas y aritméticas. Al principio, el formador de profesores actúa como profesor de aula, mientras que los profesores en ejercicio y también los futuros, actúan como estudiantes. Normalmente se les asignan tareas similares a las que se podrían utilizar con los alumnos de primaria y secundaria. Posteriormente se realiza una actividad metacognitiva, para explicitar los vínculos entre la actividad matemática, tal y como la experimentan los profesores, y el marco teórico.

En consecuencia, en este trabajo se destaca algunos casos de máquinas aritméticas y geométricas, en cuyas características se incluyen: deben ser exploradas con las manos y los ojos, en tanto se evidencia el potencial de la actividad corporal que está en el centro de la aplicación actual de la neurociencia y del lenguaje cognitivo de la educación matemática.

En las aulas de matemáticas, el recurso de los manipulativos físicos es cada vez menos frecuente y se sustituye con demasiada frecuencia por las TIC; cada vez es más fácil obtener copias virtuales de los manipulativos también para la escuela primaria. El trabajo no está en contra de los objetos virtuales, ya que una tarea típica en el Laboratorio de Máquinas Matemáticas es el modelado de máquinas geométricas.

El papel del formador de profesores en el laboratorio para los futuros profesores es similar al del profesor en el aula; se adelantan tareas muy similares con el fin de que ellos las reproduzcan en los diferentes contextos como un modelo de actividad efectiva en el aula para ser implementada en la profesión docente.

Resulta de interés este trabajo para la investigación que se propone, en cuanto presenta una estructura sólida a través de los componentes teórico, metodológico y práctico, en el contexto de formación del personal docente que atiende los ciclos de educación básica primaria y secundaria, a través del laboratorio de matemáticas y específicamente de actividades que fomentan el aprendizaje activo como son los manipulativos concretos. Por lo tanto, es posible consolidar la propuesta de construcción de un modelo pedagógico de formación continua de docentes en ejercicio a través del laboratorio de matemáticas, como un espacio diferente del aula y establecido en cada institución, lo que permitirá un trabajo sistemático tanto para la formación docente como para el desarrollo de prácticas pedagógicas del docente con sus estudiantes.

1.1.3 Problem-based learning and teacher training in mathematics: how to design a math laboratory[6]

En este trabajo Marina Cazzola, plantea como objetivo presentar la estructura de un laboratorio de matemáticas y los logros obtenidos por los estudiantes que se encuentran adelantando estudios de formación como futuros docentes de primaria, en la Universidad de Milán-Bicocca. El laboratorio que se describe está específicamente dirigido a estimular en los estudiantes la comprensión, a través de su

[6] Cazzola, M. (2018). Problem-Based Learning and Teacher Training in Mathematics: How to Design a Math Laboratory. In *International Technology, Education and Development Conference* (pp. 9038-9043). IATED

experiencia, de cómo funciona realmente PBL (Aprendizaje Basado en Problemas) y a capacitarlos para diseñar actividades de PBL que puedan utilizar en un laboratorio una vez que se conviertan en maestros. La metodología que sigue este proyecto es de tipo cualitativo, los estudiantes en formación deben asistir a los laboratorios de PBL, actividad en la cual discuten sobre el potencial de la herramienta laboratorio de matemáticas en la enseñanza. Además, deben realizar ciertas actividades y proponer otras para desarrollar con sus estudiantes cuando sean docentes en ejercicio.

Por lo tanto, en un camino de aprendizaje ideal, los estudiantes deben tener la oportunidad de experimentar y aplicar sus conocimientos matemáticos con la ayuda de laboratorios, junto con las clases tradicionales, en las que los estudiantes trabajan activamente en la resolución de problemas.

Igualmente, identifica el autor que, a pesar de las investigaciones que documentan la eficacia del aprendizaje activo, tales metodologías no son comunes en la práctica real de la enseñanza en la escuela ya que los profesores suelen basarse en métodos tradicionales que se perpetúan a sí mismos, especialmente en matemáticas. *"Un profesor que ha adquirido todo lo que sabe de matemáticas de forma puramente receptiva difícilmente puede promover el aprendizaje activo de sus alumnos."*

En conclusión y según el informe de las actividades, el laboratorio es visto por todos los estudiantes como un complemento indispensable de las clases, y tras esta experiencia todos ellos afirman que adoptarán las metodologías utilizadas en el laboratorio cuando sean profesores.

Luego, la investigación resulta relevante para la propuesta que se presenta en este documento, en cuanto comparte un modelo de laboratorio para desarrollar la experiencia con futuros docentes de educación básica primaria quienes desarrollan actividades dentro del enfoque aprendizaje basado en problemas. Los resultados que logran los estudiantes en formación favorecen los procesos pedagógicos en el aula, permitiendo fortalecer la hipótesis propuesta en donde se espera consolidar un modelo de formación continua de docentes en ejercicio que atienden el nivel de educación básica primaria, mediante el diseño de un laboratorio de matemáticas.

1.1.4 Investigating Remote Access Laboratories for Increasing Pre-service Teachers' STEM Capabilities[7]

Este trabajo de Ting Wu y Peter Albion, ha utilizado un método de estudio de casos, con el objetivo de investigar los factores que influyen en el uso por parte de los docentes en formación (PST) y docentes en ejercicio, de los laboratorios de acceso remoto (RAL) con actividades destinadas a desarrollar su capacidad para enseñar STEM en el nivel de educación básica primaria.

Para los autores, para lograr un futuro productivo y progresivo para Australia, se requiere de una fuerza laboral con altos niveles de alfabetización científica y digital desarrollada a través de estudios de STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Sin embargo, la fuerza laboral australiana tiene escasez de graduados de STEM, incluidos profesores, causada por una disminución en los estudios en estas áreas a nivel terciario que se deriva de una alta tasa de abandono de los cursos y el tiempo inadecuado dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de STEM en las escuelas de primaria y secundaria.

Esta investigación se realizó con docentes en formación inscritos en un curso de último año diseñado para prepararlos en la enseñanza del Currículo Australiano.

Para las escuelas primarias se han dispuesto los RALFIE (Laboratorios de acceso remoto para la diversión, la innovación y la educación) como un esfuerzo conjunto entre académicos en Ingeniería y Educación de la Universidad del Sur de Queensland, ofreciendo una oportunidad para brindarles actividades agradables que tenían el potencial de aliviar la ansiedad sobre STEM a través de experiencias exitosas.

Este proyecto es único porque proporcionó actividades prácticas y remotas que se incorporaron a las clases para preparar a los maestros en formación y para enseñar el plan de estudios de Tecnologías

[7] Wu, T., & Albion, P. (2019). Investigating Remote Access Laboratories for Increasing Pre-service Teachers' STEM Capabilities. *Educational Technology & Society, 22* (1), 82–93.

como un medio para aumentar su confianza en las actividades STEM. Del desarrollo de estas, los investigadores resaltan que las experiencias prácticas brindan una sensación de alegría que fue útil para aliviar la sensación de ansiedad y frustración con el uso de la robótica. Anissa, una de las participantes dijo: *"Estaba comprometida, como si tuviera cosas con las que jugar",* las actividades prácticas son atractivas ya que los PST pueden retocar, jugar y construir cosas. Jugar y manipular equipos prácticos era importante para los PST que estaban en el nivel inicial de uso de la robótica. Pasar de las actividades en concreto, realizadas por los creadores o fabricantes, a las actividades abstractas del usuario estaba en consonancia con la teoría de las etapas de aprendizaje de Piaget (Piaget, 1974).

Este artículo ha resultado interesante para la presente investigación en tanto da cuenta de experiencias en ambiente de laboratorio, dirigidas a docentes en formación, con un ingrediente adicional al brindar la oportunidad de interactuar de manera remota a través de las diferentes herramientas que ofrece la tecnología. Se resalta igualmente la participación de profesionales como los ingenieros quienes en equipo con los pedagogos diseñan las actividades de formación para los futuros docentes. Luego se evidencia una estrategia con la posibilidad de ampliarse al diseño y ajuste del currículo de matemáticas en la educación básica primaria, de tal forma que se priorice y articule en equipo (pedagogos, ingenieros y otros profesionales), las competencias que se requieren trabajar en los estudiantes desde sus primeras etapas de formación, teniendo en cuenta las necesidades actuales, las nuevas formas de interacción y los nuevos contextos laborales.

1.1.5 Laboratorio de matemática recreativa para el desarrollo del pensamiento lógico matemático[8]

Este trabajo de Luz Stella Gómez Herrera y Marino Villegas Sepúlveda es una iniciativa del Departamento de Matemáticas de la Institución Educativa Santa Sofía en el municipio de Dosquebradas, Risaralda. El

[8] Herrera, L. S. G., & Sepúlveda, M. V. (2007). Laboratorio de matemática recreativa para el desarrollo del pensamiento lógico matemático. *Entre Ciencia e Ingeniería*, (2), 127-144.

objetivo del Laboratorio de Matemática Recreativa es el de generar un espacio donde se pueda reflexionar sobre las estrategias lúdicas aplicadas al desarrollo de procesos lógicos en estudiantes de básica primaria, secundaria y media vocacional, utilizando una metodología de enseñanza aprendizaje que conlleve al desarrollo del pensamiento lógico, crítico y autónomo. El trabajo pretende ser útil tanto a estudiantes y docentes como a otras personas interesadas en la matemática recreativa. Los recursos y actividades planteadas responden a la recopilación, creación y adaptación de actividades y juegos probados por los docentes, tanto en contextos de formación universitaria, como en el trabajo directo con educandos.

Su aporte central se basa en una metodología recreativa orientada a lograr que la enseñanza sea más motivadora, tanto para niños, niñas y adolescentes como para maestros y maestras, logrando resultados positivos en cuanto a interés y una mayor ejercitación. Con estos objetivos en mente, los autores destacan las siguientes fortalezas: Desde su creación en junio del 2004 ha sido motor de avances innovadores, pedagógicos, académicos e investigativos en el seno de la Institución Educativa Santa Sofía; es un punto de encuentro entre profesores, estudiantes e investigadores en torno a problemas abiertos donde se requiere elementos de lógica matemática, simulación numérica y modelación matemática para alcanzar soluciones efectivas a problemas interdisciplinarios; potencia las capacidades de los y las maestras para que sean capaces de promover la adquisición de las habilidades y destrezas del razonamiento lógico matemático de una manera activa y eficaz en el salón de clase.

Como dificultades en el estudio los autores describen las siguientes. El juego no ha sido comprendido por docentes, padres de familia y estudiantes con la formalidad y la importancia que se merece, sobre todo para el desarrollo del pensamiento lógico matemático. En el medio colombiano se encuentra muy arraigado el paradigma de que la matemática es netamente abstracta, descontextualizada de toda realidad, tiene muy poca relación con lo cotidiano y mucho menos con lo lúdico. Finalmente, mencionan que las políticas educativas restringen cada vez más el tiempo y los recursos que el maestro puede dedicar a la investigación.

El estudio es una referencia significativa para la investigación que se presenta en el presente documento en cuanto describe el impacto del laboratorio de matemáticas en la educación básica primaria y secundaria; en este se evidencia cómo se favorece el desarrollo de habilidades del pensamiento para hacer estudiantes competentes en matemática y resolución de problemas teniendo en cuenta los estándares y lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional.

Las dificultades que identifican los autores permiten deducir que la estrategia laboratorio de matemáticas es desconocida para la comunidad educativa, en cuanto esta no comprende y tampoco reconoce el valor y la pertinencia que hace posible un aprendizaje significativo.

La investigación se desarrolla en los niveles de educación básica primaria, secundaria y media, por lo tanto, el proyecto tuvo que incluir a docentes no licenciados en matemáticas. Sin embargo, el estudio no da cuenta de este hecho, de la forma de participación e interacción en el espacio laboratorio de matemáticas que han tenido estos docentes.

1.1.6 La elaboración y uso de materiales manipulativos en la clase de matemáticas desde la perspectiva del laboratorio de matemáticas[9]

Este trabajo de Octavio Augusto Pabón Ramírez y otros docentes de la Universidad del Valle, fue presentado en el Congreso Interamericano de Educación Matemática CIAEM 2011, dentro de la modalidad taller. Tiene como objetivo ofrecer elementos teóricos y metodológicos para la integración de

[9] Augusto, O, & Yineth, C. (2011) La Elaboración y uso de Materiales Manipulativos en la clase de Matemáticas desde la perspectiva del Laboratorio de Matemáticas.

materiales manipulativos en las clases de matemáticas, reivindicando la importancia de la participación activa de los profesores y estudiantes en la elaboración y uso fundamentado de estos materiales.

Los autores señalan que, aunque el interés por integrar los recursos y materiales manipulativos no es nuevo en el área de matemáticas, los profesores suelen mostrar un recelo frente a la posibilidad de integrarlos a sus prácticas de enseñanza, particularmente asociado a la poca o nula capacitación sobre el uso y potencialidades de los mismos y su eventual presencia en un diseño curricular.

Se destaca la importancia de los materiales concretos para iniciar a los estudiantes en las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) de una forma más dinámica e interesante para ellos, saliéndose de la enseñanza tradicional a la cual están expuestos, debido a que estas operaciones son base para ir construyendo un conocimiento matemático a lo largo de su educación y en el contexto de su vida cotidiana. En un segundo momento los autores exponen el sentido y posibilidades del Laboratorio de Matemáticas, ¿cómo está constituido?, ¿qué se puede lograr con este espacio, y qué se necesita para implementarlo en una institución educativa? Para ello presentan algunos materiales, tales como regletas de Cuisenaire y el ábaco naperiano, y los implementos que se necesitan para que los asistentes los elaboren, observen las características, importancia, ventajas y desventajas.

Finalmente, reflexionan en torno de cómo lograr que el estudiante se sienta motivado por participar y sentirse involucrado en la construcción de un ambiente en el Laboratorio de Matemáticas, a través de la elaboración y manejo de materiales manipulativos en este espacio.

Actualmente, el laboratorio de matemáticas descrito atiende básicamente tres tipos de escenarios: Matemáticas de la cotidianidad, matemáticas en contextos curriculares y matemáticas de investigación. En este se construyen, rediseñan y se piensan actividades relacionadas con matemáticas para que los protagonistas (sean estudiantes, docentes o cualquier persona) vean distintas facetas del trabajo que desde la educación matemática puede aportar una visión compleja de la vida en sociedad.

De esta manera el laboratorio, a través de una perspectiva denominada matemáticas experimentales, se ha convertido actualmente en una estrategia pedagógica donde se vinculan los tres escenarios anteriormente mencionados, en actividades de diversos actores, por ejemplo, los estudiantes que están culminando su licenciatura y que realizan sus prácticas profesionales apoyados por el laboratorio, docentes en ejercicio (sector público y privado) que asisten al laboratorio a nutrir sus prácticas, estudiantes de pregrado y maestría que buscan diversidad de materiales para sus trabajos de investigación y proyectos de extensión, instituciones (oficiales y privadas) que asisten también a conocer la propuesta de trabajo y de esta manera fortalecer el compromiso de ayudar a ir cerrando la brecha entre la educación media y la universitaria.

Es así como a través de estas propuestas se consolida el laboratorio como un espacio de reflexión continua sobre la actividad matemática, como una estrategia pedagógica de trabajo con diversos tipos de recursos (incluyendo nuevas tecnologías) y como una estrategia de divulgación ante la comunidad educativa de diversos aspectos de la educación matemática y su relación con problemáticas de la sociedad y del mundo actual.

Este trabajo resulta importante para la presente investigación en cuanto realiza una descripción significativa apoyada en destacados referentes teóricos, sobre la importancia de la utilización de manipulativos en el laboratorio de matemáticas; sin embargo, no es una estrategia o modelo de formación continua y sistemática de estudiantes o docentes, como sí lo es la propuesta que se presenta en el presente documento.

1.2 Investigaciones que evidencian el impacto del laboratorio de matemáticas apoyado en herramientas tecnológicas en la formación de estudiantes de los niveles de educación básica primaria y secundaria.

1.2.1 New educational tools to encourage high-school students' activity in Stem[10]

Este trabajo de Vera Mayorova, Dmitriy Grishko y Victor Leonov, que se desarrolla en la Universidad Técnica Estatal Bauman de Moscú, tiene como objetivo utilizar las nuevas herramientas educativas desarrolladas para fomentar el interés de los estudiantes de secundaria en las disciplinas STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), con el fin de aumentar la calidad del aprendizaje de estas disciplinas, lo que redundará en una formación de mayor calidad de los futuros científicos e ingenieros.

Este proyecto incluye cursos de laboratorio desarrollados en los campos de la física, las tecnologías de la información y las matemáticas; para su realización la universidad convoca a los estudiantes de los últimos grados de secundaria y desarrolla con ellos prácticas de laboratorio dirigidas por docentes universitarios. Las actividades se valoraron a través de encuestas a docentes y estudiantes evidenciando en estas altas calificaciones.

Lo anterior permite deducir que los docentes requieren una formación de contenido en educación científica basado en principios de integración, utilizando un enfoque sistémico y teniendo en cuenta las habilidades de la persona; por lo tanto, es necesario resolver tareas o investigaciones especialmente desarrolladas y estructuradas de tal manera que orienten el proceso de pensamiento de un estudiante en una dirección determinada, por ejemplo, experimentos y actividades prácticas en el estudio de la aritmética, la geometría, la probabilidad y la estadística.

La experiencia educativa práctica revela la falta de imaginación geométrica o espacial entre los estudiantes de la escuela secundaria moderna. Desafortunadamente, la mayoría de los graduados

[10] Mayorova, V., Grishko, D., & Leonov, V. (2018). New educational tools to encourage high-school students' activity in stem. *Advances in Space Research*, *61*(1), 457-465

modernos parecen carecer incluso de imaginación geométrica básica. Es posible formar tal imaginación geométrica con mayor éxito durante la actividad matemática de laboratorio, utilizando algunas formas básicas como material de aprendizaje y ayudas visuales, así como otras formas no tradicionales pero útiles.

Para avanzar en el desarrollo de nuevas herramientas educativas, se sugiere la creación de medios de educación especiales para los maestros de escuela. Esto asegurará su conocimiento de las prácticas laborales existentes y dará confianza a los maestros para diseñar cursos de laboratorio y llevar sus prácticas al aula.

Este proyecto resulta significativo para la presente investigación en cuanto sugiere implícitamente la implementación del laboratorio desde la educación básica primaria como una forma de mejorar los aprendizajes en áreas tales como: matemáticas, ciencias, tecnología e informática. De esta manera los estudiantes desde sus primeros niveles de formación inician a explorar y considerar su proyecto de vida, trabajando en el laboratorio simulaciones de la realidad en diferentes campos del conocimiento, actividades en las que se integre variedad de recursos, entre estos los tecnológicos.

Igualmente, en el proyecto se evidencia la necesidad de fortalecer la formación de los maestros de la educación básica primaria, al considerarse actores fundamentales en el proceso de enseñanza y específicamente en la innovación de prácticas que favorezcan el uso de diversidad de recursos mediante estrategias tales como el laboratorio de matemáticas.

1.2.2 The experiences of South African High-School girls in a fab lab environment[11]

Esta investigación de Nomusa Dlodlo y Ronald Noel Beyers da cuenta de un esfuerzo para abordar el problema de la desigualdad en el acceso de niñas y mujeres a la educación y las carreras científicas, de

[11] Dlodlo, N., & Beyers, R. N. (2009). Experiences of South African high school girls in a fab lab environment.

ingeniería y tecnológicas (SET). Las niñas participaron en un entorno de prototipado rápido de alta tecnología de un laboratorio de fabricación que tenía como objetivo estimular la creatividad y la innovación.

Esta fue una investigación cualitativa utilizando un estudio de caso; las estudiantes fueron expuestas al proceso de investigar, diseñar, hacer, evaluar y comunicar. Como parte de la intervención de Fab Kids, las estudiantes inicialmente conceptualizan sus ideas en papel discutiendo posibles soluciones entre ellas, haciendo algunas investigaciones para obtener más ideas en Internet, y proponiendo varias alternativas de diseño entre las cuales elegirían la más adecuada. El diseño elegido fue realizado en la computadora usando los paquetes de Open Office Draw, antes de ser enviado a una cortadora láser, se anima a las estudiantes a imprimir primero sus diseños en cartones gruesos. Los prototipos de cartón son probados y refinados para eliminar todos los posibles errores. A las alumnas sólo se les asigna una hoja de cartón y una hoja de plexiglás para su diseño, elementos que representan el presupuesto que tienen disponible. El presupuesto limitado significaba que las alumnas tenían que estar seguras de su diseño antes de realizar su prototipo final. Se trata de enfatizar en la gestión de los limitados recursos disponibles para la producción del prototipo final. También se trata de trabajar con las manos, pensamiento lateral, resolución de problemas, creatividad, innovación, adquisición de habilidades informáticas, autoestima e investigación.

Dentro de los hallazgos en esta investigación se destacan las siguientes. Hay muchas habilidades que las niñas adquirieron como resultado de participar en la sesión de Fab Kids. El enfoque basado en el diseño fue una integración de varias áreas temáticas. El enfoque se centró: en el diseño asistido por ordenador de bajo nivel; en las habilidades de investigación, ya que las estudiantes tenían que buscar en Internet información sobre el objeto que se iba a diseñar; en las habilidades sociales, en el sentido de que ellas tenían que aprender a comunicarse entre sí; en el análisis matemático, ya que tenían que dimensionar sus diseños para que encajaran en una sola hoja de cartón o de plexiglás; igualmente en las habilidades de dibujo técnico para el diseño; y en las habilidades de escritura, ya que tenían que redactar un informe al final del ejercicio. Trabajar con un presupuesto limitado, restringiéndolas a una sola hoja de material, era a su vez una forma de impartir habilidades empresariales.

El diseño final fue diferente para cada grupo en cuanto a la apariencia del prototipo y la creatividad. Aquellos con un fondo de dibujo técnico reflejaban un diseño de calidad, en contraposición a los que optaron por una solución más funcional. En las escuelas sudafricanas se introduce a los alumnos en el dibujo técnico en las clases de tecnología de séptimo grado. Además, las niñas indicaron que no habían elegido escuelas técnicas porque no habían estado expuestas a la tecnología anteriormente en sus vidas, y el temor de aventurarse en campos desconocidos era aterrador para ellas. Factores como el acceso a las tecnologías y a profesores cualificados en el contexto escolar tienen un gran impacto en los logros y el progreso tecnológico de los niños.

Las alumnas mostraron ideas creativas con soluciones innovadoras, interactuaban entre ellas y discutían los problemas a medida que iban surgiendo. Esta estructura de aula informal tuvo éxito ya que alentó la generación de nuevas ideas y brindó oportunidades para observar cómo sus compañeras resolvían problemas similares.

Tanto las actividades de resolución de problemas como las discusiones estimulan el interés por la situación. La resolución de problemas tiene el potencial de hacer que los alumnos tomen conciencia de sus propias insuficiencias e inconsistencias de su conocimiento previo de un tema, aumentando así la actividad encubierta o abierta dirigida a explorar más a fondo conceptos e ideas.

Las niñas indicaron que esta fue una sesión interesante que estimuló su interés en las computadoras y la tecnología. Indicaron que estaban deseosas de aprender más acerca de las computadoras como resultado de esta estimulante experiencia. Estaban entusiasmadas por el sentido de logro en su capacidad de diseñar un producto desde cero y producir un prototipo de alta calidad en un período de tiempo tan corto, lo cual les proporcionó cierto grado de satisfacción.

El hecho de que el enfoque se basara en una situación del mundo real y en un enfoque práctico marcó la diferencia. En los cursos de método de ciencias elementales las conexiones con el mundo real son de vital importancia para involucrar a los niños en el aprendizaje de las ciencias.

En conclusión, la investigación tiende a indicar que este trabajo en un entorno de prototipado rápido es un enfoque que es efectivo para producir estudiantes con un nuevo enfoque curricular, de trabajo en equipo, desarrollando habilidades de investigación, comunicación, diseño, dibujo técnico, empresariales, informáticas, creatividad, innovación, pensar fuera de la escuela, y aprendizaje cooperativo en un entorno diferente al de la clase.

La relevancia de este trabajo para la propuesta que se presenta en el presente documento radica en la importancia de innovar vinculando diversidad de material en las prácticas pedagógicas, recursos del entorno y herramientas tecnológicas. Este tipo de prácticas, además de favorecer la construcción de significado robusto de conceptos, genera habilidades en la resolución de problemas, una estrategia para que el estudiante relacione su propio contexto, observe y analice la importancia por ejemplo de las matemáticas en los diferentes campos del conocimiento, fortaleciendo de esta forma y desde temprana edad los proyectos de vida.

1.3 Investigaciones que evidencian el uso de manipulativos concretos y virtuales en la educación básica primaria.

1.3.1 Revisiting matemáticas manipulative materials [12]

En este trabajo, Paul Swan y Linda Marshall revisan el uso de los manipulativos. Al respecto, se establece como objetivo el revisar los diferentes tipos de manipulativos y las formas en que son utilizados por los docentes de matemáticas en las escuelas primarias de Australia Occidental.

[12] Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(2), 13-19.

El trabajo se desarrolló a través de diferentes instrumentos, tales como encuestas y entrevistas, que los autores aplicaron a todas las escuelas primarias y secundarias designadas de Australia Occidental, de las cuales recibieron respuestas de más de 820 maestros de 250 escuelas. Se trata de al menos un profesor en cada una de aproximadamente un tercio de todas las escuelas de Australia Occidental que respondieron a la encuesta. Las respuestas procedían de maestros de grandes escuelas primarias metropolitanas, escuelas secundarias de distrito y escuelas remotas de la comunidad aborigen, incluyendo la diversidad de instituciones educativas tales como colegios católicos, anglicanos, luteranos e islámicos, hasta Montessori y escuelas alternativas.

En el año 1997 Bob Perry y Peter Howard realizaron una investigación similar también en Australia (Nueva Gales del Sur), cuyos resultados se van revisando y comparando en esta investigación. El proyecto permitió identificar que los manipulativos más usados por los maestros de primaria en la clase de matemáticas corresponden entre otros a: bloques de atributos, bloques de base diez, barras Cuisenaire, cubos multilink, bloques de patrones, polidrones/ geoshapes, piezas cuadradas y cubos unifix, paletas, klicko, lego, dados, ruedas, tortas de fracciones, tangrams, contadores, dominós y relojes.

¿Por qué los docentes usan manipulativos? Según Perry & Howard (1997), se debe a dos razones principalmente: los maestros creen que los materiales benefician el aprendizaje de las matemáticas de los niños y que los niños disfrutan usándolos. El uso de manipulativos es apoyado por casi todos los maestros de primaria a lo largo de todos los años. Ellos creen que los materiales de manipulación matemática ayudan en el aprendizaje; sin embargo, los comentarios escritos y las entrevistas subsiguientes revelaron que los maestros no pudieron identificar exactamente qué es acerca de los manipulativos que ayuda en el aprendizaje de matemáticas. Esto es preocupante, porque sin una comprensión clara de cómo, o incluso si, los manipulativos matemáticos mejoran el aprendizaje de las matemáticas, los profesores pueden carecer de convicción al usarlos o abandonarlos a la primera señal de cualquier problema asociado con su uso.

Si bien esto puede parecer razonable, se pone a consideración cómo los niños están expuestos a algunos de los conceptos más difíciles de las matemáticas, por ejemplo, las fracciones más adelante en su escolarización, y cómo varios manipulativos pueden apoyar el desarrollo de los conceptos de fracciones. Perry y Howard (1997) describieron una percepción entre los niños mayores de que puede ser "infantil" usar manipulativos, y muchos maestros hicieron comentarios similares en la encuesta y entrevistas. Luego el uso de manipulativos va desapareciendo desde los últimos grados de la primaria hasta limitarse en secundaria sólo a prácticas esporádicas.

De esta investigación y haciendo comparación con el trabajo en esta dirección de Bob Perry y Peter Howard del año 1997, es posible llegar a algunas conclusiones.

Los manipulativos benefician el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Luego, el uso de manipulativos por parte de los maestros debe fortalecerse, a través de un desarrollo profesional apropiado, dentro del contexto general del aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos. En los primeros grados de la escuela primaria hay un fuerte apoyo de los maestros al uso de manipulativos. Sin embargo, todos los niños necesitan acceso y disponibilidad de una amplia gama de manipulativos a medida que se encuentran con nuevos conceptos matemáticos y continúan construyendo significados matemáticos.

Las escuelas y los sistemas educativos deben reconocer que las aspiraciones de sus maestros de beneficiar el aprendizaje de los niños en la medida de lo posible, significa que los manipulativos deben estar a disposición de todos los maestros y de todos los niños en la medida en que los necesiten.

Los autores creen que se pueden obtener beneficios potenciales utilizando materiales de manipulación matemática cuando sea apropiado y de manera sistemática. Para ser efectivo, sin embargo, simplemente poner las manos sobre los materiales manipulables no impartirá mágicamente la comprensión matemática. Sin la discusión y la enseñanza apropiadas para hacer explícitos los vínculos con las matemáticas, puede ocurrir exactamente lo contrario; los niños pueden terminar con conceptos matemáticos erróneos.

Esta investigación permite deducir como oportunidad de mejora, lograr que los docentes determinen con exactitud cuáles manipulativos usar y cómo utilizarlos, de tal forma que siempre favorezcan el aprendizaje, preocupación que expresan los autores al identificar este aspecto en la investigación, pues es inminente el riesgo que el docente sin convicción al respecto abandone el uso de manipulativos en su práctica pedagógica.

Para esta investigación es un aporte significativo, puesto que da cuenta del trabajo que realizan con los manipulativos concretos los profesores que atienden el nivel de educación básica primaria. Los hallazgos y conclusiones evidencian la importancia de estos recursos para la comprensión de conceptos, lo cual es posible extender a la construcción de significado robusto de los mismos. Igualmente, se destaca en la investigación la necesidad de una formación adecuada para los profesores de tal forma que les permita reconocer cuáles y cómo utilizar los manipulativos en el trabajo de un determinado aprendizaje, que sean conscientes de que, ante la complejidad en la enseñanza y aprendizaje de algunas temáticas, disponen dentro de las posibles estrategias el uso de recursos manipulativos como recursos fundamentales para el trabajo en el laboratorio de matemáticas.

1.3.2 Virtual vs concrete manipulatives in mathematics teacher education: Is one type more effective than the other?[13]

En este trabajo de Annita W. Hunt, Kelli L. Nipper y Linda E. Nash, de la Universidad de Clayton State se presentan los resultados de un estudio de tres años en el que 78 candidatos a profesores de matemáticas

[13] Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective than the Other? *Current Issues in Middle Level Education*, *16*(2), 1-6

de educación básica utilizaron varios manipulativos concretos y virtuales para estudiar fracciones, números enteros y decimales. Luego compararon cada tipo de manipulativo para facilitar su uso y ayudar a comprender los conceptos tratados. Los estudiantes trabajaron en colaboración para construir una comprensión conceptual de la aritmética de fracciones y números enteros usando esos manipulativos.

La comprensión de los estudiantes se evaluó mediante discusiones en grupos pequeños y en clase entera, y mediante pruebas de rendimiento.

En el trabajo se proyectaron las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué perciben los profesores como las ventajas y desventajas de cada formato de manipulativo (concreto y virtual)? Específicamente, ¿qué tipo de juego se puede utilizar en la formación de profesores de matemáticas? ¿Existe alguna diferencia en la efectividad de los dos formatos para construir la comprensión conceptual de los maestros en formación? ¿Es un tipo más fácil de usar o más fácilmente disponible que el otro? ¿Existe alguna ventaja en la incorporación de ambos tipos de manipulativos? Si es así, ¿impacta el orden en que se usan, el desarrollo de la comprensión conceptual o la capacidad de los estudiantes para hacer la transición a los algoritmos abstractos?

A través de una metodología cualitativa, se llevó a cabo la evaluación en la cual cada concepto fue estudiado usando tanto manipulativos concretos como virtuales. Los estudiantes completaron una encuesta en la que compararon los dos tipos de manipulativos para facilitar su uso, la utilidad para construir la comprensión conceptual, y otras ventajas y desventajas de cada uno.

Los resultados de este estudio indican claramente que los maestros en formación encontraron que los manipulativos concretos eran más fáciles de usar y más útiles para construir la comprensión conceptual. Los estudiantes también expresaron la opinión de que el orden en que se utilizan los manipulativos es importante. La mayor parte de la experiencia de pensamiento con lo concreto debería preceder a la experiencia con lo virtual. Un estudiante planea *"usar manipulativos concretos primero en mi clase y luego manipulativos virtuales para dominar la información matemática".*

En al menos una ocasión en la que las instrucciones sobre cómo introducir un problema en particular prácticamente no estaban disponibles, un estudiante trabajó hacia atrás desde el algoritmo para descifrarlo, comentando que el uso de manipulativos virtuales *"a veces te obliga a pensar de forma abstracta"*. Otro dijo: *"No hay manera de que pudiera haber hecho esto abstractamente sin usar primero manipulativos concretos. Me ayudó a ver la lógica detrás de todo esto"*. Otros estudiantes manifestaron: *"ojalá me hubieran enseñado de esta manera, esto tiene mucho más sentido"; "Siempre odié trabajar algunos temas tales como: fracciones, números enteros negativos, etc., pero ahora lo entiendo".*

La investigación durante tres años llevó a las siguientes observaciones: la incorporación de ambos tipos de manipulativos en la instrucción de los futuros profesores de matemáticas no sólo les ayuda a construir su propia comprensión conceptual, sino que también les proporciona estrategias pedagógicas sólidas para que las utilicen con sus futuros estudiantes.

Los manipulativos concretos parecen ser más efectivos para construir la comprensión conceptual de los maestros en formación, y se utilizan manipulativos virtuales para reforzar esos conceptos.

La mayoría de los estudiantes encontraron que los manipulativos concretos eran más fáciles de usar, pero no necesariamente más fácilmente disponibles que los virtuales. Por lo tanto, se deduce la existencia de una clara ventaja en la incorporación de ambos tipos de manipulativos.

El orden del uso de los manipulativos parece impactar el desarrollo de la comprensión conceptual y la habilidad de los estudiantes para hacer la transición a los algoritmos abstractos. Se recomienda el uso de los manipulativos concretos, seguido de los manipulativos virtuales.

Una vez que la comprensión conceptual se efectúa con manipulativos concretos, el uso posterior de manipulativos virtuales parece facilitar la creación de puentes hacia lo abstracto.

Finalmente, se manifiesta en la investigación *"esta área de exploración educativa está en su infancia, pero su impacto en la comprensión de las matemáticas tiene el potencial de convertirse en una herramienta muy poderosa, especialmente en manos de los formadores de profesores de matemáticas".*

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible evidenciar que la investigación no asume con solidez el impacto de los manipulativos virtuales en la enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas. En parte y como lo exponen los autores, estos recursos se encuentran en exploración, y los estudios al respecto son mínimos; de esta manera justifican la falta de una firme postura. En consecuencia y para la presente investigación será un reto identificar con mayor precisión el aporte en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tipo de manipulativos en el área de matemáticas.

Este trabajo resulta relevante para el propósito de esta investigación en cuanto los autores desarrollan actividades de campo con futuros docentes de matemáticas, analizando minuciosamente el uso de manipulativos virtuales y concretos, en cuanto a su impacto en los aprendizajes, las ventajas y desventajas de estos dos tipos de recursos, orientando de esta manera y para este proyecto la proyección de las actividades desde la determinación del marco teórico.

1.4 Investigaciones que evidencian la integración de matemáticas y ciencias, a través de actividades experimentales en la formación de estudiantes del nivel de educación básica primaria y secundaria.

1.4.1 Design and implementation of integrated instruction of mathematics and science in Korea[14]

Este trabajo de Min Kyeong Kim & Mi Kyung Cho hace referencia a un proyecto realizado en Seúl Corea, en el cual los autores creen que los estudiantes pueden aprender las matemáticas y ciencias de manera más significativa a través de la educación integrada, ya que les ayuda a vincular la educación escolar con sus vidas reales.

[14] Kim, M. K., & Cho, M. K. (2015). Design and implementation of integrated instruction of mathematics and science in Korea. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(1), 3-15.

Los autores manifiestan que existe una gran necesidad de desarrollar un método de integración alternativo para promover la aplicación efectiva de la educación integrada a nivel de aula. El propósito de este estudio fue desarrollar un modelo de diseño instruccional para la integración de las matemáticas y las ciencias, y diseñar e implementar instrucciones utilizando el modelo planteado. También se examinaron las consecuencias de la aplicación del modelo a los estudiantes de educación primaria en Corea.

El objetivo de este modelo es que los estudiantes adquieran una comprensión profunda de un concepto. El modelo comienza con la fase de exploración del fenómeno, pasa por la fase de comprensión del concepto, en la que se anima a los estudiantes a expresar el fenómeno explorado utilizando conceptos matemáticos y científicos, y finalmente termina con la fase de aplicación del concepto, en la que los estudiantes pueden formarse una amplia comprensión del mismo. Después de la fase de aplicación del concepto, los estudiantes pueden volver a la fase de comprensión para construir un significado más profundo del mismo.

Este estudio se desarrolló mediante la metodología estudio de caso, en el cual participaron voluntariamente un total de 37 estudiantes de escuelas primarias (20 hombres y 17 mujeres) ubicadas en la Ciudad Metropolitana de Seúl, en la educación integrada desarrollada por este estudio. Una de las actividades consistió en construir el concepto de simetría e identificar especialmente las figuras simétricas, el eje de simetría, y qué implican las propiedades de reflexión de la luz en los espejos, trabajo que permite evidenciar la integración geometría y física.

Después de tomar en consideración todos los resultados, este estudio demostró que la enseñanza integrada de las matemáticas y las ciencias podía contribuir a aumentar el interés de los estudiantes en estas materias, e incrementar la motivación de los estudiantes para participar en las actividades de aprendizaje. Además, la lección integrada ofreció a los estudiantes la oportunidad de aprender matemáticas y ciencias de manera divertida y amena, alimentó su pensamiento creativo y mejoró su espíritu de trabajo en equipo mediante actividades de aprendizaje cooperativo.

Dentro de los resultados se destaca en primer lugar que los niños deben aprender a través de experiencias prácticas concretas. En segundo lugar, las lecciones deben basarse en un tema que implique un concepto común de las dos asignaturas, de manera que los estudiantes puedan identificar las pautas entre las relaciones de los diversos conceptos y ampliarlas a niveles más altos, en los que pudiera tener lugar el pensamiento matemático o científico. En tercer lugar, es importante asegurar la integración del contexto, es decir el mundo real para realizar un verdadero sentido de aprendizaje a través del cual los estudiantes puedan crear una estructura cognitiva por sí mismos.

Los estudiantes afirmaron en sus reflexiones que podían comprender el concepto matemático y científico mejor y con mayor facilidad participando en diversos experimentos y actividades prácticas, y que podían reconocer la utilidad de las matemáticas y las ciencias porque eran muy pertinentes para su vida cotidiana.

De esta investigación y de acuerdo a las recomendaciones y sugerencias de los autores, es posible llegar a las siguientes conclusiones:
En la educación escolar, los estudiantes no deben mostrar interés sólo en adquirir conocimientos discretos, sino que necesitan experimentar y comprender la naturaleza del pensamiento matemático y científico y sus interrelaciones, además de aprender el proceso y los métodos de dicho pensamiento. La gente a menudo piensa que el conocimiento matemático y científico es la verdad completa descubierta por los expertos. Sin embargo, al experimentar procesos de construcción del conocimiento, los estudiantes pueden comprender la esencia de las matemáticas y la ciencia, y por lo tanto reconocer su utilidad.

Esta investigación es relevante para la propuesta que se presenta en el presente documento en cuanto se desarrolla un modelo pedagógico de formación a estudiantes del nivel básico con el fin de integrar ciencias y matemáticas, una referencia significativa en cuanto dentro de los propósitos de la propuesta que en este documento se expone, se pretende consolidar un laboratorio de formación docente en matemáticas y otros contextos que se apoyen en esta área.

Conclusiones Capítulo 1

Para la construcción del estado de arte se tienen en cuenta investigaciones tales como Maschietto (2005), Bartolini Bussi y Maschietto (2008) y Cazzola (2018) en el ámbito internacional las cuales dan cuenta de la experiencia realizada en la formación de futuros docentes y docentes en ejercicio que atienden el nivel de educación básica primaria, utilizando como herramienta el laboratorio de matemáticas.

Las experiencias en estas investigaciones evidencian que la formación del pensamiento matemático en los estudiantes y en los diferentes niveles educativos, a lo largo de la historia ha tenido como apoyo el uso de diferentes instrumentos tangibles tales como regla, compás, pantógrafo, perspectógrafo, entre otras máquinas tal como se describe en los estudios referentes al laboratorio de matemáticas de la Universidad Reggio Emilia de la ciudad de Módena Italia, de gran impacto en los procesos de formación en matemáticas principalmente en Europa.

Luego, un laboratorio de matemáticas es una metodología, basada en actividades diversas y estructuradas, destinada a la construcción de significados de objetos y conceptos matemáticos, en la cual los docentes o estudiantes aprenden a través de la práctica y el trabajo en equipo apoyado de diferentes herramientas.

En las investigaciones de Dlodlo y Beyers (2009), Mayorova y otros (2018), se evidencia la importancia del laboratorio que, apoyado también en la tecnología, es un medio para motivar a los estudiantes para que se formen profesionalmente en las áreas de física, matemáticas, computación e ingenierías, principalmente a través de actividades de modelación que los estudiantes realizan en el laboratorio sobre situaciones propias de cada área en mención.

Swan y Marshall (2010), Hunt y otros (2011) en sus estudios realizan una comparación entre los manipulativos concretos y los manipulativos virtuales, estableciendo conclusiones sobre la efectividad en la construcción de pensamiento matemático, las ventajas y desventajas de cada uno de estos recursos, teniendo en cuenta además las etapas de formación del estudiante. Sus investigaciones resultan relevantes para la presente investigación en cuanto estos recursos se incluyen en el laboratorio que se pretende consolidar como herramienta en la formación del personal docente que atiende el área de matemáticas en el nivel de educación básica primaria.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

Considerando el enfoque de esta investigación, en la que se pretende consolidar un modelo de formación continua de docentes que atienden el nivel de educación básica primaria en el área de matemáticas, se situará al lector en los aspectos conceptuales que implican este propósito y que se tuvieron en cuenta en la presente investigación. Primero se expone los referentes en la formación docente y sus aspectos a fortalecer; en segundo lugar, se expone el laboratorio de matemáticas y herramientas que lo componen como estrategia dentro de los programas y acciones que se han dirigido en la formación continua de docentes que atienden los niveles de educación básica primaria en el área de matemáticas. En tercer lugar, se expone los aportes de los referentes en la resolución de problemas, en cuanto se pretende fortalecer el pensamiento matemático a través de actividades dirigidas a la construcción de significado robusto de conceptos y a la resolución de problemas retadores. En cuarto lugar, se expone la caracterización del pensamiento matemático que se asume en la presente investigación. Finalmente, se describe el modelo de Etienne Wenger presentando los aspectos que se tendrán en cuenta para el desarrollo de esta investigación.

2.1 Los programas de formación docente

La formación continua de docentes es una tarea que resulta relevante dentro de cualquier sistema, puesto que de la calidad de la educación de los niños depende el futuro de cada uno de ellos y por lo tanto el de la sociedad entera; e igualmente, de los resultados de los estudiantes en las pruebas de estado, se generan nuevas o se ajustan políticas gubernamentales, y en especial se hace la distribución de los recursos en las diferentes instituciones. En esta dirección surgen entonces interrogantes tales como: ¿qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿para qué y por qué enseñarlo? Ello ha generado motivación para incursionar en el análisis de cómo podría ser una formación profesional que preparare a los docentes en ejercicio para responder a los requerimientos de una educación para el mundo de hoy.

Es así como se parte del supuesto de que las nuevas realidades del mundo contemporáneo están exigiendo una formación docente innovadora, y en particular en matemáticas siguiendo los propósitos de esta investigación, que genere interés y que esté al alcance en los niveles de educación básica primaria, es decir, de docentes no licenciados en matemáticas. Por tal razón el modelo que se pretende consolidar, se fundamentará en aportes de investigaciones producto de una significativa experiencia en el campo de la formación continua de docentes.

2.1.1 Razonamiento y acción pedagógica, Lee Shulman

Shulman, (1987) en su modelo *"Razonamiento y Acción Pedagógica",* provee un conjunto de categorías y procesos con los que analiza la enseñanza de los profesores, en sus dos componentes: procesual (fases o ciclos en el razonamiento y acción didáctica); y lógico (siete categorías de conocimiento requeridas para la enseñanza): conocimiento de la materia, pedagógico general, curricular, de los alumnos, de los contextos educativos, fines y valores educativos, y conocimiento didáctico del contenido. Dado que el modelo pretende describir cómo los profesores comprenden la materia y la transforman en algo "enseñable", además de los restantes componentes, es clave en este proceso el paso del "conocimiento de la materia" al "conocimiento didáctico del contenido".

En el modelo de Shulman (1987), además del conocimiento de la materia y del conocimiento general pedagógico, los profesores deben desarrollar un conocimiento especifico: cómo enseñar su materia especifica. Si bien el CM (Conocimiento de la Materia), es indispensable en la enseñanza, no genera por sí mismo ideas de cómo presentar un contenido particular a alumnos específicos, es necesario un CDC (Conocimiento Didáctico del Contenido), que se va adquiriendo con la experiencia en las prácticas de aula.

Shulman y otros (1990b, 3) afirman, en referencia al CDC, que *"es la parte más importante del conocimiento base de la enseñanza"*. Implica una comprensión de lo que significa la enseñanza de un tópico particular, así como de los principios, formas y modos didácticos de representación. Parece que este conocimiento se construye con y sobre el conocimiento del contenido (CM), conocimiento pedagógico general y conocimiento de los alumnos.

Por su parte, y centrados en las diferentes tradiciones de formación del profesorado en Estados Unidos, Liston y Zeichner (1991) distinguen tres tradiciones de la formación del profesorado en el siglo XX: eficiencia social, desarrollo evolutivo, y tradición académica. Esta última, basada en una concepción liberal-humanista de la educación, concibe al profesor como un especialista en un campo disciplinar, por lo que preparar para enseñar requiere una seria formación en las materias específicas, complementadas con prácticas en los centros educativos.

Por lo tanto, es necesario desarrollar capacidades curriculares interpretativas, deliberativas y pericia profesional para hacer un uso activo y creativo tanto del conocimiento disciplinar como del propio currículo. Diseñar programas de formación para generar un CDC en el profesorado implica estrategias que permitan adaptar, crear, y transformar el currículo oficial y el conocimiento disciplinar al contexto de la clase (Shulman,1987, 9).

2.1.2 Conocimiento de la materia y su relación con el conocimiento pedagógico del contenido

Teniendo en cuenta que la formación de los maestros tiene como núcleo de desarrollo las dos categorías de conocimientos CM y CDC. Krauss, S. Brunner, M. y otros (2008), en investigación basada en datos cualitativos, han demostrado que una comprensión profunda de los conceptos matemáticos puede permitir a los profesores acceder a un amplio repertorio de estrategias para explicar y representar el contenido matemático a sus estudiantes. De esta manera, es posible predecir que el nivel de los aprendizajes que adquieren los estudiantes, están relacionados proporcionalmente con el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico de sus docentes.

En la investigación en mención, los resultados muestran que los profesores de matemáticas con una formación matemática profunda (es decir, profesores cualificados para la enseñanza), superan a los profesores formados en otros tipos de escuelas en ambas categorías de conocimiento y muestran un mayor grado de conexión cognitiva entre estas.

2.1.3 Harel y la base de conocimientos del profesor (TKB)

Para Harel (2008) un sistema educativo puede considerarse como una tríada de agentes junto con una acción teórica. Los agentes son los alumnos, los profesores y las instituciones. La acción teórica consiste en los significados compartidos por estos agentes de conocimiento, aprendizaje y enseñanza, así como en las perspectivas compartidas sobre los factores sociales, culturales, conductuales y emocionales que intervienen en el aprendizaje y la enseñanza de determinados conocimientos. Las acciones teóricas orientan a los sistemas educativos sobre qué, por qué y cómo llevar a cabo acciones relacionadas con la escuela.

Algunos componentes cruciales de la acción teórica de un profesor constituyen su base de conocimientos. Basándose en el trabajo de Shulman (1986, 1987) y en consonancia con los puntos de vista de otros estudiosos (por ejemplo, Brousseau, 1997; Cohen y Ball, 1999, 2000), la base de conocimientos de un profesor (TKB) se define según Harel (1993), en términos de tres componentes: conocimiento de las matemáticas, conocimiento del aprendizaje de los alumnos y conocimiento de la pedagogía.

Frente al primer componente, Harel (2008) lo define en términos tanto de formas de comprensión como de formas de pensamiento. En este sentido, el conocimiento de las matemáticas de los profesores no es de un tipo especial, aunque pueda ser diferente en alcance y profundidad al de un matemático. Las matemáticas que debe conocer un profesor deberían estar determinadas en gran medida por las formas de comprensión y de pensamiento deseables a las que se dirigen los planes de estudio de matemáticas que el profesor debe enseñar.

El segundo componente del conocimiento (conocimiento del aprendizaje de los alumnos) se refiere a dos aspectos. El primer aspecto es la visión del profesor sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Basándose en la definición de aprendizaje del DNR, el profesor debe entender que el proceso de aprendizaje a menudo implica confusión e incertidumbre (resultados del desequilibrio), que la trayectoria del aprendizaje se ve afectada por los conocimientos previos del alumno, y que tanto las necesidades psicológicas como las intelectuales estimulan el proceso de aprendizaje. El segundo aspecto se refiere a las cuestiones cognitivas y epistemológicas que intervienen en el aprendizaje de un determinado conocimiento; estas se refieren entre otras cosas a la comprensión por parte del profesor de los obstáculos que son inevitables, aquellos que tienen que ver con el significado del concepto y los obstáculos didácticos.

El tercer componente (conocimiento de la pedagogía), se refiere a las prácticas de enseñanza de un profesor y a los principios de instrucción. La noción de práctica docente se basa en dos conceptos: acción docente y comportamiento docente. La acción docente se refiere a lo que los profesores de una determinada comunidad o cultura suelen hacer en el aula. Un comportamiento docente, en cambio, es una característica típica de una acción docente, el cual se infiere siempre de una multitud de observaciones; de ahí el adjetivo "típico". Por ejemplo, responder a las preguntas de los alumnos es una acción de enseñanza, pero la forma en que un profesor suele elegir responder a las preguntas de los alumnos determina su comportamiento de enseñanza en relación con esta acción de enseñanza.

2.2 Laboratorio de matemáticas en la formación docente

En el documento estudio ICMI (2009)[15], en el Capítulo 2. *“Retos más allá del aula de clase - Fuentes y cuestiones de organización”* (Challenges Beyond the Classroom—Sources and Organizational Issues), de los autores: Petar Kenderov, Ali Rejali, Mariolina G. Bartolini Bussi, Valeria Pandelieva, Karin Richter, Michela Maschietto, Djordje Kadijevich y Peter Taylor, se analiza la existencia de muchos tipos de problemas reto o desafíos en el salón de clases y fuera de él y qué han aportado internacionalmente. Se describen los rasgos especiales de cada tipo de problema y propone un gran número de ejemplos que indican la amplia variedad de tipos de reto o desafíos que con mucho éxito se utilizan en el mundo.

El anterior es un análisis en relación a las competiciones en matemáticas; sin embargo, resulta relevante para la presente investigación en cuanto hace referencia a las diferentes estrategias que se desarrollan en el entrenamiento a los estudiantes y la formación de calidad que deben tener los docentes quienes los orientan. Se expresa en el documento igualmente la poca participación del personal docente. Al respecto, se han diseñado métodos bastante innovadores para incrementar esto con mucho éxito. Se requiere que los maestros califiquen los resultados y se les anima a que propongan problemas, preparen a sus estudiantes y supervisen a los voluntarios. Por ejemplo, Irán según Rejali (2003) en particular, tiene un buen historial de poder organizar eventos para que los profesores participen, sin necesidad de que estén presentes creadores de problemas experimentados o profesores universitarios.

Por lo anterior, desde 1999 en Irán, equipos de profesores y personal universitario han establecido en todo el país las denominadas “Casas de las Matemáticas”, destinadas a proporcionar oportunidades para que los estudiantes y profesores de todos los niveles experimenten el trabajo en equipo mediante la

[15] Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study*(Vol. 12). Springer Science & Business Media

participación en una comprensión profunda de las matemáticas a través del uso de diversos medios. Estos incluyen tecnología de la información, estudios independientes, sentir la esencia de las matemáticas y aprender sobre la historia y las aplicaciones de las ciencias matemáticas, incorporar los juegos matemáticos y estudiar ideas interdisciplinarias como las matemáticas y el arte, estudiar las matemáticas y el patrimonio y los edificios iraníes antiguos, estudiar las matemáticas y la genética, las matemáticas y las ciencias sociales, y las matemáticas de la medicina o de la ingeniería.

El estudio en referencia permite evidenciar la relevancia del laboratorio de matemáticas, en tanto concentra las diversas estrategias que es posible incorporar en la formación de los estudiantes y del personal docente, estrategia que aparece desde la antigüedad incluyendo desde instrumentos tangibles como la regla y el compás, entre otras herramientas, que forman parte de la experiencia matemática y de la iconografía de las matemáticas.

En este sentido y como parte histórica, el Laboratorio de Máquinas Matemáticas (MMLab) [16], aparece como una referencia. Fue iniciado a principios de los años 80 por un pequeño grupo de profesores de secundaria, inspirados por el trabajo didáctico de Emma Castelnuovo y Lucio Lombardo en la ciudad Roma. Comenzaron a construir instrumentos con materiales sencillos en el sótano de una escuela secundaria (el "Liceo Científico Tassoni" de Módena) y los utilizaron en las actividades cotidianas del aula. Muy pronto establecieron profundos vínculos con el equipo de didácticos del Departamento de Matemáticas (Universidad de Módena - Reggio Emilia). Cuando se retiraron de la escuela, constituyeron la asociación sin ánimo de lucro "Macchine Matematiche. En 1996 el Laboratorio se trasladó de la escuela al Museo de Ciencias de la Universidad y en 2002 al Departamento de Matemáticas. Durante ese tiempo, se han reconstruido docenas de instrumentos (unos 200).

[16] Maschietto, M. (2005). The laboratory of mathematical machines of Modena. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *57*, 34-37

Bartolini y Maschietto (2008) han trabajado en las últimas décadas el "Laboratorio de Máquinas Matemáticas (MMLab)" en el Departamento de Matemáticas de Módena Italia. Este contiene una colección de instrumentos geométricos que denominan máquinas matemáticas. Este trabajo fue el punto de partida del proyecto "Ciencias y Tecnología - Laboratorio de Matemáticas" para la formación de profesores (2008-2013) en el que muchos profesores construyeron y propusieron sesiones de laboratorio con máquinas matemáticas para sus clases.

Para Carlos Bosch (2014) cualquier programa de formación continua para los docentes debe ofrecer experiencias de aprendizaje innovadoras, actividades donde indaguen que los lleve a articular conocimientos previos con los temas curriculares que imparten, y lograr que valoren el sentido didáctico de sus propias prácticas, lo que implica el reto de ofrecer nuevas aproximaciones a los contenidos de matemáticas y adecuarse a nuevos enfoques curriculares. Luego, la enseñanza de las matemáticas a través de materiales didácticos y recursos implica considerar el aula como un taller o laboratorio de matemáticas, así el modelo tradicional del aula concebida como tal da origen a nuevas características, donde el alumno desarrolla conocimientos a través de la manipulación de materiales, porque aprender matemáticas no es memorizar procedimientos mecánicos que llevan a un resultado sino más bien implica generar e interiorizar conceptos.

Actualmente, *"El mundo del aula es obsoleto, hay que cambiarlo por otros ambientes que permitan que el alumno trabaje, discuta y desarrolle nuevas capacidades de aprendizaje, es necesario un cambio en la distribución de las aulas, las cuales deben compartir facilidades que ofrece el laboratorio"* (Bosch, 2014, p.52, 62)

Hernández, E (2017) en su trabajo *"El laboratorio de matemáticas como estrategia de aprendizaje",* afirma que la enseñanza de las matemáticas a través de recursos y materiales didácticos implica:

- Considerar el aula como un taller o laboratorio de matemáticas, donde el alumno desarrolla conocimientos a través de la manipulación de materiales.
- Entender que el aprender matemáticas no es memorizar; por el contrario, implica generar conceptos para hacer, interiorizar, organizar, retener, identificar ciertas condiciones, así como recuperar tanto la información como su aplicación en situaciones diversas.
- A través del laboratorio con mayor efectividad es posible dar sentido a los símbolos utilizados en la matemática a través de la vivencia.

Para Ramírez, M. C. (2016) el laboratorio de matemáticas es un aula dotada con dos clases de materiales manipulables, que se clasifican en físicos y virtuales. Físicos como el ábaco, regletas, tangram, bloques lógicos, geoplanos, multicubos, cuerpos geométricos, torta fraccionaria, pentominó, triángulos de Pascal, entre otros, y virtuales como computadores y software educativo.

Cazzola, M. (2018) considera que la investigación en la enseñanza de las matemáticas es universalmente consciente del papel clave de las metodologías activas para una enseñanza y aprendizaje eficaces de las matemáticas. En un camino de aprendizaje ideal, los estudiantes deben tener la oportunidad de experimentar y aplicar sus conocimientos matemáticos con la ayuda de laboratorios, junto con las clases tradicionales, en las que los estudiantes trabajan activamente en la resolución de problemas. Estas actividades, al trabajarlas siguiendo los referentes que dentro de la investigación se establecen como son Polya o Mason, Burton y Stacey, permiten a los alumnos desarrollar el pensamiento matemático y les dan la oportunidad de ver las matemáticas como lo que realmente son: *"una disciplina exploratoria, dinámica y evolutiva más que un cuerpo rígido, absoluto y cerrado de leyes para ser memorizadas".*

Teniendo en cuenta los referentes anteriores, la revisión de antecedentes y los objetivos propuestos, para la investigación se define laboratorio de matemáticas como un espacio físico diferente del aula, en cuanto se pretende construir un modelo de formación continua de docentes en ejercicio, lo cual requiere un espacio específico en cada institución educativa o en sitios estratégicos donde sea posible focalizar a profesores de varias instituciones.

Por lo tanto, el laboratorio de matemáticas tendrá a disposición diversidad de materiales: manipulativos concretos y virtuales, herramientas tradicionales de dibujo (escuadra, regla, compás) y máquinas matemáticas. Igualmente, el laboratorio estará equipado con mesas y sillas, garantizando la comodidad de los estudiantes (docentes) para el trabajo que, en su mayor parte, está diseñado para realizarlo de forma grupal.

2.2.1 Máquina matemática

Para la definición de máquina matemática, se tendrá en cuenta la definición de Bartolini y Maschietto (2008), quienes definen máquina matemática como un artefacto diseñado y construido con el propósito de forzar un punto, un segmento de línea o una figura plana (apoyada por un soporte material que los hace visibles y tocables) a moverse o transformarse de acuerdo con una ley matemática que ha sido determinada por el diseñador. Es así como algunas máquinas permitirán al usuario realizar construcciones geométricas, otras realizar acciones como contar, hacer cálculos, representar números, entre otras. Las herramientas de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación, por ejemplo, calculadoras, software dinámico) estarán igualmente disponibles y se utilizarán con frecuencia en el laboratorio de matemáticas.

2.2.2 Manipulativos concretos y manipulativos virtuales

El uso de manipulativos concretos para enseñar matemáticas es una estrategia educativa establecida desde hace mucho tiempo, al menos entre los jóvenes estudiantes; según Piaget (1966), citado por Bartolini & Maschietto (2008), los niños necesitan manipulativos concretos para desarrollar conceptos matemáticos abstractos. Esta suposición ha sido a menudo apoyada por la afirmación explícita de que los manipulativos educativos son apropiados para la construcción de significado robusto de conceptos matemáticos.

Sin embargo, en el laboratorio de matemáticas de Módena se extiende la concepción de Piaget, en cuanto se afirma que los manipulativos concretos deben utilizarse no sólo con los niños sino también con los alumnos de mayor edad, hasta el nivel terciario. Al respecto, Bartolini & Maschietto (2008) exponen ejemplos que demuestran que algunos procesos matemáticos muy sofisticados (por ejemplo, la elaboración de definiciones y la construcción de demostraciones) pueden beneficiarse de una manipulación guiada de artefactos concretos en todas las edades.

Perry y Howard (1997), citados por Swan y Marshall (2010), definen los manipulativos como modelos concretos que incorporan conceptos matemáticos, apelan a varios sentidos y pueden ser tocados y movidos por los estudiantes.

En la presente investigación se considera como definición de material concreto la propuesta por Swan y Marshall (2010): *"un material de manipulación matemática es un objeto que puede ser manejado por un individuo de manera sensorial durante el cual se fomentará el pensamiento matemático consciente e inconsciente" (p. 2).* En consecuencia, un objeto manipulativo tiene el potencial de conducir a una toma de conciencia y desarrollo de conceptos e ideas relacionadas con las matemáticas los cuales serán diseñados para trabajar en el laboratorio con un propósito pedagógico.

En cuanto a manipulativos virtuales, Moyer y otros (2002), citados por Hunt y otros (2011), los definen como *"una representación visual interactiva, basada en la Web, de un objeto dinámico que proporciona oportunidades para construir conocimiento matemático"* (p.185). Además, los autores identifican la interacción con manipulativos virtuales como un ejemplo del proceso de representación de las matemáticas recomendado por los estándares NCTM, en cuanto resulta favorable para que los estudiantes interioricen sus propias representaciones de los conceptos matemáticos mediante la interacción con una herramienta dinámica durante las experiencias y prácticas pedagógicas.

Según el RAE (2001), se denominan virtuales en el sentido que fueron creados y son simulados por un computador para dar la sensación de su existencia real. Técnicamente, los manipulativos virtuales son pequeños programas, escritos usualmente en lenguaje Java, integrados en páginas HTML o páginas Web.

Según Zúñiga, C. M. (2010), las siguientes son algunas de las características de los manipulativos virtuales. Se destacan en la presente investigación aquellas que están relacionadas con el software GeoGebra, en cuanto se ha incluido dentro de las herramientas del laboratorio de matemáticas que se pretende consolidar dentro del modelo de formación de docentes.

- Los manipulativos virtuales tienden a ser una réplica de los manipulativos concretos o físicos (geoplano, bloques de Cuisenaire, tangramas, bloques lógicos, entre otros).
- En general, incluyen opciones adicionales propias de un ambiente digital (copiar y colorear piezas, seleccionar y mover múltiples objetos).
- La mayoría ofrece simulaciones de conceptos y operaciones que no pueden ser fácilmente representadas por los manipulativos tradicionales.
- Son flexibles, independientes y dinámicos; pueden ser controlados enteramente por los docentes y los estudiantes, además, ser usados en diferentes lecciones, niveles y edades.
- Algunos ofrecen registrar las acciones o resultados para proveer realimentación al estudiante.
- Se encuentran disponibles y específicamente GeoGebra que es un software libre.

2.3 La resolución de problemas

La educación matemática, desde el punto de vista de la enseñanza, debe ser dirigida a la construcción de significado robusto de conceptos, más que como un mero desarrollo mecánico de habilidades, que desarrolle en los estudiantes la posibilidad de aplicar los contenidos que han aprendido con flexibilidad y criterio. De este modo, y como lo concibe el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares[17], la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, es un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Por tal razón, y con el fin de atender a los objetivos de la presente investigación, se exponen las consideraciones de algunos referentes en la resolución de problemas que la enmarcan.

2.3.1 Como resolver problemas según Polya

George Polya (1945) estructura la actividad de resolución de problemas en matemáticas en cuatro pasos principales, conocidos también como el programa heurístico de Polya.

Paso 1: Entender el problema. Para ello puede apoyarse en preguntas tales como: ¿Entiende todo lo que dice?, ¿puede replantear el problema con sus propias palabras?, ¿distingue cuáles son los datos?, ¿sabe a qué quiere llegar?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información extraña?, ¿es este problema similar a algún otro que haya resuelto antes?

Paso 2: Configurar un plan. Para este fin puede usar alguna de las siguientes estrategias: Ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura), usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar casos particulares, etc.

Paso 3: Ejecutar el plan. En este paso se debe implementar la o las estrategias escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiere tomar una nueva estrategia o camino. Asignar un tiempo razonable para resolver el problema. Si no se tiene éxito, se puede solicitar sugerencias, u optar por olvidar el problema por un tiempo, en cualquier instante cuando menos lo espere puede encontrar una estrategia acertada.

[17] MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Paso 4: Visión retrospectiva o mirar hacia atrás. ¿La solución que ha encontrado es correcta?, ¿su respuesta satisface lo establecido en el problema?, ¿es posible construir una solución más sencilla?, ¿puedes ver cómo extender su solución a un caso más general?

2.3.2 Como resolver problemas según Mason, Burton y Stacey

En su libro Pensar Matemáticamente (1982, 2011), Mason, Burton y Stacey se proponen mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo establecer e iniciar a construir camino hacia la solución, ir aprendiendo de la experiencia y de esta forma fortalecer el pensamiento matemático.

Los autores establecen un modelo que han consolidado en trabajo con estudiantes desde la educación básica primaria e incluso en formación de docentes. Este modelo de trabajo en la resolución de problemas, lo estructuran en tres fases: abordaje, ataque y revisión, el paso de una fase a la otra evidencia el progreso en la asimilación del problema.

En la primera fase, es decir en el abordaje, se pretende que el sujeto en primer lugar reconozca que una etapa de abordaje siempre debe existir, el éxito depende de la atención que se le preste a esta etapa, en la cual se debe lograr comprender la información que se brinda y a dónde se quiere llegar. En esta etapa prevalece la experimentación con casos particulares.

En la segunda fase, denominada ataque, se pretende que el sujeto resuelva el problema; luego se encuentra en esta etapa cuando ya se tiene una asimilación significativa, requiere trabajar procesos de generalización apoyándose si lo requiere de la experimentación de casos particulares. Por supuesto puede que aparezcan las dificultades llamadas por los autores como “atasco”, que hacen que se permanezca en esta etapa o incluso se tenga que regresar a la fase de abordaje.

Finalmente, en la etapa de revisión se pretende que se realice un análisis de la solución, si ya se ha alcanzado, o de lo realizado hasta el momento. Se requiere entonces volver atrás para comprobar lo que se ha realizado, reflexionar y evaluar los alcances para complementar la solución, e intentar situarla en un contexto más amplio a través de la generalización.

2.4 Pensamiento matemático en la literatura

2.4.1 Pensamiento matemático según Mason, Burton y Stacey

Según, Mason, Burton y Stacey (2010), el pensamiento matemático se define como *"Un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión"*. Para lograrlo, estos autores proponen el modelo de resolución de problemas que se describe en la sección anterior. La presente investigación asume esta postura en cuanto los autores manifiestan igualmente que los métodos adquiridos para fortalecer el pensamiento matemático se pueden transmitir a otros, para lo cual proponen estrategias de cómo provocarlo, apoyarlo y sostenerlo[18].

2.4.1.1 ¿Cómo provocar el pensamiento matemático?

La motivación y el llamar la atención a través de la sorpresa, la contradicción o incluso un hecho inexplicable puede activar el proceso de pensamiento, es así como en la presente investigación se diseñan actividades utilizando variedad de recursos y estrategias con las cuales se pretende generar confianza en los docentes, de tal forma que las emociones que obtienen al abordar los diferentes desafíos sean favorables y generen interés en el desarrollo de las mismas, sin dar lugar a que los docentes o sus estudiantes se contagien de desconfianza y determinen prematuramente la imposibilidad de abordar un problema. Luego es necesario centrarse más en los procesos que en el afán de obtener una respuesta.

2.4.1.2 ¿Cómo apoyar el pensamiento matemático?

Para pensar matemáticamente de una manera efectiva se necesita tener suficiente confianza para afrontar los estados emocionales conscientemente, ello se logra a través de la experiencia personal

---

[18] Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

reflexiva, de los éxitos principalmente, los cuales pueden ser parciales. La propuesta de actividades y el trabajar en equipo como se tiene previsto desarrollar la presente investigación, favorece la adquisición de confianza por parte de los docentes.

Para Mason, Burton y Stacey (2010 para progresar), además de la confianza, el pensamiento matemático necesita extensión, lo cual es posible a través de los componentes: interrogar, desafiar y reflexionar.

- Interrogar: Es decir poner en duda las afirmaciones, preocuparse por el significado de los términos e identificar problemas para investigar.
- Desafiar: Hacer conjeturas, buscar argumentos para justificarlas o refutarlas; igualmente, comprobar, modificar y alterar.
- Reflexionar: Es decir, ser autocrítico, suponer y evaluar distintos enfoques; igualmente, variar, redefinir y cambiar de dirección.

2.4.1.3 ¿Cómo mantener el pensamiento matemático?

Para Mason, Burton y Stacey (2010), *"pensar matemáticamente no es un fin en sí mismo; es un proceso mediante el cual podemos aumentar nuestro entendimiento del mundo que nos rodea y ampliar nuestras posibilidades de elección. Y al ser una forma de proceder, tiene unas aplicaciones muy amplias, no sólo para enfrentarse a problemas matemáticos o científicos, sino mucho más generales*".

El mantener el pensamiento matemático, implica aumentar el nivel de conciencia, el cual no se da de forma automática, es necesario fomentarlo y cuidarlo para que él mismo se fortalezca; y esto es posible a través de la experiencia y la reflexión crítica en cada proceso realizado.

2.4.2 ¿Cómo debemos enseñar las matemáticas según Harel y el modelo DNR?

Según Harel (2008), los elementos constitutivos de las matemáticas, y por tanto de los currículos matemáticos deseables, son formas de entender y formas de pensar. Una forma de entender es el producto de un acto mental, mientras que una forma de pensar es una característica de las formas de entender asociadas a ese acto. La tríada *"acto mental, forma de entender y forma de pensar"* es central en el DNR.

En el DNR se considera que la resolución de problemas es el medio para aprender. Afirma Harel que cuando se encuentra una situación problemática, necesariamente se experimentan fases de desequilibrio, a menudo intercaladas por fases de equilibrio. El desequilibrio, o perturbación, es un estado que se produce cuando se encuentra un obstáculo. Su efecto cognitivo es que *"obliga al sujeto a ir más allá de su estado actual y a emprender nuevas direcciones"* (Piaget, 1985, p. 10) citado por Harel (2008). El equilibrio es un estado en el que se percibe el éxito en la eliminación de dicho obstáculo. En términos de Piaget, es un estado en el que uno modifica su punto de vista (acomodación) y es capaz, como resultado, de integrar nuevas ideas hacia la solución del problema (asimilación).

2.4.2.1 Elementos constitutivos de la enseñanza de las matemáticas

En este apartado, Harel presenta los tres principios instructivos fundamentales del DNR: dualidad, necesidad y razonamiento repetido. El principio de dualidad se refiere a la interdependencia del desarrollo entre las formas de entender y las formas de pensar; el principio de necesidad se refiere a la necesidad intelectual que deben sentir los alumnos; y el principio de razonamiento repetido se refiere a la internalización, organización y retención del conocimiento.

Los alumnos no llegan a la escuela como pizarras en blanco, listos para adquirir conocimientos independientemente de lo que ya saben (Piaget, 1952, 1969, 1973, 1978 citado por Harel). Más bien, lo que los estudiantes saben ahora influye en lo que sabrán en el futuro. Esto es cierto para todas las formas de entender y pensar asociadas a cualquier acto mental. Es así como en la presente investigación se realizará una prueba de entrada a los docentes, con el fin de determinar el nivel del conocimiento disciplinar y pedagógico, instrumento que será utilizado para contrastar y evaluar el conocimiento adquirido por ellos al final del proceso de formación que se está planteando.

Aunque los alumnos necesiten intelectualmente formas de entender y de pensar, los profesores deben asegurarse de que sus alumnos interioricen, retengan y organicen estos conocimientos. La experiencia repetida, o la práctica, es un factor fundamental para lograr este objetivo, por lo que se hace necesario la formación continua de docentes, tanto en el conocimiento disciplinar como didáctico, como muestra Cooper (1991) quien demostró el papel de la práctica en la organización del conocimiento. DeGroot (1965) afirmó que el aumento de la experiencia tiene el efecto de que el conocimiento se vuelve más accesible: *"el conocimiento que, en etapas anteriores, tenía que ser abstraído, o incluso inferido, es apto para ser percibido inmediatamente en etapas posteriores".* (pp. 33-34). La experiencia repetida da lugar a la fluidez, o al procesamiento sin esfuerzo, que exige menos atención consciente. Luego, la secuencia de problemas que se les da a los alumnos, y en este caso a los docentes, debe exigirles continuamente que piensen en las situaciones y soluciones, y los problemas deben responder a las necesidades intelectuales cambiantes de los alumnos y docentes. Esta es la base del principio del razonamiento repetido.

2.5 Teoría social de aprendizaje

De acuerdo a las características del presente estudio, la metodología y diseño que se proyectan para las actividades se considera como una de las maneras más apropiadas el desarrollar la investigación usando el trabajo en grupo, teniendo en cuenta aspectos tales como la naturaleza del conocimiento matemático como construcción de una comunidad, así como la interacción, la socialización entre los seres humanos y su relación con el contexto, la retroalimentación continua, el conocimiento como competencia y cuestión de participación. De esta manera y de acuerdo con la naturaleza de la investigación, teniendo en cuenta el contexto, las condiciones físicas y sociales, se tomará como sustento del diseño de las actividades de aprendizaje las comunidades de práctica de Wenger.

2.5.1 Comunidad de práctica de Wenger

Se ha reconocido que es necesario dejar atrás las explicaciones del quehacer del docente centradas en una práctica marcada por el aislamiento, para adoptar planteamientos que asumen su participación en un núcleo profesional, y alrededor de un objetivo como es la formación en matemáticas a través de las herramientas que ofrece el laboratorio. De esta situación se deriva la necesidad de entender la labor de los profesores como un proceso de construcción de una cultura propia en la que la colaboración y la participación son los ejes principales.

Wenger (2001), así como otros que han retomado sus aportes sobre las comunidades de práctica, sustenta la idea de que todo aprendizaje es un hecho social. Las personas aprenden mediante las relaciones que establecen con otras personas que también están aprendiendo mientras realizan una actividad que tiene un valor social. Esto es, aprenden en el contexto de una práctica, bajo la influencia de una cultura y en interacción con el otro.

Al realizar una actividad socialmente significativa los miembros de una comunidad adoptan una responsabilidad colectiva para atender una problemática, gestionar su aprendizaje, establecer un compromiso y definirse a sí misma: *"identidad es una forma de hablar acerca de cómo el aprendizaje cambia lo que somos y crea historias personales de transformación en el contexto de nuestras comunidades"* (Wenger, 2010, p. 211).

La comunidad de práctica es un espacio en el que el profesor comparte un aprendizaje y construye una identidad (Lave y Wenger, 2007). En este contexto, aprender a pensar, hablar y actuar como un profesor de matemáticas implica que los docentes aprendan de manera sistemática, activa y crítica, involucrándose en procesos de reflexión y razonamiento sobre su práctica.

En síntesis, en la educación matemática una comunidad de práctica la constituye, básicamente, un grupo de profesores que aprenden en su actividad, negocian significados sobre la acción docente, generan oportunidades de desarrollo profesional y mejoran la enseñanza en contextos particulares. En este sentido se dirigen las actividades y se pretende en cada una de estas, lograr que los docentes propongan su propia actividad proyectada a la creación de una comunidad de práctica en el aula con sus respectivos estudiantes.

Conclusiones Capítulo 2

El marco teórico de la presente investigación se construye sobre cinco pilares.

- Formación docente y sus aspectos a fortalecer, el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido. En este sentido, Shulman (1987) provee un conjunto de categorías y procesos con los que analiza la enseñanza de los profesores, en sus dos componentes: procesual y lógico. Dado que el modelo pretende describir cómo los profesores comprenden la materia y la transforman en algo enseñable, es clave en este proceso el paso del conocimiento de la materia al conocimiento didáctico del contenido.
- Laboratorio de matemáticas y herramientas que lo componen como estrategia dentro de los programas y acciones que se han dirigido en la formación continua de docentes.
- Aportes de los referentes en la resolución de problemas, en cuanto se fortalece el pensamiento matemático a través de actividades dirigidas a la construcción de significado robusto de conceptos y a la resolución de problemas retadores.
- Caracterización del pensamiento matemático que se asume en la presente investigación.
- Modelo de Etienne Wenger de una comunidad de práctica donde se exponen los aspectos que se tienen en cuenta para el desarrollo de esta investigación.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se expone y describe la metodología utilizada en la presente investigación.

3.1 Tipo de estudio

El interés tanto de docentes como de investigadores por conocer qué sucede en el aula cuando los estudiantes construyen conocimiento, ha conducido a buscar metodologías que sean sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza-aprendizaje y, de este modo, aumenten la relevancia de la investigación para la práctica. Esta situación ha dado lugar al surgimiento de metodologías de investigación alternativas más tradicionales, las cuales proceden, en algunos casos, de la sistematización de prácticas que se han venido realizando sin la cobertura de un paradigma concreto. En este contexto surge la investigación como diseño que persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad.

Por lo tanto, se considera la "investigación como diseño" como una de las maneras y referente que se acerca al interés y objetivos planteados en esta investigación, una metodología con enfoque cualitativo, que ha crecido durante los últimos 30 años, comenzando con los primeros trabajos en los años 1980 y 1990 (Cobb y Steffe 1983; Gravemeijer y Koster 1988; Wittmann 1995; Artigue 1992; véase Prediger et al. 2015, para una visión histórica). A continuación, se describe sus características:

1. Intervencionista, es decir, la intención de la investigación como diseño es crear y estudiar nuevas formas de instrucción; en este sentido, tiene la intención de intervenir en las prácticas de aula (intervencionista) en lugar de sólo implicar la observación de las prácticas regulares del aula (naturalista); al respecto, se ha diseñado y aplicado una actividad de entrada o diagnóstico, la cual ha permitido identificar algunas características de las prácticas de aula, insumo relevante para el diseño de las actividades.

2. Generativa de teoría, es decir, el objetivo de la investigación como diseño es generar teorías sobre el proceso de aprendizaje y los medios de apoyo a ese aprendizaje; generar teorías significa aquí tanto desarrollar como refinar las teorías en términos de crear categorías y generar hipótesis. En este sentido, se propone para el desarrollo de la investigación una metodología mediada por manipulativos, a través de la cual se ha consolidado el modelo pedagógico de formación docente.
3. Prospectivo y reflexivo, es decir, los experimentos de diseño o actividades crean las condiciones para desarrollar la teoría (prospectiva), sin embargo, estas teorías son a su vez objeto de examen crítico (reflexivo).
4. Iterativa, es decir, la teoría se desarrolla en una iteración de ciclos de conjeturas, pruebas y revisiones. Al respecto, para la presente investigación se establecen cuatro iteraciones, relacionadas con los componentes que estructuran el área de matemáticas: pensamiento espacial, aleatorio, numérico y variacional; cada iteración está conformada por dos o tres actividades.
5. Raíces pragmáticas y teorías elementales, es decir, los experimentos de diseño aceptan la complejidad del aula como escenario de investigación, y las teorías son específicas de un dominio o incluso de un tema y están pensadas para tener implicaciones prácticas.

Este tipo de investigación combina el diseño instruccional (con el objetivo de desarrollar estrategias de enseñanza-aprendizaje para las aulas) y la investigación educativa (con el objetivo de investigar y comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje iniciados, y lo que provoca este proceso).

Según Confrey (2006) y teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, se persigue documentar qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los estudiantes, en este caso los docentes participantes, en las tareas; igualmente cómo interaccionan, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, cómo los usan, y cómo se lleva a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción, todo ello mediante el estudio del trabajo de los docentes, producciones, su respectiva argumentación y el análisis de grabaciones de vídeo.

Más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias. Se incluye y refleja un compromiso para entender las relaciones existentes entre teoría educativa, práctica e instrumentos (ya sean recursos didácticos o herramientas conceptuales). Esto es posible porque, al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos mediante los cuales éste se sustenta y se organiza (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008).

El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño (Collins et al., 2004). En este proceso el investigador diseña y aplica actividades, analiza resultados, ajusta y refina conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje en estudio y los medios que lo sustentan. Estas conjeturas se basan en las evidencias que se van obteniendo, y en fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes de la literatura. Ambas fuentes actúan de manera entrelazada. Los constructos teóricos son utilizados tanto para el diseño como para interpretar los datos recogidos; recíprocamente, estos constructos son modificados en su puesta en práctica hasta consolidar el modelo de formación docente, proceso que se evidencia a través de los productos obtenidos por los docentes. Por lo tanto, no consiste en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos, sino en la acomodación del modelo a la realidad observada (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000).

En la puesta en práctica, se ha recogido en video el 100% del desarrollo de cada una de las actividades, lo que ha permitido el análisis de los diferentes momentos: antes, durante y después, así como las estrategias y argumentos respectivos e incluso las emociones expresadas por los docentes frente a cada reto, logrando de esta manera una descripción detallada de la evolución de la investigación, así como de evaluarla y garantizar su calidad. Por lo tanto y como resultado de un análisis en cada ciclo, en cada iteración, a medida que transcurre el desarrollo de la investigación, enfocado principalmente al aprendizaje obtenido por los docentes participantes, y al análisis retrospectivo como etapa final por parte del investigador, se logra la consolidación del modelo pedagógico de formación docente.

3.2 Diseño de la experiencia

Para el desarrollo de la propuesta de investigación, se gestionó un diplomado con el Departamento Nacional de Extensión de la Universidad Antonio Nariño, denominado "Formación matemática del docente de primaria, usando como herramienta el laboratorio", en el cual han participado doce docentes en ejercicio, no licenciados en el área de matemáticas y provenientes de los municipio de Chocontá, Sesquilé, Guatavita y Gachancipá del Departamento de Cundinamarca, diez de ellos del sector oficial y dos del sector privado. Se conformaron dos grupos de seis docentes, con uno de estos se trabajó los martes de 1:30pm a 6:30pm y con el otro grupo los sábados de 8:00am a 1:00pm; esto en respuesta a solicitud del grupo quienes han presentado sus posibles espacios para participar de la formación propuesta. Adicional se estableció un espacio sincrónico a través de Google Meet, el cual tuvo lugar el día jueves de cada semana, con una intensidad entre 60 y 90 minutos; con el fin de revisar la actividad próxima a desarrollar, para gestionar los materiales necesarios. Igualmente, para brindar retroalimentación por parte del investigador a la actividad anterior, frente a los desafíos que en el espacio presencial por cuestiones de tiempo no fue posible.

Teniendo en cuenta las experiencias que se han hallado en la construcción del estado de arte y la metodología investigación basada en diseño, se aplicaron actividades dirigidas a desarrollar la propuesta de investigación. En cada una de estas se proponen situaciones estratégicamente diseñadas para que los docentes-alumnos construyan significado robusto de conceptos, consoliden los mismos y también resuelvan problemas en ambiente de laboratorio. Por lo tanto, los docentes han contado con recursos tales como: material concreto, fichas, herramientas básicas de dibujo, máquinas matemáticas, software dinámico, entre otros. Se describe a continuación las fases con las cuales se desarrolló la propuesta de investigación:

Fase 1. Preparación o planeación: En esta fase se diseñó las actividades, en un primer momento la actividad de entrada como insumo para confirmar las necesidades de los docentes. En un segundo momento se diseña la primera actividad, teniendo en cuenta los resultados de la actividad anterior y los referentes teóricos que se han establecido a través del estado de arte, en relación a los objetivos planteados en la investigación. Se trata entonces de entender las consecuencias de la actividad, contrastar con actividades anteriores y analizar sobre los aspectos que se deben ajustar en las actividades posteriores a desarrollar en el laboratorio de matemáticas, continuando este proceso de forma cíclica, proceso que ha permitido analizar cómo evoluciona el pensamiento y la comprensión de los docentes cuando las actividades de formación planificadas se llevan a cabo en el laboratorio.

Fase 2: Ejecución de las actividades: Esta fase se llevó a cabo a través de las etapas siguientes.

Etapa 1: Exploración de la actividad planteada. En esta etapa los docentes plantean estrategias de solución a los desafíos propuestos, destacan los saberes previos necesarios y realizan un inventario de recursos a utilizar incluyendo los materiales que ofrece el laboratorio de matemáticas tales como manipulativos concretos, software dinámico GeoGebra, máquinas matemáticas, entre otros que ellos consideren pertinentes.

Etapa 2: Ejecución de estrategias en el desarrollo de la actividad planteada. Los docentes en esta etapa desarrollan las actividades propuestas a través de las estrategias que lograron establecer en la etapa anterior. Igualmente, y como realimentación, el investigador presenta una propuesta de desarrollo de la actividad planteada, destacando el uso de las herramientas del laboratorio de matemáticas y el apoyo que estas brindan en la resolución de problemas y en la construcción de significado robusto de conceptos.

Etapa 3: Consolidación de estrategias en la construcción de significado de conceptos y en la resolución de problemas retadores. Mediante el trabajo en equipo, los docentes realizan un análisis retrospectivo, con el fin de ajustar la estrategia utilizada en el desarrollo de la actividad, evaluar procedimientos y recursos utilizados en la resolución de problemas retadores y en la construcción de significado robusto de los conceptos involucrados. Igualmente, y siguiendo las características de la investigación como diseño, en esta etapa el investigador analiza el proceso real de participación y aprendizaje de los docentes.

Etapa 4: Planteamiento de actividades y relación con otros contextos: En esta etapa los docentes diseñan futuras prácticas de laboratorio dirigidas a la resolución de problemas y construcción de significado de conceptos en matemáticas y otros contextos que se apoyan en esta disciplina.

Fase 3: Reflexión sobre el trabajo en las actividades, el análisis retrospectivo: En esta fase el investigador realiza análisis de cada una de las fases, identifica las fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora. Según Confrey, (2006); Steffe y Thompson (2000), en el proceso se prueban y refinan conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje en estudio y los medios que lo sustentan. Con este insumo se retoma la fase I, en la cual se diseña una nueva actividad enfocada a lograr nuevos aprendizajes en los docentes, pero conservando el ambiente de laboratorio y los recursos respectivos para su desarrollo.

3.3 Evaluación del impacto de la experiencia

Para el análisis y evaluación del impacto generado por la experiencia, se aplicó finalizando cada actividad una encuesta de percepción tipo Likert, igualmente se aplica al finalizar el diplomado, incluyendo en esta última preguntas abiertas.

3.4 Diseño de las actividades

Las actividades se estructuran de tal forma que los docentes tengan la oportunidad de construir significado robusto de conceptos y resuelvan problemas en el laboratorio de matemáticas usando material concreto en un primer momento, materiales convencionales y/o máquinas matemáticas en un segundo momento, y como tercer momento los docentes construyen y fortalecen conceptos usando software dinámico GeoGebra. Los aprendizajes planteados en cada actividad corresponden a los componentes del área de matemáticas (numérico, espacial, aleatorio y variacional), con un nivel de complejidad medio y alto en algunos casos, en cuanto según referentes de calidad del Ministerio de Educación, se establecen para desarrollar en el nivel de educación básica secundaria.

Se plantea en cada una de las actividades un objetivo en el cual se describe el alcance de formación que se pretende logren los docentes; igualmente, se establecen unos aprendizajes esperados con el fin de guiar las intenciones del investigador. Para el desarrollo de las actividades, los docentes se distribuyen en grupos, con el fin de facilitar el trabajo en equipo como una de las estrategias que se ha considerado pertinente en la investigación, en cuanto y según Wenger (2001) quien sustenta la idea de que todo aprendizaje es un hecho social; es decir, las personas aprenden mediante las relaciones que establecen con otras personas que también están aprendiendo mientras realizan una actividad que tiene un valor social. Esto es, aprenden en el contexto de una práctica, bajo la influencia de una cultura y en interacción con el otro.

Las actividades están compuestas por desafíos cada uno con su respectivo objetivo de aprendizaje y materiales necesarios que dispondrán los docentes en el laboratorio; estos desafíos están conformados por sub-actividades denominados retos en las cuales se incluyen problemas retadores. Para cada actividad se estima entre 10 y 15 horas distribuidas en 2 y 3 sesiones de trabajo con los docentes.

Como cierre en cada una de las actividades, los docentes proponen otros desafíos con la proyección de ser desarrollados con sus estudiantes en sus respectivos contextos escolares, estos fueron socializadas en plenaria como una forma de retroalimentar y ajustar antes de llevarlos a la práctica en el aula. Las actividades se adjuntan en los anexos.

Conclusiones del Capítulo 3

Se ha considerado la “investigación como diseño” como una de las maneras y referentes que ha permitido fortalecer el conocimiento de la disciplina y el conocimiento didáctico del contenido en los docentes de matemáticas que orientan el aprendizaje en el nivel de básica primaria y por lo tanto la consolidación del modelo pedagógico de formación docente.

Más allá de crear diseños efectivos para lograr un aprendizaje, se adquiere en la investigación el compromiso de continuar en la consolidación del modelo de formación docente y explicar por qué funciona y sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias. Precisamente, este tipo de metodología incluye y refleja un compromiso para entender las relaciones existentes entre teoría educativa y práctica e instrumentos, ya sean recursos didácticos o herramientas conceptuales.

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1 Implementación de la propuesta

La ejecución de las actividades se realizó en el auditorio de las instalaciones del Concejo Municipal de Sesquilé, a través de un diplomado en el cual participaron 12 docentes en ejercicio, licenciados en educación básica primaria y provenientes de los municipios de Chocontá, Sesquilé, Guatavita y Gachancipá del Departamento de Cundinamarca, 10 de ellos del sector oficial y 2 del sector privado. Se conformaron dos grupos de seis docentes, con uno de estos se trabajó los martes de 1:30pm a 6:30pm y con el otro grupo los sábados de 8:00am a 1:00pm.

Para el desarrollo de las actividades se tuvo en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger; es así como se conformaron grupos, en donde el líder ha surgido de forma natural durante el transcurso de la actividad. De esta manera los docentes abordan cada uno de los desafíos propuesto, utilizando las herramientas dispuestas para tal fin en el laboratorio, y otras que los docentes han considerado pertinentes; plantean y discuten en equipo estrategias, ponen en práctica, realizan registros, argumentan y organizan el informe por escrito; como siguiente momento, el investigador presenta su punto de vista y propuesta de solución en cada uno de los desafíos y retos propuestos, haciendo énfasis en las herramientas que se han dispuesto en el laboratorio.

Todas las actividades se desarrollaron en presencia del investigador y se evaluaron con la participación activa de todos los docentes, espacio en el cual se identificaron fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora para el desarrollo del pensamiento matemático.

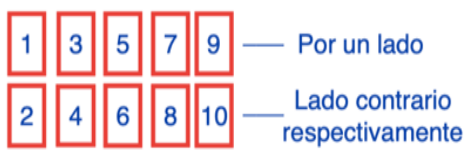
4.2 Análisis de los resultados

En esta sección se presenta el análisis de los resultados, el cual se realiza teniendo en cuenta la rúbrica general construida para tal fin la cual se adjunta en el Anexo 13. Igualmente, se comparten algunos episodios relevantes para la consecución de los objetivos.

4.2.1 Actividad 0: Actividad de entrada

Esta actividad ha permitido evidenciar en los docentes aspectos sobre el conocimiento disciplinar y pedagógico, y las expectativas de formación en el área de matemáticas, y por lo tanto al respecto fortalecer el diseño de cada una de las actividades. A continuación, se presentan algunas de las respuestas dadas por los docentes.

3. La docente de grado segundo, propone la siguiente situación para la clase de matemáticas: Cinco tarjetas tienen impresos por un lado los números impares 1, 3, 5, 7 y 9; y los números 2, 4, 6, 8 y 10 por el otro lado, tal como se muestra en la siguiente imagen.



- La docente distribuye a los estudiantes en grupos de a cuatro, hace entrega de las cinco fichas a cada uno de los grupos y les propone validar la siguiente afirmación: "Cuando exactamente dos de los números visibles son pares, la suma de los cinco números visibles es 27." Exponer argumentando las estrategias que utilizaron para determinar si la afirmación es verdadera o falsa.

Grupo 1. Nosotros probamos este ejemplo: 1, 4, 6, 7, 9. Después probamos otros dos ejemplos. Cada uno tenía dos números pares y la suma era 27 cada vez. Podríamos probar con otros ejemplos con dos números pares y también sumarían 27. Por lo tanto, grupo 1 dice que es verdadera.

Grupo 2. Nosotros probamos con números impares y sumamos 25:

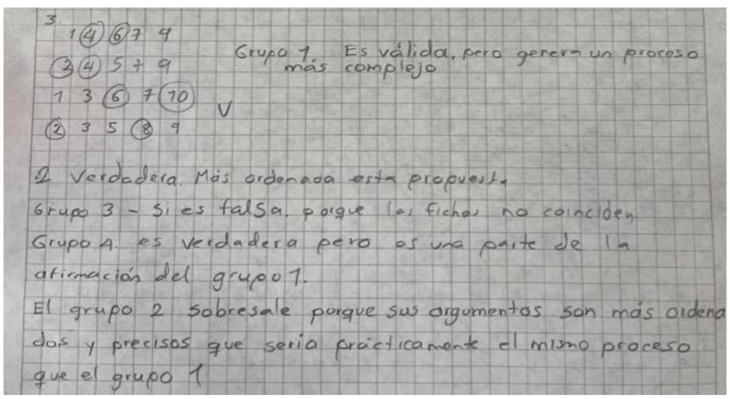
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.

Si cambiamos un número impar por uno par, el total será 1 unidad más. Luego, si tengo dos números pares, el total será 2 unidades mayor. El total será 27. Por lo tanto, grupo 2 dice que es verdadera.

Grupo 3. Nosotros escribimos estos números: 1, 2, 3, 4, 9. Dos de los números visibles son pares pero la suma es 19. Así es que no siempre la suma es 27. Por lo tanto, grupo 3 dice que la afirmación es falsa.

Grupo 4. Nosotros pensamos en estos números visibles: 1, 3, 6, 8, 9. Dos son pares y cuando sumamos todos los números, obtuvimos 27. Por lo tanto, grupo 4 dice que es verdadera.

- Analizar la argumentación que ha presentado cada uno de los grupos, y determinar la validez de la misma, sus fortalezas y posibles dificultades que están presentando los estudiantes.
- ¿Identifica algún grupo que, de acuerdo a la solidez de sus argumentos, sobresale frente al resto de participantes? Argumentar.


3
1 4 6 7 9
3 4 5 7 9
1 3 6 7 10
2 3 5 8 9
V

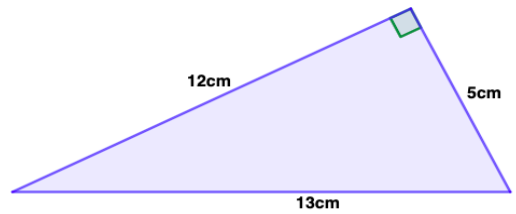
Grupo 1. Es válida, pero genera un proceso más complejo

2 Verdadera. Más ordenada esta propuesta.
Grupo 3 - si es falsa porque las fichas no coinciden
Grupo 4. es verdadera pero es una parte de la afirmación del grupo 1.
El grupo 2 sobresale porque sus argumentos son más ordenados y precisos que sería prácticamente el mismo proceso que el grupo 1

9 de los 12 docentes utilizan el material concreto para verificar cada una de las estrategias que presentan los estudiantes, estos 9 docentes afirman que el único grupo que no tiene la razón es el 3, y que el 2 es el grupo que sobresale por sus argumentos. Sostienen que este es más ordenado y preciso; sin embargo, los docentes no argumentan en qué sentido les parece más ordenados y precisos, no mencionan el proceso de generalización que incluye en el análisis el grupo 2.

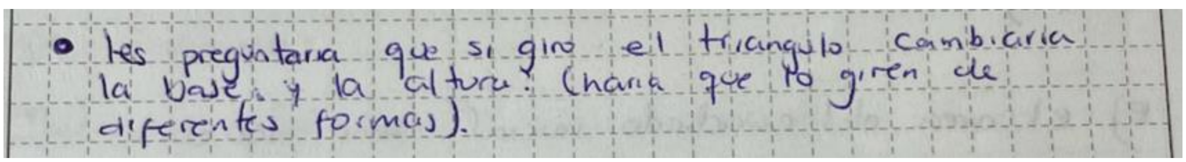
3 de los 12 docentes afirman que el grupo 3 tiene la razón; se concentra en verificar con lápiz y papel los números visibles que se mencionan en esta estrategia, no usan el material concreto disponible (fichas numeradas) y por ende no se dan cuenta que no se pueden mostrar simultáneamente los números 1 y 2, ni los números 3 y 4.

5. El docente dibuja en el tablero el siguiente triángulo indicando sus respectivas medidas:



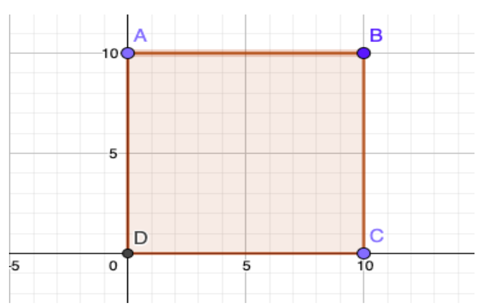
Luego, propone a sus estudiantes calcular el área. Sin embargo y casi de inmediato, Juan Pablo manifiesta que calcular el área de este triángulo es imposible porque la altura del mismo no está dada.

- ¿Cree que Juan Pablo tiene la razón? Argumentar. “No tiene la razón porque se puede hallar la altura midiendo”, responden 8 de los 12 docentes.
- Si la respuesta a la anterior pregunta es negativa, dé un ejemplo de una buena práctica de enseñanza que podría reducir el error conceptual de Juan Pablo. En la siguiente imagen uno de los grupos responde: “Les preguntaría que, ¿si giro el triángulo cambiaría la base y la altura? (haría que lo giren de diferentes formas)


• les preguntaria que si giro el triangulo cambiaria la base y la altura? (haria que lo giren de diferentes formas).

Sólo un grupo conformado por 3 docentes reconoce la altura que se indica en el triángulo.

8. Un cuadrado se dobla por la mitad y el rectángulo resultante tiene un perímetro de 30cm. ¿Cuál es el área del cuadrado inicial? Argumentar.



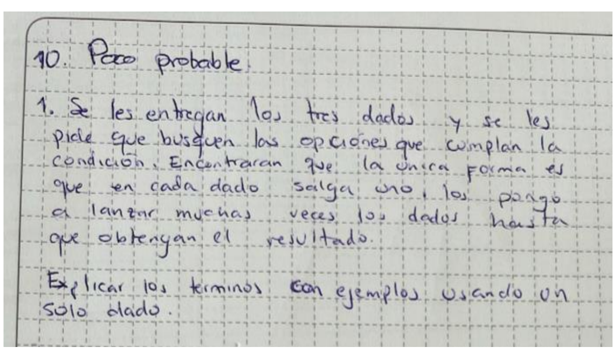
“El área del cuadrado inicial es de 100cm². Se realizó en GeoGebra”. Respuesta de 3 de los 12 docentes participantes. Los demás docentes utilizan papel y lápiz, para experimentar a través de casos particulares; 4 de ellos logran determinar el área del cuadrado inicial.

- Proponga un ejemplo de práctica de aula, donde estudiantes de grado tercero logren hallar el área en mención. Describa la metodología y recursos a utilizar.

• En una hoja hacer un rectangulo de perimetro 30 cm, duplicar este rectangulo, medir y Calcular el area.

Otro grupo: “Iniciaría por hallar el área del piso del aula y espacios cercanos a ellos (campo deportivo, pasillos …)”

10. En una mesa se lanzan 3 dados comunes. ¿Cuál de los siguientes términos: seguro, muy probable, poco probable o imposible; describe el suceso en que la suma de los resultados de los tres dados sea 3? Argumentar y proponer una estrategia para que los estudiantes de grado tercero deduzcan el término apropiado.



10. Poco probable

1. Se les entregan los tres dados y se les pide que busquen las opciones que cumplan la condición. Encontraran que la única forma es que en cada dado salga uno, los pongo a lanzar muchas veces los dados hasta que obtengan el resultado.

Explicar los terminos con ejemplos usando un solo dado.

El aporte de la imagen da cuenta de que el docente no es consciente del papel de los juegos de mesa en la construcción de pensamiento matemático. En este caso ignoran el juego o los juegos con los dados.

Otro grupo: “La probabilidad es 1 de 18 por lo tanto, es poco probable”. Los docentes no presentan argumentación al respecto. Se retroalimenta al respecto, destacando que el espacio muestral consta de 216 resultados posibles; y se menciona que en el transcurso del diplomado se desarrollará una actividad al respecto denominada “estadística y probabilidad”.

A continuación, se consolida los resultados y análisis de esta actividad, teniendo en cuenta la rúbrica general propuesta para tal fin.

Tabla 1: Rúbrica de análisis de actividad de entrada

Componente	Nivel	Características
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Bajo: Presenta dificultades para comprender un problema	Las dificultades de comprensión se deben a la falta de manejo de conceptos. Principalmente en los componentes geométrico, aleatorio y variacional. Limitado lenguaje técnico, aspecto que les dificulta la descripción y comunicación en cada uno de los problemas planteados.
Planteamiento de estrategias de resolución de problemas	Nivel Bajo: Se le dificulta establecer estrategias apropiadas para resolver problemas en el contexto del pensamiento variacional.	La experimentación a través de casos particulares como estrategia usual en los docentes no evidencia organización que permita identificar patrones y/o regularidades. Los casos que consideran no toman en cuenta todas las condiciones del problema. Los que enfocan la solución de una forma eficaz están en minoría.
Uso de material manipulativo en la resolución de problemas.	Nivel Medio: Utiliza material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas.	Utilización del material manipulativo de acuerdo a instrucciones y sugerencias que se realizan en la actividad. No llegan a conclusiones correctas por no tener en cuenta aspectos del material manipulativo que influyen en la solución del problema. El material manipulativo no es una prioridad en la resolución de problemas, y no se realizan propuestas de incorporación de nuevos manipulativos.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Bajo: El uso de manipulativos virtuales le es irrelevante en la resolución de problemas.	El 75% de los docentes no consideran los manipulativos virtuales importantes en la resolución de problemas. Los docentes no reportan experiencia sobre el uso de la tecnología en la resolución de problemas.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel medio: Reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, proceso que realizan de acuerdo a orientaciones. No proponen estrategias de revisión y evaluación de procesos.

Conclusiones:

En esta actividad y como oportunidad de mejora, se evidencia la necesidad de fortalecer los diferentes componentes en el área de matemáticas, específicamente la construcción de significado de conceptos, habilidades en la resolución de problemas, a través de estrategias didácticas que fomenten el uso efectivo en el aula de los manipulativos concretos y las herramientas tecnológicas. Fortalecer igualmente las habilidades para hacer de los diferentes juegos (tradicionales, de mesa, de estrategia, entre otros) actividades lúdicas, es decir que contengan una intención pedagógica dirigida al desarrollo del pensamiento matemático.

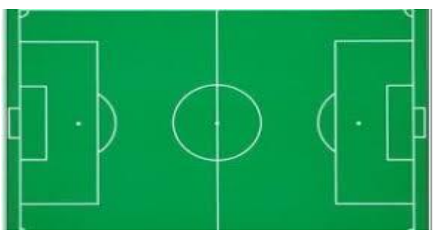
Es necesario fortalecer los procesos de metacognición, teniendo en cuenta que el uso de habilidades metacognitivas permite a él que aprende ser consciente de sus pasos durante el proceso de resolución de problemas, construcción de conceptos y en general de los procesos de aprendizaje. Por lo tanto, evaluar la productividad en cada una de las acciones ejecutadas tanto de forma individual, como aquellas que se logran mediante el trabajo en equipo, es un recurso para que los docentes en sus procesos de formación y en su práctica pedagógica en el aula, revisen y ajusten sus estrategias de abordaje y resolución en las diferentes situaciones que se plantean en la propuesta de investigación.

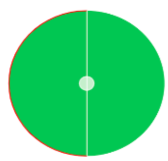
4.2.2 Actividad 01: Puntos y rectas notables del triángulo

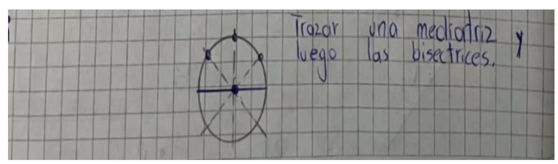
Objetivo: Construir las rectas y puntos notables de un triángulo, con el fin de fortalecer las habilidades en el pensamiento geométrico y espacial a través de la resolución de problemas retadores y haciendo uso de manipulativos concretos, la experimentación, regla y compás, y software dinámico (GeoGebra).

Esta actividad se desarrolla a través de cinco desafíos: el desafío 1 “El doblez en algunas construcciones geométricas básicas”, paralelas y perpendiculares principalmente; el desafío 2, “El doblez en las rectas y puntos notables de un triángulo”, cuyo objetivo es trazar las rectas y puntos notables de un triángulo, actividad apoyada en materiales tales como: hojas blancas, papel calca y tijeras; el desafío 3: “Regla, escuadra y compás en construcciones básicas”; el desafío 4: “Resolución de problemas mediante la construcción de las rectas y puntos notables de un triángulo con el uso manipulativos concretos (dobleces de papel), de regla, escuadra y compás”; y finalmente el desafío 5: Este se propone principalmente con el objetivo de trabajar en el software dinámico GeoGebra las construcciones realizadas a través de otros medios, en los desafíos anteriores. A continuación, se comparte algunos episodios de importancias para los objetivos de la presente investigación.

j) El estratega (técnico) de un equipo de fútbol quiere sorprender al rival desde el primer momento de juego, necesita para tal fin ubicar tres jugadores distribuidos uniformemente sobre el arco resaltado en rojo que hace parte del círculo central del campo de juego, sin que se ubique ninguno de ellos en los extremos del mismo. La tarea consiste en apoyar al técnico con la ubicación exacta de los tres jugadores, para lo cual encontrará dentro del material el círculo central (imagen de la derecha) recortado en papel, para que a través de dobleces se realice la distribución que requiere el estratega.



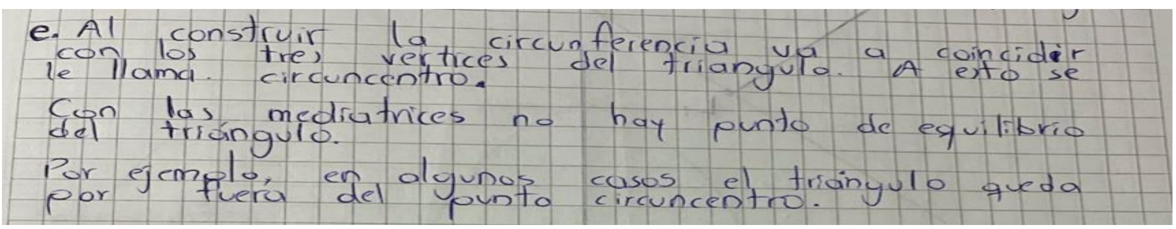


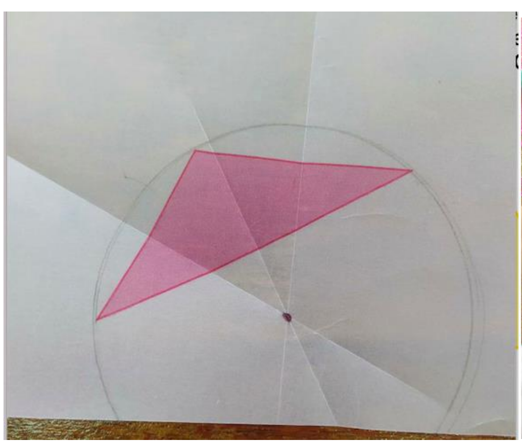


2) Ubicar los floreros en sus respectivos soportes (los cuales encontrarán ubicados dentro del laboratorio). Exponer el trabajo realizado en equipo, los recursos y conceptos los cuales les permitieron cumplir con la tarea asignada.

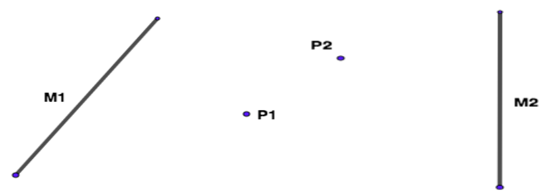
Los docentes alcanzaron el objetivo, equilibrando diferentes figuras en la base soporte que observamos en la imagen anterior, proceso que logran después de varios intentos, revisando y ajustando a la mejor ubicación del punto que permite este hecho. A continuación, la guía les pide trazar las medianas de uno de los triángulos que les fue posible equilibrar; es así como los docentes descubren el baricentro de un triángulo y sus respectivas medianas.

e) Trazar mediante dobleces la mediatriz de cada uno de los lados de los triángulos 1, 2 y 3 (disponibles en el material en hoja tipo calca). Luego cada integrante del grupo toma un triángulo, pueden apoyarse en el procedimiento expuesto en el reto 1. ¿Qué se observa en cada uno de los triángulos?, ¿sus compañeros obtuvieron el mismo resultado?, ¿es posible equilibrar el triángulo usando el punto de concurrencia de las mediatrices cómo en los casos anteriores?


e. Al construir la circunferencia va a coincidir con los tres vertices del triángulo. A esto se le llama circuncentro.
Con las mediatrices no hay punto de equilibrio del triángulo.
Por ejemplo, en algunos casos el triángulo queda por fuera del punto circuncentro.

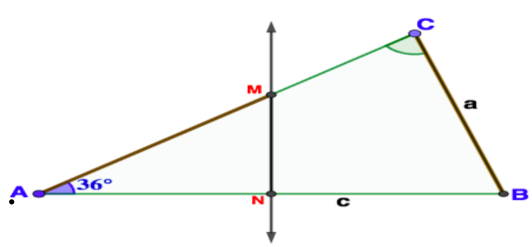



a) Trazar con el uso de regla y escuadra una recta paralela a M1 que pase por el punto P1, e igualmente una paralela a M2 que pase por P2 (seguir la orientación de los ejemplos de la parte inferior de la siguiente imagen).



Una tarea que lograron después de varios intentos y de compartir ideas al respecto con sus compañeros del grupo. Luego fue evidente la dificultad en el manejo de regla y escuadra, así como las construcciones con el compás.

f) Si la recta que pasa por los puntos N y M es mediatriz del lado c en el triángulo ABC, y la longitud del lado a es igual a la longitud del segmento AM, hallar la medida del ángulo C.



Este reto no lo lograron inicialmente, fue necesario orientarlos y remitirlos al desafío relacionado con la mediatriz y los triángulos que se construyeron al desplazar un punto sobre esta. Es así como los docentes logran identificar el triángulo isósceles al trazar el segmento MB, luego por composición establecen la medida del ángulo pedido.

En esta actividad, los docentes se han mostrado muy motivados y sorprendidos positivamente de los resultados y productos que les fue posible obtener. Igualmente, han manifestado que los puntos y rectas notables de un triángulo es algo nuevo para ellos, con excepción de la altura la cual es familiar para todos, aunque no tenían claro el concepto de la misma. A continuación, se consolida los resultados y análisis de esta actividad, teniendo en cuenta la rúbrica general propuesta para tal fin.

Tabla 2: Rúbrica de análisis actividad 1

Componente	Nivel	Características
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Medio: Expone las tareas a realizar para resolver el problema.	8 de los 12 docentes participantes presentan dificultades para comunicar a otros la tarea a realizar, evidenciando un grado mínimo de familiarización con los puntos y rectas notables de un triángulo. No se relaciona este con otros problemas o contextos.
Planteamiento y ejecución de estrategias de resolución de problemas	Nivel Medio: Plantea estrategias efectivas para resolver problemas.	8 de los 12 docentes participantes plantean y resuelven problemas que involucran puntos y rectas notables de un triángulo, presentando una mínima o nula argumentación. Se destaca la experimentación a través de casos particulares como una estrategia usual en los docentes.
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos.	Nivel Medio: 9 de los 12 docentes participantes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción de conceptos.	Los manipulativos concretos son poco usuales en las prácticas de aula referentes a geometría y la experiencia diseñada no logra superar esa carencia que traen los docentes. Usa el material manipulativo ante sugerencia que se presenta en la actividad, más no como iniciativa propia. Reconoce el uso de los dobleces de papel como una estrategia significativa en la construcción del concepto de cada uno de los puntos y rectas notables del triángulo.
Uso de material manipulativo en la resolución de problemas.	Nivel Medio: 9 de los 12 docentes participantes utilizan material manipulativo de manera	Utilización del material manipulativo de acuerdo a instrucciones y sugerencias que se realizan en la actividad.

	efectiva en la resolución de problemas.	Reconoce los dobleces de papel como una estrategia significativa para lograr la comprensión y resolución de problemas que involucran puntos y rectas notables de un triángulo.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Bajo: Para 9 de los 12 docentes, el uso de manipulativos virtuales le es irrelevante en la resolución de problemas.	El 75% de los docentes no consideran los manipulativos virtuales importantes en la resolución de problemas lo cual se debe principalmente a la falta de habilidades computacionales. Los docentes no reportan experiencia sobre el uso de la tecnología en la resolución de problemas que involucren puntos y rectas notables de un triángulo. Previo a la presente experiencia el uso de software dinámico en las prácticas pedagógicas es mínimo, lo cual es evidente en las habilidades que presenta el docente.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel medio: Reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	El 100% de los docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, proceso que realizan atendiendo a orientaciones, más no que se realice por iniciativa propia.

Conclusiones:

En esta primera actividad los docentes evidencian el uso mínimo de manipulativos concretos y virtuales en la construcción de conceptos y resolución de problemas. Ninguno de los docentes participantes manifestó tener experiencia en la técnica del doblez de papel en la enseñanza de la geometría, igualmente ha sucedido con los puntos y rectas notables del triángulo, de los cuales solo la altura es un elemento conocido, aunque sin la definición precisa, en tanto consideraban que solo existía una para cada triángulo.

A través de la revisión en equipo y la verificación principalmente de la perpendicularidad en algunos casos, el 100% de los docentes logran la construcción de las rectas y puntos notables del triángulo. Igualmente, y con el apoyo del material concreto, logran la resolución de los problemas planteados. Manifiestan los docentes que la actividad les ha generado sorpresa en cuanto no consideraban lograr tan relevantes aprendizajes a través de dobleces, estrategia que los motiva para la construcción de significado de conceptos y en especial en la resolución de problemas. Aspecto, que para la investigación resulta relevante en cuanto estos nuevos aprendizajes, contribuyen al conocimiento disciplinar, además los docentes han experimentado formas de construirlos y asimilarlos, aportando al conocimiento didáctico del contenido.

El uso de manipulativos virtuales y específicamente el software GeoGebra es igualmente desconocido en el contexto de la geometría para el 100% de los docentes participantes; manifiestan no tener experiencia en el aula con este tipo de software dinámico. En tanto ha resultado significativo el espacio que se generó con ellos, previo a la realización del diplomado dentro de las actividades de entrada, en la cual exploran la aplicación y se realizaron algunas construcciones básicas. Al respecto, han manifestado que les ha permitido ingresar a la aplicación e intentar, aunque sin éxito, abordar la solución de situaciones planteadas, así como evidenciar una estrategia en la resolución de problemas apoyada en la tecnología.

4.2.3 Actividad 02: Semejanza

Objetivo: Construir la definición de semejanza a partir de actividades (desafíos), las cuales los docentes desarrollarán con el uso de manipulativos concretos, la experimentación, el pantógrafo y software dinámico (GeoGebra).

Esta actividad se desarrolla a través de 5 desafíos: el desafío 1, "Comparando figuras", este tiene como objetivo conjeturar acerca de la relación entre figuras, sus áreas, las longitudes de sus lados, su perímetro y su forma; el desafío 2, "Experimentando construyo semejanza", con el objetivo de proyectar figuras geométricas, observar y establecer conclusiones; el desafío 3, "Diferentes herramientas en la construcción de semejanza", planteado con el fin de utilizar diversos recursos, plantear y ejecutar estrategias que le permitan al docente a partir de una figura, construir otras, conservando su forma y condiciones indicadas entre sus lados y área; el desafío 4, "Construyendo la torre de Hanoi, este tiene como objetivo, establecer las condiciones necesarias que se requieren para ampliar o reducir un rectángulo de modo que la imagen sea semejante al rectángulo original. Finalmente, el desafío 5, “Semejanza en la resolución de problemas”, desafío propuesto con el objetivo de aplicar la homotecia y sus propiedades en la resolución de problemas, mediante el uso de las herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas. A continuación, se comparte algunos episodios.

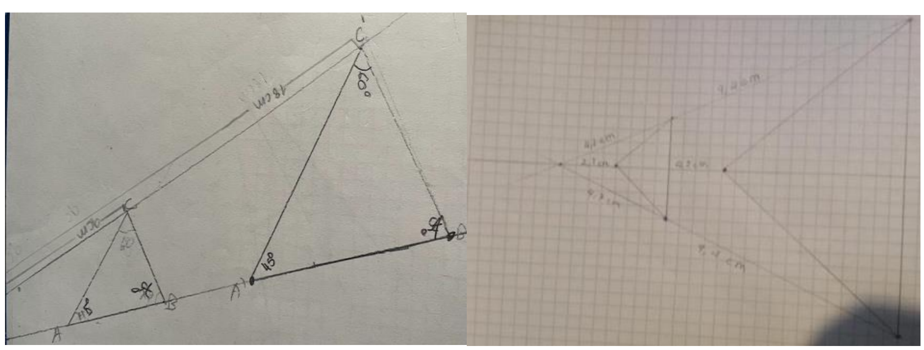
a) Realice el montaje que le permita proyectar figuras en la pared o plano de proyección. En la siguiente imagen se observa a los docentes realizando la proyección de un triángulo.

c) Teniendo en cuenta el montaje anterior, sin alterar la distancia del objeto y el plano de proyección, ubique la linterna de tal manera que se genere como proyección una figura con la misma forma del objeto (figura geométrica), y que además cada uno de los lados de esta sean el doble. Argumente cada uno de los pasos, justificando las condiciones que se deben cumplir para lograr la tarea asignada.

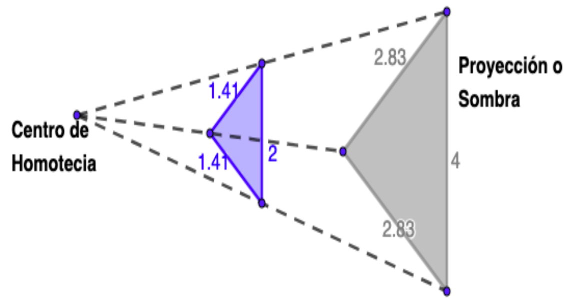
Los docentes a través de la experimentación logran la tarea, determinando que el objeto a proyectar debe ubicarse en este caso para que se cumplan las condiciones dadas, en el punto medio entre la linterna y el tablero de proyección; igualmente, a través de la medición directa, calculan las áreas y realizan la comparación entre estas, determinando que el área de la proyección, corresponde a 4 veces el área de la figura dada.

Desafío 3: Diferentes herramientas en la construcción de semejanza. Dada una figura construyo otras las cuales conservan su forma y la proporción entre sus lados.

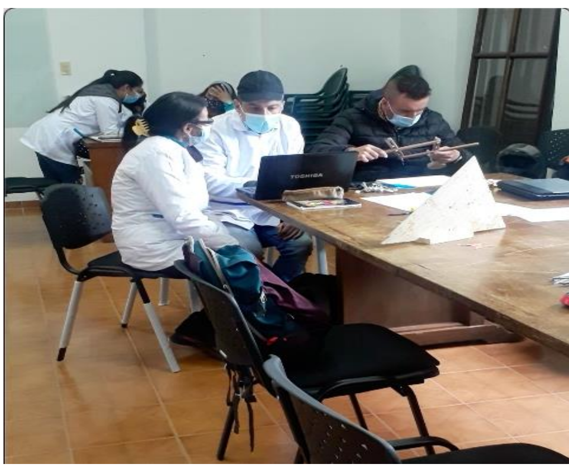
En un primer momento los docentes construyen figuras semejantes a una dada, utilizando características obtenidas en el desafío anterior; por ejemplo, si quieren ampliar, duplican, triplican, … los lados del polígono dado y construyen el nuevo polígono, apoyados igualmente en el transportador para mediar los ángulos internos. Sin embargo, y al verificar la medida de los lados y ángulos se evidenció la falta de exactitud, que obedece al margen de error al tomar las medidas, más aún cuando no están determinadas por números enteros. En un segundo momento, y con el fin de minimizar los errores de medición antes mencionados, los docentes obtienen figuras semejantes a través de la homotecia, apoyados en el montaje realizado en el desafío anterior; por lo tanto, en este caso después de construida la figura, ubican el centro de homotecia y desde este trazan semirrectas que pasan por los vértices de la figura, estas a su vez son utilizadas para ubicar los vértices homólogos de la figura en proyección, ubicados de acuerdo al factor de homotecia. Ver la siguiente figura.

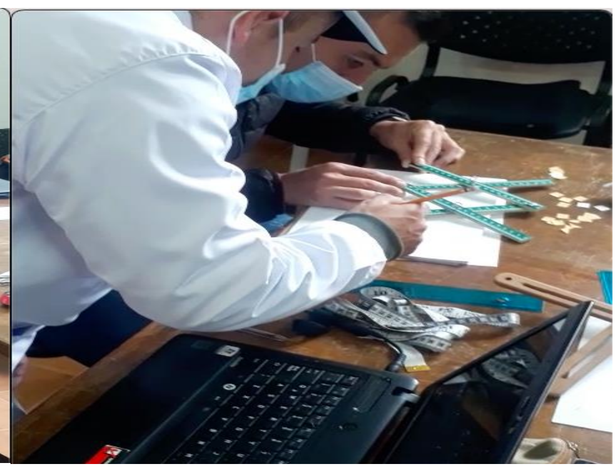


Finalmente, los docentes construyen figuras semejantes, mediante la opción homotecia que les facilita la aplicación, al suministrarle la figura, centro y factor de homotecia. Mediante la aplicación los docentes verifican elementos, comparan la figura y su proyección, lados, área y la relación con el factor de homotecia. Ver la siguiente figura.



Otra estrategia que los docentes utilizaron fue la utilización del pantógrafo en la ampliación y reducción de figuras, en donde también identificaron elementos de la homotecia; consideran como valiosa esta herramienta por ser práctica, novedosa y con aplicación en el contexto de las artes además del contexto geométrico. Parte de la interacción con esta herramienta, se evidencia en las siguientes imágenes.

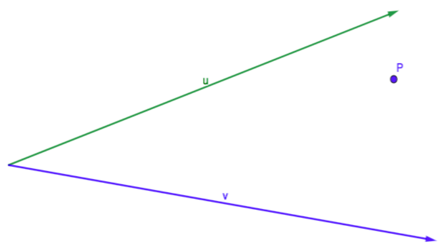


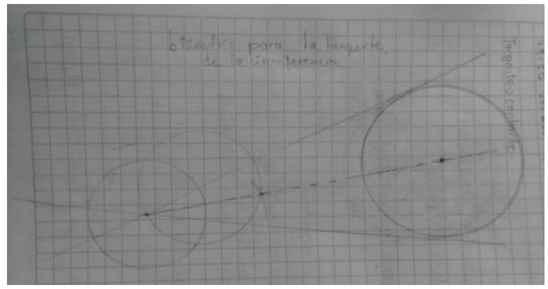


Desafío 5: Semejanza en la resolución de problemas. Construir una circunferencia tangente a las rectas u y v, de tal forma que pase por el punto P.

Objetivo: Aplicar la homotecia y sus propiedades en la resolución de problemas, mediante el uso de las herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.

Materiales: Regla, compás, escuadra, pantógrafo, software GeoGebra.





Frente a este desafío, los docentes han realizado acercamientos en un primer momento, apoyados en la actividad “puntos y rectas notables del triángulo”; específicamente ellos trazan la bisectriz utilizando el doblez del papel, por la cual desplazan el compás hasta obtener de manera aproximada la circunferencia solicitada. En la imagen anterior de la derecha se presenta la construcción en mención.

Tabla 3: Rúbrica de análisis actividad 2

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos.	Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción del concepto de semejanza.	Los manipulativos concretos son utilizados para construir diferentes figuras geométricas y comparar entre estas la medida de sus lados y de sus áreas; de esta forma deducen las relaciones que se establecen entre dos figuras semejantes.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera asertiva el 75% de los docentes expone las tareas a realizar en la resolución de problemas.	9 de los 12 docentes exponen las tareas a realizar para resolver problemas propuestos, apoyados principalmente en gráficas y manipulativos concretos; los 3 docentes restantes requieren orientación complementaria a sus propuestas de comprensión.
Planteamiento y ejecución de estrategias de resolución de problemas	Nivel medio: El 50% de los docentes ejecuta estrategias efectivas en la resolución de problemas, argumentando el proceso.	6 de los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias apoyadas en manipulativos concretos y gráficas principalmente, para resolver problemas, que involucran semejanza de figuras geométricas planas, justificando el proceso en cada caso. Los 6 docentes restantes han requerido de orientación para lograr la solución.
Uso de material manipulativo en la resolución de problemas.	Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas.	Los docentes participantes, utilizan como estrategia en la resolución de problemas los manipulativos concretos, gestionan algunos de estos al no estar disponibles. Los docentes tienen en cuenta la experiencia en actividades anteriores, para fortalecer y consolidar estrategias de resolución de problemas.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: El 50% de los docentes consideran relevante el uso del software dinámico	El software dinámico GeoGebra es utilizado para la construcción de polígonos, rectas y puntos notables del triángulo, por todos los docentes participantes, 6 de ellos demuestran mayor destreza en el manejo de la

	GeoGebra, en la resolución de problemas.	aplicación y lo consideran dentro de las estrategias de resolución de problemas, específicamente para la construcción de gráficas, facilitando la comprensión apoyada por la visualización.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel medio: Los docentes participantes, reflexionan sobre el proceso de aprendizaje y toman conciencia de sus procesos mentales.	Los docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, proceso que realizan atendiendo a orientaciones, más no que se realice por iniciativa propia.

Conclusiones

En esta actividad los docentes han explorado a través del montaje de proyección de figuras, una estrategia que les ha permitido la construcción de figuras semejantes, mediante la homotecia, así como identificar de esta sus elementos y características, conjeturar y validar sus hipótesis frente a la relación que se establece entre perímetro y área, de la figura y su respectiva proyección.

En un segundo momento se ha pedido a los docentes, construir una homotecia, usando papel y lápiz de tal forma que se obtenga una figura semejante cuyo perímetro sea el doble del perímetro de una figura dada. Al respecto, ellos proceden a dibujar la figura, la mayoría un triángulo escaleno, al cual le toman mediadas de sus lados, los duplican y mantienen los ángulos; sin embargo, se evidencia incomodidad en tanto se les ha dificultado hacer coincidir en medida ángulos homólogos. Luego este tipo de experiencias no son comunes en las prácticas pedagógicas, como tampoco son relevantes los procesos de metacognición en cuanto no se apoyan inicialmente de la experimentación o montaje realizado, en tanto los docentes tendrían que ubicar luego de construir la figura, el centro de homotecia y no la figura en proyección, que es la que se obtiene como resultado del trazado de rayos que se originan en el centro de homotecia y pasan por cada vértice de la figura.

En los retos propuestos en la actividad fue evidente el apoyo de las estrategias experimentadas en actividades anteriores, específicamente los dobleces de papel en la construcción de la bisectriz que necesitaron para encontrar la circunferencia tangente a dos semirrectas.

Teniendo en cuenta lo evidenciado en el trabajo, se reflexiona con los docentes quienes a su vez valoran y destacan la relevancia de los elementos de la homotecia en la construcción de figuras semejantes, en tanto reducen procesos de medición de lados y ángulos, que les permite con mayor comodidad ajustar la práctica a los diferentes grados del nivel de básica primaria.

Finalmente, es posible concluir que la actividad ha resultado novedosa para los docentes en cuanto han experimentado diferentes formas de construir figuras semejantes, apropiar conceptos, elementos y características de la homotecia, así como la incidencia en la resolución de problemas. Los docentes han encontrado la esencia de las actividades experimentales, las cuales les ha permitido interactuar en equipo, plantear conjeturas acerca de lo que podía suceder con la forma, el perímetro y área de las figuras en su respectiva proyección; sin embargo, más relevante aún es tener la posibilidad de verificar o ajustar sus conjeturas, así como abordar la situación a través de otras estrategias, tales como la utilización del pantógrafo y de la aplicación GeoGebra. En consecuencia, las actividades buscan que los aprendizajes se logren haciendo, manipulando y experimentando, siguiendo el enfoque STEM/STEAM[19]; en tanto según estudio de Wu, T., & Albion, P. (2019), en algunas partes del mundo se tiene escasez de graduados de STEM, incluidos profesores, causada por una disminución en los estudios en estas áreas a nivel

[19] Wu, T., & Albion, P. (2019). Investigating Remote Access Laboratories for Increasing Pre-service Teachers' STEM Capabilities. *Educational Technology & Society, 22* (1), 82–93.

terciario, que se deriva de una alta tasa de abandono de los cursos y el tiempo inadecuado dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de STEM en las escuelas de primaria y secundaria.

En cuanto al diseño de la actividad, en esta se ha implementado la parte experimental o montaje que ha permitido a los docentes construir figuras semejantes, igualmente se incluye el pantógrafo como máquina con el mismo propósito, aunque éste último no permite evidenciar un proceso de construcción significativa en los docentes más allá de brindar facilidades en el diseño de figuras geométricas.

Finalmente, y en coherencia con los objetivos de la investigación, a través de esta actividad los docentes continúan consolidando el conocimiento disciplinar, específicamente geometría y la construcción del concepto de homotecia a través del montaje de proyección de figuras, estrategia para construir semejanza entre estas.

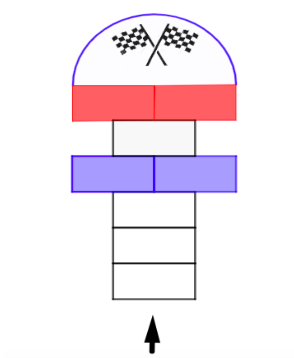
4.2.4 Actividad 03: Estadística y probabilidad

Objetivo: Construir significado de conceptos básicos asociados a probabilidad, a través de experimentos relacionados con el azar, la recolección y análisis de datos en situaciones cotidianas, las cuales fortalecen las habilidades de los docentes de la educación básica primaria en la resolución de problemas en contextos aleatorios.

Esta actividad se desarrolla a través de 3 desafíos. El desafío 1: “Jugando golosa (rayuela)”, con el objetivo de construir mediante la experimentación, un primer acercamiento al significado del concepto de probabilidad de un evento y sus términos asociados. El desafío 2: “Recorriendo la estadística y la probabilidad”, con el objetivo de construir con los docentes algunos conceptos básicos de la probabilidad y la estadística, a través de proyectos que pueden realizarse en el contexto de la educación básica primaria. El desafío 3, “Medidas de tendencia central”, con el objetivo de fomentar el uso de herramientas tecnológicas en la organización, presentación y análisis de la información, específicamente el Excel y Software GeoGebra. A continuación, se comparte algunos episodios.

Desafío 1: a. En equipo asignar la numeración a la golosa (utilizando el tablero que disponen en la fotocopia (ver imagen)), cada número debe corresponder con un posible resultado de sumar los números que se obtienen al lanzar los dos dados, y ubicarlos en el orden que crean conveniente e iniciando por la casilla que indica la flecha; cada número lo pueden repetir hasta tres veces. En las casillas rojas y azules, pueden apoyar los dos pies siempre y cuando le hubieran asignado el mismo número.

b. Cada equipo que se dispone a competir, por lo tanto, debe distribuir en la golosa para tal fin, la numeración de acuerdo a la establecida en el literal a.



e) Teniendo en cuenta los literales anteriores, analizar en equipo los siguientes interrogantes relacionados con el resultado de sumar las caras superiores de los dados que se obtienen al ser lanzados, hecho también llamado experimento. (los dados y sus respectivas caras tienen ubicado los números del 1 al 3, es decir que cada número se repite en dos caras)

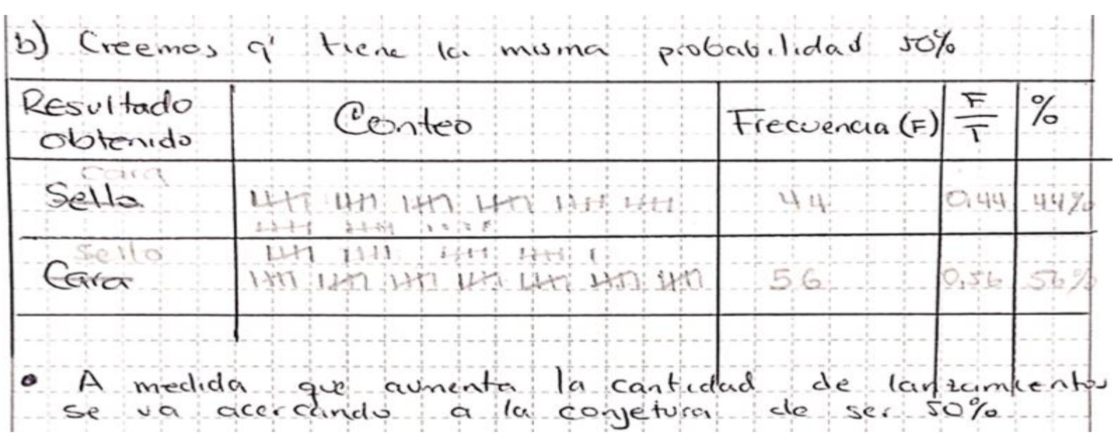
- ¿Al lanzar los dos dados cual fue el resultado de la suma que obtuvieron con menor frecuencia? ¿a qué se debe este hecho? Establecer conjeturas al respecto.
- ¿Al lanzar los dos dados cual fue el resultado de la suma que obtuvieron con mayor frecuencia? ¿a qué se debe este hecho? Establecer conjeturas al respecto.

Estas preguntas puntualizan el literal anterior y se comparte la tabla de doble entrada por parte del investigador como una estrategia para establecer el espacio muestral y por lo tanto la probabilidad de un evento. Igualmente, se comparte la máquina de conteo diseñada en GeoGebra en la cual interactúan los docentes y evidencian como a partir de la frecuencia, se distribuye la probabilidad después de cientos y miles de lanzamientos. Es así como se fortalece con los docentes el concepto de probabilidad de un evento.

b) Analizar el siguiente experimento. Si se lanza al aire una moneda, ¿cual es la probabilidad de obtener sello? Exponer conjeturas y completar la tabla siguiente.

"La probabilidad es del 50%", respuesta previa a la experimentación por parte de la mayoría de los docentes; tres de los docentes no realizan conjeturas y al respecto se disponen a la experimentación, quienes en la misma determinan igualmente un 50% de probabilidad de obtener sello.

¿Le es posible reafirmar sus conjeturas iniciales?


b) Creemos q' tiene la misma probabilidad 50%

Resultado obtenido	Conteo	Frecuencia (F)	$\frac{F}{T}$	%
Cara / Sello		44	0,44	44%
Sello / Cara		56	0,56	56%

- A medida que aumenta la cantidad de lanzamientos se va acercando a la conjetura de ser 50%

d) Proponer una actividad, en cada uno de los grupos, de estadística y probabilidad, donde se usen recursos del entorno y herramientas tecnológicas. Exponer objetivos, materiales a utilizar y metodología de trabajo. Socializar en plenaria.

La mayoría de los docentes replicaron algunas de las actividades trabajadas en el diplomado, con sus estudiantes en sus respectivas aulas de clase. Los docentes elaboraron actividades las cuales las trabajaron con sus estudiantes como se puede evidenciar en las siguientes imágenes. Una de las docentes manifiesta: "Los niños se divirtieron, colocaron en práctica el cálculo mental, y han adquirido a través de esta práctica términos básicos de probabilidad, tales como: Imposible, poco posible, muy posible y seguro; pienso que el material concreto en la actividad lúdica fue fundamental. También, se escuchaba inicialmente en los niños hacer mención a la suerte como un factor para ganar o perder".


La Docente comparte evidencias de la actividad la rayuela realizada con sus estudiantes de grado tercero Municipio de Guatavita.

Tabla 4: Rúbrica de análisis actividad 3

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos.	Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción del concepto de probabilidad de un evento.	Los manipulativos concretos son utilizados en la experimentación de eventos aleatorios, deduciendo el concepto de probabilidad y sus términos asociados tales como: espacio muestral, casos favorables, lo imposible, poco posible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro.
Plantea y ejecuta estrategias de	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las	Los 12 docentes exponen las tareas a realizar para resolver problemas propuestos; realizan conjeturas sobre los resultados que obtendrán en la

comprensión de un problema	tareas a realizar en la resolución de problemas.	experimentación con el material concreto (dados, monedas, balotas, …), y las discuten en equipo.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 75% de los docentes ejecuta estrategias efectivas en la resolución de problemas, argumentando el proceso.	9 de los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias apoyadas en manipulativos concretos, la experimentación y el apoyo mediante el trabajo en equipo. Los 3 docentes restantes centran el interés en el resultado, apoyado generalmente en operaciones básicas en primer lugar y mediante la experimentación con casos particulares.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas.	Gestionan de manera autónoma manipulativos concretos como estrategia en la comprensión y resolución de problemas referentes a probabilidad. Los docentes tienen en cuenta la experiencia en actividades anteriores, para fortalecer y consolidar estrategias de resolución de problemas.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: el 75% de los docentes, considera relevante el uso del software dinámico GeoGebra y Excel en la resolución de problemas.	El software dinámico GeoGebra, y Excel es utilizado de manera efectiva por 9 de los 12 docentes participantes, para la presentación de datos, mediante los diagramas de barras y circular. Los 3 docentes restantes utilizan las aplicaciones; sin embargo el trabajo en estas les cuesta principalmente por habilidades mínimas que ellos presentan en el manejo del computador.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: Reflexionan sobre el proceso de aprendizaje, toman conciencia de sus procesos mentales y complementan los mismos mediante trabajo en equipo.	Los docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes reflexionan sobre los resultados de los compañeros, como una forma de complementar los aprendizajes mediante el trabajo en equipo.

Conclusiones

En esta actividad los docentes interactúan mediante el juego la rayuela, conocido también como la golosa, el cual se diseña estratégicamente, adaptando los tradicionales dados solo para los números del 1 al 3, es decir que cada número aparece en dos caras del dado. Cada equipo debe diligenciar la rayuela con los números que ellos creen se obtiene al arrojar los dos dados y sumar las caras obtenidas, con opciones de repetir números según se describe en el desafío. Al respecto, la mayoría de los docentes distribuyen al azar números entre 2 y 6. Solo un grupo identifica que algunos resultados al arrojar los dados tienen mayor probabilidad que otros, luego distribuyen los números de acuerdo a este análisis y efectivamente ganaron el juego en el primer intento. En un segundo intento tres de los cuatro grupos de docentes, utilizan la experiencia del primer intento, la cual les indicaba los números que presentan mayor probabilidad.

Según la descripción anterior, los docentes antes del desarrollo de la actividad contaban con conocimientos mínimos de probabilidad, luego a través del ejercicio práctico en donde organizan una tabla de frecuencias, han construido conceptos básicos tales como: espacio muestral, casos favorables, y los referentes a la línea de probabilidad (imposible, poco posible, medianamente posible, muy posible y seguro); estos han sido consolidados a través de algunas estrategias para determinar el espacio muestral tales como la tabla de doble entrada, el diagrama de árbol y también la definición formal de probabilidad de un evento, la cual han corroborado a través de la experimentación.

Una vez más los docentes interactúan a través de una actividad práctica, en esta ocasión motivada por un juego tradicional, la cual los docentes destacan y valoran su potencial para la construcción del pensamiento matemático tanto en ellos como en sus estudiantes. Igualmente, en esta actividad y como ajuste al diseño de la misma, se incorpora una máquina virtual diseñada previamente por el investigador en la aplicación GeoGebra denominada “máquina de conteo”, utilizada para hallar la probabilidad de obtener alguna de las caras de un dado cuando se realizan cientos de lanzamientos. Estrategia que resultó limitada y por lo tanto poco relevante, en cuanto no permite cambiar el número de dados. De esta manera los manipulativos concretos han resultado protagonistas en un 90%.

Se destaca en la actividad el hecho de que los docentes complementan con otros desafíos y los ponen en práctica en sus respectivos contextos. Se describen a continuación algunos de ellos.

Un grupo de docentes socializa la experiencia de una actividad que diseñaron para trabajar igualmente la probabilidad de un evento, una de ellas, a través del tradicional juego de la pirinola (ver imagen de la izquierda), en este los niños manifestaron: “yo no tengo suerte por eso perdí, a él si lo acompaña la suerte, expresiones como esta fueron constante durante la sesión. Se dialogó con ellos al final de la sesión sobre los términos de probabilidad”.

Otro grupo ha diseñado la ruleta de colores, con el mismo objetivo de construir términos asociados a la probabilidad de un evento. Al respecto los docentes manifestaron: “los niños se mostraron muy activos, realizaron registros, entre ellos se planteaban obtener un color determinado, es cuestión de suerte manifestaban algunos de ellos. Los colores verde y blanco fueron los que menos obtuvieron, corroborando parte de la teoría”. En la imagen siguiente se presenta evidencias el trabajo en mención.

En esta actividad los docentes consolidan conceptos básicos de probabilidad, a través de los juegos tradicionales como protagonistas en el fortalecimiento del conocimiento pedagógico del contenido.

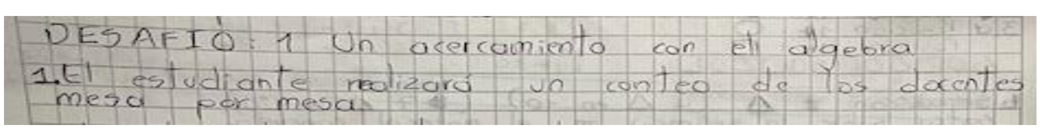
4.2.5 Actividad 04: Álgebra Temprana

Objetivo: Construir a través de las actividades propuestas en cada desafío, un acercamiento al álgebra, específicamente conocimientos vinculados a la generalización y al simbolismo, como una forma de razonar en diversas situaciones matemáticas.

Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. El Desafío 1 “un acercamiento con el álgebra”, con el objetivo de diagnosticar los conocimientos y habilidades de los docentes en la construcción del pensamiento algebraico en los estudiantes del nivel de básica primaria. El Desafío 2, “en busca de estrategias de generalización”, con el objetivo de aplicar diferentes técnicas y herramientas en la construcción y generalización del comportamiento de una sucesión. Desafío 3: Resolviendo problemas dentro del pensamiento algebraico, aplicando conceptos básicos de sucesiones. A continuación, se comparte algunos episodios.

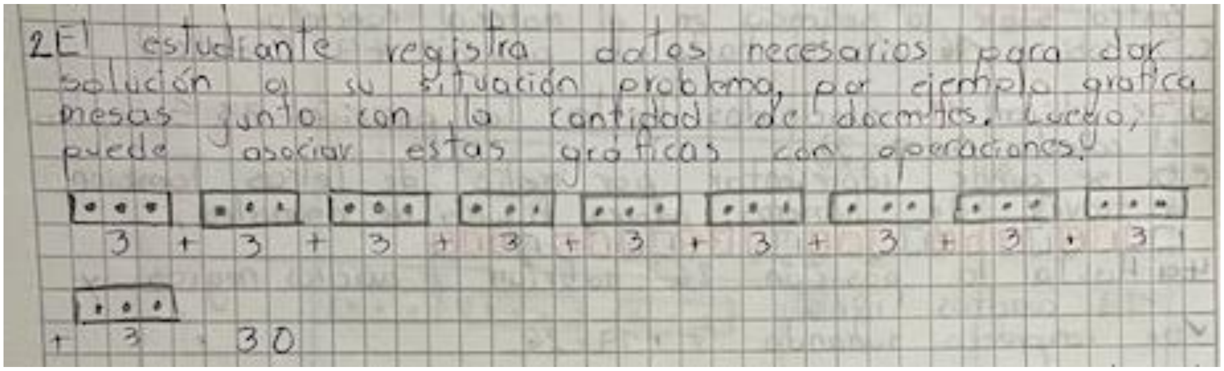
Desafío 1: En el laboratorio de matemáticas encontrarán mesas con una capacidad para cuatro docentes, sin embargo, para conservar el distanciamiento social y hacer frente a la pandemia generada por el covid-19, se ubicarán solamente tres docentes en cada mesa. Responder los siguientes interrogantes, teniendo en cuenta la indicación anterior.

1) Se invita a un estudiante del nivel de educación básica primaria para que ingrese al laboratorio y establezca como tarea, el número de docentes que allí se encuentran. ¿Cuál cree que es la estrategia que utiliza el niño para realizar la tarea? Enfoque su respuesta en un determinado grado de escolaridad entre primero y quinto.



La estrategia que mencionan los docentes que utilizarían los niños es el conteo.

2) Al mismo estudiante se le pregunta si es posible establecer el número de docentes que se pueden ubicar en 10, 11, 12 y 15 mesas. ¿cuál cree que es la estrategia que utiliza el niño para realizar esta tarea? ¿qué estrategia le recomendaría? Argumentar cada una de las respuestas.



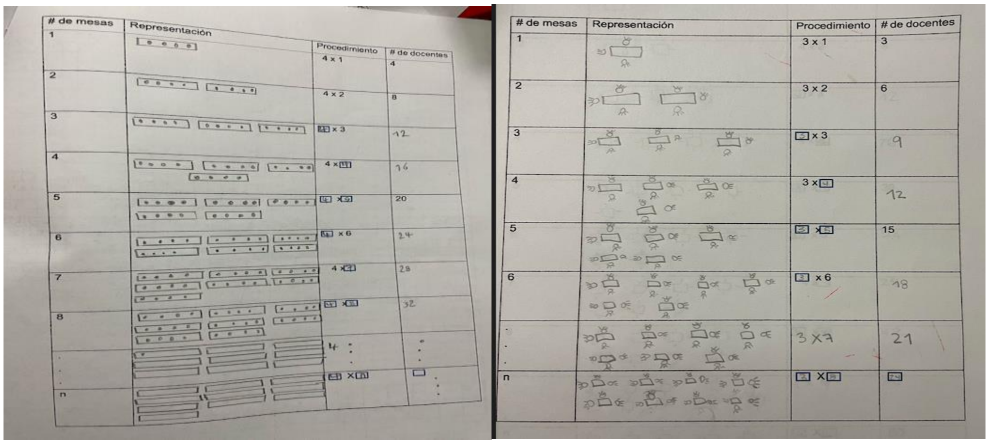
Los docentes han manifestado que la cantidad de mesas dificulta el conteo, al respecto ellos recomiendan realizar agrupaciones mediante la representación pictórica, luego sumar o multiplicar.

5) Llevar a la práctica pedagógica los anteriores literales en su respectivo contexto y en el grado en el cual ha enfocado las respuestas de estos. Identificar y exponer las estrategias y argumentos que los estudiantes utilizan en la actividad propuesta.

Al respecto, los docentes manifiestan que: *"los estudiantes acuden como primer recurso al conteo e incluso cuando la población aumenta; por lo tanto, hacer que utilice otra estrategia depende de nosotros como docentes a través de ejemplo similares y el uso de recursos del medio tales como fichas o también la representación en dibujos".*

Como se evidencia en los productos de los docentes, su principal herramienta es el conteo sobre la representación pictórica que en la mayoría de los casos ellos realizan; utilizan operaciones básicas, o hacen mención a las mismas en este caso suma y multiplicación, pero en ninguno de ellos aparece la utilización de términos generales o la utilización de letras en la representación de las situaciones planteadas.

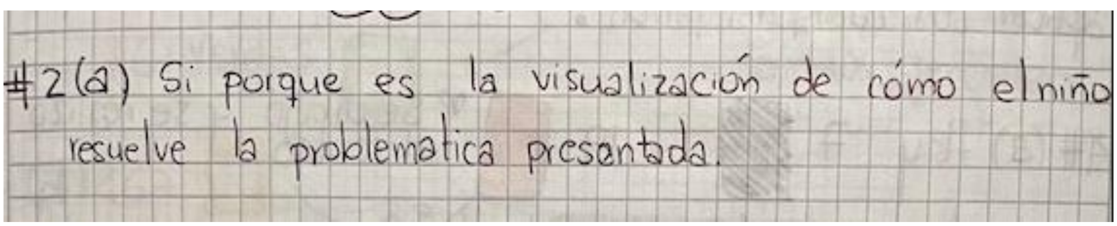
Desafío 2: Teniendo en cuenta el desafío anterior y con el fin de apoyar al estudiante en la tarea de hallar el número de docentes en el laboratorio, completar la siguiente tabla.



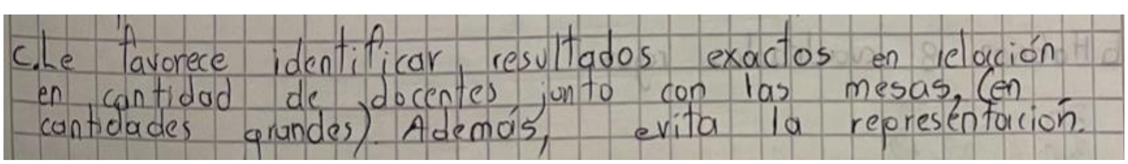
Como se puede evidenciar en la imagen anterior, algunos docentes (8 de los 12) se aproximan a la interpretación del término n.

2) Teniendo en cuenta el trabajo en las tablas del numeral anterior, responder los siguientes interrogantes:

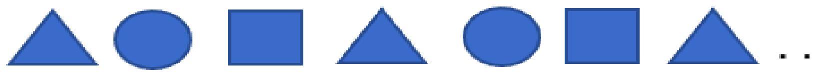
a) ¿El tipo de representación que ellos utilizan corresponde a la situación planteada y favorece el desarrollo de las tareas propuestas a los estudiantes? Argumentar.


#2(a) Si porque es la visualización de cómo el niño resuelve la problematica presentada.

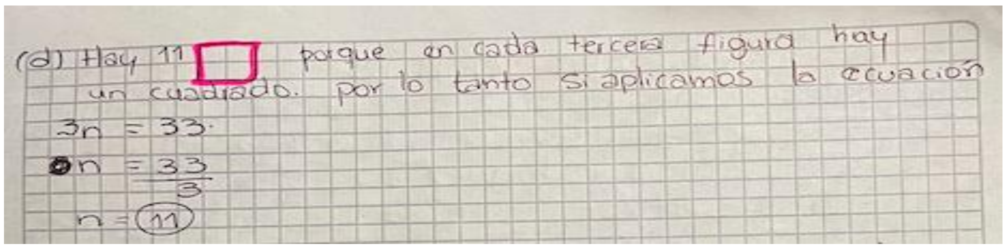
¿De qué manera la fila **n** favorece el desarrollo de las tareas propuestas en el desafío 1 y cuáles serían las dificultades en un posible tratamiento en el aula con sus respectivos estudiantes? Argumentar y apoyarse en ejemplos para justificar la respuesta.


c. Le favorece identificar resultados exactos en relación en cantidad de docentes junto con las mesas, (en cantidades grandes). Además, evita la representación.

3) Con las fichas que encuentra disponible en el material, reconstruya y continúe las siguientes secuencias de figuras geométricas hasta donde el espacio y el material se lo permita; finalmente, responda los interrogantes en cada caso:



a) ¿Cuántos cuadrados se ubican en la secuencia hasta la posición 33? Argumentar.



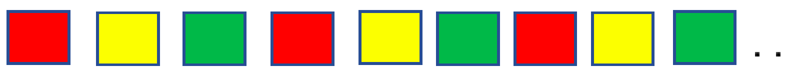
(a) Hay 11 porque en cada tercera figura hay un cuadrado. por lo tanto si aplicamos la ecuación

$3n = 33$

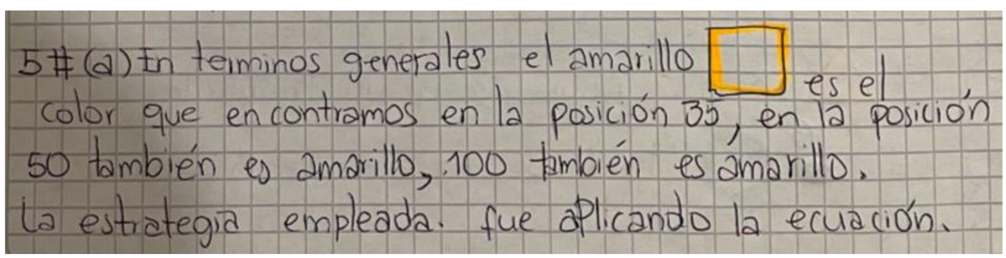
$n = \frac{33}{3}$

$n = 11$

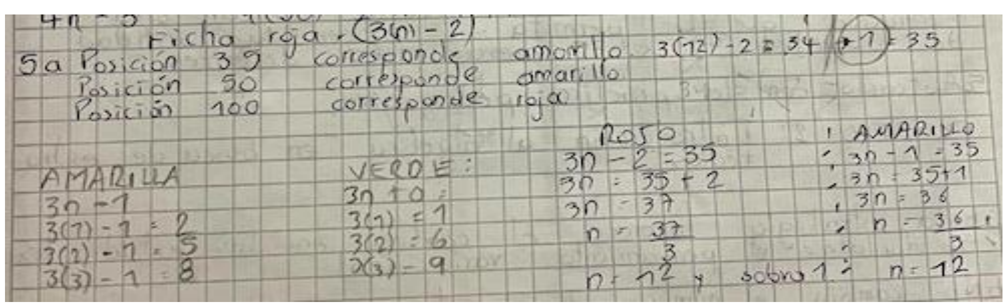
5) Teniendo en cuenta la secuencia:



a) ¿Qué color le corresponde al cuadrado de la posición 35, 50, y 100?, ¿qué estrategia ha utilizado para identificarlo?



5# (a) En terminos generales el amarillo es el color que encontramos en la posición 35, en la posición 50 también es amarillo, 100 también es amarillo. La estrategia empleada. fue aplicando la ecuación.



Ficha roja. $(3(n) - 2)$

5a Posición 35 corresponde amarillo $3(12) - 2 = 34 + 1 = 35$

Posición 50 corresponde amarillo

Posición 100 corresponde roja

AMARILLA

$3n - 1$

$3(1) - 1 = 2$

$3(2) - 1 = 5$

$3(3) - 1 = 8$

VERDE:

$3n + 0$

$3(1) = 1$

$3(2) = 6$

$3(3) = 9$

ROJO

$3n - 2 = 35$

$3n = 35 + 2$

$3n = 37$

$n = \frac{37}{3}$

$n = 12$ y sobra 1

AMARILLO

$3n - 1 = 35$

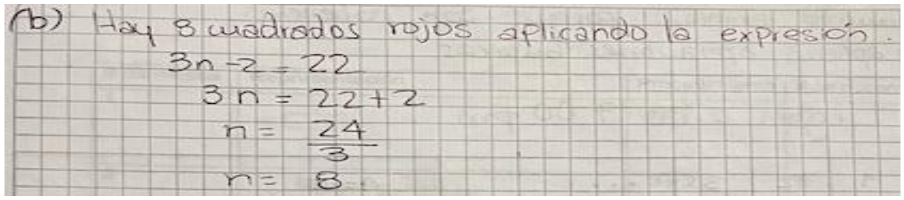
$3n = 35 + 1$

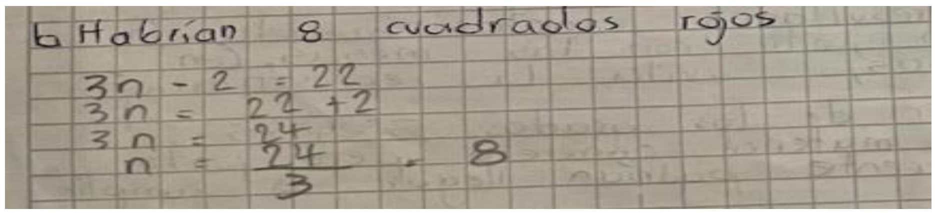
$3n = 36$

$n = \frac{36}{3}$

$n = 12$

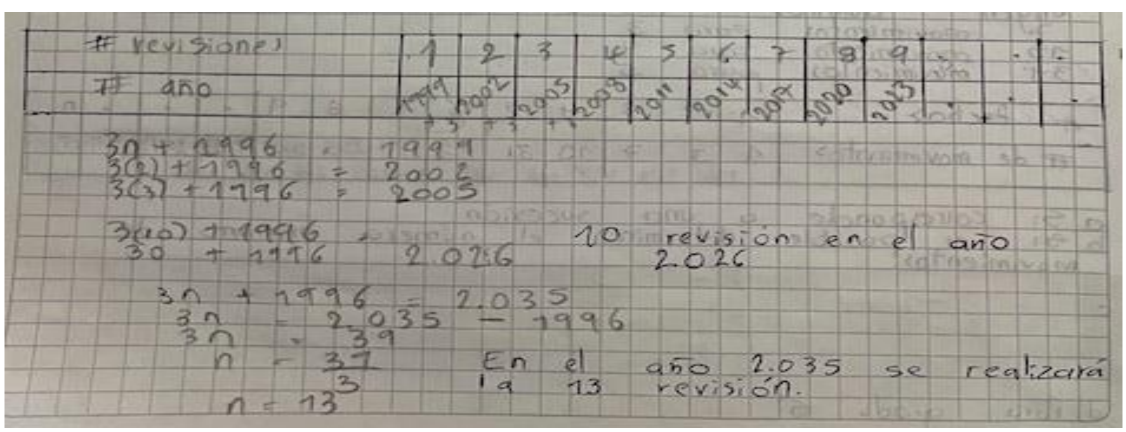
b) ¿Cuántos cuadrados de color rojo se ubican en la secuencia hasta la posición 22? Argumentar el procedimiento utilizado.





c) ¿Cuántos cuadrados entre verdes y amarillos se ubican en la secuencia hasta la posición 49? Argumentar el procedimiento utilizado.

6) En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año (1996), si se requiere que las revisiones al sistema se realicen cada 3 años. Responde: a) ¿En qué año se realizará la décima revisión? b) ¿Cuál es el número de revisión que se realizará hasta el año 2035?



En general, en este último desafío "Resolviendo problemas dentro del pensamiento algebraico", se evidencia la utilización de diversos recursos por parte de los docentes, tales como: la organización de datos en tablas, la representación pictórica y simbólica, los cuales les ha permitido analizar las variaciones en las situaciones planteadas.

Tabla 5: Rúbrica de análisis actividad 4

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos.	Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción de sucesiones, atendiendo a un patrón de regularidad dado.	Los manipulativos concretos son utilizados para construir sucesiones, identificar sus elementos, y hallar un determinado término de la misma.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas.	El 100% de los docentes exponen las tareas a realizar para resolver problemas propuestos, en el contexto de sucesiones, utilizando como herramienta el conteo y la organización de los datos en tablas.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias para solucionar problemas, el conteo y la organización de los datos es su principal herramienta. Igualmente, 9 de los 12 docentes realizan el proceso de generalización de una sucesión, el cual les permite dar solución al problema planteado y argumentar el proceso.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los 12 docentes utiliza material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas que implican sucesiones.	Gestionan de manera autónoma manipulativos concretos como estrategia en la comprensión y resolución de problemas que implican procesos de generalización.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: El 50% de los docentes usan de manera efectiva el software dinámico GeoGebra y Excel en la resolución de problemas.	El software dinámico GeoGebra es utilizado para modelar sucesiones, describir el comportamiento de la misma, e identificar variantes e invariantes. Para los 12 docentes la aplicación GeoGebra es relevante en el análisis de una sucesión, sin embargo, el 50% de ellos no presenta las habilidades necesarias para el manejo y el trabajo en el mismo.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: Reflexionan sobre el proceso de aprendizaje, toman conciencia de sus procesos mentales y complementan los mismos mediante trabajo en equipo.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes reflexionan sobre los resultados de los compañeros, como una forma de complementar los aprendizajes mediante el trabajo en equipo.

Conclusiones

Los primeros desafíos de esta actividad, son abordados por los docentes mediante el conteo, en representación concreta y pictórica; sin embargo, a medida que avanzan en el desarrollo de la misma y encontrando la dificultad para representar de forma concreta y también pictórica, dan relevancia a la representación simbólica; de esta manera surge lo que Harel (2008), ha denominado necesidad intelectual. Luego los docentes optan por la construcción de tablas y listas, que les permite visualizar el comportamiento de la situación planteada e identificar elementos y características dentro del pensamiento algebraico, proceso que les ha facilitado la construcción de términos generales, a través de los cuales han modelado el comportamiento de una sucesión y la resolución de problemas en este contexto.

Por lo anterior y según Shulman, (1987) en su modelo "Razonamiento y Acción Pedagógica", se estaría cumpliendo con los objetivos en cuanto el modelo en construcción pretende analizar y describir cómo los profesores comprenden la materia y la transforman en algo enseñable, en este caso iniciando con el trabajo con manipulativos concretos, la representación pictórica, la visualización a través de la representación gráfica en GeoGebra y finalmente la representación simbólica, la cual les permite identificar patrones e igualmente el término general como herramienta en la solución de problemas. este recurso y la forma en que lo han adquirido fortalece en los docentes el conocimiento de la disciplina y el conocimiento pedagógico del contendido, específicamente en el pensamiento algebraico como una forma de implementar el mismo en la educación básica primaria.

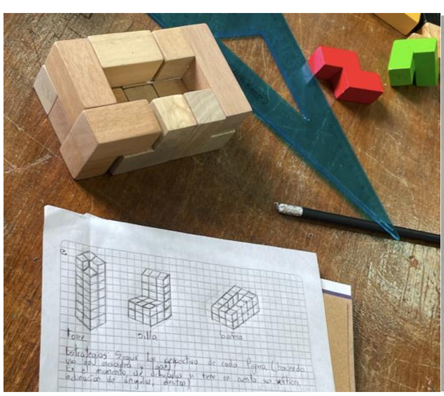
En cuanto al diseño que se sigue en el desarrollo de la propuesta, este reconfirma su estructura; sin embargo, con un protagonismo mayor de los manipulativos concretos sobre los virtuales (software dinámico), en cuanto sólo la mitad de los docentes participantes evidencian habilidades para el trabajo en el computador.

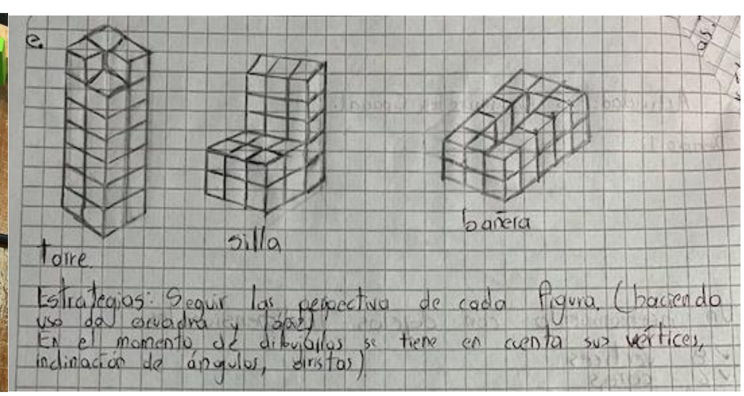
4.2.6 Actividad 05: Pensamiento Espacial

Objetivo: Fortalecer las habilidades de pensamiento espacial en los docentes que atienden el área de matemáticas del nivel de educación básica primaria, a través de actividades a desarrollar con el uso de manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.

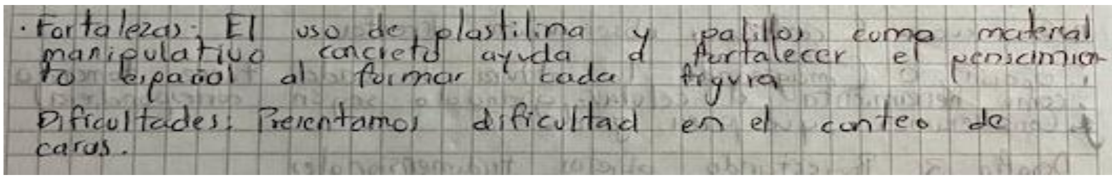
Esta actividad está compuesta por 4 desafíos. El Desafío 1, "un acercamiento con objetos tridimensionales", con el objetivo de construir y representar en el plano algunos objetos tridimensionales, y diagnosticar en los docentes las habilidades de pensamiento espacial. Desafío 2, "construcción de figuras geométricas en el plano y en el espacio", con el objetivo de construir algunas figuras geométricas en el plano y en el espacio e identificar sus elementos y características, utilizando manipulativos concretos y virtuales. Desafío 3, "proyectando objetos tridimensionales", con el objetivo de construir secciones de multicubo y representarlos en el plano mediante proyección ortogonal y por niveles. Desafío 4, "Jugando con el cubo soma", con el objetivo de construir objetos tridimensionales a partir de su proyección ortogonal en el plano y viceversa. 2.Resolver algunos problemas e interactuar con el software GeoGebra en el contexto 3D. A continuación, se comparte algunos episodios.

e) Seleccionar tres de las construcciones realizadas con el material concreto (dados), y dibujarlas en hojas. Exponer la estrategia o técnica utilizada al respecto.





Lo han logrado todos los docentes, como estrategia han utilizado las herramientas de dibujo y hojas cuadriculadas; utilizan perspectiva, pero no la mencionan dentro de la descripción o diálogo que sostienen en el transcurso del desarrollo de la actividad. b) Con el uso de los palillos y la plastilina, representar las figuras que fueron ubicadas en el literal anterior (hacen referencia a figuras del contorno). Identificar sus elementos básicos (caras, vértices, aristas, …). Exponer fortalezas y dificultades.


· Fortalezas: El uso de plastilina y palillos como material manipulativo concreto ayuda a fortalecer el pensamiento espacial al formar cada figura.
Dificultades: Presentamos dificultad en el conteo de caras.

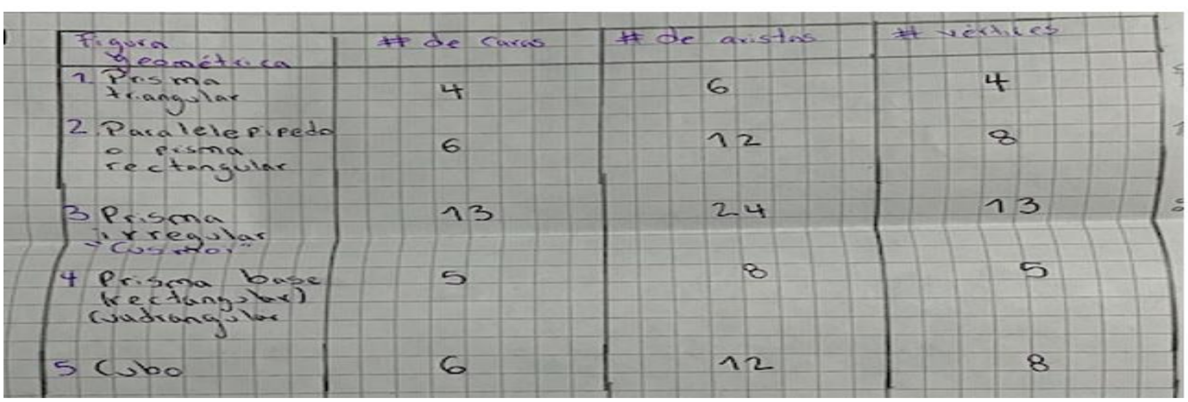
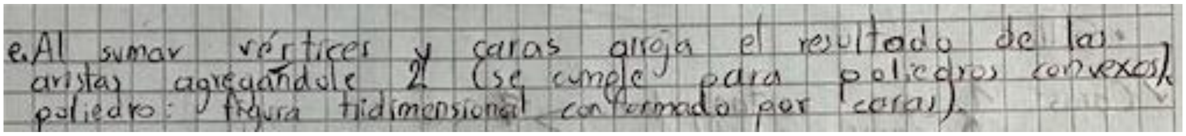


Figura Geométrica	# de caras	# de aristas	# vértices
1. Prisma triangular	4	6	4
2. Paralelepípedo o prisma rectangular	6	12	8
3 Prisma irregular "Cosmos"	13	24	13
4 Prisma base (rectangular) cuadrangular	5	8	5
5 Cubo	6	12	8

e) Teniendo en cuenta los datos registrados en la tabla anterior, para el cubo, realice la suma de sus caras más sus vértices, ahora observe y compare con el número de aristas agregándole 2. ¿Qué puede concluir? Experimentar y exponer si es posible extender esta relación a otras figuras.

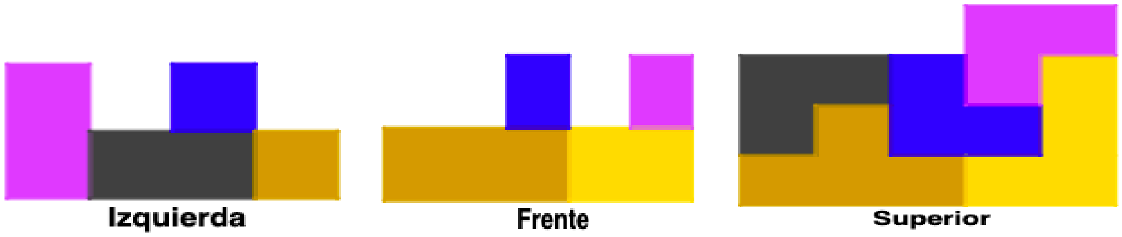
Los docentes logran como conclusión, que se cumple para ciertos poliedros el teorema de Euler C + V = A + 2

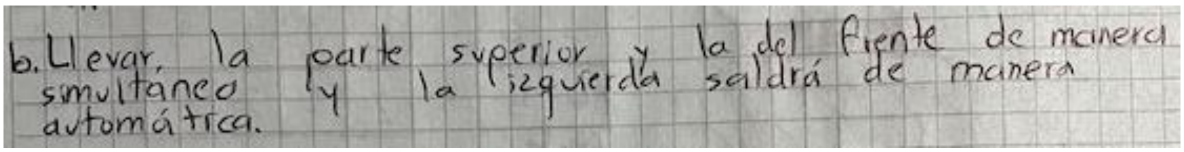

e. Al sumar vértices y caras arroja el resultado de las aristas agregándole 2 (se cumple para poliedros convexos)
poliedro: figura tridimensional conformado por caras).

D3: a) Los estudiantes de grado quinto deben construir un multicubo con 27 dados que tienen disponibles para la actividad y plasmar esta construcción en el cuaderno de apuntes como evidencia de su trabajo. El docente les recomienda realizar varias tomas fotográficas desde diferentes ángulos con el fin de apoyar la representación del mismo en el cuaderno. Experimentar esta actividad siguiendo la recomendación que el docente realiza a sus estudiantes. Argumentar sobre la efectividad de la misma, y las condiciones que las diferentes tomas fotográficas deben cumplir para que oriente de manera adecuada la actividad de los estudiantes.

Los docentes realizaron varias tomas fotográficas, en el análisis de las mismas, concluyen: *"para que la toma resulte útil, se debe tomar paralela a la cara del cubo que se quiere representar en el plano, de lo contrario puede confundir al niño".*

D4: b) Construir las secciones de cubo soma utilizando cinco fichas del mismo, las cuales se indican en los siguientes planos. A continuación, represente esta construcción en un plano mediante proyección por niveles, de tal forma que sea posible también una construcción con el material manipulativo (dados).



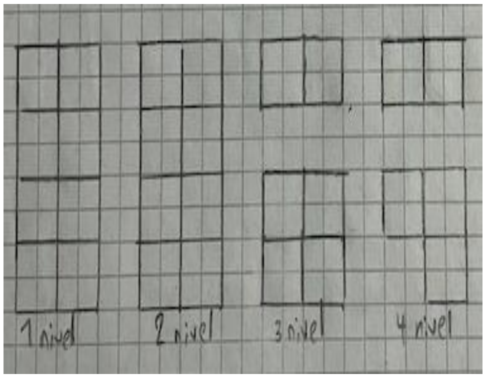

b. Llevar la parte superior y la del frente de manera simultáneo y la izquierda saldrá de manera automática.

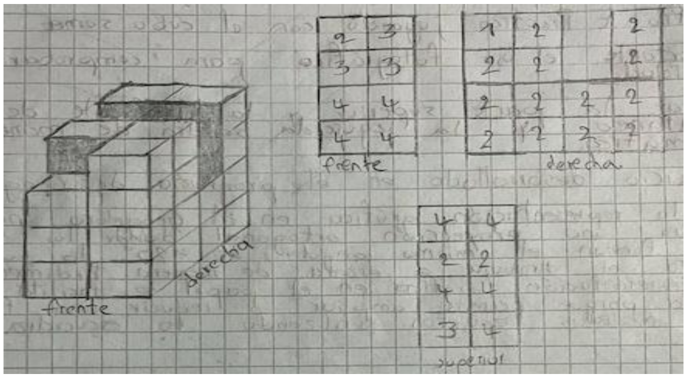
A los literales a y b, los docentes dedicaron más tiempo de lo esperado, principalmente porque les ha llamado la atención la construcción de objetos tridimensionales con el uso de las piezas del cubo soma, es así como han interactuado y compartido entre ellos las construcciones propuestas y otras que ellos proponen y experimentan. Para la representación en el plano de estos objetos tridimensionales han detallado desde diferentes ángulos el objeto y le han realizado tomas fotográficas con el uso de celular.

e) Diseñar otros retos dirigidos al trabajo del pensamiento espacial en los niños mediante la resolución de problemas, la construcción apoyada en manipulativos concretos y virtuales tales como la aplicación

GeoGebra entre otras. Exponer en plenaria estas propuestas con el fin de retroalimentar y ajustar si se considera necesario.

En la siguiente imagen se encuentra la propuesta de uno de los grupos, quienes plantean la construcción de un cuerpo tridimensional a partir de la representación ortogonal por niveles. Dada la siguiente representación, construir el objeto tridimensional con el uso de dados.





El siguiente es un desafío que propone una docente, para realizar usando GeoGebra y el cubo soma. “teniendo como base la sección de multicubo en GeoGebra (imagen), pintar en esta aplicación las partes que sean necesarias para representar la figura del punto anterior”.

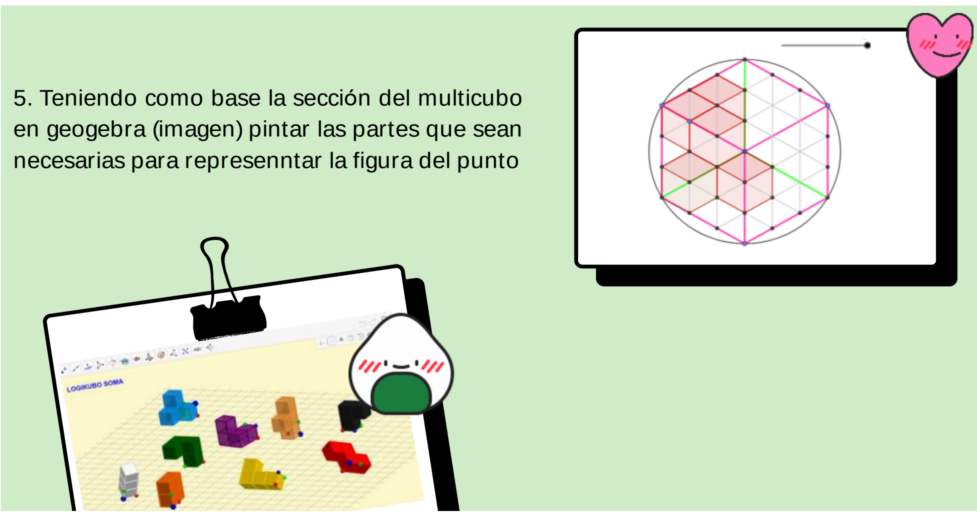


Tabla 6: Rúbrica de análisis actividad 5

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos.	Nivel Alto: el 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la representación de objetos tridimensionales.	Los docentes representan en tres dimensiones objetos del entorno, usando manipulativos (palillos y cubos tipo dados). Con los manipulativos concretos y la aplicación GeoGebra, consolidan formas de representación de secciones tridimensionales.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera acertada el 100% de los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas.	Los docentes exponen las tareas a realizar para resolver problemas propuestos, en el contexto de geometría del espacio, utilizando manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite solucionar los retos propuestos, apoyados en manipulativos concretos, software GeoGebra y tomas fotográficas.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los 12 docentes utiliza material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas que implican objetos tridimensionales.	Los 12 docentes con el uso de manipulativos concretos, modelan objetos tridimensionales, como estrategia en la resolución de problemas.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: El 50% de los docentes se apoya en el software dinámico GeoGebra, en la resolución de problemas que implican geometría del espacio.	Los 12 docentes consideran relevante la aplicación GeoGebra; sin embargo, sólo 6 de lo 12 docentes demuestran habilidades para usar la aplicación de forma adecuada en la construcción de objetos tridimensionales, como estrategia en la visualización y en la resolución de problemas.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes reflexionan sobre los resultados de los compañeros como una forma de complementar los aprendizajes mediante el trabajo en equipo.

Conclusiones

En esta actividad inicialmente fue posible evidenciar que los docentes presentan habilidades mínimas en la representación en el plano de objetos tridimensionales, así mismo representar un objeto tridimensional dado el plano del mismo. Sin embargo, a medida que transcurre el desarrollo de la actividad se va evidenciando en ellos avances significativos, producto del trabajo de exploración en el entorno para identificar objetos tridimensionales y algunas de sus características, la representación de los mismos a través de los manipulativos concretos los cuales los docentes han considerado fundamentales, en cuanto les ha permitido representar objetos, observarlos y analizar alrededor de los mismos y desde diferentes puntos de vista, su posible estrategia para representarlos en el plano. Igualmente, consideran el software dinámico GeoGebra un apoyo significativo, principalmente en la visualización.

Según Liston y Zeichner (1991), es necesario desarrollar capacidades curriculares y pericia profesional para hacer un uso activo y creativo tanto del conocimiento disciplinar como del propio currículo; en esta dirección los manipulativos han generado en los docentes nuevas formas de planificación de las prácticas de aula, gestión de recursos y la implementación de actividades lúdicas, tales como el cubo soma, fomentando la construcción en equipo como una estrategia para fortalecer el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido.

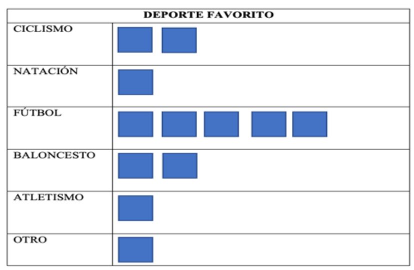
Con respecto, al diseño que se sigue en el desarrollo de la propuesta, se evidencia un protagonismo mayor de los manipulativos concretos sobre los virtuales; sin embargo, este se reconfirma, en cuanto la totalidad de los docentes lo consideran relevante para el trabajo con sus estudiantes, conclusión que exponen al reflexionar sobre las construcciones realizadas en GeoGebra por los compañeros docentes que si presentan habilidades en el manejo de la aplicación.

4.2.7 Actividad 06: Recolección e interpretación de gráficas estadísticas

Objetivo: Fortalecer el pensamiento estadístico de los docentes y de sus estudiantes, a través del análisis e interpretación de gráficas, correspondientes a situaciones cotidianas en diferentes campos.

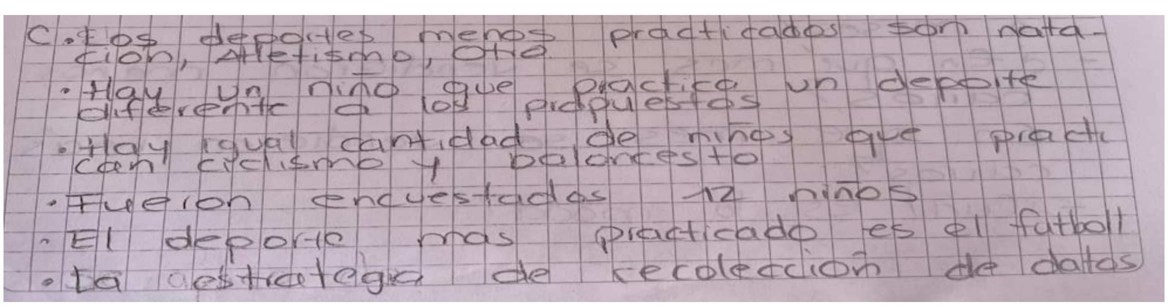
Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, “presentando la información”, con el objetivo de construir usando papel y lápiz, y programa Excel, diferentes gráficos utilizados en la presentación de información estadística, partiendo de un conjunto de datos, los cuales hacen referencia a situaciones cotidianas. Desafío 2, “interpretando gráficas estadísticas”, con el objetivo de interpretar datos organizados en diferentes gráficas estadísticas, mediante el uso de manipulativos concretos, programa Excel e instrumento de crecimiento infantil de la OMS. Desafío 3, “interpretando tablas de frecuencias”, con el objetivo de interpretar datos organizados en tablas de frecuencias, apoyados en desafíos anteriormente desarrollados. A continuación, se comparte algunos episodios.

D2: b) La docente de grado primero aplicó a sus estudiantes una encuesta o estudio, respecto al deporte favorito de cada uno de ellos, para tal fin ella diseñó una tabla como la que se observa en la siguiente imagen, por su parte los niños tenían que colocar un cuadrado que previamente habían diseñado con el fin de indicar su deporte favorito.



Con esta actividad la docente y sus estudiantes encuentran una estrategia para organizar datos e igualmente analizarlos. Su tarea consiste en hallar la moda e interpretarla.

c) Teniendo en cuenta el literal anterior, exponer las afirmaciones o inferencias que es posible realizar de la gráfica que ha construido la docente con sus estudiantes.



d) Teniendo en cuenta el literal b, si se aplica la encuesta a todo el colegio, es decir para una población aproximada de 200 estudiantes, ¿es posible utilizar la misma estrategia de la docente de primero para organizar los datos?, ¿qué ajustes realizaría? Argumentar.

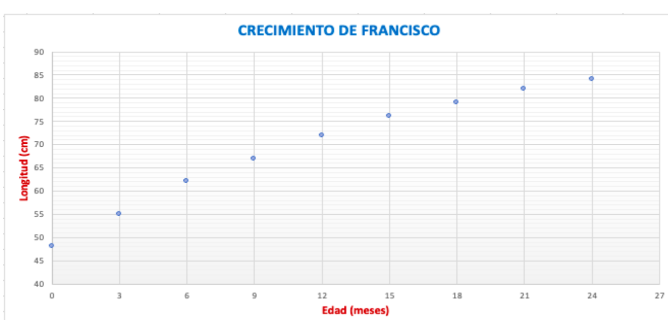
Como propuesta de uno de los grupos de docentes *“Dejar a un lado el material concreto y utilizar la parte numérica”*. Al respecto, otro grupo propone: *“material concreto donde se agrupe a varios datos a un símbolo o dibujo”.*

e) Plantear otro tipo de representación gráfica que permita igualmente determinar el deporte favorito de los estudiantes, o estudio similar; que sea cómoda y efectiva para cualquier tamaño de la población.

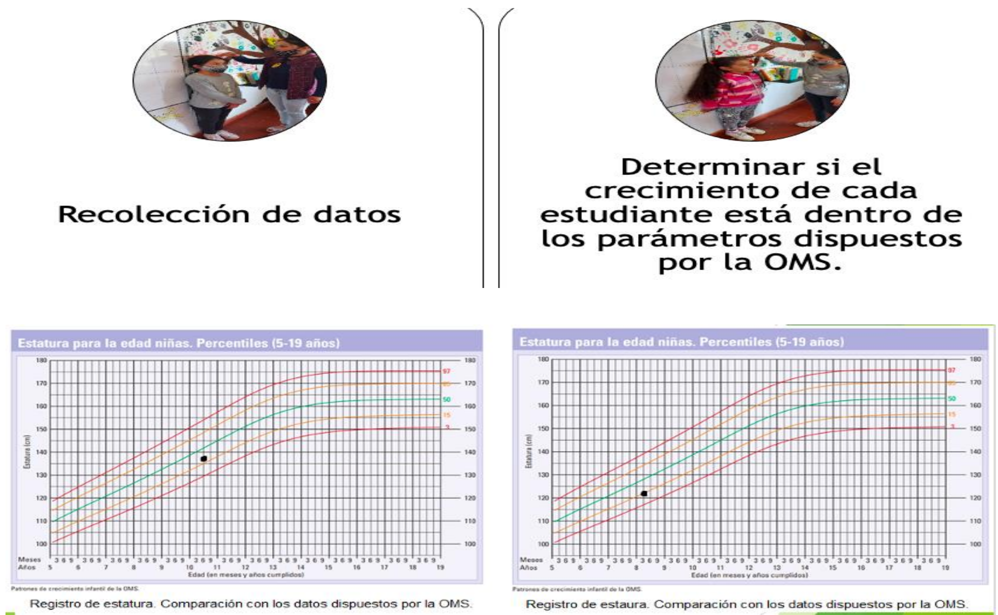
Dos grupos proponen utilizar pictogramas donde cada dibujo represente varios datos, dependiendo de la cantidad de los mismos.

Luego es posible concluir que el material concreto es fundamental para los niños y en sus diferentes edades, y momentos de formación. La agrupación de datos facilita el trabajo con los datos y su respectiva interpretación.

g) El siguiente gráfico estadístico muestra el crecimiento de Francisco en sus primeros dos años. Su tarea consiste en determinar si el crecimiento de Francisco está dentro de los parámetros normales; como herramienta al respecto, en el laboratorio encontrará el instrumento (Curvas de crecimiento OMS), dispuesto por la Organización Mundial de la Salud OMS para tal fin. Exponer la estrategia utilizada para la realización de la tarea, fortalezas y dificultades.



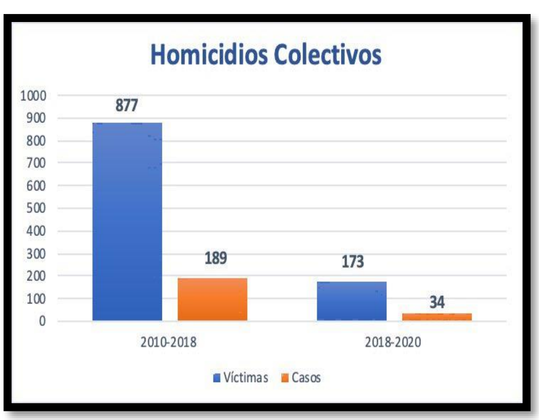
h) Registrar la estatura de sus estudiantes una vez al mes durante el tiempo de realización del diplomado, y analizar el crecimiento de ellos utilizando el instrumento de la OMS. Exponer los hallazgos, fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora. (Asignado para trabajo autónomo). A continuación, el trabajo realizado por un docente en su respectivo contexto laboral.



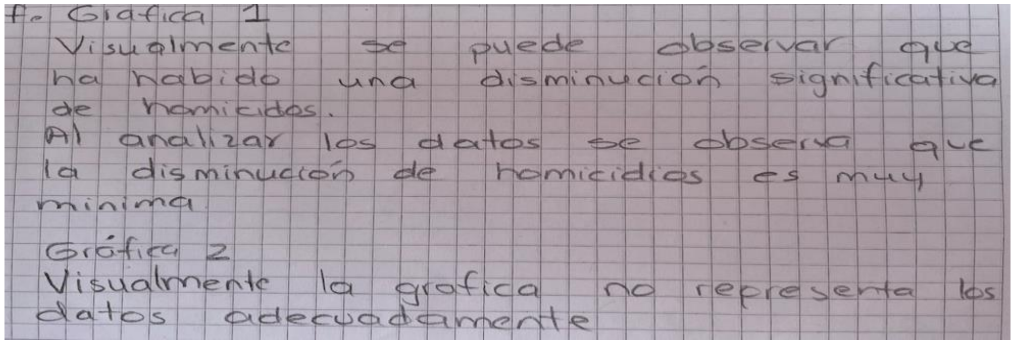
Registro de estatura. Comparación con los datos dispuestos por la OMS.

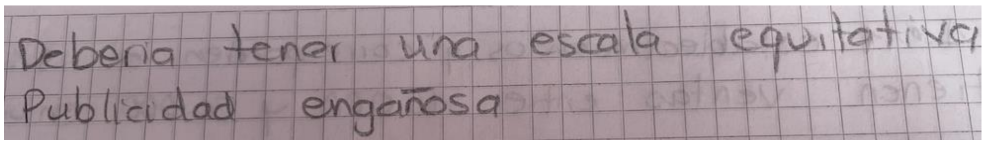
Registro de estaura. Comparación con los datos dispuestos por la OMS.

D3: f) Analizar las siguientes gráficas y establecer conclusiones



Inicialmente, frente a estas gráficas los docentes no observaron anomalías, fue necesario algunas preguntas orientadoras para llamar la atención frente a la información sesgada que se presenta en estas. Finalmente, se comparte algunos aportes al respecto:





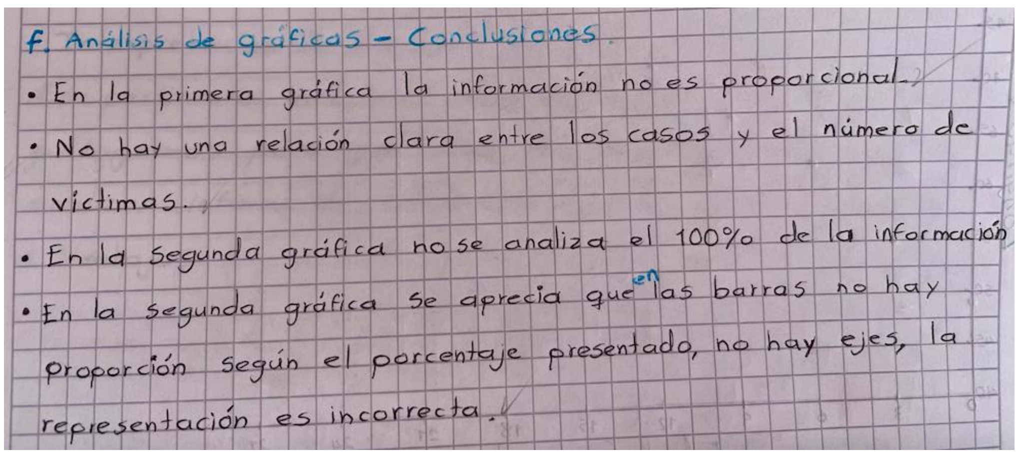


Tabla 7: Rúbrica de análisis actividad 6

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción e interpretación de datos estadísticos.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción e interpretación de datos estadísticos.	Los 12 docentes participantes utilizan de manera efectiva material manipulativo en la construcción de gráficas, facilitando la interpretación de las mismas. Igualmente, utilizan modelos y formatos existentes, los cuales son interpretados por los docentes de manera coherente.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas, referentes a la recolección e interpretación de datos.	Los 12 docentes construyen tablas de frecuencia y diagrama de barras en la organización e interpretación de la información, de manera coherente, evidenciando un alto grado de familiaridad con las mismas.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias para solucionar problemas, el conteo y la organización de los datos en tablas de frecuencias y diagrama de barras, su principal herramienta.

Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas que implican recolección e interpretación de datos.	Los docentes utilizan manipulativos concretos en la modelación de problemas propuestos, lo cual les permite de manera efectiva resolver las situaciones propuestas.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Alto: el 83% de los docentes, se apoyan en el software Excel para organizar y presentar la información.	El software Excel es utilizado por 10 de los 12 docentes participantes, para organizar los datos y presentarlos en diagramas de barras y circular, la visualización de estos es una estrategia que los docentes utilizan en la interpretación de la información. Los 2 docentes restantes lo consideran igualmente relevante; sin embargo, no presentan las habilidades computacionales básicas en el manejo de este software.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes, reflexionan sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes reflexionan sobre los resultados de los compañeros, como una forma de complementar los aprendizajes mediante el trabajo en equipo.

Conclusiones

Se ha evidenciado que en esta actividad la organización de los datos en una tabla se ha vuelto habitual, esto como resultado de la experiencia en actividades anteriores y en donde se adelantó discusión constructiva al respecto, destacando las ventajas que brindan en la resolución de problemas. En consecuencia, este hecho les ha facilitado a los docentes la interpretación de los datos al estar organizados en tablas de frecuencias en este caso; igualmente, han destacado como fundamental esta tabla en la construcción del diagrama de barras el más conocido y el que más se les facilita.

Inicialmente, en esta actividad se evidenció que no es común el planteamiento de problemas o situaciones que generen aprendizajes, teniendo como referencia tablas o gráficos (datos estadísticos de interés social, publicidad, entre otras); sin embargo, los docentes lo han logrado y plantearon preguntas coherentes y pensadas en sus estudiantes como una estrategia para desarrollar el pensamiento matemático.

En consecuencia, la actividad ha brindado aprendizajes y creado expectativas frente al fortalecimiento de la práctica pedagógica, iniciando con el ajuste de los planes de estudio, en cuanto es posible ampliar el trabajo en el componente de estadística y llevarlo incluso más allá de lo establecidos en los estándares curriculares propuestos por el Ministerio de Educación. Igualmente, a través de la experiencia se comparte una variedad de recursos y situaciones del entorno, tales como las gráficas de crecimiento y desarrollo; fortaleciendo de esta manera el conocimiento didáctico del contenido.

Frente al diseño que se sigue en el desarrollo de la propuesta, este se reconfirma, ajustando en la presente actividad los manipulativos virtuales en cuanto se han complementado con el software Excel; logrando una mayor participación de los docentes, según como se ha mostrado en la rúbrica.

4.2.8 Actividad 07: Pensamiento Variacional

Objetivo: Construir a través de la experimentación, elementos, características y propiedades del pensamiento variacional; con el uso de material concreto, actividades lúdicas y software GeoGebra.

Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, “Vamos al campo, un primer encuentro para el razonamiento variacional”, con el objetivo de realizar seguimiento al crecimiento de una planta e identificar variantes e invariantes. Desafío 2, “Encontrando regularidades y aplicaciones de las sucesiones en diferentes campos de la ciencia”, con el objetivo de construir a través de la experimentación, actividades lúdicas y software GeoGebra, elementos y características básicas del pensamiento variacional. Desafío 3, “Software dinámico en el análisis de sucesiones”, con el objetivo de modelar a través del software dinámico GeoGebra, situaciones que implican sucesiones. A continuación, se comparte algunos episodios.

Desafío 1: Vamos al campo, un primer encuentro para el razonamiento variacional.

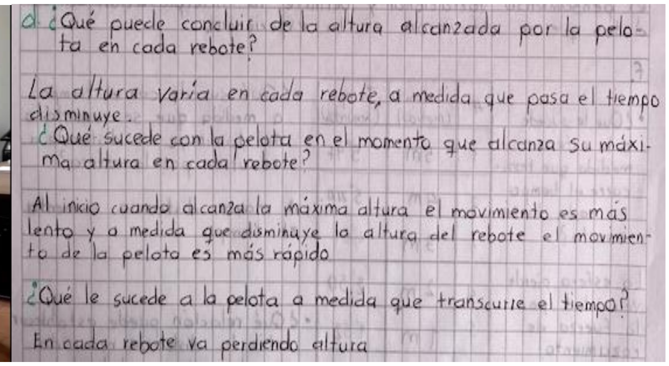
a) Colocar en germinación una semilla (frijol, alverja, ajo, maíz, …), que será seleccionada por cada docente, de tal forma que se adapte al contexto del lugar de residencia de cada uno. Su tarea consiste en realizar seguimiento al desarrollo y crecimiento de la planta:

La siguiente imagen evidencia el seguimiento que realiza el grupo de docentes, quienes han manifestado: *"no fue posible realizar el seguimiento de la longitud en cada semana de la planta, debido a sus características no se notaba, por tal motivo se analizó el número de hojas que le iban apareciendo cada semana, análisis que se realizó durante las primeras cuatro semanas*". Igualmente, han manifestado los docentes que se han apoyado en la actividad algebra temprana, específicamente para establecer el término general que les permitiera predecir sobre el número de hojas en semanas futuras, sin embargo, fue una dificultad en cuanto el crecimiento no responde a una regularidad. (Ver la siguiente imagen.)

Planta de mora	
Semana	**# de hojas**
1	2
2	5
3	10
4	18

a) Toma la pelota que encuentra dentro de los materiales disponibles y llevarla a la altura que le permita el brazo, luego soltarla. Su tarea consiste en estimar y registrar la altura que logra la pelota en cada rebote. Argumentar sobre las estrategias que utilizaron al respecto, fortalezas y dificultades.

Los docentes realizaron esta tarea mediante trabajo en equipo, calculando de forma aproximada la altura alcanzada en cada rebote; igualmente y como se observa en la siguiente imagen, construyen las gráficas correspondientes (altura vs rebotes).



d ¿Qué puede concluir de la altura alcanzada por la pelota en cada rebote?

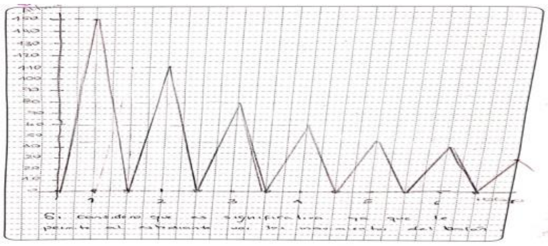
La altura varía en cada rebote, a medida que pasa el tiempo disminuye.

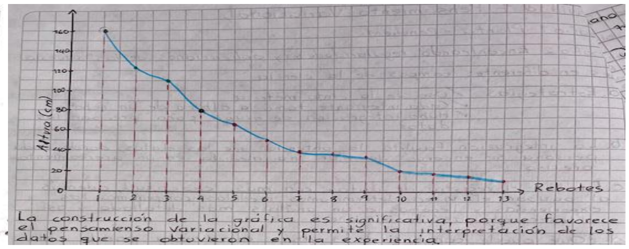
¿Qué sucede con la pelota en el momento que alcanza su máxima altura en cada rebote?

Al inicio cuando alcanza la máxima altura el movimiento es más lento y a medida que disminuye la altura del rebote el movimiento de la pelota es más rápido

¿Qué le sucede a la pelota a medida que transcurre el tiempo?

En cada rebote va perdiendo altura

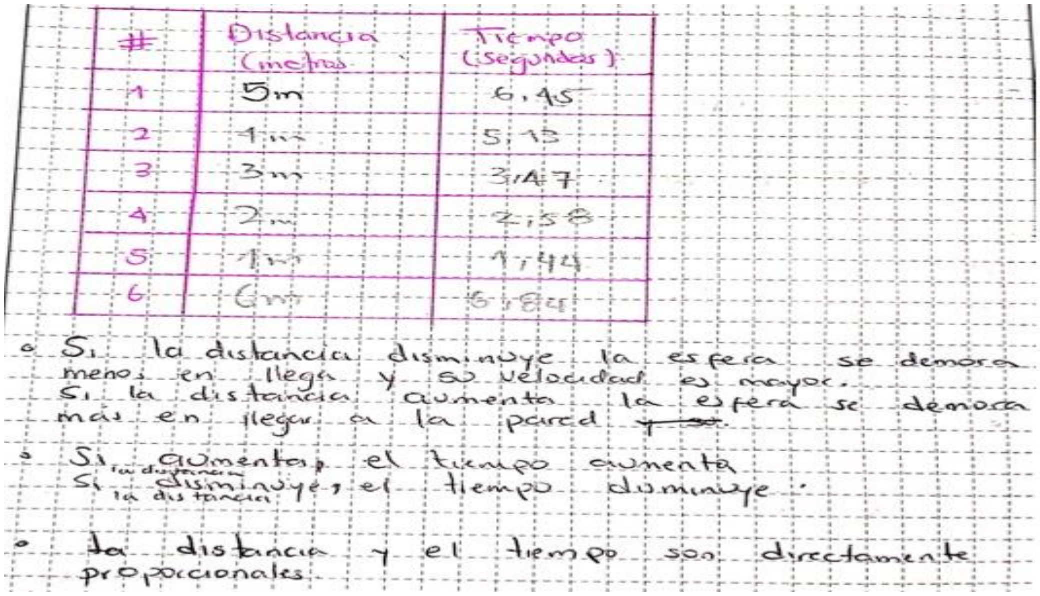




f) Analizando el movimiento de un móvil: Utilizando la rampa (ver imagen), esfera, metro y cronómetro que encuentra disponible dentro del material, ubique la rampa en dirección y a una distancia de 5mts de la pared, suelte la esfera desde la parte más alta; su tarea consiste en tomar el tiempo que tarda esta en hacer contacto con la pared. Realizar el procedimiento en varias ocasiones cambiando la distancia a la pared. Sugerencia: organice los datos en la siguiente tabla.

#	Distancia (metros)	Tiempo (segundos)
1	**5 m**	
2		
3		
4		
5		
6		

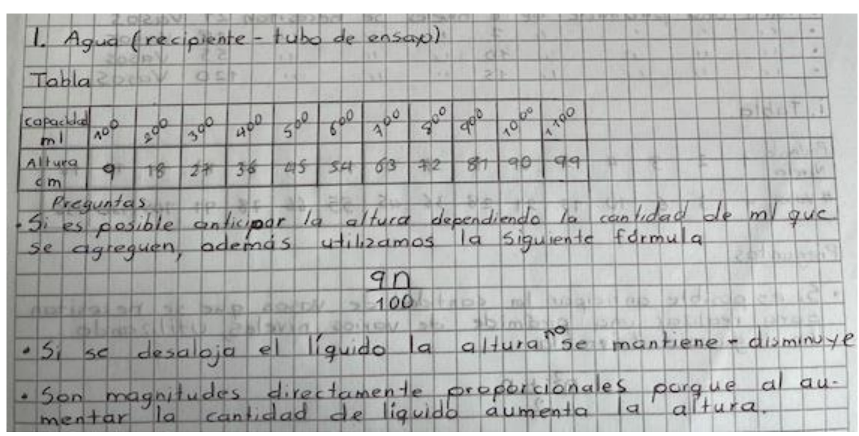
¿Qué le sucede a la esfera a medida que transcurre el tiempo en cada lanzamiento? ¿qué sucede con el tiempo a medida que se aumenta o se disminuye la distancia a recorrer por la esfera? ¿qué relación puede establecer entre la distancia recorrida por la esfera y el tiempo empleado? Argumentar en cada caso; A continuación, en la siguiente imagen el aporte de uno de los grupos de trabajo.



#	Distancia (metros)	Tiempo (segundos)
1	5m	6,45
2	4m	5,13
3	3m	3,47
4	2m	2,58
5	1m	1,44
6	6m	6,84

- Si la distancia disminuye la esfera se demora menos en llega y su velocidad es mayor. Si la distancia aumenta la esfera se demora más en llegar a la pared.
- Si la distancia aumenta, el tiempo aumenta. Si la distancia disminuye, el tiempo disminuye.
- La distancia y el tiempo son directamente proporcionales.

l) Agregar 400 ml de agua al recipiente (tubo de ensayo) que se muestra en la siguiente imagen y halle la altura que alcanza el líquido en este recipiente. Repita este procedimiento agregando 100ml, 200ml, 300ml, 500ml, 700ml y 1000ml de agua. Organizar los datos obtenidos y responder: ¿es posible anticipar a la experiencia, la altura que alcanza el líquido al agregar 250ml, 550ml y 900ml en el tubo de ensayo? ¿qué sucede con la altura del líquido al agregar o desalojar el mismo en el recipiente? ¿qué tipo de relación se establece entre los mililitros de agua que se agregan al tubo de ensayo y la altura que el líquido alcanza? Argumentar en cada caso.



1. Agua (recipiente - tubo de ensayo)

Tabla

capacidad ml	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Altura cm	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99

Preguntas

- Si es posible anticipar la altura dependiendo la cantidad de ml que se agreguen, además utilizamos la siguiente fórmula

$$\frac{9n}{100}$$

- Si se desaloja el líquido la altura no se mantiene - disminuye
- Son magnitudes directamente proporcionales porque al aumentar la cantidad de líquido aumenta la altura.

Tabla 8: Rúbrica de análisis actividad 7

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de conceptos en el contexto del pensamiento variacional.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción e identificación de variantes e invariantes.	Los 12 docentes participantes utilizan de manera efectiva material manipulativo en la construcción de secuencias, en las cuales identifican sus elementos y características.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas, referentes al pensamiento variacional.	Los 12 docentes participantes, principalmente a través de la experimentación con casos particulares, identifican y exponen las tareas a realizar en los diferentes problemas planteados.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias para solucionar problemas, al respecto gestionan material concreto con el cual experimentan, recolectan y analizan hallazgos para establecer conclusiones. Los docentes se apoyan en la experiencia obtenida en actividades anteriores.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: 10 de los 12 docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas que implican pensamiento variacional.	De los docentes participantes, 10 de ellos utilizan manipulativos concretos en la modelación de problemas propuestos, lo cual les permite de manera efectiva solucionar los problemas propuestos. Los 2 docentes restantes presentan propuestas de solución en las cuales fue necesario revisar las características de las magnitudes, para establecer su clasificación (directa o inversa), de manera efectiva.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: 8 de los 12 docentes, usan de manera efectiva el software GeoGebra y Excel, en la modelación de problemas propuestos.	El 100% de los docentes considera que es un apoyo significativo el uso del software GeoGebra y Excel, para modelar el comportamiento de un problema planteado. La visualización de la gráfica les ha permitido establecer el tipo de magnitudes y exponer sus respectivas características. Sin embargo, a 4 de los 12 participantes se le ha dificultado la utilización de las aplicaciones.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes, reflexionan sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes se apoyan en la experiencia y resultados obtenidos en actividades anteriores.

Conclusiones

En esta actividad, los docentes experimentan varias situaciones, iniciando trabajo en su propio contexto, a través del cual recolectan datos de forma organizada, analizan los mismos, identificando regularidades, variantes e invariantes; proceso que realizan apoyados en actividades anteriores principalmente en "algebra temprana". Igualmente, los docentes han abordado desafíos los cuales les ha permitido identificar y apropiar los tipos de magnitudes (magnitudes inversas y magnitudes directamente proporcionales), sus características y la gráfica que modela el comportamiento de las mismas.

En la actividad, se ha evidenciado el interés en la búsqueda del término general, ante la necesidad de predecir el comportamiento futuro de las magnitudes y como estrategia en la resolución de problemas. Este proceso de generalización en la mayoría de los casos lo han construido de manera efectiva y en otros una aproximación significativa.

También es evidente la incorporación del lenguaje y términos asociados al pensamiento variacional por parte de los docentes, así como el interés de llevar al aula la experiencia, analizando el contexto y proponiendo ajustes que ellos creen pertinentes, para atender las oportunidades de mejora proyectadas con sus respectivos estudiantes. De esta manera, se evidencia los avances en el fortalecimiento de la disciplina y el conocimiento didáctico del contenido, apoyado en manipulativos concretos como estrategia que les ha permitido trabajar el nivel de generalización de manera efectiva en las situaciones planteadas.

En cuanto al diseño que se sigue en el desarrollo de la propuesta, este se mantiene, ampliando las formas de interacción de los docentes, tales como: manipulativos concretos, montajes de experimentación en los cuales registran datos para analizarlos mediante el software dinámico GeoGebra y Excel.

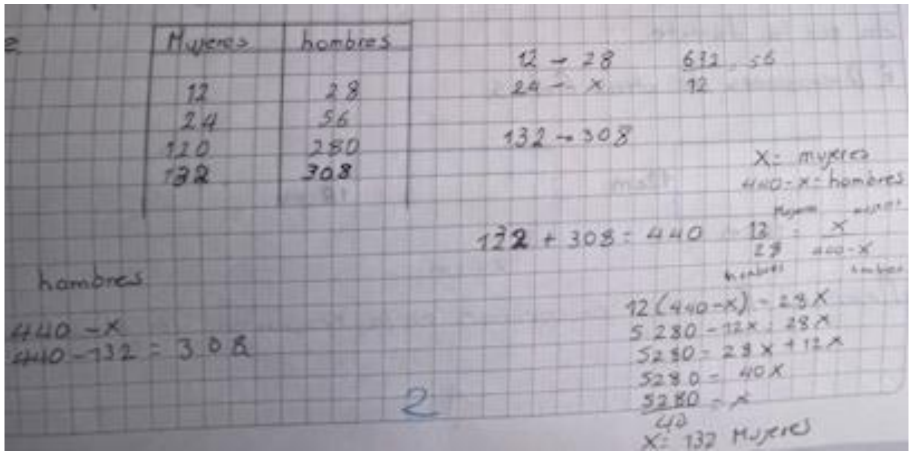
4.2.9 Actividad 08: Razones, proporciones y sus aplicaciones

Objetivo: Contribuir al desarrollo del razonamiento proporcional en los docentes y sus estudiantes, haciendo uso de manipulativos concretos y virtuales, para que a través de situaciones cotidianas y preguntas orientadoras ellos construyan conceptos y consoliden estrategias en la solución de problemas en diferentes contextos.

Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, “Descubriendo y planteando razones”, con el objetivo de construir el concepto de razón geométrica y aritmética, a través de imágenes prediseñadas y el análisis de las mismas el cual está guiado por preguntas y retos diseñados para generar aprendizaje significativo. Desafío 2, “Razones y proporciones en la resolución de problemas”, cuyo objetivo es fortalecer las habilidades en la resolución de problemas que involucren el planteamiento de proporciones, a través de situaciones en contexto, la experimentación e interacción en equipo. Desafío 3, “Razones porcentuales”, que tiene el objetivo de fortalecer las habilidades en la resolución de problemas que involucren porcentajes, a través de situaciones en contexto, la experimentación e interacción en equipo. A continuación, se comparte algunos episodios.

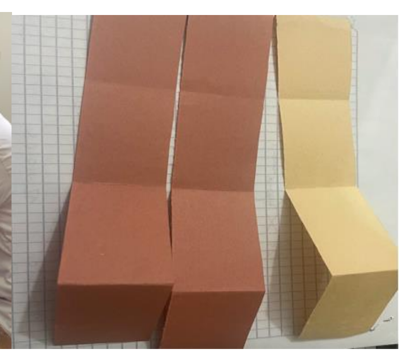
D1: e) En un cierto colegio, por cada 12 mujeres hay 28 hombres, si en total son 440 estudiantes; ¿Cuál es el número total de hombres y total de mujeres que pertenecen al colegio? Exponer la estrategia que ha utilizado al respecto.

Esta corresponde a una situación que les generó dificultad, intentaron varias estrategias, como la realización de una tabla, determinar cómo incógnita x (es algo familiar la x, para tal fin), a uno de los términos de la proporción, esto ante la experiencia en literal anterior cuando han planteado proporciones, sin embargo, en otras condiciones (conocían tres términos de la proporción), en este caso conocen dos términos y el todo. Al respecto y mediante analogías, aplicando el principio heurístico de reducción de George Polya, se orienta a los docentes a plantear una proporción que describa la situación planteada en el problema. Es así como los docentes logran la solución a la situación planteada, proceso que se evidencia en la siguiente imagen, aporte de uno de los grupos de docentes.



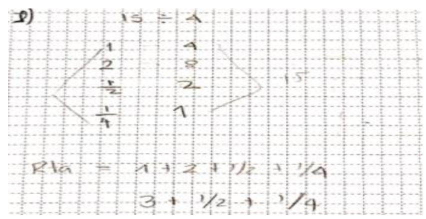
D2: i) Carlos Antonio quiere hacer entrega de sus 15 lingotes como los que se observan en la siguiente imagen, en partes iguales a sus 4 hijos. La dificultad para Carlos Antonio radica en la distribución de manera equitativa del residuo que obtiene en la división. Por lo tanto, su tarea consiste en plantear y exponer una estrategia que le permita a Carlos Antonio entregar en partes iguales a sus hijos los 15 lingotes de oro.

j) Haciendo uso del material concreto disponible para la actividad, específicamente los rectángulos en cartulina, y representando con estos los lingotes de oro, proponga y exponga una estrategia mediante dobleces de papel que le permita a Carlos Antonio, una distribución equitativa para sus 4 hijos.



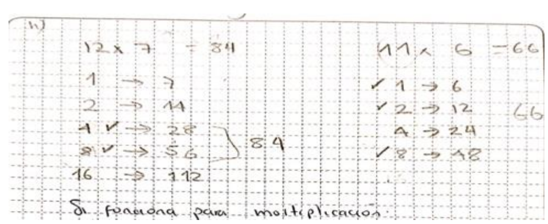
l) Analizar el procedimiento de los estudiantes y docentes de grado cuarto. ¿Cree que es un método efectivo para dividir? Argumentar y exponer las condiciones que se deben cumplir para que este método funcione; construir otros ejemplos.

m) Exponer mediante este método de división una estrategia al Sr Carlos Antonio, para que él pueda distribuir los lingotes de oro de manera equitativa. Argumentar sobre las ventajas y desventajas de este método en problemas como este y en otros que se pueden presentar en diferentes contextos.



Con este resultado y utilizando los dobleces de papel que se trabajaron en literal anterior, se realiza el ejercicio de distribución de los lingotes de oro, experiencia que resultó significativa en cuanto se da un reparto equitativo como lo indica el problema, a través de la forma de razonamiento de los egipcios y la utilización de material concreto.

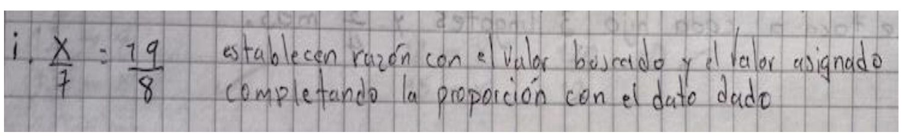
n) Teniendo en cuenta el razonamiento que expone la docente y sus estudiantes en el tablero para realizar la división 21 ÷ 4, ¿cree que es posible multiplicar siguiendo un procedimiento similar? Conjeturar al respecto y exponer algunos casos específicos de multiplicación.



La siguiente imagen muestra los docentes practicando multiplicación a modo egipcio

o) En el Papiro de Rhind (c. 2300 a.C.), se presenta el siguiente problema: Si a una cantidad le añadimos su séptima parte se convierte en 19 ¿cuál es dicha cantidad?[20] Al respecto, el docente de grado quinto y sus estudiantes proceden de la siguiente manera:

i) Plantear una proporción que permita encontrar igualmente la solución al problema del literal g, teniendo en cuenta la cantidad que los egipcios suponen inicialmente, es decir (x = 7). Argumentar.



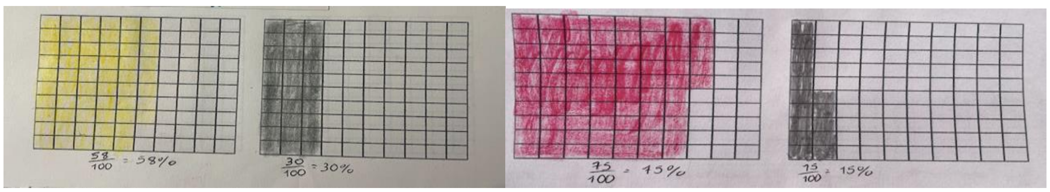
i. $\frac{x}{7} = \frac{19}{8}$ establecen razón con el valor buscado y el valor asignado completando la proporción con el dato dado

Las situaciones planteadas desde la historia de las matemáticas han causado curiosidad, principalmente la forma en que razonaban los egipcios, así como extraño inicialmente el método de posición falsa; estos aspectos motivaron a que los docentes se interesaran en la búsqueda de estrategias para desarrollar el

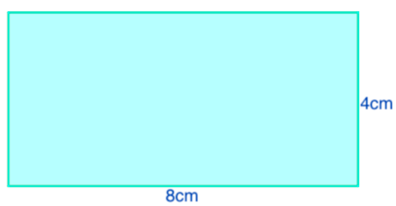
[20] Tomado de: ACEVEDO, Miriam y FALK DE LOSADA, Mary. Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. SANTA FE DE BOGOTÁ: Impresores & publicistas,1997.

pensamiento matemático y reflexionar sobre las formas de razonamiento de civilizaciones referentes a través de la historia.

e) Utilizando el material concreto (cuadrados en cuadricula), el cual encuentra disponible para la actividad; representar los siguientes porcentajes, estableciendo su fracción correspondiente: 58%, 30%, 75%, 15%, 5%. Exponer fortalezas, dificultades y posibles estrategias de atención al respecto.



f) Realizar las siguientes tareas teniendo en cuenta el rectángulo que observa a continuación, cuya área es de $32cm^2$, el cual encuentra además en cartulina dentro de los materiales disponibles para la actividad:



1. Representar mediante dobleces de papel el 50%, y determinar a qué área corresponde este porcentaje.
2. Representar mediante dobleces de papel el 75%, y determinar a qué área corresponde este porcentaje.

A través de dobleces de papel realizan los docentes estos numerales, se evidencia en ellos habilidad al respecto.

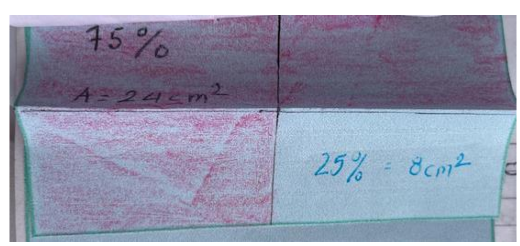


Tabla 9: Rúbrica de análisis actividad 8

Componente	**Nivel**	**Características**
Uso de material manipulativo en la construcción de conceptos en el contexto del pensamiento variacional.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción del concepto de razón y proporción.	Los 12 docentes participantes utilizan de manera efectiva material manipulativo tales como fichas e imágenes en la construcción del significado de razón geométrica y aritmética, así como el concepto de proporción.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de problemas que implican el planteamiento de proporciones.	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas que implican proporciones.	Los 12 docentes participantes, planean y ejecutan estrategias de comprensión de un problema, apoyados en actividades anteriores, tales como semejanza y pensamiento variacional.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas que implican el planteamiento de proporciones.	Los 12 docentes ejecutan estrategias efectivas en la resolución de problemas; 9 de ellos se apoyan planteando una regla de tres simple; los 3 docentes restantes a través de casos particulares y la organización de datos en tablas.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los docentes usa manipulativos concretos (fichas, dobleces de papel, …), principalmente como apoyo para el planteamiento de estrategias de solución de problemas.	Los 12 docentes utilizan principalmente fichas y dobleces de papel como una forma de realizar repartos, los cual les permite visualizar los elementos necesarios en el planteamiento de proporciones como recurso en la solución de problema planteados.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y los diferentes medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes se apoyan en la experiencia y resultados obtenidos en actividades anteriores.

Conclusiones

En esta actividad los docentes se han apoyado en desafíos relacionados en la actividad desarrollada anteriormente “semejanza”, a través de medición directa con el uso de manipulativos concretos, y el análisis de la proporción entre lados homólogos, logrando de esta manera la construcción del concepto de razón, partiendo de experiencias previas y relacionando el mismo en contextos específicos.

Igualmente, ha prevalecido la experimentación a través de casos particulares, cuyos resultados son organizados en tablas, lo cual les permite encontrar con facilidad regularidades, e incursionar en el pensamiento algebraico, logrando la construcción de términos generales, una herramienta que consideran pertinente en la resolución de problemas. En este proceso ha resultado fundamental el principio heurístico de reducción de George Polya, en cuanto a través de analogías, se relacionan problemas con menor dificultad y en los cuales tienen algún tipo de experiencia; de esta manera los docentes plantean proporciones para modelar y resolver problemas propuestos.

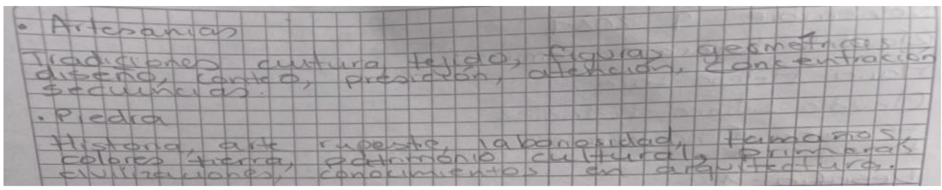
Las situaciones planteadas desde la historia de las matemáticas han causado curiosidad, principalmente la forma en que razonaban los egipcios, así como extraño inicialmente el método de posición falsa; estos aspectos motivaron a que los docentes se interesaran en la búsqueda de estrategias para desarrollar el pensamiento matemático y reflexionar sobre las formas de razonamiento de civilizaciones referentes a través de la historia, como una estrategia para fortalecer el conocimiento didáctico del contenido.

Respecto al diseño que se sigue en el desarrollo de la propuesta, este se consolida, en cuanto los docentes y por iniciativa propia se apoyan en estrategias utilizadas en actividades anteriores, lo cual ha impactado de manera positiva en la calidad de sus productos.

4.2.10 Actividad 09: Análisis e interpretación de imágenes de la naturaleza

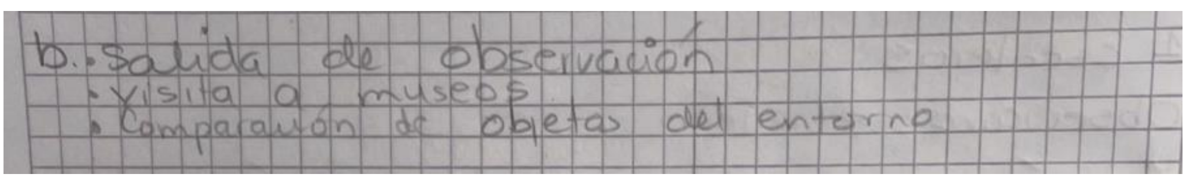
Objetivo: Modelar algunas imágenes de la naturaleza, con el fin de analizar su relación con las matemáticas.

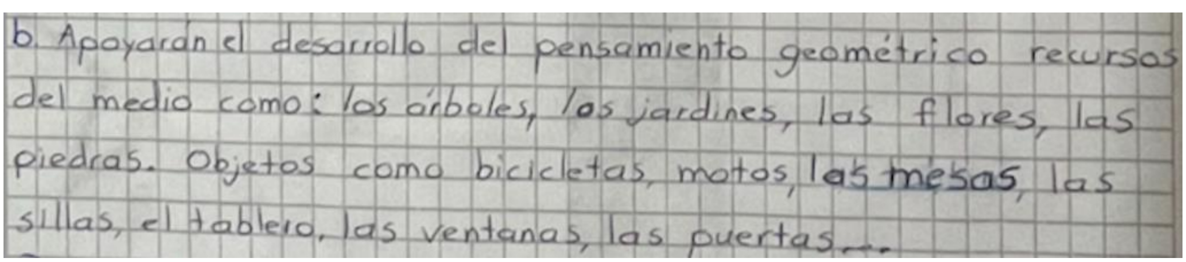
Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, “Identificando elementos geométricos”, tiene el objetivo de identificar elementos geométricos en imágenes de la naturaleza. Desafío 2, “Encuentro objetos simétricos”, tiene el objetivo de revisar y aplicar el concepto de simetría usando manipulativos, aplicaciones en línea e imágenes dadas. Desafío 3, “Las matemáticas a través de elementos en la naturaleza, buscando estrategias de análisis e interpretación”, tiene el objetivo de construir algunos fractales utilizando herramientas básicas de dibujo y el software GeoGebra. A continuación, se comparte algunos episodios.


- Artesanías
Tradiciones, cultura, tejido, figuras geométricas, diseño, conteo, precisión, atención, concentración, secuencias.
- Piedra
Historia, arte rupestre, laboriosidad, tamaños, colores, tierra, patrimonio cultural, primeras civilizaciones, conocimientos en arquitectura.

Los docentes caracterizan las imágenes desde sus propios puntos de vista, algunos de ellos en detalle y relacionando cada imagen a un contexto. Otros grupos describen en términos generales, destacando las figuras geométricas planas y con mínima referencia a objetos tridimensionales (ver imagen).

b) Relacione otros recursos del medio que apoyarían la construcción de pensamiento geométrico en los estudiantes del nivel de educación básica primaria.

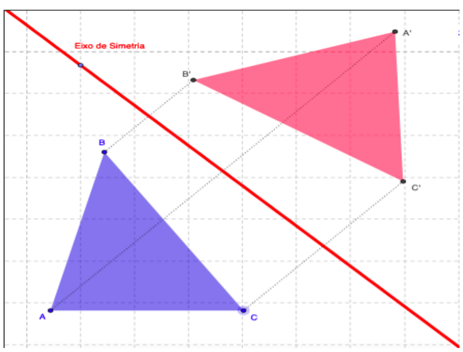

b. Salida de observación
- Visita a museos
- Comparación de objetos del entorno


b. Apoyarán el desarrollo del pensamiento geométrico recursos del medio como: los árboles, los jardines, las flores, las piedras. Objetos como bicicletas, motos, las mesas, las sillas, el tablero, las ventanas, las puertas...

c) Tomar varias frutas: manzanas, peras, papaya, …, realizar un corte central, observar y exponer los elementos geométricos presentes. Como sugerencia apoyarse en tomas fotográficas.


Los docentes encuentran a través de este ejercicio una estrategia para observar en la naturaleza la simetría axial, sus elementos y características.

e) Ingresar en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/g8sfa86s en el cual encontrará la construcción que observa en la imagen; mover los puntos A, B y C del triángulo y exponer qué sucede en la figura de la derecha. ¿Qué sucede entre puntos homólogos de los triángulos respecto al eje de simetría?, ¿qué función cumple el eje de simetría, y qué otro nombre le podría asignar? Argumentar.



e. Al mover los puntos A,B,C a la derecha del eje de simetría hallamos una reflexión de la figura inicial. Cada punto se aleja del eje de Simetría las mismas unidades tanto a la derecha como a la izquierda del eje de Simetría

g) Teniendo en cuenta el literal anterior, ¿qué aprendizajes cree que es posible abordar con sus respectivos estudiantes? Argumentar.

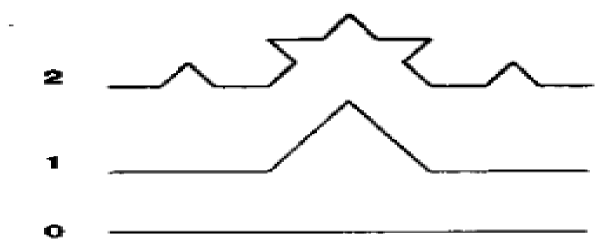
g. Aprendizaje: El concepto de rectas paralelas, perpendiculares Segmentos, mitades, diagonales, reflexión de figuras, interacción con el programa Geogebra, puntos homólogos... Simetría

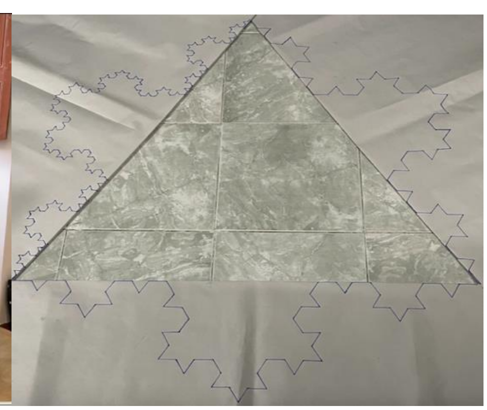
Desafío 03: Las matemáticas a través de elementos en la naturaleza, buscando estrategias de análisis e interpretación.

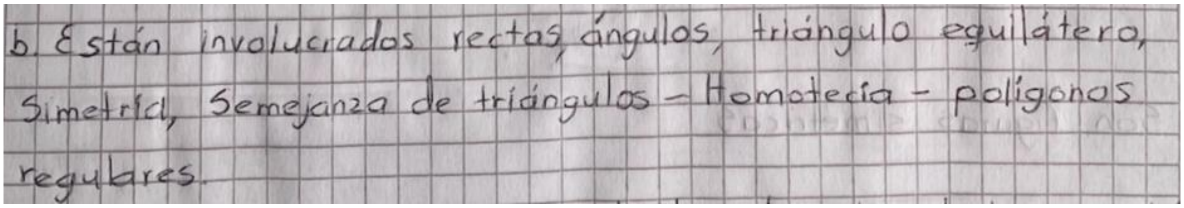
Objetivos: Construir algunos fractales utilizando herramientas básicas de dibujo y el software GeoGebra.

b) En la siguiente imagen, se observa la construcción del nivel 1 y 2, teniendo en cuenta el nivel 0 (segmento de entrada). Su tarea consiste en construir dos niveles más, para lo cual dispone de un pliego de papel.

- Argumentar y exponer sobre los elementos de geometría que están involucrados en esta construcción.
- Exponer con que objetos de la naturaleza se relaciona esta construcción.

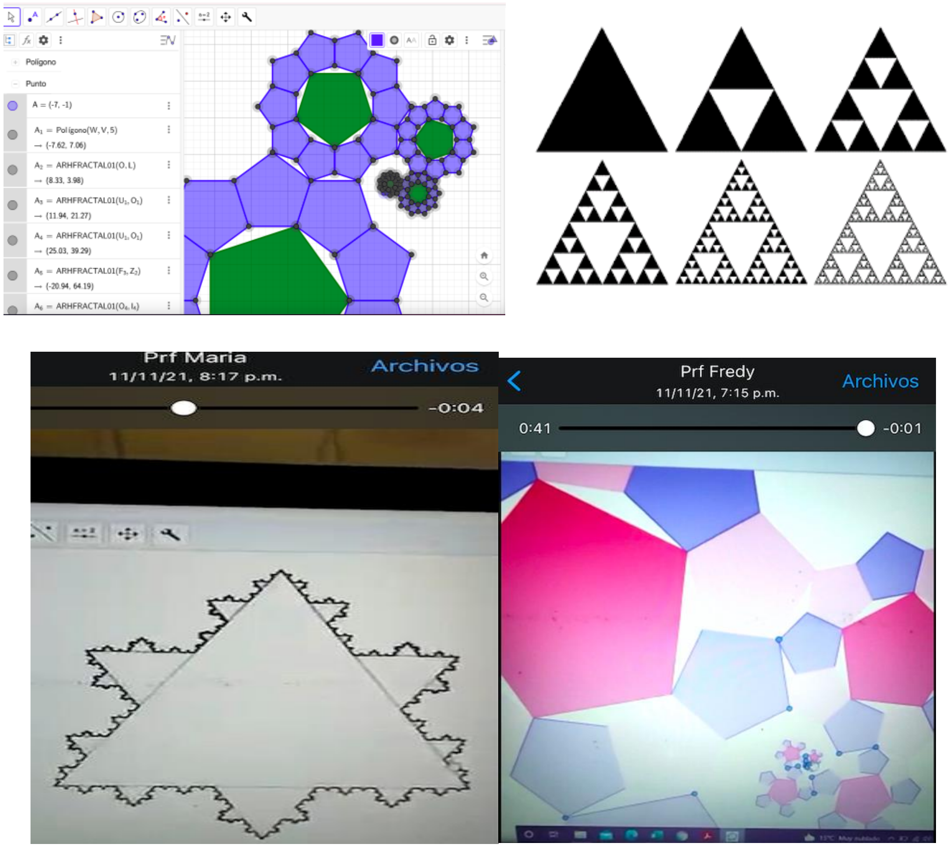





b. Están involucrados rectas, ángulos, triángulo equilátero, Simetría, Semejanza de triángulos – Homotecía – polígonos regulares.

En este desafío, los docentes han construido el fractal de Koch, actividad en la que fue posible evidenciar una vez más el trabajo en equipo, la gestión de herramientas por cada uno de los docentes, el interés en construir conceptos, reconocer características y elementos geométricos necesarios para lograr los objetivos.

d) Identificar los objetos de entrada de cada fractal que se observa en la siguiente imagen y construirlos en la aplicación GeoGebra. Exponer los elementos geométricos necesarios en esta construcción y su relación con diferentes contextos.



Construcción realizada por los docentes con el uso de la aplicación GeoGebra.

Tabla 10: Rúbrica de análisis actividad 9

Componente	**Nivel**	**Características**
Uso de material manipulativo en la construcción de conceptos en el contexto del pensamiento geométrico.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en la construcción del concepto de simetría.	Los 12 docentes participantes utilizan de manera efectiva material manipulativo tales como fichas, imágenes de la naturaleza, algunas frutas y tomas fotográficas, en la construcción y consolidación del concepto de simetría, sus características y elementos.
Planteamiento y ejecución de estrategias en cada uno de los desafíos propuestos.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite consolidar el concepto de simetría, exponer sus características y elementos.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias efectivas que les permite la construcción de simetría a través de la experimentación principalmente, exponer las características y sus elementos.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes usan manipulativos concretos de manera efectiva para lograr los objetivos en cada desafío.	Los 12 docentes participantes utilizan de manera efectiva material manipulativo tales como fichas, imágenes de la naturaleza, algunas frutas y tomas fotográficas, en cada uno de los desafíos propuestos con el fin de consolidar el concepto de simetría.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes usan el software GeoGebra y aplicaciones en línea, como herramienta para exponer características y elementos de simetría.	Los 12 docentes usan el software GeoGebra y aplicaciones en línea, para exponer características, elementos y tipos de simetría en figuras planas.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y medios utilizados para lograr los objetivos. Los docentes se apoyan en la experiencia y resultados obtenidos en actividades anteriores.

Conclusiones

En esta actividad, los docentes experimentan nuevos escenarios para trabajar en ambiente de laboratorio, explorando el medio, analizando imágenes de la naturaleza desde la construcción de las mismas en papel y lápiz y en la aplicación GeoGebra. Fue posible evidenciar cómo los docentes han incorporado términos que no eran comunes en ellos tales como: homotecia, simetría, proyecciones; que se han construido a través de diferentes técnicas en el transcurso del diplomado. Igualmente, en el diálogo entre compañeros y simultáneo al trabajo en la actividad, comentan sobre la importancia de la visualización y las posibilidades que brindan diferentes escenarios o contextos, reconociendo la propuesta como una estrategia para fortalecer el conocimiento pedagógico del contenido e incorporar en su respectiva práctica pedagógica, complementando la misma con recorridos en el entorno o sitio turísticos iniciando por los del sector, con el fin de percibir, representar y caracterizar el espacio desde un punto de vista geométrico.

Manifiestan los docentes no haber tenido antes experiencia en el trabajo con fractales, reconociendo como significativo el hecho de que se relaciona con la naturaleza: son muy llamativos e impactan visualmente, en mención al fractal de Koch que han construido en papel y lápiz, y otros que han explorado por iniciativa propia en la aplicación GeoGebra. En esta tarea prevalece el trabajo en equipo, el cual se consolida durante el diplomado como una estrategia fundamental para lograr los aprendizajes esperados.

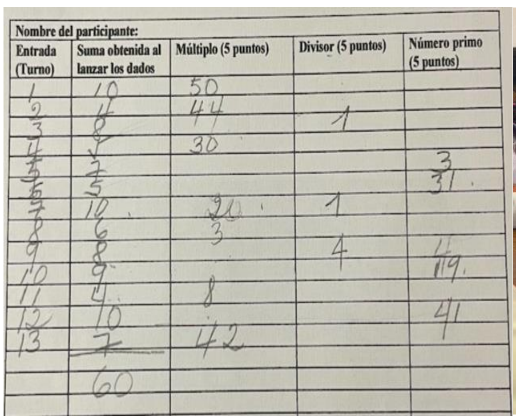
En esta actividad y frente al diseño que se ha venido trabajando, se evidencia un grado significativo de apropiación por parte de los docentes, en cuanto su participación tanto en el uso de manipulativos concretos y virtuales ha alcanzado el 100%, la calidad de sus productos igualmente lo confirman. Se resalta el hecho de incluir los enlaces de interacción en línea en cuanto han facilitado el trabajo a los docentes con pocas habilidades computacionales específicamente las aplicaciones GeoGebra y Excel.

4.2.11 Actividad 10: Aritmética

Objetivo: Fortalecer las habilidades de los docentes en el campo de la aritmética, mediante el uso de los números naturales, sus operaciones y propiedades en diferentes contextos.

Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, “Múltiplos y divisores”, tiene el objetivo de fortalecer el concepto de múltiplo y divisor de un número, a través del juego torre de Jenga; así como fortalecer el concepto de número primo y aplicarlo en la descomposición en factores. Desafío 2, “Máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm)”, tiene el objetivo de experimentar con diferentes estrategias en el cálculo del máximo común divisor, mínimo común múltiplo y resolver problemas que involucren los mismos. Desafío 3, “Descubriendo talentos y formando olímpicos”, tiene el objetivo de fortalecer las habilidades en la ejercitación de operaciones básicas como un recurso en la resolución de problemas tipo olimpiada. A continuación, se comparte algunos episodios.

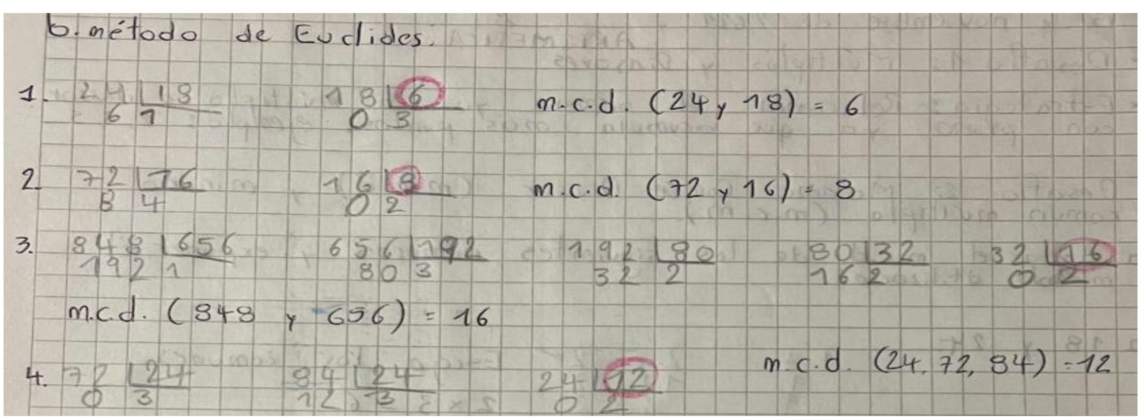
4. El participante que se le derrumbe la torre, sale del juego; el ganador será quien obtenga la mayor cantidad de puntos, teniendo en cuenta la siguiente tabla la cual debe ir registrando cada participante a medida que se desarrolla el juego.



Nombre del participante:

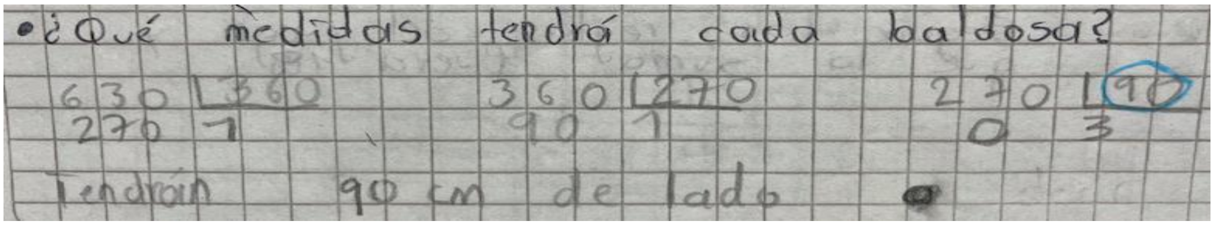
Entrada (Turno)	Suma obtenida al lanzar los dados	Múltiplo (5 puntos)	Divisor (5 puntos)	Número primo (5 puntos)
1	10	50		
2	4	44		
3	8		1	
4	5	30		
5	7			3
6	5			31
7	10	20	1	
8	6	3		
9	8		4	
10	9			19
11	4	8		
12	10			41
13	7	42		
	60			

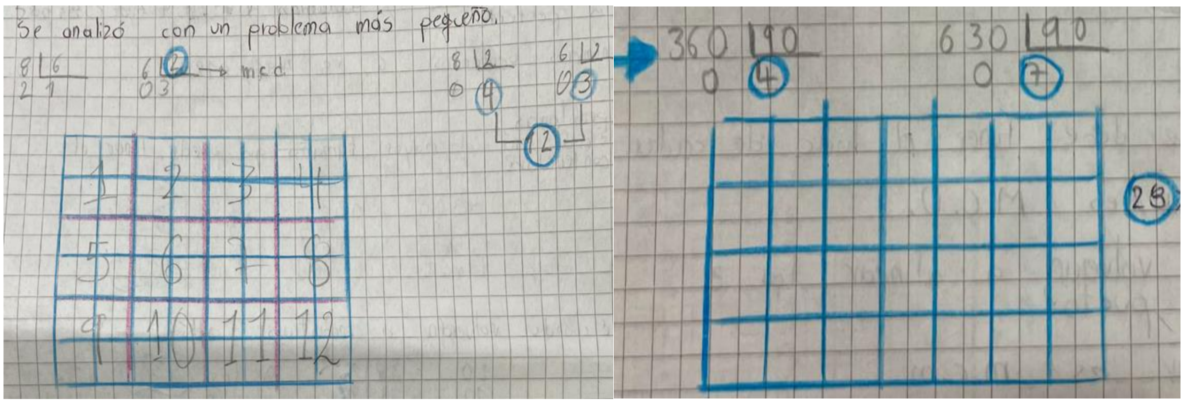
b) Utilizar el método de Euclides para hallar el máximo común divisor de los números del literal anterior.



- Jorge está cambiando el suelo de su cocina que mide 360 cm de ancho y 630 cm de largo. Quiere que las baldosas sean cuadrados y del mayor tamaño posible.

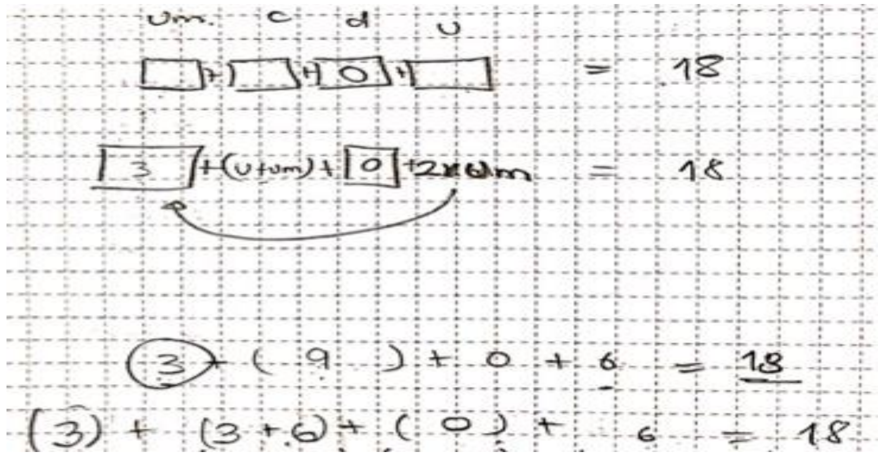
  a) ¿Qué medidas tendrá cada baldosa? ¿Cuántas necesitará?





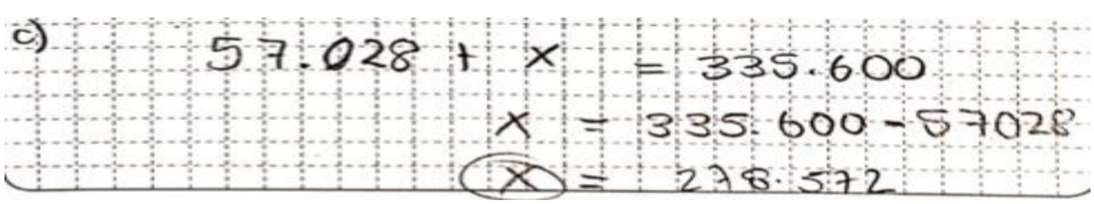
Se evidencia como recurso que utilizan los docentes el principio heurístico de reducción de George Polya, al sustituir la superficie inicial de 360 x 630 a una de 6x8, este último les brindó la posibilidad de representarlo con material concreto y pictórico, analizar la medida del lado de cada baldosa y asociarlo con el mcd, para luego trasladar este proceso a la situación inicialmente planteada.

a) La suma de las cifras de un número de cuatro cifras es 18. Si la cifra de las unidades es el doble de la cifra del millar, la cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las unidades más la del millar y la cifra de las decenas es cero, encontrar el número que verifica estas condiciones. Exponer la estrategia utilizada al respecto.



Este problema los docentes lo han abordado a través de casos particulares, con dificultad inicialmente para organizar las ideas; sin embargo, uno de los cuatro grupos ha propuesto el esquema que se comparte en la imagen, este les ha permitido en una primera etapa, articular los datos suministrados en el problema, en una segunda etapa experimentan con la cifra del millar comparada con la cifra de las unidades teniendo en cuenta las condiciones dadas. Esta estrategia les ha permitido hallar la solución a la situación planteada. Igualmente, un grupo ha planteado una ecuación con cuatro incógnitas (una para cada valor posicional), presentando dificultad para relacionarlas y reducir el número de estas, luego descartan la propuesta (esta es retomada por el investigador en el espacio de retroalimentación), y optan por experimentar con casos particulares.

c) La suma de dos números es 335600, si uno de los sumandos es 57028, entonces encuentre el otro. Argumentar.

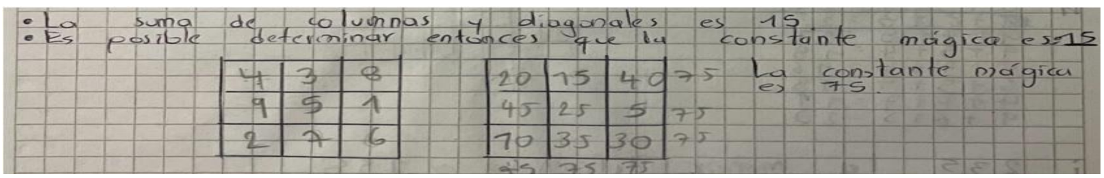


Dos de los cuatro grupos plantea una ecuación para resolver el problema, los demás grupos se dirigen a efectuar directamente la resta.

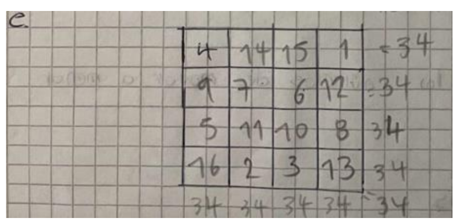
d) Observa el siguiente cuadrado y exponga las características que en este puede determinar

2	9	4
7	5	3
6	1	8

- Que puede concluir de la suma de sus las columnas y diagonales
- Es posible determinar entonces que la constante mágica es: _________
- Encuentra otras formas de distribuir los números, de tal forma que se mantenga la constante mágica.
- Encuentre otras estrategias que, al aplicarlas al cuadrado dado, generen un nuevo cuadrado mágico. Justificar

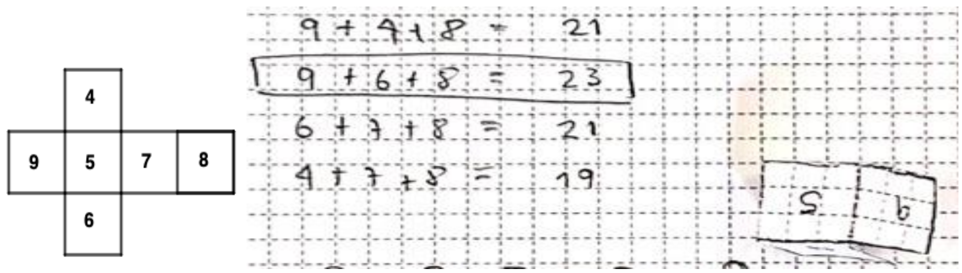


e) Construya un cuadrado mágico de 4 x 4 con los números del 1 hasta el 16. Se recomienda determinar en primer lugar la constante mágica (apoyarse en el literal anterior).



La estrategia de los docentes consiste en hallar en primer lugar la constante mágica.

h) En el diagrama se muestra un cubo desdoblado donde se ha asignado un número a cada una de las caras. Al armar nuevamente el cubo, ¿cuál es la mayor suma que se obtiene sumando los números que aparecen en las tres caras que concurren en una esquina?



Como se puede ver en la anterior imagen, la estrategia de los docentes consistió en construir el cubo en papel e identificar los números que concurren en cada vértice.

Tabla 11: Rúbrica de análisis actividad 10

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos en el campo de la aritmética.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva en actividades lúdicas a través de las cuales consolidan el significado del concepto del mcm y mcd.	Los 12 docentes participan en actividades lúdicas, las cuales incluyen material manipulativo, y permiten en ellos consolidar estrategias en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la aritmética.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas, en el campo de la aritmética.	Los 12 docentes participantes, principalmente a través de la experimentación con casos particulares, identifican y exponen las tareas a realizar en los diferentes problemas planteados.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias para solucionar problemas, al respecto gestionan material concreto con el cual experimentan, recolectan y analizan hallazgos para establecer conclusiones.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utilizan material manipulativo de manera efectiva, en la resolución de problemas en el contexto de la aritmética.	Los docentes gestionan material manipulativo, tales como fichas numeradas, dobleces de papel, entre otros; los cuales les permite experimentar con casos particulares dentro del proceso de resolución de problemas planteados.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: 8 de los 12 docentes, utilizan algunas aplicaciones en línea para consolidar conceptos principalmente.	Los 12 docentes consideran relevante el apoyo de aplicaciones en línea para consolidar conceptos, fortalecer el conocimiento disciplinar y los aprendizajes de sus respectivos estudiantes. Sin embargo, la interacción con el recurso se le ha dificultado a cuatro docentes.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes, reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y medios utilizados. Igualmente, los docentes se apoyan en la experiencia y resultados obtenidos en actividades anteriores.

Conclusiones

Los docentes han logrado dar solución a los problemas propuestos, apoyados en la experiencia que en el transcurso del desafío han adquirido con respecto a las técnicas para hallar el mcd y el mcm de dos o más números, se destaca que dos de los cuatro grupos, utilizaron el algoritmo de Euclides en esta sesión de resolución de problemas, un método que no lo conocían, que inicialmente les ha parecido dispendioso y poco útil, sin embargo, es una estrategia que han incorporado como técnica en la resolución de problemas.

Se evidencia en el transcurso de la actividad los principios heurísticos de George Polya, principalmente reducción, el cual se presenta al tomar situaciones análogas con pequeñas dimensiones que les ha facilitado la representación con material concreto y pictórico, y de esta manera analizarlas y establecer conclusiones, para luego trasladar el proceso a la situación inicialmente planteada, estrategia que les ha resultado efectiva en la resolución de problemas.

En esta actividad igualmente, prevalece como estrategia de abordaje en la resolución de problemas, la experimentación a través de casos particulares, la organización de los resultados de acuerdo a algún criterio, principalmente de orden, para facilitar el conteo, un recurso usual en los docentes participantes. Los docentes consideran que el conteo lo pueden evitar a través de la generalización, esto teniendo en cuenta la experiencia en actividades anteriores; proceso que, aunque presentan dificultad lo han logrado.

Para el grupo de docentes, los cuadrados mágicos fue una novedad, no conocían los elementos matemáticos que a través de estos se fortalece, las habilidades que se requieren para solucionarlos y para plantear otros. Por tal motivo, los consideran como una estrategia que favorece la consolidación de operaciones aritméticas y competencias de razonamiento, comunicación y resolución de problemas; aportando de esta manera al conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido.

Con respecto al diseño que se ha venido trabajando, se evidencia apropiación, en un 100% de participación de los docentes con el trabajo y producción significativa usando manipulativos concretos, y en un 66% relacionado a la producción de calidad usando manipulativos virtuales

4.2.12 Actividad 11: Pensamiento estratégico

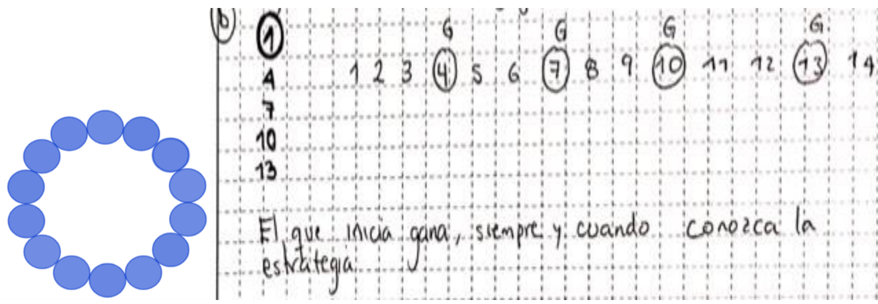
Objetivos: 1. Fortalecer en los docentes las habilidades en la resolución de problemas a través de un ambiente lúdico en donde ellos asumen diferentes roles, planean, ejecutan y evalúan estrategias de solución. 2. Fomentar en los docentes la imaginación, la creatividad, la agilidad mental, la memoria, el pensamiento creativo, el pensamiento lógico, la expresión de ideas y la toma de decisiones en diferentes contextos.

Esta actividad está compuesta por 3 desafíos. Desafío 1, "Los juegos de estrategia en el aula", tiene el objetivo de identificar las características de los juegos de estrategia a través de la práctica y uso de manipulativos concretos. Desafío 2, "En busca de la estrategia para ganar", tiene el objetivo de diseñar y aplicar en equipo técnicas que permitan establecer la estrategia ganadora en cada uno de los juegos propuestos. Desafío 3, "Juegos de estrategia en línea", tiene el objetivo de experimentar y analizar la pertinencia de los juegos de estrategia en línea, como un recurso en las prácticas de aula para fortalecer las habilidades en la resolución de problemas. A continuación, se comparte algunos episodios.

b) El círculo de fichas. Se ponen 14 fichas en un círculo como se indica en la figura. Dos jugadores se turnan para sacar una o dos fichas, pero si se sacan dos, estás deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío. La persona que saca la última ficha pierde.

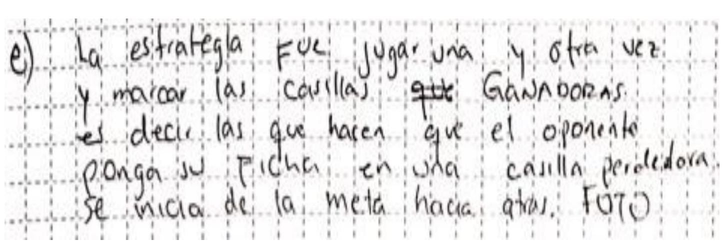
Practicar el juego con el uso del material concreto y establecer las condiciones que se deben cumplir para no perder.

¿Hay diferencia entre las posibilidades que se tienen si se es el primero o el segundo en jugar? Argumentar.



Los docentes inicialmente desconocen que en este tipo de juegos existe una estrategia ganadora; sin embargo, a través de la experimentación, descubren regularidades, principalmente concentran la atención en las últimas jugadas, y a partir de ahí razonan. (Ver imagen anterior.)

e) La Reina. Se juega en un tablero como el del ajedrez, pero con 7×8 casillas, con la pieza del ajedrez “la reina” que se sitúa en el extremo superior izquierdo (salida); y la meta es la casilla del extremo inferior derecho. Cada jugador en su turno mueve la reina en uno de los tres sentidos: horizontal-hacia a la derecha, vertical-hacia abajo, y también diagonal-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta. Su tarea consiste en practicarlo y tratar de ganar siempre o impedir que su oponente lo haga. Teniendo en cuenta la experiencia, ¿a qué le atribuye el hecho de ganar o de perder? Exponga sus estrategias.



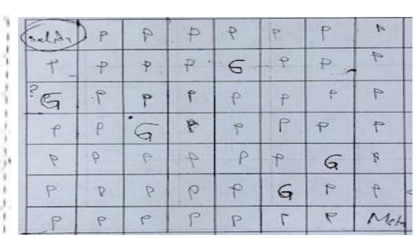


Tabla 12: Rúbrica de análisis actividad 11

Componente	Nivel	Características
Uso de material manipulativo como herramienta para fortalecer el pensamiento estratégico.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utiliza material manipulativo de manera efectiva en actividades lúdicas, a través de las cuales consolidan estrategias de solución.	Los 12 docentes participan en actividades lúdicas, las cuales incluyen material manipulativo, y permiten en ellos consolidar estrategias en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el contexto del pensamiento estratégico.
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema.	Nivel Alto: De manera acertada los docentes exponen las tareas a realizar en la resolución de problemas.	Los 12 docentes participantes, a través de la práctica en los diferentes juegos propuestos, reflexión y análisis en equipo, logran comprender y exponer las tareas a realizar.
Planteamiento y ejecución de estrategias en la resolución de problemas.	Nivel Alto: Los docentes plantean y ejecutan estrategias que les permite de manera acertada solucionar problemas.	Los 12 docentes plantean y ejecutan estrategias para solucionar problemas, al respecto razonan teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la experimentación.
Uso de manipulativos concretos en la resolución de problemas.	Nivel Alto: El 100% de los docentes utiliza material manipulativo de manera efectiva, en la resolución de problemas en el contexto de la aritmética.	Los docentes gestionan material manipulativo, tales como fichas, tarjetas de colores, entre otros.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	Nivel Medio: 9 de los 12 docentes, utilizan algunas aplicaciones en línea para consolidar estrategias de solución de problemas.	Los 12 docentes consideran relevante el apoyo de aplicaciones en línea para consolidar estrategias, fortalecer el conocimiento disciplinar y los aprendizajes de sus respectivos estudiantes. Sin embargo, la interacción con el recurso se le ha dificultado a tres docentes, principalmente por habilidades computacionales mínimas.
Aplicación de procesos de metacognición	Nivel Alto: El 100% de los docentes, reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Los 12 docentes reflexionan sobre el proceso desarrollado en cada etapa realizada en la consecución de los objetivos, exponen los diferentes momentos, presentando los recursos y medios utilizados. Los docentes se apoyan en la experiencia y resultados obtenidos en actividades anteriores.

Conclusiones

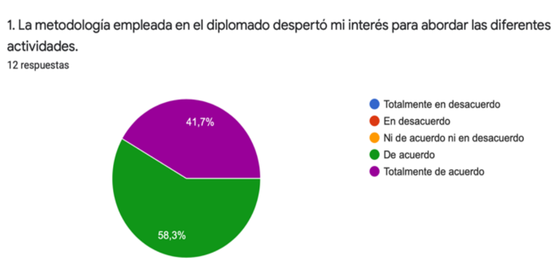
Pensamiento estratégico es un componente del área de matemáticas cuya exploración es mínima en la educación básica primaria, principalmente por no estar contemplado en los referentes de calidad del MEN de manera explícita. Sin embargo, los docentes consideran como relevante los desafíos propuestos, en tanto fortalecen el conocimiento diciplinar y pedagógico del contenido, a través de los juegos de estrategia, igualmente es una temática que consideran significativa para el trabajo con sus respectivos estudiantes. En el abordaje de cada situación ha prevalecido el trabajo hacia atrás o método analítico, estrategia heurística incluida en el modelo de resolución de problemas de George

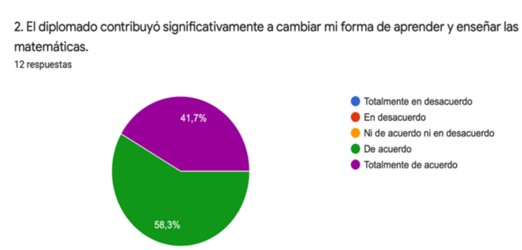
Polya. Al respecto, el uso de material manipulativo ha resultado fundamental en la experimentación y trabajo práctico en equipo.

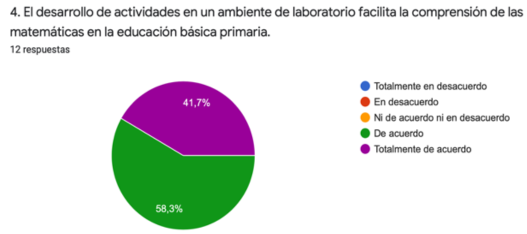
Con respecto al diseño que se ha venido trabajando, se evidencia una vez más la apropiación por parte de la totalidad de los docentes en referencia a la producción con manipulativos concretos; y en un 75% de los docentes participantes en referencia al trabajo y producción de calidad con el uso de manipulativos virtuales.

4.3 Encuesta de percepción

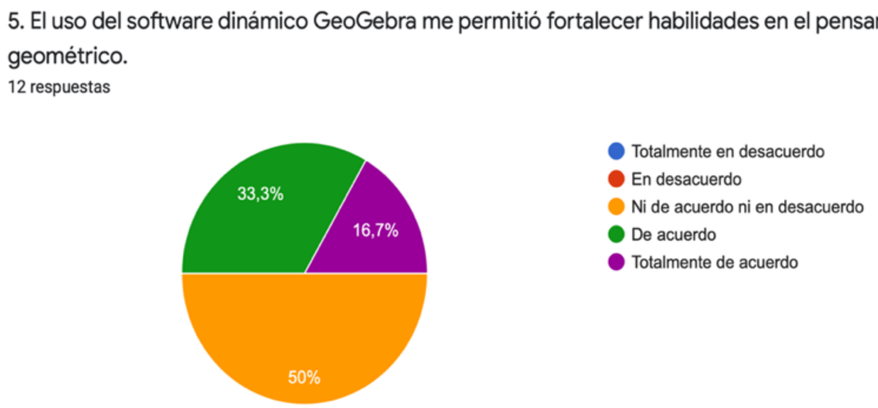
A continuación, se presenta el análisis de la encuesta de percepción que se aplicó a los docentes, terminado el diplomado "Formación matemática del docente de primaria usando como herramienta el laboratorio". El instrumento, se dividió en dos partes. La primera contiene preguntas en escala Likert donde los docentes debían responder si están totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, ni de acuerdo ni en desacuerdo, de acuerdo o totalmente de acuerdo. La segunda parte consta de seis preguntas abiertas donde los docentes han manifestado sus percepciones acerca de la metodología del diplomado, los aprendizajes adquiridos, los aportes a su formación, a su práctica de aula y al desarrollo del pensamiento matemático.



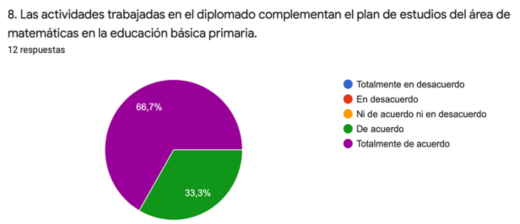


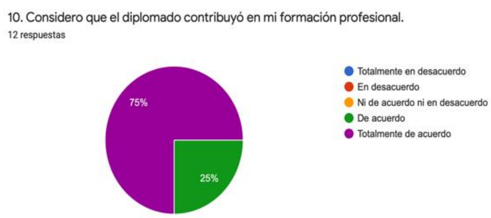


De acuerdo a las respuestas en la preguntas 1 a la 4, los docentes en su totalidad tienen la percepción que la metodología empleada en el diplomado ha despertado el interés para abordar las actividades propuestas de formación, cambiando significativamente las formas de aprender y enseñar las matemáticas mediados por el laboratorio y donde resaltan como totalmente de acuerdo por la mayoría el uso de material concreto para construir, fortalecer conceptos y resolver problemas.



Frente a esta pregunta, la mitad de los docentes tiene como percepción que se fortalecen habilidades del pensamiento geométrico con el uso de del software dinámico GeoGebra; resultado que en el desarrollo de la experiencia se ha evidenciado en cuanto la mitad de los docentes aproximadamente, lograron habilidades a través de los desafíos propuestos en las actividades y otras que han complementado de forma autónoma. Los restantes docentes presentaron dificultad, manifestaron como causa el poco interés hacia el usos de software en las prácticas pedagógicas a lo largo de su ejercicio docente.





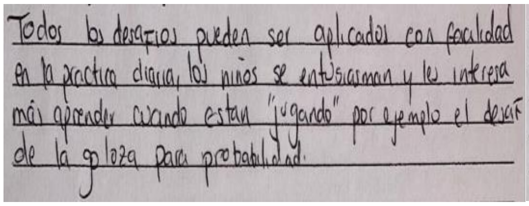
En las preguntas 6 a la 11, los docentes tienen como percepción que los desafíos planteados en cada una de las actividades propician la interacción entre compañeros y el trabajo en equipo, generando en ellos confianza para abordar temáticas específicas con mayor profundidad en la educación básica primaria; temáticas que consideran complementan el plan de estudios, a través del laboratorio de matemáticas como herramienta que favorece la construcción de conceptos, comprensión y resolución de problemas en contextos matemáticos y otras áreas. Igualmente, los docentes consideran que el diplomado ha contribuido de manera positiva en la formación profesional de cada uno de ellos, a través de las actividades desarrolladas en la experiencia, su discusión y también mediante la retroalimentación brindada por el investigador.

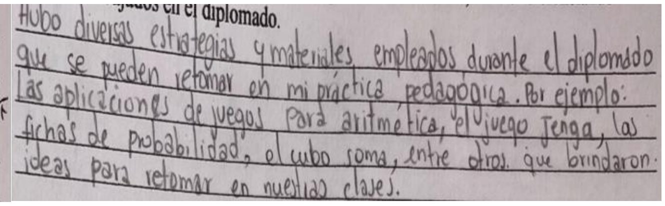
A continuación, se presenta un resumen y la interpretación del investigador de cada una de las respuestas que los docentes han argumentado, con respecto a las preguntas abiertas.

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿El desarrollo del diplomado en un ambiente de laboratorio favorece significativamente la construcción de conceptos y la resolución de problemas? si___ no ___. Si su respuesta es afirmativa, ilustre referenciando desafíos trabajados en el diplomado. Todos los docentes han manifestado que el desarrollo del diplomado en un ambiente de laboratorio, sí favorece significativamente la construcción de conceptos y la resolución de problemas. Destacan al respecto los desafíos: construcción de rectas y puntos notables del triángulo a través de dobleces de papel, la rayuela o golosa en la construcción del significado de probabilidad, el cubo soma en la representación y caracterización del espacio, la geometría fractal por el impacto de las imágenes que se generan, la búsqueda de patrones en el pensamiento variacional utilizando las figuras de colores y aumentando el número de estas buscando estrategias para generalizar, y el montaje experimental en la construcción del concepto de homotecia.

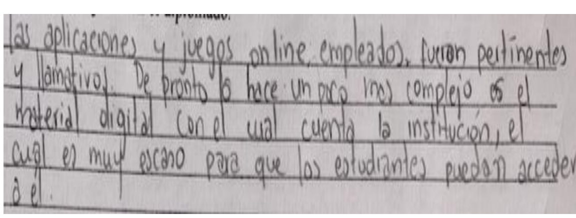
2. ¿Las actividades desarrolladas en el diplomado fortalecen la práctica pedagógica en el área de matemáticas? si___ no __ Si su respuesta es afirmativa, ilustre referenciando desafíos trabajados en el diplomado. Todos los docentes han manifestado que las actividades desarrolladas en el diplomado, sí fortalecen la práctica pedagógica en el área de matemáticas; citan como ejemplo: en álgebra temprana, los desafíos analizando la sucesión para hallar el término general y resolver con este los problemas planteados, los desafíos relacionados con probabilidad en cuanto resultan muy lúdicos para trabajar con los niños (el juego de la rayuela, la utilización de los dados, las balotas, fichas entre otros); así como la torres de Jenga y Hanói para trabajar aritmética, de manera activa e interactuando en equipo. En la siguiente imagen, se comparte la evidencia al respecto.

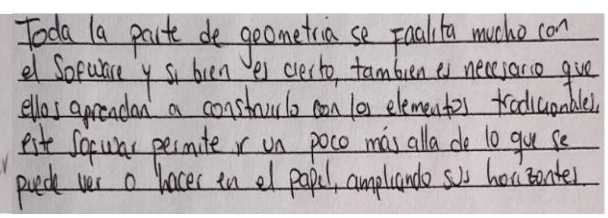

Todos los desafíos pueden ser aplicados con facilidad en la practica diaria, los niños se entusiasman y les interesa más aprender cuando estan "jugando" por ejemplo el desafío de la golosa para probabilidad.


...ados en el diplomado.
Hubo diversas estrategias y materiales empleados durante el diplomado que se pueden retomar en mi práctica pedagogica. Por ejemplo: Las aplicaciones de juegos para aritmética, el juego Jenga, las fichas de probabilidad, el cubo soma, entre otros. que brindaron ideas para retomar en nuestras clases.

3. ¿Cree que es pertinente el uso de software dinámico en la educación básica primaria? si__ no __Si su respuesta es afirmativa, mencione en que temática(s) e ilustre referenciando desafíos trabajados en el diplomado.

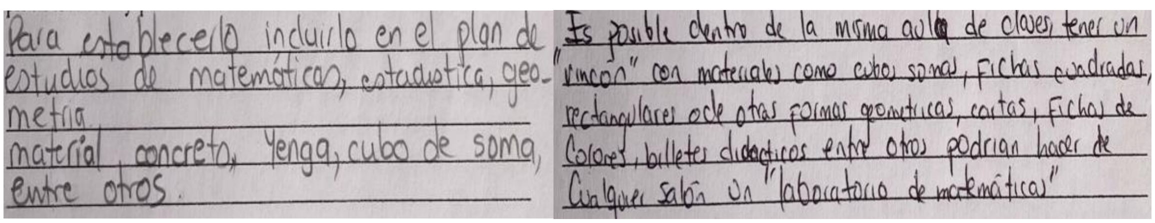
Para todos los docentes participantes, sí es pertinente el uso de software dinámico en la educación básica primaria. Manifiestan al respecto que la aplicación GeoGebra y otras en línea que también utilizaron, favorecen el análisis de diferentes situaciones a través de la visualización: mencionan principalmente la actividad construcción de puntos y rectas notables del triángulo, simetría y sus elementos y características, múltiplos y divisores a través de aplicaciones online. Los docentes mencionan que la dificultad en algunos casos para trabajar con sus estudiantes radica en no contar con equipos suficientes, o desactualizados y sin conexión a internet; igualmente, la falta de formación en tecnología los limita en cuanto a la exploración de estas herramientas en el aula. En la siguiente imagen, se comparte la evidencia al respecto.


las aplicaciones y juegos online empleados, fueron pertinentes y llamativos. De pronto lo hace un poco más complejo es el material digital con el cual cuenta la institución, el cual es muy escaso para que los estudiantes puedan acceder a el.


Toda la parte de geometria se facilita mucho con el Sofware y si bien es cierto, tambien es necesario que ellos aprendan a construirlo con los elementos tradicionales, este Sofwar permite ir un poco más alla de lo que se puede ver o hacer en el papel, ampliando sus horizontes

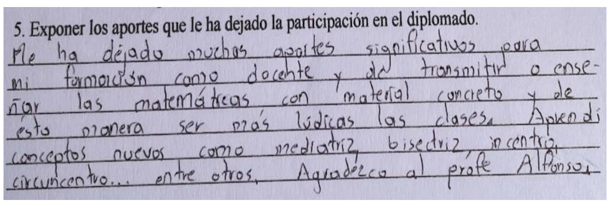
4. ¿Cree que es pertinente establecer un laboratorio para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria? si__ no __, si su respuesta es afirmativa; ¿de qué manera es

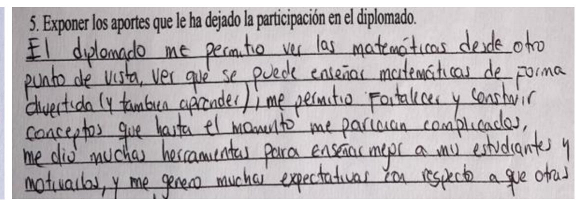
posible establecerlo y qué materiales o recursos considera se deberían incluir? Todos los docentes creen que es pertinente establecer un laboratorio para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria; y como estrategia para tal fin, mencionan que se debe articular al plan de estudio del área, o reestructurarlo incluso. También otros docentes manifiestan que es pertinente asignar un aula llamada “laboratorio de matemáticas”, espacio en el cual a los estudiantes se les facilite el trabajo en equipo, la utilización de los manipulativos y herramientas de trabajo. Sin embargo, otros docentes también consideran que es posible dentro del aula establecer un espacio o rincón pedagógico para tal fin. Igualmente, crear comunidades entre docentes para construir aprendizajes y compartir la experiencia entre diferentes contextos. En cuanto a los materiales que se deberían incluir los docentes mencionan: Material concreto (fichas, balotas, dados, torres, cubo soma, entre otros), equipos de cómputo y software especializado, mesas, herramientas de dibujo. En la siguiente imagen, se comparte la evidencia al respecto.


Para establecerlo incluirlo en el plan de estudios de matemáticas, estadística, geometría.
material concreto, Yenga, cubo de soma, entre otros.

Es posible dentro de la misma aula de clases, tener un "rincón" con materiales como cubos soma, fichas cuadradas, rectangulares o de otras formas geométricas, cartas, fichas de colores, billetes didácticos entre otros podrían hacer de cualquier salón un "laboratorio de matemáticas"

5. Exponer los aportes que le ha dejado la participación en el diplomado. Al respecto, los docentes han manifestado: *“me ha dejado muchos aportes significativos para mi formación como docente, y de transmitir o enseñar las matemáticas con material concreto y de forma lúdica las clases. Aprendí conceptos nuevos como: mediatriz, bisectriz, incentro, circuncentro, entre otros”; “Descubrí que tengo fortalezas en algunos pensamientos de la matemática y otros en los que tengo grandes abismos”; “El diplomado me permitió ver las matemáticas desde otro punto de vista, ver que se puede enseñar matemáticas de forma divertida (y también aprender), me permitió fortalecer y construir* *conceptos que hasta el momento me parecían complicados, me dio muchas herramientas para enseñar mejor a mis estudiantes y motivarlos, y me generó muchas expectativas con respecto a que otras cosas se pueden hacer"; "Recordar muchos temas que no tenía claros ya que llevo muchos años sin dictar matemáticas. Abordar la matemática de una manera más dinámica, práctica y lúdica que favorece el aprendizaje de los niños".* En la siguiente imagen, se comparte la evidencia al respecto.

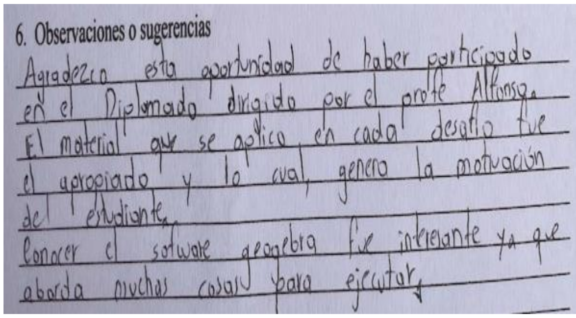

5. Exponer los aportes que le ha dejado la participación en el diplomado.
Me ha dejado muchos aportes significativos para mi formación como docente y de transmitir o enseñar las matemáticas con material concreto y de esta manera ser más lúdicas las clases. Aprendí conceptos nuevos como mediatriz, bisectriz, incentro, circuncentro... entre otros. Agradezco al profe Alfonso.


5. Exponer los aportes que le ha dejado la participación en el diplomado.
El diplomado me permitio ver las matemáticas desde otro punto de vista, ver que se puede enseñar matemáticas de forma divertida (y tambien aprender), me permitio fortalecer y construir conceptos que hasta el momento me parecian complicados, me dio muchas herramientas para enseñar mejor a mis estudiantes y motivarlos, y me genero muchas expectativas con respecto a que otras

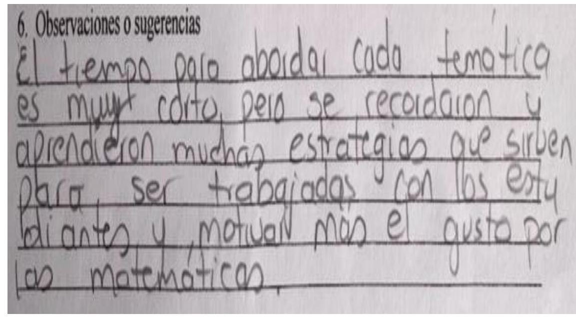
6. Observaciones o sugerencias.

Las observaciones de los docentes giran en torno a dos aspectos principalmente: uno es sobre la importancia de implementar otros diplomados o segunda parte para fortalecer la formación, desarrollarlo en otras regiones con el fin de expandir la propuesta e ir construyendo y fortaleciendo la estrategia mediante el trabajo en equipo, a través de comunidades de docentes virtuales y presenciales.

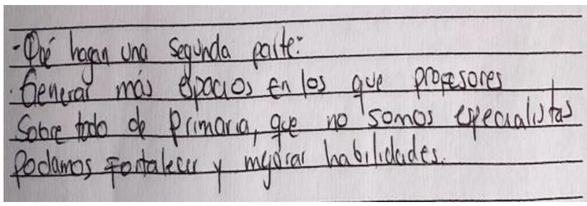
El otro aspecto que manifiesta la mitad de los docentes (el grupo de docentes que trabajó el día martes), es que las actividades fueron muy extensas, y en algunas actividades no alcanzaron a desarrollar los últimos desafíos. Igualmente, los docentes agradecen el espacio de formación, destacando como significativos los aprendizajes adquiridos. En las siguientes imágenes se evidencian los aportes de los docentes participantes. En la siguiente imagen, se comparte la evidencia al respecto.

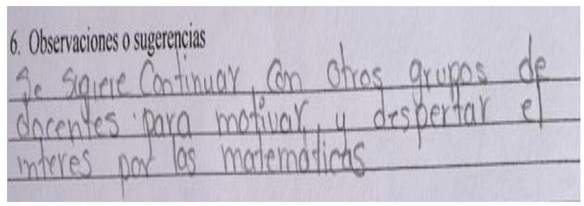

6. Observaciones o sugerencias

Agradezco esta oportunidad de haber participado en el Diplomado dirigido por el profe Alfonso. El material que se aplico en cada desafio fue el apropiado y lo cual genero la motivación del estudiante.
Conocer el software geogebra fue interesante ya que aborda muchas cosas para ejecutar.


6. Observaciones o sugerencias

El tiempo para abordar cada temática es muy corto, pero se recordaron y aprendieron muchas estrategias que sirven para ser trabajadas con los estudiantes y motivan más el gusto por las matemáticas.


-Qué hagan una segunda parte.
-Generar más espacios en los que profesores sobre todo de primaria, que no somos especialistas podamos fortalecer y mejorar habilidades.


6. Observaciones o sugerencias

Se sugiere continuar con otros grupos de docentes para motivar y despertar el interes por las matemáticas

4.4 Modelo pedagógico de formación docente

Siguiendo el desarrollo de la propuesta a través de la metodología investigación basada en diseño y los aprendizajes adquiridos por los docentes, a medida que se daba el desarrollo de la propuesta, se ha construido el modelo pedagógico para la formación del docente en ejercicio del nivel de educación básica primaria que orienta el área de matemáticas. A continuación, se presentan las características.

- Según el estado de arte, los manipulativos concretos a través de la historia, han estado presente en las estrategias para el desarrollo del pensamiento matemático, en todos los niveles de formación de la persona (básica primaria, básica secundaria, media, educación superior, formación de futuros docentes y docentes en ejercicio). Igualmente, tienen relevancia los manipulativos virtuales (aquellos referentes a la tecnología). Al respecto, Swan, P., & Marshall, L. (2010), recomienda su uso posterior a la comprensión con manipulativos concretos, en tanto parecen facilitar la creación de puentes hacia lo abstracto.
- Por lo anterior, las actividades dentro del modelo de formación se componen de desafíos, estos a su vez se dividen en sub-actividades y retos (problemas retadores); los cuales pueden ser abordados

con manipulativos concretos en un primer momento, herramientas convencionales y manipulativos virtuales en momentos posteriores; estructura que se presenta en la siguiente imagen.

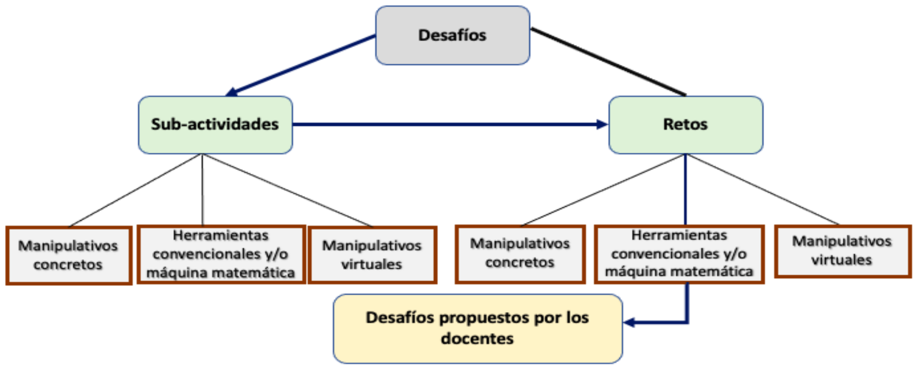


Figura 1: Estructura general de las actividades
Elaboración propia del autor.

- De acuerdo a las características del modelo, los medios y la forma en que los docentes han logrado los aprendizajes, se considera un enfoque constructivista. Según Piaget (1966), citado por Bartolini & Maschietto (2008), los niños necesitan manipulativos concretos para desarrollar conceptos matemáticos abstractos. Sin embargo, en el laboratorio de matemáticas de Módena, estos autores extienden la concepción de Piaget, en cuanto se afirma que los manipulativos concretos y virtuales deben utilizarse en la construcción de significado robusto de conceptos, no sólo con los niños sino también con los alumnos de mayor edad, hasta el nivel terciario.
- La puesta en práctica del modelo se realiza a través de la metodología que propone la investigación basada en diseño. Al respecto, se establecen cuatro ciclos, los cuales atienden a los componentes del área de matemáticas: numérico, variacional, aleatorio y espacial. Cada uno de estos ciclos está compuesto por varias actividades, las cuales se han denominado iteraciones en cuanto retoman el ciclo para transitar por las diferentes fases, luego de su respectiva reflexión y análisis, atendiendo nuevos aprendizajes, pero conservando la estructura planteada en la figura anterior. Se presenta un resumen en la siguiente tabla.

Tabla 13: Modelo pedagógico de formación docente

Enfoque	**Constructivista**				
Diagnóstico					
Fases	I	**Planeación y diseño de experimento de enseñanza**			
	II	**Implementación del experimento de enseñanza**			
		Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
		Exploración de la actividad	Planteamiento y ejecución de estrategias	Consolidación de estrategias y metacognición	Planteamiento de experimentos de enseñanza y relación con otros contextos.
	III	**Revisión y análisis**			
		Se realiza reflexión y análisis en referencia con los logros alcanzados y los objetivos de la investigación, analizando los recursos y medios que lo sustentan como insumo para diseñar un nuevo experimento de enseñanza y reiniciar el ciclo en la fase 1 con una nueva iteración.			
Validación	**Enfoque basado en argumentos**				
	Bases de evidencia	**Interpretación de la experiencia**	**Uso de la experiencia**	**Consecuencias sociales**	

4.5 Validación del modelo[21]

Para la validación del modelo pedagógico de formación docente, se ha considerado pertinente una adaptación de la matriz progresiva que propone Messick, S. (1989), como una de las herramientas apropiadas en este proceso.

Tabla 14: Validación del modelo

Bases de evidencia	Interpretación de la experiencia	Uso de la experiencia
Ciclo 1. Iteraciones o actividades 1, 2, 5 y 9 • Construir las rectas y puntos notables de un triángulo, haciendo uso de manipulativos concretos (dobleces de papel), la experimentación, regla y compás, y software dinámico (GeoGebra). • Construir la definición de semejanza, con el uso de manipulativos concretos, la experimentación, el pantógrafo y software dinámico (GeoGebra). • Modelar algunas imágenes de la naturaleza, con el fin de	Los resultados obtenidos en este ciclo han permitido consolidar las siguientes estrategias: • El doblez de papel en la construcción de los puntos y rectas notables del triángulo. • Montaje de proyección de figuras, una estrategia que les ha permitido a los docentes la construcción de figuras semejantes, mediante la homotecia. • El cubo soma una estrategia que les ha permitido a los docentes representar objetos en tres dimensiones a partir de un plano, e igualmente obtener el plano de un objeto tridimensional. • La exploración del medio, como estrategia para analizar las características, específicamente	Según Liston y Zeichner (1991), es necesario desarrollar capacidades curriculares y pericia profesional para hacer un uso activo y creativo tanto del conocimiento disciplinar como del propio currículo; en esta dirección los manipulativos han generado en los docentes nuevas formas de planificación de las prácticas de aula, gestión de recursos y la implementación de actividades lúdicas, tales como el cubo soma, fomentando la construcción en equipo, una estrategia para fortalecer el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido. Los fractales en la educación básica primaria es una novedad en cuanto no

[21] Messick, S. (1989). Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement*. (pp. 13-103). Washington, D.C.: American Council on Education.

analizar su relación con las matemáticas, a través de la exploración del medio, la experimentación y el software dinámico GeoGebra.	simetría de las imágenes de la naturaleza, desde la construcción de las mismas en papel y lápiz y en la aplicación GeoGebra.	aparecen en los referentes de calidad según el Ministerio de Educación, para este nivel de formación. Sin embargo y como han manifestado los docentes: "son muy llamativos e impactan visualmente", en mención al fractal de Koch.
Ciclo 2: Iteraciones 3 y 6. • Construir significado de conceptos básicos asociados a probabilidad, a través de experimentos relacionados con el azar, la recolección y análisis de datos en situaciones cotidianas. • Fortalecer el pensamiento estadístico de los docentes y de sus estudiantes, a través del análisis e interpretación de gráficas, correspondientes a situaciones cotidianas en diferentes campos.	Los docentes antes del desarrollo de la actividad contaban con conocimientos mínimos de probabilidad, luego a través del ejercicio práctico propuesto, han construido conceptos básicos tales como: espacio muestral, casos favorables, y los referentes a la línea de probabilidad (imposible, poco posible, medianamente posible, muy posible y seguro). Estos han sido consolidados a través de algunas estrategias para determinar el espacio muestral tales como la tabla de doble entrada, el diagrama de árbol y también la definición formal de probabilidad de un evento, la cual han corroborado a través de la experimentación, y el planteamiento y desarrollo de problemas que relacionan situaciones del entorno. Lo anterior en concordancia con el DNR, modelo que considera que la resolución de problemas es el medio para aprender. Afirma Harel (2008) que cuando se encuentra una situación problemática, necesariamente se experimentan fases de desequilibrio, un estado que se produce cuando se encuentra un obstáculo. Su efecto cognitivo es que "obliga al sujeto a ir más allá de su estado actual y a emprender nuevas direcciones" (Piaget, 1985, p. 10) citado por Harel (2008). En términos de Piaget, es un estado en el que uno modifica su punto de vista (acomodación) y es capaz, como resultado, de integrar nuevas ideas hacia la solución del problema (asimilación).	La experiencia adquirida por los docentes en otras actividades les ha facilitado la recolección y organización de los datos, que hacen referencia a problemas del entorno como una estrategia para contextualizar conceptos básicos de estadística y probabilidad. Una vez más los docentes interactúan a través de una actividad práctica, en esta ocasión motivada por un juego tradicional "la rayuela o golosa", la cual los docentes destacan y valoran su potencial para el desarrollo del pensamiento aleatorio, tanto en ellos como en sus estudiantes. Al respecto, desarrollaron la experiencia en sus contextos laborales e igualmente propusieron otras en las cuales relacionan situaciones del entorno. Los resultados en esta iteración indican la necesidad de revisión y ajuste de la malla curricular, correspondiente a la educación básica primaria, de tal manera que se aborde de manera sistemática el componente aleatorio.
Ciclo 3: Iteraciones 4, 7 y 8. • Construir a través de las actividades propuestas en cada desafío, un acercamiento al álgebra, específicamente conocimientos vinculados a	Prevalece en los docentes como estrategia en la resolución de problemas el conteo, en representación concreta y pictórica; sin embargo, a medida que avanzan en el desarrollo de la experiencia, encuentran la dificultad para representar de forma concreta y también pictórica, es así como	Un modelo pretende analizar y describir cómo los profesores comprenden la materia y la transforman en algo enseñable, en concordancia con Shulman (1987), en su modelo "Razonamiento y Acción Pedagógica". En este caso se procede iniciando con el trabajo con

la generalización, como una forma de razonar en diversas situaciones matemáticas. • Construir a través de la experimentación, elementos, características y propiedades del pensamiento variacional; con el uso de material concreto, actividades lúdicas y software GeoGebra. • Contribuir al desarrollo del razonamiento proporcional en los docentes y sus estudiantes, haciendo uso de manipulativos concretos y virtuales.	dan relevancia a la representación simbólica. De esta manera surge lo que Harel (2008) ha denominado necesidad intelectual. Luego los docentes optan por la construcción de tablas y listas, que les permite visualizar el comportamiento de la situación planteada e identificar elementos y características dentro del pensamiento algebraico, proceso que les ha facilitado la construcción de términos generales, a través de los cuales han modelado el comportamiento de una sucesión y la resolución de problemas en este contexto. Las situaciones planteadas desde la historia de las matemáticas han causado curiosidad, principalmente la forma en que razonaban los egipcios, así como extraño inicialmente el método de posición falsa. Estos aspectos motivaron a que los docentes se interesaran en la búsqueda de estrategias para desarrollar el pensamiento matemático y reflexionar sobre las formas de razonamiento de civilizaciones referentes a través de la historia.	manipulativos concretos, la representación pictórica, la visualización a través de la representación en tablas y gráficas, algunas de estas construidas en GeoGebra y finalmente la representación simbólica, la cual les permite identificar patrones e igualmente el término general como herramienta en la resolución de problemas. En este proceso de generalización, ha resultado fundamental el principio heurístico de reducción de George Polya, en cuanto a través de analogías, se relacionan problemas con menor dificultad y en los cuales tienen algún tipo de experiencia; de esta manera los docentes plantean proporciones para modelar y resolver problemas propuestos. La incorporación de lenguaje y términos asociados al pensamiento variacional por parte de los docentes es evidente, así como el interés de llevar al aula la experiencia, analizando el contexto y proponiendo ajustes que ellos creen pertinentes, para atender las oportunidades de mejora proyectadas con sus respectivos estudiantes.
Ciclo 4: Iteraciones 10 y 11. • Fortalecer las habilidades de los docentes en el campo de la aritmética, mediante el uso de los números naturales, sus operaciones y propiedades en diferentes contextos. • Fortalecer en los docentes las habilidades en la resolución de problemas a través de un ambiente lúdico en donde ellos asumen diferentes roles, planean, ejecutan y evalúan estrategias de solución. • Fomentar en los docentes la imaginación, la creatividad, la agilidad mental, la	Prevalece como estrategia de abordaje en la resolución de problemas, la experimentación a través de casos particulares, la organización de los resultados de acuerdo con algún criterio, principalmente de orden, con el fin de identificar patrones de regularidad y construir términos generales, considerando a la generalización como una estrategia en la resolución de problemas. Los juegos de estrategia propuestos han impactado positivamente a los docentes participantes, quienes inicialmente los desconocían. Al respecto, a través de la experimentación descubren que existe una estrategia para ganar, lo cual fue sorprendente y satisfactorio en cuanto la misma obedece a competencias en matemáticas, adquiridas en actividades	Se evidencia en el transcurso de este ciclo los principios heurísticos de George Polya, principalmente trabajo hacia atrás o método analítico y reducción, el cual se presenta al tomar situaciones análogas con pequeñas dimensiones, que les ha facilitado la representación con material concreto y pictórico, y de esta manera analizarlas y establecer conclusiones, para luego trasladar el proceso a la situación inicialmente planteada, estrategia que les ha resultado efectiva en la resolución de problemas, y la cual consideran relevante en su prácticas de aula con sus respectivos estudiantes. Para el grupo de docentes, el tema de los cuadrados mágicos fue una novedad, no conocían los elementos matemáticos que a través de estos se fortalece, las

<table>
<tr>
<td>memoria, el pensamiento creativo, el pensamiento lógico, la expresión de ideas y la toma de decisiones en diferentes contextos.</td>
<td>anteriores como es el caso de secuencias que construyen concentrando la atención en las últimas jugadas y mediante trabajo hacia atrás o método analítico, estrategia considerada dentro del programa heurístico de George Polya. Al respecto, el uso de material manipulativo ha resultado fundamental en la experimentación y trabajo práctico en equipo.

Por lo anterior y Según Mason, Burton y Stacey (2010), la motivación y el llamar la atención a través de la sorpresa, como sucede en este caso, promueve el pensamiento matemático, característica que ha generado confianza y emociones favorables para abordar los desafíos, sin dar lugar a que los docentes o sus estudiantes se contagien de desconfianza y determinen prematuramente la imposibilidad de abordar un problema.</td>
<td>habilidades que se requieren para solucionarlos y para plantear otros. Por tal motivo, los consideran como una estrategia que favorece la consolidación de operaciones aritméticas y competencias de razonamiento, comunicación y resolución de problemas.

Pensamiento estratégico es un componente del área de matemáticas cuya exploración es mínima en la educación básica primaria, principalmente por no estar contemplado en los referentes de calidad del MEN de manera explícita. Sin embargo, los docentes consideran como relevante los desafíos propuestos, como estrategia de formación docente, e igualmente es una temática que consideran significativa para el trabajo con sus respectivos estudiantes.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Consecuencias Sociales:
De acuerdo a la encuesta de percepción:

Los docentes en su totalidad consideran que la metodología empleada en el diplomado ha despertado el interés para abordar las actividades propuestas de formación, cambiando significativamente las formas de aprender y enseñar las matemáticas, mediados por el laboratorio y donde resaltan el uso de material concreto para construir, fortalecer conceptos y resolver problemas.
El 100% de los docentes participantes manifiesta que los desafíos planteados en cada una de las actividades propician la interacción entre compañeros y el trabajo en equipo, generando en ellos confianza para abordar temáticas específicas con mayor profundidad en la educación básica primaria; consideran que las temáticas complementan el plan de estudios, a través del laboratorio de matemáticas como herramienta que favorece la construcción de conceptos y la comprensión y resolución de problemas en contextos matemáticos y otras áreas.
Igualmente, el 100% de los docentes considera que el diplomado ha contribuido de manera positiva en la formación profesional de cada uno de ellos, a través de las actividades desarrolladas en la experiencia, su discusión y también mediante la retroalimentación brindada por el investigador.
El 100% de los docentes cree que es pertinente establecer un laboratorio para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria; y como estrategia para tal fin, mencionan:

Se debe articular al plan de estudio del área, o reestructurarlo incluso.
Es pertinente asignar un aula exclusiva llamada “laboratorio de matemáticas”, espacio en el cual a los estudiantes se les facilite el aprendizaje a través de la construcción en equipo, la utilización de los manipulativos y herramientas de trabajo.
Igualmente, consideran que es posible dentro del aula establecer un espacio o rincón pedagógico para tal fin.
Sugieren crear comunidades presenciales y virtuales entre docentes, para construir aprendizajes y compartir la experiencia en diferentes contextos.
En cuanto a los materiales que se deberían incluir los docentes mencionan: Material concreto (fichas, balotas, dados, torres, cubo soma, entre otros), equipos de cómputo y software especializado, mesas y herramientas de dibujo.

</td>
</tr>
</table>

- Posterior a la participación en el diplomado, 6 de los 12 docentes participantes reportaron experiencias desarrolladas en ambiente de laboratorio en sus respectivos contextos. Al respecto realizan comentarios tales como: *"El diplomado me aportó muchas herramientas para mejorar mis prácticas pedagógicas ya que al hacer uso de materiales manipulativos en las clases se evidencia un mayor interés por parte de los estudiantes y por lo tanto una mejor apropiación de las temáticas. He logrado incorporar varias de las actividades realizadas en clase como la golosa, el Jenga, el software de GeoGebra, entre otros, y me ha impulsado a investigar más y hacer uso de otros materiales".*
- A continuación, y textualmente la percepción de algunos docentes frente a los aportes que el diplomado les ha dejado.
  - *"Me ha dejado muchos aportes significativos para mi formación como docente, y de transmitir o enseñar las matemáticas con material concreto y de forma lúdica las clases, que favorece el aprendizaje de los niños. Aprendí conceptos nuevos como: mediatriz, bisectriz, incentro, circuncentro, homotecia, entre otros"*
  - *"Descubrí que tengo fortalezas en algunos componentes del área de matemática y otros en los que tengo grandes abismos"*
  - *"El diplomado me permitió ver las matemáticas desde otro punto de vista, ver que se puede enseñar matemáticas de forma divertida (y también aprender), me permitió fortalecer y construir conceptos que hasta el momento me parecían complicados, me dio muchas herramientas para enseñar mejor a mis estudiantes y motivarlos, y me generó muchas expectativas con respecto a qué otras cosas se pueden hacer".*
  - *"El material propuesto para el trabajo fue muy apropiado, genera motivación en el estudiante; conocer el software GeoGebra fue interesante en cuanto es posible construir gráficas para su respectivo análisis, y también trabajar la geometría desde sus conceptos básicos".*
  - *"El trabajo en equipo en el desarrollo de las actividades con el uso de material del entorno, la tecnología, y la exploración del medio, me ha generado más confianza a la hora de abordar temáticas en el área de matemáticas".*

Fuente: Adaptado de Messick, S. (1989).

Conclusiones del Capítulo 4

Los docentes han abordado cada una de las actividades de acuerdo a la guía de orientación, haciendo uso de los materiales disponibles. En la primera actividad, el 75% de ellos asume que, con el material manipulativo y algunos juegos propuestos, se tratan de actividades aisladas cuya función no va más allá de gestionar un ambiente propicio para el aprendizaje. Sin embargo, mediante la socialización y punto de vista de los demás compañeros, identifican la relevancia de los diferentes recursos para la construcción y desarrollo del pensamiento matemático.

Como se mencionaba en el capítulo anterior, se conformaron dos grupos de trabajo, martes en la tarde y sábado en la mañana; al respecto, fue evidente un destacado rendimiento del grupo con el cual se trabajó los fines de semana, sus productos, la actitud, interés y convicción hacia la formación continua, son aspectos que los han caracterizado. El grupo del martes con regular actitud, principalmente manifestaron agotamiento por acumulación de trabajo en sus respectivas instituciones; en consecuencia, de las 11 actividades propuestas desarrollaron en su totalidad 6, las 5 restantes les faltó entre un 20% y 30%. Igualmente, se ha evidenciado una diferencia notoria en la calidad de los productos, la argumentación y exposición de los mismos.

Durante el desarrollo del diplomado, se estableció un encuentro sincrónico a través de Google Meet, el cual tuvo lugar el día jueves de cada semana, con una intensidad entre 60 y 90 minutos. En este espacio se revisó la actividad próxima a desarrollar, con el fin de gestionar los materiales necesarios. Igualmente, se brindó retroalimentación por parte del investigador a la actividad anterior, frente a los desafíos que en el espacio presencial por cuestiones de tiempo no fue posible.

CONCLUSIONES

Al contrastar lo evidenciado en la prueba de entrada con cada una de las actividades desarrolladas y su respectivo análisis, es establece en coherencia con los objetivos propuestos las conclusiones que se describen a continuación.

Conocimiento disciplinar y conocimiento pedagógico del contenido

En la investigación, se pretendía complementar la formación en matemáticas del docente que atiende el nivel de educación básica primaria. Al respecto, y como se expone en los resultados, las construcciones logradas, como fueron los puntos y rectas notables del triángulo mediante dobleces de papel, para la mayoría de ellos corresponden a terminología que la escuchan por primera vez, tales como mediatriz, medianas, alturas y bisectrices, con sus respetivos puntos notables, circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, respectivamente. Son para los docentes, nuevos aprendizajes como manifiestan en encuesta de percepción, y como es evidente en sus productos.

En algunos casos causados inicialmente por la sorpresa, por ejemplo, el hecho de hallar el centro de gravedad de un triángulo de forma experimental, al equilibrar el mismo con facilidad y mediante el trabajo en equipo en el espacio adaptado como laboratorio, este concepto se extiende a otras figuras geométricas que trabajan de forma autónoma los docentes. Estos aprendizajes fueron consolidados en momentos siguientes mediante construcción con herramientas tradicionales como son regla, escuadra, compás, y finalmente a través del software dinámico GeoGebra; transitando de esta manera por los tres momentos que estructuran cada actividad o iteración.

Seguidamente, se encuentran los docentes con la actividad de “semejanza”; esta nuevamente los sorprende positivamente, en cuanto a través de la proyección de figuras usando la linterna, construyen figuras semejantes a través de la homotecia, un término para ellos igualmente desconocido, pero que les ha llamado la atención en cuanto duplican, triplican y reducen; adquiriendo desde un lenguaje técnico en adelante, que incluye términos tales como centro y razón de homotecia.

Igualmente, se destaca en los aprendizajes mediados por los manipulativos concretos, las actividades relacionadas con el pensamiento variacional, en cuanto a través de este material, construyeron sucesiones, identificaron patrones de regularidad y hallaron algunos términos. Luego, se aumenta progresivamente la dificultad, con el fin de generar la necesidad de que los docentes pensaran en estrategias diferentes a la representación concreta o pictórica. Es de esta manera que hacen uso de la representación simbólica, organizando datos en tablas, proceso que les facilita a través de la visualización, la identificación de regularidades, logrando la construcción de la expresión algebraica que modela la situación planteada, la cual resultó para los docentes motivo de gran sorpresa, pues verifican con esta expresión los casos particulares que experimentaron inicialmente con el material concreto, además de obtener con facilidad cualquier término de la sucesión. De esta manera, y a través del proceso de generalización, consolidan una estrategia para solucionar y argumentar los problemas propuestos.

Algunos de los aprendizajes objetivo los docentes los han construido a través de actividades lúdicas, mediados por juegos tradicionales, tales como la rayuela o golosa, el cubo soma, dados de parqués, juegos de estrategia, entre otros. En estos, los docentes participan motivados por las características de la propuesta, e interactúan en cada uno de los desafíos propuestos. Sin embargo, el 75% de ellos manifestó que el ganar o perder en los juegos de estrategia o, por ejemplo, en la golosa, (la cual recorrían de acuerdo a la suma obtenida al lanzar dos dados numerados del 1 al 3), era cuestión de “suerte”. Después de intentarlo varias veces les surge la inquietud de que algo relacionado con la estadística estaba pasando, y se disponen los docentes a registrar los resultados obtenidos en cada ronda, estrategia adquirida en actividades anteriores. Es así como identifican las diferentes probabilidades que se obtienen al lanzar los dados; de esta manera contextualizan conceptos básicos asociados a la probabilidad.

Han manifestado los docentes frente a los juegos tradicionales y de mesa que con frecuencia gestionan espacios para practicarlos en la institución, sin embargo, sin ninguna intención pedagógica, *"en el aula algunas veces para motivar, ambientar la clase o descansar de la rutina*". Por lo tanto, han encontrado y a la vez experimentado en el diplomado, la forma de darle sentido pedagógico a estos juegos.

Se destaca que posterior a la participación en el diplomado, 4 de los 12 docentes participantes compartieron evidencias de sesiones de clase en ambiente de laboratorio, apoyadas por manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.

Frente a los juegos de estrategia particularmente el NIM con algunas variaciones (dos jugadores se turnan para retirar fichas de uno o dos motones, quien realice la última recogida gana o pierde, según acuerdo), el 100% de los docentes manifestó no conocerlos; sin embargo, en la práctica se mostraron muy motivados y dedicaron tiempo en busca de la estrategia ganadora. En el proceso ha surgido el análisis desde la última jugada a la primera; es decir trabajo hacia atrás o método analítico, estrategia considerada por George Polya en su programa heurístico de resolución de problemas. Para finalizar, los docentes manifiestan, a través de la encuesta de percepción, que este tipo de juegos es pertinente para trabajarlos en el aula y desarrollar pensamiento matemático, para contextualizar sucesiones, consolidar sus elementos y solucionar problemas.

Algunas novedades que aporta el desarrollo de la propuesta respecto a los aprendizajes logrados por los docentes, la forma y los medios utilizados son:

- Las temáticas abordadas se encuentran según los referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional, para trabajarlas en los niveles de educación básica primaria (grado primero a grado quinto) y educación básica secundaria (grado sexto a grado noveno). Luego es un grado de complejidad considerable, en tanto han participado docentes no licenciados en el área de matemáticas. Esto con el fin de que el docente adquiera y consolide estructuras completas; por ejemplo, en el estudio de las sucesiones, tenga la habilidad para iniciar una construcción desde lo concreto, hasta lo simbólico y efectuar el proceso de generalización, esto le garantizará al docente de primaria orientar de manera efectiva a sus estudiantes en los procesos con lo concreto y lo pictórico.

- Lenguaje matemático y conceptos básicos que la mayoría de docentes desconocían, tales como: el concepto de altura de un triángulo, en cuanto consideraban la existencia de sólo una para cada triángulo; las demás rectas y puntos notables, el concepto de homotecia el cual fue consolidado mediante la proyección de figuras (montaje de figuras y su respectiva sombra), juegos de estrategia, fractales, los cuales se construyeron en papel y lápiz; que resultan novedosos para el ciclo de educación básica primaria y relevantes en la formación de los docentes, en cuanto han encontrado la forma de relacionar los contextos mediante la resolución de problemas; es decir, de darle sentido a las matemáticas y específicamente los conceptos y operaciones básicas.
- Los docentes han fortalecido su conocimiento base, que según Harel (1993), lo define en términos de tres componentes: conocimiento de las matemáticas, conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y conocimiento de la pedagogía.
- Los docentes en su totalidad consideran que la metodología empleada en el diplomado ha despertado el interés para abordar las actividades propuestas de formación, cambiando significativamente las formas de aprender y enseñar las matemáticas, mediados por el laboratorio y donde resaltan el uso de material concreto para construir, fortalecer conceptos y resolver problemas.
- Los docentes manifiestan que los desafíos planteados en cada una de las actividades propician la interacción entre compañeros y el trabajo en equipo, generando en ellos confianza para abordar temáticas específicas con mayor profundidad en la educación básica primaria; consideran que las temáticas complementan el plan de estudios, a través del laboratorio de matemáticas como herramienta que favorece la construcción de conceptos, comprensión y resolución de problemas en contextos matemáticos y otras áreas.

El modelo de formación docente, usando como herramienta el laboratorio de matemáticas y de acuerdo a los resultados obtenidos, es una experiencia que evidencia que las matemáticas de la educación básica primaria y secundaria están al alcance de todos los docentes que atienden el nivel de educación básica primaria, en el sentido de su comprensión y transformación para la enseñanza de la misma. Esto es posible cuando se cuenta con una formación apoyada en recursos que a través de la historia de la humanidad han resultado fundamentales, como es el caso del uso efectivo de los manipulativos concretos y aquellos que se tienen con el avance de la tecnología (los manipulativos virtuales), igualmente se van consolidando como recursos relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, fue posible evidenciar en el grupo la falta de alfabetización digital que prevalece en los docentes de la educación básica primaria, en tanto como se ha presentado en cada una de las actividades la ausencia de competencias computacionales en 4 de los docentes participantes, lo cual les ha limitado principalmente el manejo de software especializado (Excel y GeoGebra).

Una mirada diferente a las matemáticas

Más allá de fortalecer el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en los docentes participantes simultáneamente a través del desarrollo de las actividades, como se describe en la sesión anterior para destacar, los docentes han cambiado su actitud frente a las matemáticas, en cuanto ellos consideraban inicialmente que los procesos con cierto grado de complejidad, correspondían exclusivamente al nivel de básica secundaria y con su respectivo docente licenciado en matemáticas.

El empoderamiento y apropiación de la metodología por parte de los docentes les ha generado mayor confianza para abordar las matemáticas, en tanto a medida que transcurre el desarrollo de la propuesta, adquieren hábitos y familiarización con los manipulativos concretos y virtuales, de tal forma que son considerados como una estrategia de primera mano en la construcción de significado robusto de conceptos y en la resolución de problemas. Las propuestas que presentan, y sus respectivos argumentos, evidencian la evolución que han adquirido en el transcurso del diplomado.

El modelo de formación docente en otros contextos

El modelo de formación docente, es generalizable en otros contextos en cuanto su construcción se consolida teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- En coherencia con la metodología, los principios de diseño se obtuvieron a partir de la revisión bibliográfica que contenía cuatro componentes: el impacto del laboratorio de matemáticas en la formación de futuros docentes y docentes en ejercicio que atienden el nivel de educación básica primaria, el impacto del laboratorio de matemáticas apoyado en herramientas tecnológicas, uso de manipulativos concretos y virtuales e integración de matemáticas y ciencias, a través de actividades experimentales en la formación de docentes y estudiantes del nivel de educación básica primaria y secundaria.
- Las actividades se han diseñado, teniendo en cuenta las oportunidades de mejora y necesidades de los docentes participantes, identificadas inicialmente a través de la prueba de entrada, y mediante la reflexión y análisis de los resultados obtenidos en cada actividad realizada a medida que transcurre del diplomado.
- Los recursos o materiales de apoyo incluidos en cada actividad son asequibles a los docentes participantes, y adaptables a diferentes contextos.
- Cuidadosamente se diseñaron las actividades incorporando preguntas orientadoras y estímulos para incentivar la creatividad e incluso en algunos casos producir sorpresa, tensión, asombro y conflicto cognitivo. Brousseau (1997), citado por Swan (2007); logrando de esta manera y mediante trabajo en equipo aprendizajes significativos.

- Las características de las actividades y la variedad de recursos incorporados en coherencia con los principios de diseño, han favorecido en los docentes, la formación disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, a través de la práctica pedagógica activa.

RECOMENDACIONES

Es necesaria la adecuación de un espacio físico para el laboratorio en una determinada zona del departamento, con el fin de garantizar la continuidad en la formación docente ante la petición de los docentes participantes en el diplomado, e igualmente extender la formación a otros docentes, convocando a licenciados y no licenciados en el área de matemáticas, como una estrategia alterna de formación docente en ejercicio entre pares.

Igualmente, para desarrollar la estrategia de formación en cada uno de las instituciones educativas con los estudiantes de la educación básica primaria, es necesario que se asigne para el laboratorio de matemáticas un espacio físico diferente del aula, en cuanto es necesario un diseño el cual se describe a continuación.

La composición del laboratorio de matemáticas debe tener a disposición: mesas para ubicar entre 4 y 6 estudiantes o docentes, teniendo en cuenta que las mesas hacen posible el trabajo con los diferentes tipos de materiales y la construcción mediante el trabajo en equipo, y sillas de acuerdo al número de participantes; manipulativos concretos tales como fichas de diferentes tipos y tamaños, dados de parqués y variantes, entre otros; computador por mesa, software dinámico, conexión a internet. Otros materiales: cubo soma, torres de Jenga, torres de Hanoi, material para construir figuras geométricas planas y tridimensionales; herramientas tradicionales de dibujo como son regla, escuadra, compas, transportador, máquinas matemáticas como el pantógrafo, entre otras, que sea posible gestionar para complementar la experiencia con este tipo de material.

Es necesario construir de forma sistemática las guías de orientación y planeación correspondiente a cada actividad que se desarrolle en el laboratorio; estas deben quedar disponibles en este espacio.

Por parte de las diferentes entidades, instituciones y directivos docentes, se hace necesario la gestión de formación constante en programas TIC, en cuanto se requiere que el 100% de los docentes de los diferentes niveles de formación adquieran habilidades digitales siglo XXI.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

Arce, J. (2004). Laboratorio de matemáticas. *Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento Interno de Trabajo.*

Arzarello, F., & M. Bartolini Bussi (1998). Italian trends in research in mathematical education: A national case study from an international perspective. *In Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 243-262). Springer, Dordrecht.

Augusto, O, & Yineth, C.(2011). *La Elaboración y uso de Materiales Manipulativos en la clase de Matemáticas desde la perspectiva del Laboratorio de Matemáticas*. Taller. Comité interamericano de educación matemática CIAM.

Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Vol. 12). Springer Science & Business Media.

Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2006). Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni. *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, 1-32.

Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2008). Machines as tools in teacher education. *In The Handbook of Mathematics Teacher Education*: Volume 2 (pp. 183-208). Brill Sens

Boston, M., Bostic, J., Lesseig, K., & Sherman, M. (2015). A comparison of mathematics classroom observation protocols. *Mathematics Teacher Educator*, 3(2), 154-175

Cazzola, M. (2018). Problem-Based Learning and Teacher Training in Mathematics: How to Design a Math Laboratory. *In International Technology, Education and Development Conference* (pp. 9038-9043). IATED.

Dlodlo, N., & Beyers, R. N. (2009). Experiences of South African high school girls in a fab lab environment.

Gudmundsdóttir, S., & Shulman, L. S. (2005). *Conocimiento didáctico del contenido.* Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2)

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. ZDM, 40(5), 893-907

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM, 40(3), 487-500.

Hernández, E. D. Á. (2017). El laboratorio de matemáticas como estrategia de aprendizaje. *DIVULGARE Boletín Científico de la Escuela Superior de Actopan*, 4(7).

Herrera, L. S. G., & Sepúlveda, M. V. (2007). Laboratorio de matemática recreativa para el desarrollo del pensamiento lógico matemático. *Entre Ciencia e Ingeniería*, (2), 127-144.

Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective than the Other? *Current Issues in Middle Level Education*, 16(2), 1-6

Jackson, Philip. (1991). *La vida en las aulas*. Segunda Edición. Madrid: Ediciones Morata.

Kaiser, G., & Presmeg, N. (Eds.). (2019). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education.* Springer.

Kim, Min Kyeong, and Mi Kyung Cho. Design and Implementation of Integrated Instruction of Mathematics and Science in Korea .*Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 11.1 (2015)

Kim, M. K., Roh, I. S., & Cho, M. K. (2016). Creativity of gifted students in an integrated math-science instruction. *Thinking Skills and Creativity*, *19*, 38-48.

López, M. B. (2015). *Las imágenes en la enseñanza-aprendizaje de la geometría*. UNIHUMANITAS – Académica y de Investigación, (3), 8 – 17.

Maschietto, M. (2005). The laboratory of mathematical machines of Modena. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 57, 34-37

Mayorova, V., Grishko, D., & Leonov, V. (2018). New educational tools to encourage .high-school students' activity in stem. *Advances in Space Research*, 61(1), 457-465

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Messick, S. (1989). Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement*. (pp. 13-103). Washington, D.C.: American Council on Education.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Con nuevo índice de calidad Colombia le apuesta a la excelencia educativa*. Recuperado de http://www.mineducacion. gov.co/cvn/1665/w3-article-349894.html

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Colombia, la mejor educada en el 2025: líneas estratégicas de la política educativa del Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-355154_foto_ portada.pdf.

Molina, M., Castro, E., J.L. Molina, & E. Castro (2011). *Un acercamiento a la investigación como diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29(1), 75-88.

Peled, S., & S. Schocken (2014). *Mobile Learning and Early Age Mathematics. International Association for the Development of the Information Society*. 10th International Conference Mobile Learning.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. New York: Doubleday Anchor Books.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of educational psychology*, 100(3), 716.

Ramírez, M. C. (2013). El laboratorio de matemáticas y la Metodología Estudio de Clase MEC. *Revista ALETHEIA*, 5(2/1), 369-362.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-307.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 217-237.

Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 13-19

Wu, T., & Albion, P. (2019). Investigating Remote Access Laboratories for Increasing Pre-service Teachers' STEM Capabilities. *Educational Technology & Society*, 22 (1), 82–93.

Zúñiga, C. M. (2010). Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

ANEXOS

A continuación, se presentan las actividades diseñadas para el desarrollo de la investigación:

Anexo 1: Prueba de entrada

Actividad 0: Prueba de entrada

Objetivo: Caracterizar el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido, en el área de matemáticas, que presenta el grupo de docentes participantes en el desarrollo de la investigación.

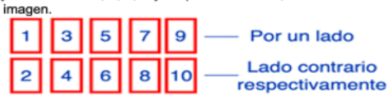
A continuación, encontrará planteadas diferentes situaciones, las cuales debe analizar y resolver atendiendo a las indicaciones en cada una de ellas, y usando los materiales que de forma autónoma considere pertinentes.

1. Teniendo en cuenta las siguientes fichas:
   - Conformar dos grupos de fichas, y construir un número en cada grupo de tal forma que al sumarlos, generen el mayor valor posible. Exponer la estrategia utilizada al respecto.

   - Utilizando cuatro fichas, construir dos números cuya diferencia sea la menor posible.

2. ¿Cuántos números de 4 dígitos mayores que 1000 pueden formarse usando los cuatro dígitos de 2021? Exponer la estrategia utilizada al respecto.

3. La docente de grado segundo, propone la siguiente situación para la clase de matemáticas: Cinco tarjetas tienen impresos por un lado los números impares 1, 3, 5, 7 y 9; y los números 2, 4, 6, 8 y 10 por el otro lado, tal como se muestra en la siguiente imagen.



   - La docente distribuye a los estudiantes en grupos de a cuatro, hace entrega de las cinco fichas a cada uno de los grupos y les propone validar la siguiente afirmación: *"Cuando exactamente dos de los números visibles son pares, la suma de los cinco números visibles es 27."* Exponer argumentando las estrategias que utilizaron para determinar si la afirmación es verdadera o falsa.

Grupo 1. Nosotros probamos este ejemplo: 1, 4, 6, 7, 9. Después probamos otros dos ejemplos. Cada uno tenía dos números pares y la suma era 27 cada vez. Podríamos probar con otros ejemplos con dos números pares y también sumarían 27. Por lo tanto, grupo 1 dice que es verdadera.

Grupo 2. Nosotros probamos con números impares y sumamos 25:
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.
Si cambiamos un número impar por uno par, el total será 1 unidad más. Luego, si tengo dos números pares, el total será 2 unidades mayor. El total será 27. Por lo tanto, grupo 2 dice que es verdadera.

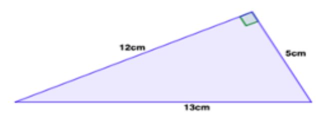
Grupo 3. Nosotros escribimos estos números: 1, 2, 3, 4, 9. Dos de los números visibles son pares pero la suma es 19. Así es que no siempre la suma es 27. Por lo tanto, grupo 3 dice que la afirmación es falsa.

Grupo 4. Nosotros pensamos en estos números visibles: 1, 3, 6, 8, 9. Dos son pares y cuando sumamos todos los números, obtuvimos 27. Por lo tanto, grupo 4 dice que es verdadera.

   - Analizar la argumentación que ha presentado cada uno de los grupos, y determinar la validez de la misma, sus fortalezas y posibles dificultades que están presentando los estudiantes.
   - ¿Identifica algún grupo que, de acuerdo a la solidez de sus argumentos, sobresale frente al resto de participantes? Argumentar.

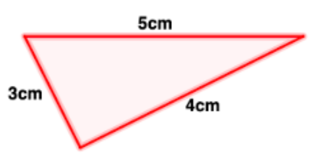
4. Emmanuel se da cuenta que cuando digita $0,2 \times 8$ en su calculadora obtiene un número menor que 8, y cuando digita $8 \div 0,2$ obtiene un número mayor que 8. Esto lo confunde y le pide a su padre una calculadora nueva. ¿Cuál es el error conceptual de Emmanuel? Argumentar y exponer posibles estrategias de atención a la dificultad que está presentando Emmanuel.
   - Dibuje un diagrama que podría usar Emmanuel, que modele el resultado de la operación $0,2 \times 8$, y que le permita entender por qué la respuesta de la calculadora es correcta.

5. El docente dibuja en el tablero el siguiente triángulo indicando sus respectivas medidas:



Luego, propone a sus estudiantes calcular el área. Sin embargo y casi de inmediato, Juan Pablo manifiesta que calcular el área de este triángulo es imposible porque la altura del mismo no está dada.

   - ¿Cree que Juan Pablo tiene la razón? Argumentar
   - Si la respuesta a la anterior pregunta es negativa, dé un ejemplo de una buena práctica de enseñanza que podría, reducir el error conceptual de Juan Pablo.
   - Utilizando la estrategia que ha utilizado para orientar a sus estudiantes frente al ejercicio anterior, ¿es posible hallar el área del siguiente triángulo? Justificar y si la respuesta es afirmativa, exponer el procedimiento que permite hallar la respectiva área.



   - Exponer las características en común de los dos triángulos presentados en este numeral.
   - ¿Son estos triángulos semejantes? Justificar.

6. En el Colegio Divino Salvador, los $\frac{4}{7}$ de los estudiantes de grado tercero son niñas y el resto son niños, ¿cuál es la razón entre niñas y niños, y qué significa? Argumentar.

7. Si se sabe que los grupos de estudiantes del colegio Divino Salvador, están conformados por un número entre 12 y 45 máximo; ¿por cuántos estudiantes en total puede estar conformado el grado tercero, teniendo en cuenta la relación entre niñas y niños que se describe en el punto anterior? Justificar.

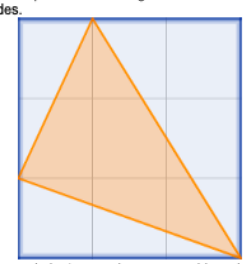
8. Un cuadrado se dobla por la mitad y el rectángulo resultante tiene un perímetro de 30cm. ¿Cuál es el área del cuadrado inicial? Argumentar.
   - Proponga un ejemplo de práctica de aula, donde estudiantes de grado tercero logren hallar el área en mención. Describa la metodología y recursos a utilizar.

9. Don Joaquín quiere poner baldosas cuadradas del mayor tamaño posible sin tener que cortarlas, a uno de sus terrenos que mide 960 cm de largo y 224 cm de ancho. Al respecto, requiere que se apoye con el dato del número de baldosas que debe comprar y la medida de las mismas. Proponga una estrategia pedagógica que permita a los estudiantes de grado quinto apoyar a don Joaquín. Exponer la metodología y recursos que utilizaría para lograr el objetivo.

10. En una mesa se lanzan 3 dados comunes. ¿Cuál de los siguientes términos: seguro, muy probable, poco probable o imposible; describe el suceso en que la suma de los resultados de los tres dados sea 3? Argumentar y proponer una estrategia para que los estudiantes de grado tercero deduzcan el término apropiado.

11. Observa la siguiente sucesión: 18, 15, 12, 9, 6, 3, …
Responder y argumentar cada una de las siguientes preguntas:
   - ¿Existe alguna relación entre los números de la sucesión?
   - ¿Qué cambia y que no cambia en la sucesión?
   - ¿Cómo cambia y cuánto cambia la sucesión?

12. Hallar el área del triángulo que se encuentra inscrito en el siguiente cuadrado de lado 3 centímetros. Exponer las estrategias utilizadas al respecto, identificando fortalezas y dificultades.



   - Exponga los conocimientos previos que considera debe tener el estudiante al enfrentarse a la situación anteriormente planteada.
   - ¿Para qué grado (nivel de básica primaria), es apropiada la situación planteada anteriormente y qué materiales considera que puede apoyar al estudiante a resolverla de manera efectiva? Argumentar.
   - Proponer una estrategia que permita hallar el perímetro del triángulo, y exponer los saberes previos que necesitaría un estudiante de grado quinto y las dificultades que se le pueden presentar.

Teniendo en cuenta su formación profesional y su experiencia como docente, responda las siguientes preguntas.
   - ¿De qué manera cree que es posible fortalecer su práctica docente en el área de matemáticas?
   - ¿Cree que el fortalecimiento del saber disciplinar es una prioridad en los programas de formación docente? Argumentar.
   - ¿Qué herramientas y/o materiales fortalecerían sus estrategias didácticas en el desarrollo de la práctica pedagógica en el área de matemáticas? Argumentar.
   - Exponga las necesidades que, según su experiencia y su punto de vista, son necesarias atender desde los programas de formación docente, para fortalecer las prácticas de aula y lograr en los estudiantes un mejor desempeño en el área de matemáticas.

Anexo 2: Puntos y rectas notables del triángulo

Actividad 01: Puntos y rectas notables del triángulo

Objetivo: Construir las rectas y puntos notables de un triángulo, con el fin de fortalecer las habilidades en el pensamiento espacial a través de la resolución de problemas retadores y haciendo uso de manipulativos concretos, la experimentación, regla, compas y software dinámico (Geogebra).

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Ejecuten diferentes estrategias en la construcción de triángulos, sus rectas y puntos notables, con el uso de diferentes herramientas.
- Resuelvan problemas retadores que involucren rectas y puntos notables del triángulo.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Den respuestas a las preguntas de los desafíos propuestos en la actividad.
- Generen al menos una actividad relacionada con la construcción de las rectas y puntos notables del triángulo, para desarrollar con sus estudiantes utilizando manipulativos concretos, recursos del entorno y/o herramientas tecnológicas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (triángulos, hojas calca y otros materiales), software geogebra, regla, compás, lápiz, esfero, colores, transportador.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 5 desafíos, cada uno con sub-tareas que serán diseñadas para que los docentes trabajen inicialmente apoyados en material concreto algunas construcciones geométricas básicas, posteriormente con regla, escuadra, compas y software geogebra, para consolidar la construcción de las rectas y puntos notables de un triángulo; igualmente, propongan y resuelvan problemas en contextos geométricos y de otras áreas.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes construyan las rectas y puntos notables de un triángulo, con el uso de material concreto tales como recorte de triángulos, hojas calca, escuadra, regla y compas, mediante desafíos (tareas), con enfoque experimental y a través del software dinámico geogebra. Por lo tanto, cada reto está estructurado mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción del pensamiento geométrico, motivan al docente a realizar conjeturas sobre las condiciones necesarias para obtener los puntos notables del triángulo, a establecer además diferencias y similitudes entre las diferentes construcciones, así como las ventajas y desventajas de los recursos utilizados en cada uno de los problemas (retos) planteados.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 15 horas de trabajo.

Se tendrá una puesta en común de las actividades dirigida por el investigador, haciendo énfasis en las herramientas disponibles para cada uno de los retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del pensamiento geométrico en los niños.

Cada actividad se desarrollará en presencia del investigador y se evaluará con la participación activa de todos los docentes; en este espacio se identificarán fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otros retos dirigidos a la resolución de problemas y construcción geométrica a través de manipulativos concretos, los elementos básicos de dibujo tales como regla, escuadra y compás, igualmente el apoyo de software dinámico.

Desafío 1: El doblez en algunas construcciones geométricas básicas.

Objetivo: Generar interés por el uso de material concreto en algunas construcciones geométricas, como una estrategia para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes y fortalecer las prácticas pedagógicas, tanto en el aula como en el laboratorio de matemáticas.

Materiales: Guía de trabajo y papel calca

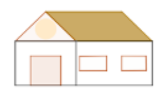
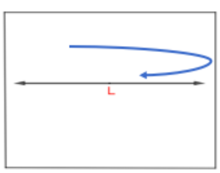
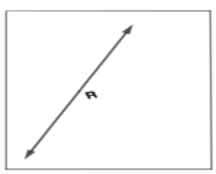


Imagen 1.

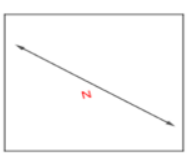
a) Teniendo en cuenta la Imagen 1, seleccionar un par de segmentos de recta paralelos, perpendiculares y oblicuos, argumentando los criterios que ha utilizado en cada caso.

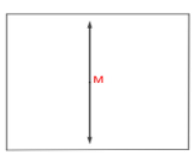
b) Dentro del material disponible para la actividad encuentra la recta que se muestra en la siguiente imagen en una hoja tipo calca, realizar un doblez como se indica con la flecha, de tal forma que al doblar la recta coincida consigo misma, fijar el doblez en cualquier punto, y se obtendrá una recta perpendicular a L por un punto de esta. Utilizando esta técnica construir una recta perpendicular a la recta R. Verificar con la regla y la escuadra en cada caso.



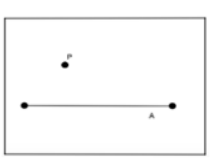


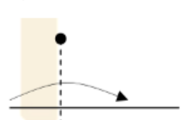
c) Teniendo en cuenta la siguiente recta N (disponible dentro del material en hoja calca), construir una recta paralela mediante dobleces de la hoja. Exponer el procedimiento que les ha permitido realizar la tarea. Repetir el ejercicio en la construcción de una recta paralela a la recta M.





d) Tomar el extremo izquierdo del segmento de recta A (como se indica en la imagen), y realizar un doblez hacia la derecha de tal forma que las dos partes del segmento se superpongan, fije el pliegue cuando este coincida con el punto P (punto externo al segmento de recta dado). ¿Qué tipo de recta respecto al segmento A se ha construido? Justificar mostrando las características que en la construcción se evidencian.



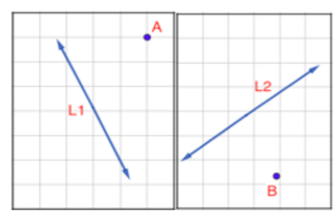


e) Teniendo en cuenta la siguiente imagen y mediante dobleces:

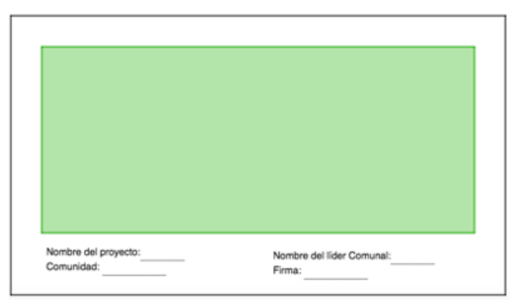
1. Construir una recta perpendicular a la recta L1 que además pase por el punto A.

2. Construir una recta paralela a la recta L2, que pase por el punto B.

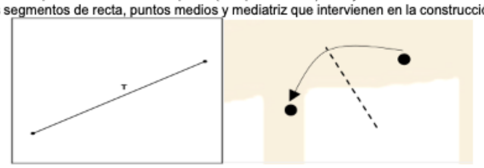
Exponer las dificultades y la estrategia de atención al respecto.



f) Un líder comunal ha logrado gestionar los recursos para la construcción de un campo de fútbol para su localidad que se encuentra en la etapa final la cual consiste en trazar las líneas y puntos reglamentarios. Para obtener estos recursos debe presentar un plano, y la mayor dificultad se le ha presentado es para ubicar los puntos central y lanzamiento de tiro penal, los cuales además deben estar alineados, la habilidad de este líder en el manejo de escuadra y regla es mínima; por lo tanto, su tarea consiste en orientarlo a través de dobleces de la hoja cuya imagen corresponde a la mostrada a continuación. (Dispone también de este plano en hoja tipo calca si le parece le ofrece mayor comodidad). Exponer el procedimiento y los tipos de segmentos de recta con los cuales se ha encontrado.



g) Tomar la hoja que contiene el segmento de recta T y realizar un doblez como se indica con la flecha, de tal forma que los puntos extremos coincidan, fijar el pliegue y obtendrá el punto medio del segmento y la recta que recibe el nombre de mediatriz de T, que es la recta que pasa por el punto medio del segmento dado y es perpendicular a este. Exponer detallando en el plano (campo de fútbol) trabajado en el literal anterior, los segmentos de recta, puntos medios y mediatriz que intervienen en la construcción.



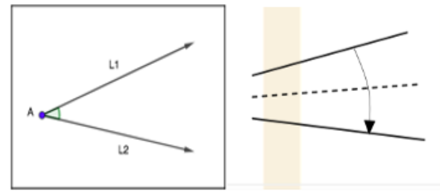
h) Teniendo en cuenta la construcción anterior:

1. Ubicar un punto sobre la mediatriz de T, y en conjunto con los extremos del segmento T construir un triángulo y clasificarlo de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos internos. Con este mismo conjunto y desplazando el punto sobre la mediatriz, ¿es posible construir un triángulo equilátero?, ¿un triángulo escaleno? Argumentar en cada caso.

2. Desplazar el punto sobre la mediatriz de tal forma que le permita construir en conjunto con los extremos de T los siguientes triángulos: Rectángulo, obtusángulo y acutángulo. Exponer las condiciones necesarias que hacen posible la construcción de cada uno de estos triángulos.

i) El estratega (técnico) de un equipo de fútbol quiere sorprender al rival desde el primer momento de juego, necesita para tal fin ubicar tres jugadores distribuidos uniformemente sobre el arco resaltado en rojo que hace parte del circulo central del campo de juego, sin que se ubique ninguno de ellos en los extremos del mismo. La tarea consiste en apoyar al técnico con la ubicación exacta de los tres jugadores, para lo cual encontrará dentro del material el circulo central (imagen de la derecha) recortado en papel, para que a través de dobleces se realice la distribución que requiere el estratega.

j) Tomar la hoja que contiene el ángulo A (apoyarse en la siguiente imagen), y realizar un doblez de tal forma que la recta L1, se superponga a la recta L2. ¿Qué observa? Esta recta que se obtiene y que además divide al ángulo en dos iguales es llamada bisectriz del ángulo A. Complementar el literal anterior exponiendo los ángulos y su respectiva bisectriz que se han construido en mencionada tarea.

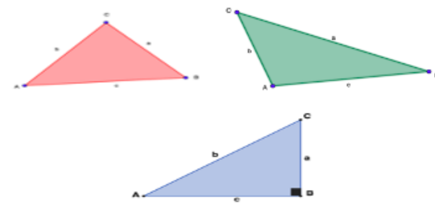


Desafío 2: El doblez en las rectas y puntos notables de un triángulo

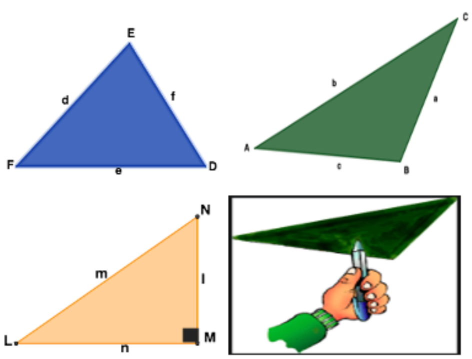
Objetivo: Trazar las rectas y puntos notables de un triángulo mediante dobleces de papel.

Materiales: Hojas blancas, papel calca, tijeras, lápiz, compás

a) Los triángulos de la siguiente imagen, los encontrarán dentro del material adjunto en hojas tipo calca, en cada uno de ellos: trazar una recta perpendicular al lado c, que pase por el vértice C; esta particular recta, recibe el nombre de altura del triángulo respecto al lado c; análogamente trazar las alturas correspondientes a los lados a y b, ¿Qué se observa? ¿Todos sus compañeros obtuvieron el mismo resultado? El punto de corte o de concurrencia de las tres alturas del triángulo se llama el ortocentro del triángulo. Establecer las condiciones que hacen que este punto de concurrencia de las alturas coincida con uno de los vértices, se presente dentro o fuera del triángulo.



b) Cada integrante del grupo tomará una figura de las que encuentra dentro del material disponible (triángulos, cuadrados y rectángulos), e intentará sostenerla en equilibrio con el lápiz (observar la imagen siguiente). Plantear estrategias que permitan ubicar el punto de equilibrio, teniendo en cuenta el tipo de figura.



A continuación, cada uno de los integrantes del grupo toma un triángulo (disponible en el material), realizar los dobleces que crean pertinente, para ubicar el punto medio de cada lado, luego doblar la hoja de tal manera que el pliegue pase por el punto medio y su vértice opuesto; esta recta se denomina mediana del triángulo respecto al lado seleccionado. Construir las medianas correspondientes a los otros dos lados. ¿Qué se observa? ¿Todos sus compañeros obtuvieron el mismo resultado? Ubique con el lápiz el punto de equilibrio en el triángulo y describa lo observado. El punto de corte o de concurrencia de las tres medianas es el baricentro o centro de gravedad del triángulo.

c) Utilizar los triángulos del punto anterior en los cuales se encuentra ubicado el baricentro y realizar el ejercicio propuesto en el literal b. ¿Qué puede concluir al respecto?

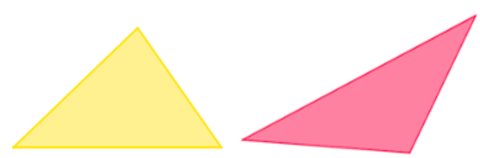
d) En el paquete de materiales que se disponen para este ejercicio encontrará algunas herramientas de un restaurante y objetos para decoración del mismo. (bandejas en forma de triángulo, cuadradas y rectangulares, igualmente floreros de bases poligonales, vasos de té y café):

1) Un integrante del grupo hará de mesero y compartirá una bebida a sus compañeros de otros grupos, la cual llevará en una bandeja en alto con una mano; los demás compañeros asesoran para lograr la mejor ubicación de la mano en la bandeja. Repetir el ejercicio rotando el rol de mesero. Exponer conclusiones respecto a los recursos y conceptos geométricos que utilizaron como relevantes para lograr la tarea asignada.

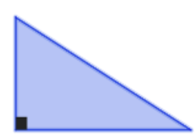
2) Ubicar los floreros en sus respectivos soportes (los cuales encontrarán ubicados dentro del laboratorio). Exponer el trabajo realizado en equipo, los recursos y conceptos los cuales les permitieron cumplir con la tarea asignada.

e) Trazar mediante dobleces la mediatriz de cada uno de los lados de los triángulos 1, 2 y 3 (disponibles en el material en hoja tipo calca). Luego cada integrante del grupo toma un triángulo, pueden apoyarse en el procedimiento expuesto en el reto 1. ¿Qué se observa en cada uno de los triángulos, sus compañeros obtuvieron el mismo resultado? ¿es posible equilibrar el triángulo usando el punto de concurrencia de las mediatrices, cómo en los casos anteriores?

Tomar el compás y con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices, abrir hasta uno de los vértices del triángulo y trazar la circunferencia. ¿qué observa? Teniendo en cuenta este hecho, el punto de intersección de las mediatrices se denomina circuncentro. Conjeturar sobre las condiciones que hacen que este punto, se encuentre en la parte interna, sobre uno de los lados o en la parte externa del triángulo.

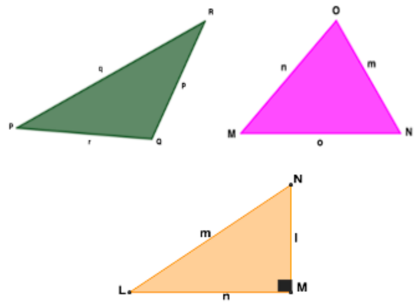


Triángulo 1 Triángulo 2



Triángulo 3

f) Siguiendo el procedimiento expuesto en el reto 1, cada integrante del grupo tomará un triángulo y trazará la bisectriz correspondiente a cada uno de los ángulos internos de los siguientes triángulos, los cuales encuentra en papel calca dentro de los materiales disponibles para la actividad. ¿Qué se observa? ¿Todos sus compañeros obtuvieron el mismo resultado? Toma el compás y haciendo centro en el punto de concurrencia de estas rectas, abrir hasta lograr contacto (tangente) con uno de los lados del triángulo y trazar la circunferencia, ¿que observa? Por este hecho, el punto de intersección de las bisectrices se denomina incentro ya que es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.



g) Tomar los triángulos que se trabajaron en el literal anterior y prolongar cada uno de sus lados mediante dobleces, con el fin de visualizar los ángulos exteriores; ahora trace sus respectivas bisectrices igualmente a través de dobleces, ¿qué observa? ¿Todos sus compañeros obtuvieron el mismo resultado? ¿encuentra puntos de concurrencia entre estas bisectrices? ¿qué nombre le asignaría a los mismos? ¿es posible generar una circunferencia relacionada con el triángulo y con los lados extendidos del mismo? ¿qué nombre recibiría?

h) Cada integrante del grupo toma una hoja tamaño carta y mediante dobleces construye un triángulo equilátero, discutir en grupo el procedimiento y logros alcanzados para luego socializar en plenaria.

i) Tomar el triángulo equilátero construido en el literal anterior y trazar sus respectivas rectas y puntos notables. Socializar en el grupo los resultados alcanzados y conclusiones que se pueden establecer en esta construcción.

j) Hacer la misma experiencia con diferentes triángulos isósceles. ¿Qué se observa?

k) Proponer en equipo una actividad en la cual se realicen construcciones de otros elementos del triángulo u otros polígonos, mediante dobleces de papel.

Desafío 3: Regla, escuadra y compás en algunas construcciones básicas.

Objetivo: Generar interés por el uso de herramientas básicas tales como regla, escuadra y compás en el estudio de la geometría, específicamente en algunas construcciones elementales, como una estrategia para fortalecer las prácticas pedagógicas tanto en el aula como en el laboratorio de matemáticas.

a) Trazar con el uso de regla y escuadra una recta paralela a M1 que pase por el punto P1, e igualmente una paralela a M2 que pase por P2 (seguir la orientación de los ejemplos de la parte inferior de la siguiente imagen).

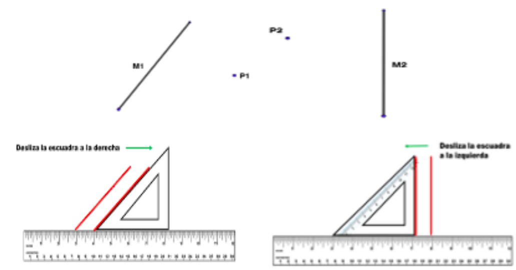
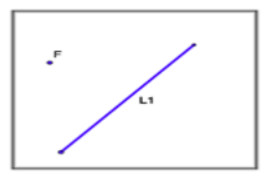
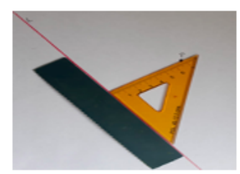


Imagen: Ejemplos de uso de la escuadra y regla en la construcción de paralelas

b) Trazar con el uso de regla y escuadra una recta perpendicular a L1 que pase por el punto F (seguir la orientación que ofrece la imagen de la derecha).





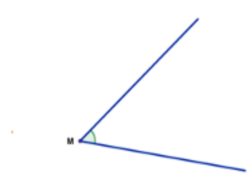
c) Para la clase de geometría en grado quinto, el docente indica a sus estudiantes que deben llevar regla y escuadra, pero sólo una minoría presentó estas dos herramientas, la mayoría sólo cuenta con escuadra. Luego la tarea consiste en planear en equipo y exponer una estrategia que permita desarrollar las tareas de los literales a y b solamente con el uso de la escuadra, de esta manera se apoyará al docente en su planeación de clase y orientación a sus estudiantes.

d) Para la sesión siguiente de geometría el docente quiere que sus estudiantes repitan las construcciones del literal a y b con el uso solamente del compás. Plantear en equipo una estrategia que permita realizar esta construcción y exponerla a sus compañeros. (puede hacer uso de la regla para trazar segmentos)

e) Construir con el uso del compás un segmento de recta perpendicular al segmento L1 que pase por el punto F. Discutir en equipo y unificar una estrategia para socializar a los compañeros.

f) Dado el siguiente segmento AB, construir con el uso del compás una recta perpendicular que pase por el punto B.

g) En el reto 1 se construyó la bisectriz de un ángulo mediante dobleces ¿Puede usted pensar en otra forma de construir la bisectriz usando regla y compás? ¿Cómo sería su construcción? (Puede exponer este proceso utilizando el siguiente ángulo o construir otro si así lo considera)

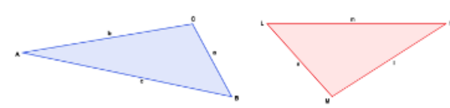


h) En el reto 1 se construyó la mediatriz de un segmento, y por lo tanto su punto medio, proceso seguido mediante dobleces, ¿Puede usted pensar en otra forma de construir la mediatriz de un segmento usando regla y compás? ¿Cómo sería su construcción? (puede exponer este proceso de construcción utilizando el siguiente segmento de recta, o trazar otro si así lo considera)

Desafío 4: Resolución de problemas mediante la construcción de las rectas y puntos notables de un triángulo con el uso de regla, escuadra y compás.

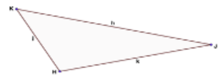
Objetivo: Construir rectas y puntos notables de un triángulo con el uso de la escuadra, regla y compás como una estrategia para fortalecer las prácticas de aula específicamente las habilidades en la resolución de problemas geométricos.

a) Con el uso del la regla y el compás construir: 1) En el triángulo ABC el ortocentro, el incentro y la circunferencia inscrita. 2) En el triángulo LMN el circuncentro, el baricentro (centro de gravedad), y la circunferencia circunscrita.



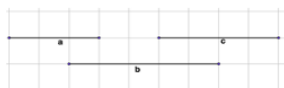
b) Con el uso del la regla y la escuadra: 1) En el triángulo DEF, trazar las medianas de los ángulos y hallar el área de cada una de las regiones en que queda dividido el triángulo ¿qué observa? conjeturar sobre la posibilidad de obtener áreas iguales en cualquier tipo de triángulo cuando se construyen las medianas de los ángulos.

c) Con el uso de las herramientas que crea pertinente construir el baricentro, el ortocentro y el circuncentro en el siguiente triángulo. Analizar si los puntos son o no colineales y exponer los argumentos. ¿es posible generalizar el resultado obtenido para cualquier tipo de triángulo?, ¿qué sucede con estos puntos en un triángulo equilátero y en un triángulo rectángulo?



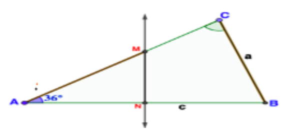
d) Dados los segmentos a y b construir un triángulo con un lado igual al segmento a y la altura correspondiente a dicho lado igual al segmento b. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir? (utilizar las hojas cuadriculadas que encuentra dentro del material disponible)

e) Dados los segmentos a, b y c construir, si es posible, un triángulo con un lado igual al segmento a, la altura correspondiente a este lado igual a b y otro lado igual a c. Explicar las condiciones necesarias que hacen posible la construcción de por lo menos un triángulo. (utilizar las hojas cuadriculadas que encuentra dentro del material disponible)

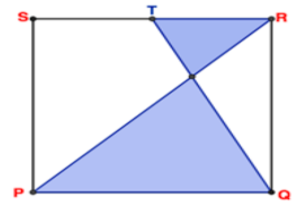


f) Construir, con regla y compás, ángulos de: 90°, 60°, 45°, 30° y 15°.

g) Si la recta que pasa por los puntos N y M es mediatriz del lado c en el triángulo ABC, y la longitud del lado a es igual a la longitud del segmento AM, hallar la medida del ángulo C.



h) Dado el siguiente cuadrado de lado 12 cm, hallar el área de la parte sombrada si T es el punto medio del segmento SR. Exponer el procedimiento y los recursos utilizados al respecto.



Desafío 5: Construcción geométricas básicas, rectas y puntos notables de un triángulo con el uso del software dinámico geogebra.

a) Realizar las construcciones correspondientes a los retos 3 y 4, mediante el software geogebra. Exponer las dificultades y estrategias al respecto

b) Exponer las ventajas y desventajas de la construcción de las rectas y puntos notables del triángulo y la resolución de problemas geométricos, a través de la utilización de material concreto (dobleces de papel), regla, escuadra y compás, y software dinámico geogebra.

c) Proponer y exponer una actividad por grupo que motive a la construcción geométrica apoyada con manipulativos concretos, herramientas básicas de trabajo en el aula y software geogebra.

Anexo 3: Semejanza

Actividad 02: Semejanza

Objetivo: Construir la definición de semejanza a partir de actividades (desafíos), las cuales los docentes desarrollarán con el uso de manipulativos concretos, la experimentación, el pantógrafo y software dinámico (geogebra).

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo
- Se interesen por el uso de artefactos no convencionales como el pantógrafo y software para la enseñanza de las matemáticas.
- Hallen propiedades de figuras semejantes a través de la verificación visual.
- Usen procesos de visualización para definir relaciones geométricas.
- Diferencien entre los criterios de semejanza para triángulos y cuadriláteros y otras figuras geométricas como pentágonos o hexágonos.
- Prueben sus afirmaciones al construir figuras semejantes y utilizar las herramientas adecuadas.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad.
- Muestren interés por las actividades propuestas.
- Generen al menos una actividad relacionada con semejanza para desarrollar con sus estudiantes.

Materiales: Guías de trabajo, material concreto (fichas, figuras en cartulina y otros materiales), pantógrafo, software geogebra, regla, lápiz, esfero, colores, compás y transportador

Estructura: Esta actividad está compuesta por ocho (desafíos) que se han diseñado para que los docentes construyan figuras semejantes en el laboratorio de matemáticas, utilizando criterios de homotecia.

Sugerencia metodológica. Se pretende que los docentes construyan figuras con el uso de material concreto (fichas), con el pantógrafo, mediante algunos montajes experimentales y a través del software dinámico geogebra. Por lo tanto, cada reto está estructurado mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción del pensamiento geométrico, motivan al docente a realizar conjeturas sobre las condiciones suficientes y necesarias de semejanza, a visualizar y discriminar si dos figuras compuestas por triángulos y/o rectángulos y otros polígonos son o no semejantes, a establecer además diferencias y similitudes entre las diferentes construcciones, así como las ventajas y desventajas de los recursos utilizados en cada uno de los problemas (retos) planteados. Igualmente, dentro de la actividad se plantean retos en los cuales los docentes incursionan en otros contextos como en el arte (dibujo), ciencias naturales, ingeniería y arquitectura principalmente, que se apoyan en la matemática y específicamente en las transformaciones geométricas.

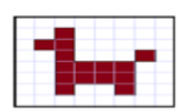
Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 6 horas de trabajo.

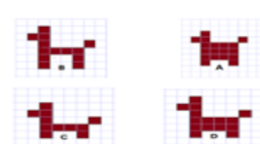
Habrá una puesta en común de las actividades dirigida por el investigador, haciendo énfasis en las herramientas disponibles para cada uno de los retos, poco usuales en algunos casos, pero que a través de estrategias innovadoras pueden generar impacto positivo en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Cada actividad se desarrollará en presencia del investigador y se evaluará con la participación activa de todos los docentes; en este espacio se identificarán fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otros retos dirigidos a la resolución de problemas y construcción de significado de conceptos en matemáticas y otros contextos, como futuras prácticas pedagógicas a desarrollar con sus estudiantes usando herramientas de laboratorio.

Desafío[1]0: Ejercicio de Apertura: La imagen corresponde a un perrito, se ha sacado una fotocopia de ésta reducida. De los siguientes dibujos diga cuál corresponde a la imagen del perrito reducida.





a) ¿Por qué escogió esta opción?

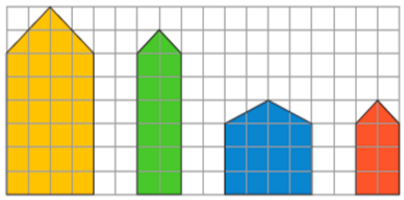
b) ¿Qué elementos tuvo en cuenta para escoger esta opción?

[1] Palma C, Henry. (2017). *El desarrollo del pensamiento geometrico relacionado con semejanza y proporcionalidad en el grado quinto y avances en su caracterización* (Maestria Tesis, Universidad Antonio Nariño, Bogotá).

Desafío 1: Dadas las siguientes figuras que muestra la guía de trabajo, realice la reconstrucción de las mismas utilizando las fichas de colores y responda las preguntas planteadas.

Objetivo: Conjeturar acerca de la relación entre las figuras, sus áreas, las longitudes de sus lados, su perímetro y su forma.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas de colores), regla, tijeras, papel y lápiz.



a) ¿Es posible encontrar alguno de estos polígonos que se han construido con fichas como resultado de una foto de otro de ellos? Justifique su respuesta.

b) ¿Cuál o cuáles figuras pueden ser el resultado de una foto tomada de la figura de color naranja? Justifique.

c) ¿Las figuras que se identificaron en la pregunta b) tienen la misma forma que la figura de color naranja? ¿Y el mismo tamaño?

d) Construya una figura que sea la mitad de la figura amarilla, respecto a la longitud de sus lados. ¿Es igual a alguna de las figuras que se han construido? Justifique.

Desafío 2: Experimentando construyo. El reto consiste en proyectar figuras geométricas, observar y establecer conclusiones.

Objetivo: Ampliar figuras geométricas mediante la proyección de las mismas en la pared (plano de proyección en cuadrícula), y determinar las condiciones que hacen posible que la figura proyectada mantenga su forma.

Materiales: Linterna, material concreto (triángulos, rectángulos y otros polígonos), cinta métrica, y otros que le permiten construir el montaje para la experiencia (base con soporte, trípode, …)

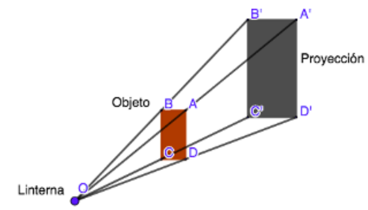


Imagen 1

a) Realice el montaje que le permita proyectar figuras en la pared o plano de proyección (ver imagen).

b) Teniendo en cuenta la imagen 1, ubique la linterna a una distancia máxima de tres metros de la pared, a continuación, ubique el objeto (figura geométrica), en el punto equidistante entre la linterna y la pared, active la linterna y observe. Registre lo que ha sucedido al realizar este montaje.

c) Teniendo en cuenta el montaje anterior, sin alterar la distancia del objeto y el plano de proyección, ubique la linterna de tal manera que se genere como proyección una figura con la misma forma del objeto (figura geométrica), y que además cada uno de los lados de esta sean el doble. Argumente cada uno de los pasos, justificando las condiciones que se deben cumplir para lograr la tarea asignada.

d) Tenga en cuenta el punto anterior y determine el perímetro del objeto (figura geométrica) y su proyección, compare los resultados y establezca la relación que se presenta. Justifique su respuesta.

e) Tenga en cuenta el montaje realizado en el literal b y determine el área del objeto (figura geométrica) y su proyección, compare los resultados y establezca la relación que se presenta. Justifique su respuesta

f) Teniendo en cuenta el literal c, ¿es posible hallar una ubicación diferente para la linterna de tal forma que se conserven las relaciones halladas en literales anteriores frente al perímetro y área del objeto y su proyección? Justifique su respuesta.

g) Reubique la imagen a proyectar (figura geométrica) y la linterna de tal manera que la figura proyectada mantenga su forma y además cada lado de ésta se triplique con respecto a la original. Establezca la relación entre sus perímetros y entre sus áreas. Justifique sus resultados.

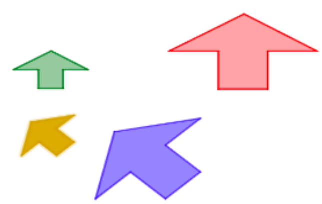
h) Teniendo en cuenta el literal anterior, y con el uso de la cinta métrica halle: 1. La longitud entre los vértices del objeto (figura geométrica) y la linterna. 2. La longitud entre los vértices de la proyección y la linterna. Compare los resultados obtenidos en 1 y 2 y establezca conclusiones.

i) Realice el punto g, utilizando una figura geométrica diferente (entregada inicialmente dentro del material). Registre los resultados obtenidos destacando la relación entre lados de la figura y sus homólogos proyectados, igualmente establezca la razón entre sus perímetros y entre sus áreas. Justifique.

Reto 3: Dada una figura construyo otras las cuales conservan su forma y la proporción entre sus lados.

Objetivo: Con el uso de herramientas, plantear y ejecutar estrategias que le permitan a partir de una figura, construir otras, conservando su forma y condiciones indicadas entre sus lados y áreas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (figuras recortadas en cartulina), regla, tijeras, pantógrafo, papel y lápiz



a) Teniendo en cuenta las figuras de la imagen, ¿Tienen la misma forma? ¿Tienen el mismo tamaño? Justifique sus respuestas mencionando criterios.

b) ¿Cuál de las figuras de la imagen (tenga en cuenta la guía de trabajo) es posible obtener haciendo una reducción o amplificación de la figura verde? Utilice el pantógrafo y justifique su respuesta describiendo el procedimiento.

c) Con el uso del pantógrafo, amplíe la figura verde, de tal forma que cada uno de sus lados adquiera el doble de su longitud. Describa el procedimiento.

d) Realice nuevamente el ejercicio anterior usando herramientas diferentes que tiene a su disposición en el material asignado para la actividad. Describa el procedimiento y sugiera otras herramientas en la ampliación y reducción de figuras.

Reto 4: "Podemos ser artistas". Un coleccionista de autos requiere una ampliación al doble de esta fotografía (imagen 1), una de sus favoritas, acepta el reto.

Objetivos: Incursionar en otros contextos que se apoyan en la matemática, en este caso el arte fundamentado en elementos básicos de transformaciones geométricas.

Materiales: Guía de trabajo, pantógrafo, software geogebra, transportador, regla papel y lápiz.

a) Realice la ampliación solicitada por el coleccionista utilizando el pantógrafo. Describa su procedimiento, indicando elementos necesarios y construcciones o apoyos auxiliares que ha requerido en esta tarea.

b) Realice la ampliación solicitada por el coleccionista, utilizando otra herramienta o procedimiento diferente al del punto anterior. Describa su procedimiento, indicando elementos necesarios y construcciones o apoyos auxiliares que ha requerido en esta tarea.

c) Describa otras posibles utilidades que puede ofrecer el pantógrafo, en matemáticas, geometría e incluso otros contextos.

Reto 5: Completando la torre**:** La siguiente figura corresponde a la fotografía de las piezas de una torre de Hanoi organizadas según su principio (no se puede ubicar una ficha de mayor tamaño sobre una de menor tamaño).

Objetivo: Establecer las condiciones necesarias que se requieren para ampliar o reducir un rectángulo de modo que la imagen sea semejante al rectángulo original.

Materiales: Guía de trabajo, pantógrafo, software geogebra, transportador, regla, papel y lápiz.

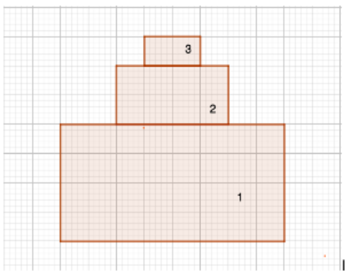


Imagen 1: Torre de Hanoi

a) Como podemos ver en la imagen, la torre de Hanoi solo tiene 3 fichas; por lo tanto, el nivel de dificultad es mínimo, se necesita incrementarlo, luego su tarea consiste en construir, siguiendo la secuencia, un rectángulo semejante a los que se muestran en la parte superior y otro en la parte inferior, completando cinco fichas en total. Utilice el pantógrafo y el software geogebra. Justifique su procedimiento y mencione las ventajas y desventajas de cada una de las herramientas utilizadas.

b) Teniendo en cuenta la imagen 1, construya rectas que pasen por los vértices homólogos de los rectángulos. Establezca conclusiones teniendo en cuenta esta construcción. ¿Que nombre le asignaría al punto de intersección de las rectas? Justifique.

c) Complementando el punto anterior, construya tres fichas más en la parte superior. Utilice el pantógrafo y el software geogebra. Justifique su procedimiento y mencione las ventajas y desventajas de cada una de las herramientas utilizadas. Justifique su procedimiento.

d) Observando las figuras, ¿qué se tuvo en cuenta para determinar la longitud del lado del segundo rectángulo? ¿y del tercer rectángulo? ¿Qué se debe considerar para seguir la secuencia de rectángulos? ¿es posible generalizar el procedimiento de la construcción de cada rectángulo? Justifique su respuesta.

e) ¿Qué relación se establece entre la longitud de los lados de los rectángulos que se van generando a partir del rectángulo 1?, ¿Qué sucede entre los perímetros? Justifique.

f) Que relación se establece entre el área de los rectángulos que se van generando a partir del rectángulo 1? ¿Qué permanece invariante? ¿los rectángulos entre sí son congruentes o semejantes? Justifique.

Reto 6: Ampliando y reduciendo figuras se construye semejanza

Objetivo: Construir y consolidar los elementos que hacen posible obtener figuras semejantes mediante la reducción o ampliación de las mismas, a través de: la percepción visual, la manipulación de las figuras, el trabajo con regla, escuadra, el pantógrafo y software geogebra.

Materiales: Guías de trabajo, material concreto (figuras recortadas en cartulina), pantógrafo, software geogebra, transportador, regla, papel y lápiz.

Imagen 1

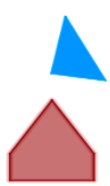


Imagen 2

a) Observe las dos figuras de la imagen 1 y construya una replica de cada una, cuyos lados sean tres veces más largos que en la original. ¿Qué aspectos (parámetros) tuvo en cuenta en esta construcción. Describa su procedimiento

b) Realice el procedimiento anterior con las figuras de la imagen 2. Intente la realización con alguna de las herramientas que tiene a su disposición en el grupo de trabajo. ¿Le fue posible la construcción con el pantógrafo? Explique y establezca las condiciones o recursos auxiliares que son necesarios en esta construcción.

c) Teniendo en cuenta la construcción anterior, dibuje rectas que pasen por cada uno de los vértices de la figura original y sus respectivos vértices homólogos en la figura ampliada. ¿Se han concurrido en algún punto estas rectas? Si su respuesta es afirmativa, establezca la relevancia del mismo y proponga sugerencias para denominarlo

d) Teniendo en cuenta las construcciones en el literal a y b, establezca: los elementos que se conservan al realizar la ampliación, la relación que existe entre perímetros, entre áreas y determine el centro de homotecia. Justifique los resultados argumentando sobre las condiciones que se deben cumplir para que la ampliación conserve la forma de la figura original.

e) Realice las construcciones de los literales a) y b) utilizando el software geogebra. Establezca las condiciones o recursos auxiliares que son necesarios en esta construcción.

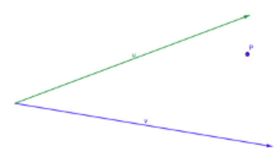
f) Construya un polígono y haciendo uso del pantógrafo, realice una reducción del mismo y establezca: los elementos que se conservan al realizar la reducción, la relación que existe entre perímetros, entre áreas y determine el centro de homotecia. Justifique los resultados argumentando sobre las condiciones que se deben cumplir para que la reducción conserve la forma de la figura original.

g) Realice el punto anterior con el uso del software geogebra. Establezca las condiciones o recursos auxiliares que son necesarios en esta construcción.

h) Establezca fortalezas, dificultades, ventajas y desventajas en cada una de las construcciones realizadas en la actividad.

Reto 7: Construir una circunferencia tangente a las rectas **u** y **v**, de tal forma que pase por el punto P.

Objetivo: Aplicar la homotecia y sus propiedades en la resolución de problemas, mediante el uso de las herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
Materiales: Regla, compás, escuadra, pantógrafo, software geogebra**.**



a) Con el apoyo de los materiales de laboratorio a su disposición, construir la circunferencia que cumple las condiciones que se indican en el enunciado del reto. Describa su procedimiento, detallando los elementos y propiedades geométricas utilizados en esta tarea.
b) ¿Qué puede afirmar de la razón que se establece entre las figuras geométricas resultantes en la actividad y la razón de homotecia?
c) ¿Es posible encontrar varias soluciones y diferentes caminos para llegar a estas? Describirlas.

Reto 8: Proponga una actividad a realizar en el laboratorio de matemáticas, que implique el concepto de homotecia, sus características y elementos, dirigido a estudiantes del ciclo de educación básica primaria.

Objetivo: Plantear problemas retadores que impliquen el concepto de homotecia, sus características y elementos en contextos geométricos y en otras áreas.

a) Plantear en equipo actividades que impliquen el concepto de homotecia, sus características y elementos; en contextos geométricos y en otras áreas.
b) Determinar en equipo el grado de escolaridad a quienes se dirige la actividad, los aprendizajes a desarrollar y los recursos necesarios.
c) Socialice la actividad a sus compañeros docentes, con el fin de recibir recomendaciones (retroalimentación), fundamental para llevarla a sus diferentes contextos educativos.

Anexo 4: Estadística y probabilidad

Actividad 03: Estadística y probabilidad

Objetivo: Construir significado de conceptos básicos asociados a probabilidad, a través de experimentos relacionados con el azar, la recolección y análisis de datos en situaciones cotidianas, las cuales fortalecen las habilidades de los docentes de la educación básica primaria en la resolución de problemas en contextos aleatorios.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Planeen y ejecuten diferentes estrategias que les permita generar ambientes de aprendizaje en contextos aleatorios.
- Resuelvan problemas retadores que involucren los conceptos básicos de estadística y probabilidad.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad.
- Generen al menos una actividad por grupo relacionada con la estadística y la probabilidad, donde se usen recursos del entorno entre estos manipulativos concretos y herramientas tecnológicas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (dados, monedas, balotas de colores, tableros prediseñados, bolsas de caramelos …), Excel y software geogebra.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 retos, cada uno con sub-tareas que serán diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con materiales tales como: dados, monedas, balotas, listados de datos estadísticos, entre otros además de herramientas tecnológicas tales como Excel y software geogebra, principalmente para la presentación de la información. La experimentación y análisis se estructura mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción de aprendizajes en contextos aleatorios.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de la experimentación, el análisis de datos estadísticos, construyan conceptos asociados a la probabilidad, con el uso de diferentes materiales, manipulativos concretos, recursos del medio, Excel y el software geogebra, los cuales estarán organizados en el laboratorio de matemáticas; es así como mediante retos y estas herramientas se diseña la actividad con un corte lúdico que mantendrá la participación activa de los docentes en el trabajo el cual será guiado por preguntas heurísticas que favorecen la construcción del pensamiento aleatorio, motivan al docente a realizar conjeturas sobre las condiciones necesarias para obtener la probabilidad de un evento.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de cuatro docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 12 horas de trabajo.

Habrá una puesta en común de las actividades dirigida por el investigador, haciendo énfasis en las herramientas disponibles para cada uno de los retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del pensamiento aleatorio en los niños de la educación básica primaria, a través de prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por sus docentes.

Cada actividad se desarrollará en presencia del investigador y se evaluará con la participación activa de todos los docentes; en este espacio se identificarán fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otras actividades en las cuales se incluyan experimentos con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas en contextos aleatorios.

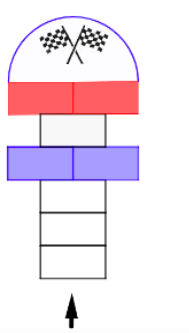
Reto 1: Jugando golosa (rayuela)

Objetivo: Construir mediante la experimentación motivados por el juego de la golosa, un primer acercamiento al significado del concepto de probabilidad de un evento y sus términos asociados tales como: espacio muestral, casos favorables, lo imposible, poco posible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro.

Materiales: Guía de trabajo, dados, fichas de papel y pista o tablero de golosa

Cada grupo dispone de una fotocopia de la golosa que se observa en la siguiente imagen y un par de dados en los cuales encontrarán los números del 1 al 3, es decir cada número aparecerá en dos caras. Además, en el laboratorio encontrarán dos golosas diseñadas en el piso sin la asignación de números. El juego consiste en competir de a dos equipos o grupos de trabajo, resultará ganador el equipo que primero recorra el tablero de la golosa; para tal fin se deben atender los siguientes casos:

a. En equipo asignar la numeración a la golosa (utilizando el tablero que disponen en la fotocopia ver imagen), cada número debe corresponder con un posible resultado de sumar los números que se obtienen al lanzar los dos dados, y ubicarlos sin importar el orden de los mismos e iniciando por la casilla que indica la flecha; cada número lo pueden repetir hasta tres veces. En las casillas rojas y azules, pueden apoyar los dos pies siempre y cuando le hubieran asignado el mismo número.



b. Cada equipo que se dispone a competir distribuye la numeración de acuerdo a la establecida en el literal a, en la golosa para tal fin que encuentran en el laboratorio de matemáticas.

c. Cada equipo elige un representante quien será el encargado de recorrer la golosa en el orden indicado por la flecha, el recorrido por cada casilla lo puede realizar si el número de esta coincide con la suma que se obtiene al lanzar los dos dados; si no logra la coincidencia, cede el turno al otro equipo y así sucesivamente hasta llegar a la meta. ¿cuál cree que fue el motivo o clave del éxito (ganar) o fracaso (perder)?

d) Mientras un integrante del equipo realiza el recorrido de la golosa, un compañero lanza los dados de acuerdo a lo indicado en el literal anterior. Los demás integrantes del equipo se organizan con el fin de registrar los resultados obtenidos en cada lanzamiento de los dados. Teniendo en cuenta estos registros, ¿que conclusiones es posible establecer?

e) Teniendo en cuenta los literales anteriores, analizar en equipo los siguientes interrogantes, relacionados con el resultado de sumar las caras superiores de los dados que se obtienen al ser lanzados, hecho también llamado experimento.

- ¿Al lanzar los dos dados cual fue el resultado de la suma que obtuvieron con menor frecuencia? ¿a qué se debe este hecho? Establecer conjeturas al respecto.
- ¿Al lanzar los dos dados cual fue el resultado de la suma que obtuvieron con mayor frecuencia? ¿a qué se debe este hecho? Establecer conjeturas al respecto.

f) Teniendo en cuenta los literales anteriores, realizar la siguiente actividad que se indica a continuación y que obedece al experimento (lanzar los dados y sumar) el cual se ha trabajado hasta el momento.

- A cada uno de los resultados obtenidos en el experimento, asociarle según crea conveniente uno de los siguientes términos: Imposible, poco posible, medianamente posible, muy posible, seguro, otro. Argumentar en cada caso

Obtener 2: ____

Obtener 3: ____

Obtener 4: ____

Obtener 5: ____

Obtener 6: ____

Obtener 7: ____

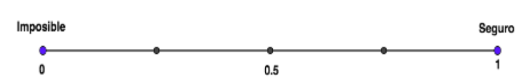
Obtener 1: ____

Obtener un número entre 2 y 6: ________________________________

____

Los términos utilizados en esta tarea los podemos representar en la escala como se muestra a continuación.

Completar la articulación de los términos que faltan, asociando el respectivo número. Esta escala entre 0 y 1, es conocida como la escala de probabilidad.



Reto 2: Recorriendo la estadística y la probabilidad

Objetivo: Construir con los docentes algunos conceptos básicos de la probabilidad y la estadística, a través de proyectos que pueden realizarse en el contexto de la educación básica primaria, es así como se fortalecerán las habilidades en la recolección de datos, la organización, presentación y análisis de la información.

Materiales: Paquetes de caramelos (m&m y Oka Loka Ovnis), transportador, reglas, lápices de colores/marcadores, Excel, software geogebra y guía de trabajo.

a) Tomar el paquete de caramelos "Oka Loka Ovnis", que disponen en el laboratorio y establecer la probabilidad de los siguientes sucesos (experimentos):

1. Extraer de la bolsa un caramelo de color amarillo
2. Extraer de la bolsa un caramelo de color azul
3. Extraer de la bolsa un caramelo de color verde
4. Extraer de la bolsa un caramelo de color naranja
5. Extraer de la bolsa un caramelo de color rojo

Para apoyar el desarrollo de esta tarea, organizados en sus respectivos grupos, cada uno de los integrantes extrae de la bolsa un caramelo, observa el color, registra en la tabla e introduce en la bolsa el caramelo y agita la misma; cede el turno para que el compañero realice el mismo ejercicio, y así sucesivamente hasta que cada integrante complete por lo menos 15 registros.

Resultado obtenido	**Conteo** (trace una raya por cada resultado)	**Frecuencia (F)** (Cuente la cantidad de rayas y escriba el número)	$\frac{F}{T}$	%
Amarillo				
azul				
Verde				
Naranja				
Rojo				
		Total (T):		

¿Mediante la construcción de esta tabla, le fue posible establecer la probabilidad de cada uno de los sucesos solicitados? Justificar

b) Analizar el siguiente experimento. ¿Si se lanza al aire una moneda, cual es la probabilidad de obtener sello? Exponer conjeturas y completar la tabla siguiente.

Resultado obtenido	**Conteo** (trace una raya por cada resultado)	**Frecuencia (F)** (Cuente la cantidad de rayas y escriba el número)	$\frac{F}{T}$	%
Sello				
Cara				
		Total (T): 50		

¿Le es posible reafirmar sus conjeturas iniciales?

¿Es posible afirmar que la probabilidad de un evento es el cociente entre el número de casos favorables, 1 en este caso (sello), y el número de todos los casos posibles (espacio muestral), 2 en este caso (cara y sello)? Argumentar

c) Retomar la bolsa de caramelos que se utilizó en el literal **a** y realizar el conteo de su contenido, organizándolo en la siguiente tabla

Color	**Frecuencia (F)**	$\frac{F}{T}$	**%**
Rojo			
Amarillo			
Verde			
Naranja			
Azul			
Total			

d) Compare esta tabla con la obtenida en el literal **a** y establezca conclusiones, dentro de estas exponga los elementos necesarios que hacen posible el cálculo de la probabilidad de un evento.

e) Tomar la bolsa de caramelos m&m y mediante acuerdo en el grupo, estimar el número de caramelos en la bolsa y la cantidad de cada color. Registrar en la siguiente tabla sus conjeturas.

Color	**Frecuencia**	**%**
Rojo		
Café		
Amarillo		
Verde		
Naranja		
Azul		
Total		

f) Construir un diagrama de barras en el cual muestre las estimaciones de cada color, para realizar esta tarea encontrará disponible dentro de los materiales, diferentes tipos de hojas (rayadas, blancas, cuadriculadas, …), pueden trabajar en las que les genere mayor comodidad. Exponer fortalezas y dificultades

g) Construir un diagrama circular, donde represente el porcentaje de cada color en la bolsa de caramelos. Exponer las estrategias y herramientas que utilizaron en esta tarea, e igualmente sus fortalezas y dificultades.

h) Cada grupo debe abrir su bolsa de caramelos y organizarlos con el fin de establecer la cantidad de cada color, la cantidad total, y el porcentaje respectivo. Exponer la estrategia que les permitió realizar la tarea.

i) Construir un diagrama de barras utilizando los caramelos como material concreto, establezca la cantidad total de caramelos y los correspondientes a cada color.

j) Representar la información en un diagrama circular donde se visualice el porcentaje que representa cada color. Exponer las dificultades y estrategias de atención al respecto

k) Tomar el paquete de caramelos "m&m" de su respectivo grupo y establecer la probabilidad de los siguientes sucesos (experimentos), y organizarlos de menor a mayor probabilidad.

1. Extraer de la bolsa un caramelo de color amarillo
2. Extraer de la bolsa un caramelo de color azul
3. Extraer de la bolsa un caramelo de color verde
4. Extraer de la bolsa un caramelo de color naranja
5. Extraer de la bolsa un caramelo de color rojo
6. Extraer de la bolsa un caramelo de color café

l) De los sucesos en el literal anterior, ¿cuál de estos es seguro obtener en la primera extracción de la bolsa? Exponer sus argumentos

m) Reunir los caramelos m&m de todos los grupos en una bolsa y establecer la probabilidad de los siguientes sucesos (experimentos), y organizarlos de menor a mayor probabilidad.

1. Extraer de la bolsa un caramelo de color amarillo
2. Extraer de la bolsa un caramelo de color azul
3. Extraer de la bolsa un caramelo de color verde
4. Extraer de la bolsa un caramelo de color naranja
5. Extraer de la bolsa un caramelo de color rojo
6. Extraer de la bolsa un caramelo de color café

n) Comparar las probabilidades establecidas en los literales anteriores (g, i). Exponer conclusiones en cuanto a si difirieren o se mantienen, argumentar en cada caso.

o) Reunir los caramelos m&m de todos los grupos en una bolsa y establecer la probabilidad de los siguientes sucesos (experimentos):

1. Extraer de la bolsa un caramelo de color amarillo o rojo
2. Extraer de la bolsa un caramelo de color azul o verde
3. Extraer de la bolsa un caramelo de color verde o naranja
4. Extraer de la bolsa un caramelo de color naranja o café

p) En el experimento, lanzar dos monedas al aire simultáneamente cual es la probabilidad de:

1. Obtener cara en las dos monedas
2. Obtener sello en las dos monedas
3. Obtener en al menos una moneda cara

¿Que estrategia a utilizado para determinar la probabilidad en cada caso? ¿Cuáles son las condiciones necesarias que hacen posible el cálculo de la probabilidad?

m) Realizar el experimento de la actividad anterior para 30 lanzamientos de las monedas, plantear y ejecutar en grupo una estrategia que les permita la recolección de los resultados de cada lanzamiento. ¿Cuál fue la frecuencia de cara? ¿cuál fue la frecuencia para sello? Realice el cociente entre cada una de estas frecuencias y el total de lanzamientos; compare con las probabilidades establecidas en el literal anterior, ¿que puede concluir?

Reto 3: Medidas de tendencia central

Objetivo: Fomentar el uso de herramientas tecnológicas en la organización, presentación y análisis de la información, específicamente el Excel y software geogebra, instalado en tabletas, celulares y/o computadores; con el fin de fortalecer la resolución de problemas a partir de datos recolectados, en los docentes y estudiantes de la educación básica primaria.

Materiales: Tabletas, computadores, regla, papel y colores

a) Registrar los datos de caramelos m&m de todos los grupos de docentes en la siguiente tabla:

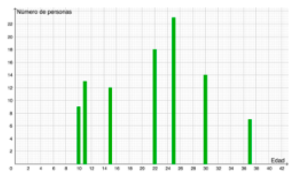
Grupo	Rojo	Café	Amarillo	Verde	Naranja	Azul
1						
2						
3						

4						
5						
6						
7						
Total						

b) Teniendo en cuenta el literal anterior, calcular la media, la mediana y la moda de cada color (medidas de tendencia central), y representarlas en la siguiente tabla. Exponer la estrategia empleada en esta tarea, dificultades y herramientas utilizadas

Grupo	**Rojo**	**Café**	**Amarillo**	**Verde**	**Naranja**	**Azul**
Media						
Mediana						
Moda						

c) La siguiente gráfica representa los resultados de una encuesta realizada a un grupo de personas en la que se buscaba conocer la edad de cada integrante. Determinar la media aritmética y la mediana, de este grupo de personas. Para esta tarea se recomienda además de las herramientas utilizadas por iniciativa propia, hacer uso del software geogebra y/o el Excel.



d) Con el uso del software geogebra o el Excel, construya un diagrama circular en el cual se presente la información del literal anterior

e) Se realizó una encuesta a un grupo de personas para determinar la marca de celular que prefieren, los datos de la misma se encuentran registrados en la siguiente tabla:

Marca de Celular	Huawei	iPhone	Samsung	LG
Número de personas	24	8	12	24

1. Teniendo en cuenta la información de la tabla, ¿qué marca de celular es considerada como la moda? Exponer argumentos
2. Presentar la información de la tabla en un diagrama de barras, y un diagrama circular utilizando Excel y el software Geogebra.

f) Los dirigentes de un municipio han gestionado recursos para la compra de juguetes para los niños con motivo de las celebraciones navideñas del año. Para esto realizó una encuesta sobre las edades de los niños obteniendo los datos que se muestran a continuación.

Edades (años)	2	3	4	5	6	7	8
Número de niños	24	28	30	26	18	20	15

1. Presentar la información de la tabla en un diagrama de barras, y un diagrama circular utilizando Excel y el software Geogebra.
2. Determinar el promedio de edades de los niños con el uso de Excel y el software Geogebra.
3. ¿Cuál es el promedio entre la edad más frecuente y la menos frecuente de los niños encuestados?

f) Proponer una actividad en cada uno de los grupos, de estadística y probabilidad, donde se usen recursos del entorno y herramientas tecnológicas. Exponer objetivos, materiales a utilizar y metodología de trabajo. Socializar en plenaria.

Anexo 5: Algebra temprana

Actividad 04: Álgebra Temprana

Objetivo: Construir a través de las actividades propuestas en cada desafío, un acercamiento al álgebra, específicamente conocimientos vinculados a la generalización y al simbolismo, como una forma de razonar en diversas situaciones matemáticas.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Dada una sucesión, identifiquen un elemento en una posición determinada, siguiendo un patrón previamente establecido.
- Construyan, describan y generalicen relaciones aditivas y multiplicativas, que se pueden establecer en una sucesión.
- Resuelvan problemas retadores que involucren sucesiones
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Den respuestas a las preguntas de los desafíos propuestos en la actividad.
- Generen actividades relacionadas con la construcción y análisis de sucesiones, para desarrollar con sus estudiantes utilizando manipulativos concretos, recursos del entorno y/o herramientas tecnológicas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (figuras geométricas en madera, papel foamy y otros materiales), software Geogebra, regla, compás, lápiz, colores, transportador.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas que serán diseñadas para que los docentes trabajen, inicialmente apoyados en material concreto, construyan secuencias de figuras geométricas, y proceder luego con el análisis de las mismas guiado por preguntas, tablas y gráficas que se proponen en cada desafío. Igualmente, encontrarán problemas retadores cuyo proceso de solución tiene la posibilidad de apoyarlo con manipulativos, herramientas convencionales (regla, escuadra y compás), así como de herramientas tecnológicas.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes construyan sucesiones con el uso de material concreto tales como figuras geométricas en madera y en foamy, siguiendo los desafíos (tareas) que se plantean con enfoque experimental y a través del software dinámico Geogebra. Por lo tanto, cada reto está estructurado mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción del pensamiento algebraico, motivan al docente a realizar conjeturas sobre las condiciones necesarias para obtener la regla de correspondencia y el término general de una sucesión, a establecer además diferencias y similitudes entre las diferentes construcciones, así como las ventajas y desventajas de los recursos utilizados en cada uno de los problemas (retos) planteados.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas de trabajo.

Se tendrá una puesta en común de las actividades dirigida por el investigador, resaltando conceptos básicos, la importancia del algebra en la educación básica primaria y haciendo énfasis en las herramientas disponibles para cada uno de los retos, destacando sus ventajas y el posible impacto en las prácticas pedagógicas.

Cada actividad se desarrollará en presencia del investigador y se evaluará con la participación activa de todos los docentes; en este espacio se identificarán fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otros retos dirigidos al trabajo del pensamiento algebraico en los niños, mediante la resolución de problemas y construcción apoyada en manipulativos concretos, los elementos básicos de trabajo tales como regla, escuadra y compás, igualmente con el apoyo de software dinámico.

Desafío 1. Un acercamiento con el álgebra

Objetivo: Diagnosticar los conocimientos y habilidades de los docentes en la construcción del pensamiento algebraico en los estudiantes del nivel de básica primaria, a través del planteamiento de diferentes situaciones las cuales exigen análisis y razonamiento por parte de los docentes.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (diversidad de fichas), herramientas convencionales de trabajo.

En el laboratorio de matemáticas encontrarán mesas con una capacidad para cuatro docentes, sin embargo, para conservar el distanciamiento social y hacer frente a la pandemia generada por el covid-19, se ubicarán solamente tres docentes en cada mesa.

Responder los siguientes interrogantes, teniendo en cuenta la indicación anterior.
1) Se invita a un estudiante del nivel de educación básica primaria, para que ingrese al laboratorio y establezca como tarea, el número de docentes que allí se encuentran. ¿cuál cree que es la estrategia que utiliza el niño para realizar la tarea? Enfoque su respuesta en un determinado grado de escolaridad entre primero y quinto.
2) Al mismo estudiante se le pregunta si es posible establecer el número de docentes que se pueden ubicar en 10, 11, 12 y 15 mesas. ¿cuál cree que es la estrategia que

utiliza el niño para realizar esta tarea? ¿qué estrategia le recomendaría? Argumentar cada una de las respuestas.
3) Suponiendo que es posible ubicar a cuatro docentes en cada mesa y continuando con el mismo estudiante se le interroga por el número de docentes que es posible ubicar en 3, 4 y 5 mesas. Argumentar sobre los recursos que él utilizaría para desarrollar esta tarea.
4) Teniendo en cuenta el literal anterior y al preguntarle al estudiante por el número de docentes que es posible ubicar en 35 mesas. ¿Cree que utilizaría la misma estrategia que utilizó al responder para 3,4 y 5 mesas? Argumentar describiendo otras posibles estrategias que utilizaría el estudiante.
5) Llevar a la práctica pedagógica los anteriores literales, en su respectivo contexto y en el grado en el cual ha enfocado las respuestas de estos. Identificar y exponer las estrategias y argumentos que los estudiantes utilizan en la actividad propuesta.

Desafío 2. Introducción al algebra "en busca de estrategias de generalización".

Objetivo: Aplicar diferentes estrategias y herramientas en la construcción y generalización del comportamiento de una sucesión, destacando la importancia de las expresiones algebraicas para identificar sus elementos y características.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (figuras geométricas en madera y papel foamy, entre otros), herramientas convencionales de trabajo y sofware Geogebra.

1) Teniendo en cuenta el desafío anterior y con el fin de apoyar al estudiante en la tarea de hallar el número de docentes en el laboratorio, completar las siguientes tablas correspondientes a los numerales **1** y **2** del desafío 1.

# de mesas	Representación	Procedimiento	# de docentes
1		3 x 1	3
2		3 x 2	6
3		□ x 3	
4		3 x □	
5		□ x □	15
6		□ x 6	
. . .			
n		□ X □	□

Tabla 1: Mesas en el laboratorio con capacidad para 3 docentes

# de mesas	Representación	Procedimiento	# de docentes
1		4 x 1	4
2		4 x 2	8
3		□ x 3	
4		4 x □	
5		□ x □	20
6		□ x 6	
7		4 x □	
8		□ x □	
. . .			
n		□ X □	□

Tabla 2: Mesas en el laboratorio con capacidad para 4 docentes

2) Teniendo en cuenta el trabajo en las tablas del numeral anterior, responder los siguientes interrogantes:
   a) ¿El tipo de representación que ellos utilizan corresponde a la situación planteada y favorece el desarrollo de las tareas propuestas a los estudiantes? Argumentar.
   b) Teniendo en cuenta la columna de procedimiento, argumentar sobre las características de las cantidades que permanecen fijas (invariantes) y aquellas que cambian, en cada una de las tablas.
   c) ¿De qué manera la fila **n** favorece el desarrollo de las tareas propuestas en el desafío 1 y cuales serían las dificultades en un posible tratamiento en el aula con sus respectivos estudiantes? Argumentar y apoyarse en ejemplos para justificar la respuesta.

   d) ¿En qué grado de escolaridad cree que es pertinente trabajar este tipo de situaciones haciendo uso de la tabla y de la expresión que se obtiene en la fila **n**? Argumentar su respuesta.

3) Con las fichas que encuentra disponible en el material, reconstruya y continúe las siguientes secuencias de figuras geométricas hasta donde el espacio y el material se lo permita; finalmente, responda los interrogantes en cada caso:
Teniendo en cuenta la secuencia:

   a) ¿Cuál figura corresponde a la posición 10, 14, y 15?, ¿qué estrategia a utilizado para identificarla?
   b) ¿Cuántos triángulos se ubican en la secuencia hasta la posición 20? Argumentar.
   c) ¿Cuántos círculos se ubican en la secuencia hasta la posición 49? Argumentar.
   d) ¿Cuántos cuadrados se ubican en la secuencia hasta la posición 33? Argumentar.
   e) Esta secuencia la podríamos representar con letras, por ejemplo: A B C A B C A . . . ¿De que otra forma la podríamos representar? Argumentar.

4) Teniendo en cuenta la secuencia:

   a) ¿Cuántos cuadros de color negro y cuántos rojos se encuentran hasta la posición 26?, ¿cuál sería la estrategia para determinarlos? Argumentar.
   b) Si en esta secuencia se observaran 5 cuadros negros, ¿cuántos cuadros en total se observarían en la secuencia?, ¿cuál sería la estrategia para responder a esta pregunta?
   c) Si en esta secuencia se observaran 50 cuadros negros y el primer y el último cuadrado fueran negros, ¿cuántos cuadros en total se observarían en la secuencia?, ¿es posible responder utilizando la misma estrategia de la pregunta anterior? Argumentar.

5) Teniendo en cuenta la secuencia:

   a) ¿Qué color le corresponde al cuadrado de la posición 35, 50, y 100?, ¿qué estrategia ha utilizado para identificarlo?
   b) ¿Cuántos cuadrados de color rojo se ubican en la secuencia hasta la posición 22? Argumentar el procedimiento utilizado.
   c) ¿Cuántos cuadrados entre verdes y amarillos se ubican en la secuencia hasta la posición 49? Argumentar el procedimiento utilizado.
   d) ¿Cuántos cuadrados entre rojos y amarillos se ubican en la secuencia hasta la posición 500?, ¿qué estrategia ha utilizado para identificarlos?
   e) ¿De qué otra forma podríamos representar esta secuencia?

6) La siguiente secuencia está construida con triángulos congruentes (iguales) al triángulo de la Figura 1. Su tarea consiste en plantear preguntas o desafíos al respecto de esta figura, dirigidas a sus colegas y/o estudiantes, con el objetivo de construir pensamiento matemático.

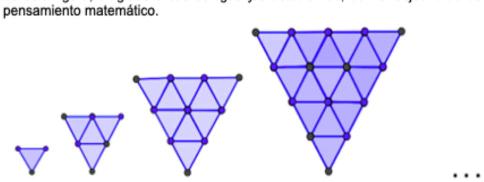


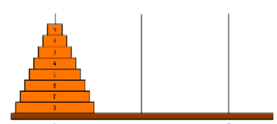
Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Desafío 3: Resolviendo problemas dentro del pensamiento algebraico

Objetivo: Resolver y plantear problemas aplicando conceptos básicos de sucesiones, con el apoyo de material concreto disponible en el laboratorio.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (Torres de Hanoi, figuras geométricas en madera y papel foamy, entre otros), herramientas convencionales de trabajo y software GeoGebra.

1) La torre de Hanoi es un juego que consiste en llevar las fichas del poste origen (A) al poste destino (C), utilizando el poste del centro (B) como apoyo. Luego su tarea es solucionarla, es decir ubicar las fichas en el poste destino, para lo cual debe tener en cuenta las siguientes reglas:
   a) Solo se puede llevar un disco en cada movimiento, y para mover otro los demás tienen que estar en postes.
   b) Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño que él mismo.
   c) Solo se puede desplazar el disco que se encuentre en la parte superior de cada poste



Exponer las fortalezas y dificultades encontradas.
2) Solucione la torre de Hanoi registrando en la siguiente tabla la cantidad mínima de movimientos que se requieren, de acuerdo a la cantidad de fichas que en un momento dado constituyen la torre.

# de fichas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	.	.	n
# de movimientos	1												

Uno de los grupos de trabajo y como se puede evidenciar en la siguiente imagen, establecen el término general, sin embargo, presentan algunas imprecisiones, como se puede observar en la siguiente imagen.
   a) Observe la fila "# de movimientos", ¿corresponde a una sucesión? Argumentar.
   b) ¿Es posible determinar el número mínimo de movimientos que se necesitan para torres de 10, 15, 20 y **n** fichas? Exponer la estrategia al respecto
   c) ¿Para qué grados considera pertinente trabajar la torre de Hanoi? Argumentar describiendo los aprendizajes que los estudiantes obtendrían mediante esta actividad.

3) Un microbús que viaja con rapidez constante, en la primera hora llega al kilómetro 70 (partiendo del kilómetro 0); en la segunda hora llega al kilómetro 140; en la tercera hora, al kilómetro 210; etc. ¿A qué hora llegará a su destino si es una ciudad que se encuentra en el kilómetro 1.050? Además, se sabe que partió a las 4:00AM.
Modelar la situación planteada en una tabla y representarla en un plano cartesiano, para lo cual puede utilizar el Software GeoGebra.
4) Los estudiantes de 3°, con el fin de complementar la formación para la prueba de estado, acordaron con su docente trabajar desde febrero hasta septiembre (30 semanas), ejercicios de matemáticas tipo SABER, haciendo cada semana 2 ejercicios más que la semana anterior. Si la primera semana empezaron realizando 3 ejercicios:

   a) ¿Cuántos ejercicios les tocará realizar la semana 5, 15 y 30? Exponer el procedimiento utilizado para dar respuesta a la pregunta y establecer una estrategia que le permita realizar este cálculo para cualquier número de semanas.

b) ¿Cuántos ejercicios trabajarán en total los estudiantes en el transcurso de las 30 semanas? Argumentar.

5) En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año 1996, si se requiere que las revisiones al sistema se realicen cada 3 años. Responde:

a) ¿En qué año se realizará la décima revisión?

b) ¿Cuál es el número de revisión que se realizará hasta el año 2035?

6) Modelar en Geogebra las situaciones 4 y 5. Exponer las ventajas que ofrece el software y posibles dificultades en un eventual trabajo en el aula con sus respectivos estudiantes.

Anexo 6: Pensamiento espacial

Actividad 05: Pensamiento Espacial

Objetivo: Fortalecer las habilidades de pensamiento espacial en los docentes que atienden el área de matemáticas del nivel de educación básica primaria, a través de actividades a desarrollar con el uso de manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Se interesen en las actividades experimentales, los manipulativos concretos y virtuales como estrategia para trabajar el pensamiento espacial e innovar en su práctica pedagógica.
- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas y den respuestas a las preguntas de los desafíos propuestos en la actividad.
- Ejecuten diferentes estrategias para construir objetos tridimensionales a partir de la proyección en el plano.
- Ejecuten diferentes estrategias para construir el plano de proyección de un objeto tridimensional.
- Resuelvan problemas retadores que involucren objetos tridimensionales y sus diferentes proyecciones en el plano.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Generen actividades relacionadas con el pensamiento espacial, para desarrollar con sus estudiantes utilizando manipulativos concretos, recursos del entorno y/o herramientas tecnológicas.

Materiales: Guía de trabajo, cubo soma, cubos (tamaño dados), herramientas básicas de dibujo y software GeoGebra.

Estructura: Esta actividad está compuesta por cuatro desafíos, cada uno con sub-tareas que están diseñadas para que los docentes trabajen en equipo, apoyados en material concreto tales como: cubo soma, dados, entre otros; el cual será fundamental en la experimentación, e igualmente se apoyarán en el software GeoGebra como herramienta para fortalecer las habilidades de visualización y por lo tanto el pensamiento espacial.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de la experimentación, construyan elementos, características y adquieran habilidades de visualización que les permita fortalecer el pensamiento espacial, con el uso de material concreto, actividades con el cubo soma, resolución de problemas y la interacción con la aplicación GeoGebra en el contexto 3D. Luego, los docentes seguirán la guía de trabajo como orientación, la cual está estructurada mediante desafíos, con enfoque experimental; a su vez estos, se estructuran mediante preguntas heurísticas diseñadas cuidadosamente para que los docentes conjeturen, experimenten y descubran conceptos básicos, técnicas y estrategias de representación en el plano de un objeto tridimensional. Los docentes igualmente analizan los recursos utilizados, ventajas y desventajas, así como la pertinencia en eventual práctica pedagógica con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes, se espera que el líder de cada grupo surja de forma natural durante el transcurso de la actividad; el tiempo estimado para el desarrollo de la misma es de 12 horas.

Se tendrá una puesta en común de las actividades, dirigida por el investigador, haciendo énfasis en los materiales disponibles para cada uno de los desafíos, destacando sus fortalezas, posibles dificultades y retos en la construcción de pensamiento espacial en los educandos.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes – investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de todos los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otros desafíos dirigidos a fortalecer en sus educandos las habilidades de visualización, las técnicas y estrategias de representación en el plano de un objeto tridimensional, usando material concreto, el cubo soma, multicubos, entre otros, así como el software dinámico GeoGebra.

Desafío 1: Un acercamiento con objetos tridimensionales

Objetivo: Construir y representar en el plano algunos objetos tridimensionales, con el fin de observar en los docentes las habilidades de pensamiento espacial.

Materiales: Cubos tamaño dados, figuras prediseñadas, herramientas básicas de dibujo y guía de trabajo.

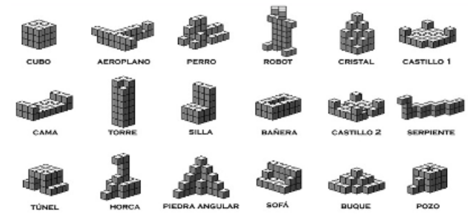
Desarrollar los siguientes puntos teniendo en cuenta los 27 cubos en madera que encuentra disponible para esta actividad.

a) Construir un cubo utilizando todos los 27 cubos pequeños (tamaño de un dado) que encuentra dentro del material y determinar el número de caras, vértices y aristas del sólido resultado de esta construcción.

b) Separar los 27 cubos: 6 grupos de 4 y un grupo de 3. Construir las siguientes figuras utilizando pegamento y aplicar un color diferente para cada grupo. El reto consiste en armar nuevamente el cubo con estas piezas, al lograrlo obtiene el conocido "cubo soma". Exponer la estrategia utilizada en esta construcción sus fortalezas y dificultades encontradas.

c) Dibujar en una hoja el cubo obtenido en el literal anterior, especificando la medida de su largo, ancho y alto. Exponer la estrategia o técnica utilizada al respecto.

d) Las siguientes figuras están construidas con las piezas del cubo soma, su reto consiste en reconstruirlas (no necesariamente todas). Exponer las fortalezas y dificultades encontradas.



e) Seleccionar tres de las construcciones del literal anterior y dibujarlas en hojas. Exponer la estrategia o técnica utilizada al respecto.

f) Teniendo en cuenta los literales anteriores, ¿Qué habilidades fortalecerían los estudiantes de la educación básica primaria, con este tipo de actividades? Argumentar.

Desafío 2: **Construcción de figuras geométricas en el plano y en el espacio**

Objetivo: Construir algunas figuras geométricas en el plano y en el espacio e identificar sus elementos y características, utilizando manipulativos concretos y virtuales.

Materiales: Fichas, palillos, plastilina, cubo soma, hojas blancas y cuadriculadas, software dinámico GeoGebra.

a) Ubique en su entorno tres figuras geométricas "bidimensionales" y tres tridimensionales. Exponer las características de cada objeto, y las fortalezas o dificultades para hallar cada uno de estos.

b) Con el uso de los palillos y la plastilina, representar las figuras que fueron ubicadas en el literal anterior. Identificar sus elementos básicos (caras, vértices, aristas, …). Exponer fortalezas y dificultades.

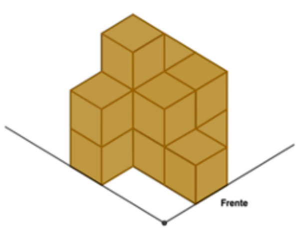
c) Completar la siguiente tabla, con la información correspondiente a cada una de las figuras construidas en los literales anteriores. (incluir el cubo)

Figura geométrica	# de caras	# de aristas	# de vértices
El cubo			

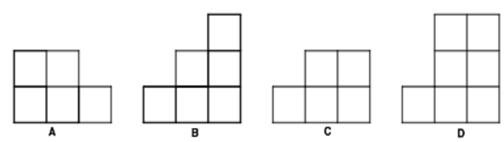
e) Teniendo en cuenta los datos registrados en la tabla anterior, para el cubo, realice la suma de sus caras más sus vértices, ahora observe y compare con el número de aristas agregándole 2. ¿Qué puede concluir? Experimentar y exponer si es posible extender esta relación a otras figuras.

f) Construir con el uso del software GeoGebra las figuras seleccionadas en el literal **a**, especificando las características de cada una de estas. Exponer sus fortalezas, dificultades, ventajas y desventajas acerca del uso del software en este tipo de actividades.

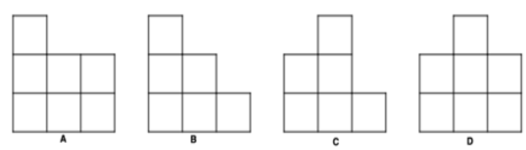
g) Determinar cuántos cubos (tamaño dados), se utilizaron para construir la siguiente figura. Tenga en cuenta que no existen espacios ocultos y cada cubo descansa sobre otro cubo excepto los que descansan en el piso.



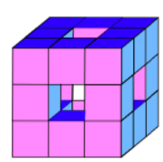
¿Cuál de los siguientes planos corresponde a la vista lateral derecha de la sección de cubo que se presenta en la anterior imagen?



¿cuál de los siguientes planos corresponde a la vista lateral izquierda de la misma sección de cubo? Argumentar y exponer la estrategia utilizada en el trabajo de este literal, describiendo fortalezas y dificultades.



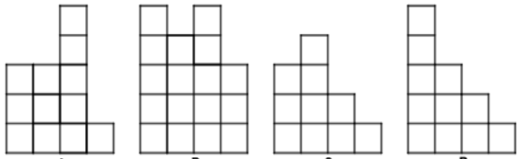
h) ¿Cuántos cubos (tamaño dados) se necesitan para construir la siguiente figura geométrica, dejando los orificios que se indican en la misma? Argumentar



i) Francisco esta construyendo una maqueta de un conjunto residencial, el avance que se conoce al respecto se encuentra registrado en la cuadricula 4 x 3 que se muestra a la derecha, cada celda indica el número de niveles de cada torre. ¿Cuál de las siguientes vistas observa Francisco cuando se ubica al frente de su maqueta?

5	3	2	1
4	3	5	3
3	4	2	1

Frente



A B C D

j) Considerando la posibilidad de llevar al aula con sus respectivos estudiantes las actividades planteadas en los tres literales anteriores, exponga mencionando el grado escolar, los ajustes (metodología, recursos, entre otros), que realizaría para lograr una práctica pedagógica significativa.

Desafío 3: Proyectando objetos tridimensionales

Objetivo: 1. Construir secciones de multicubo y representarlos en el plano mediante proyección ortogonal y por niveles. 2. Construir secciones de multicubo e identificar características de sus respectivas proyecciones en el plano: perspectiva, paralela e isométrica.

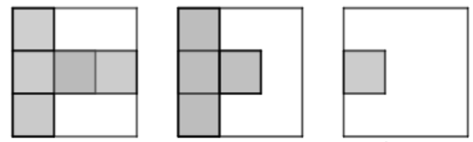
Materiales: Materiales manipulativos (dados), herramientas básicas de dibujo (regla, escuadra, compás, …)

a) Los estudiantes de grado quinto deben construir un multicubo con 27 dados que tienen disponibles para la actividad y plasmar esta construcción en el cuaderno de apuntes como evidencia de su trabajo. El docente les recomienda realizar varias tomas fotográficas desde diferentes ángulos con el fin de apoyar la representación del mismo en el cuaderno. Experimentar esta actividad siguiendo la recomendación que el docente realiza a sus estudiantes. Argumentar sobre la efectividad de la misma, y las condiciones que las diferentes tomas fotográficas deben cumplir para que oriente de manera adecuada la actividad de los estudiantes.

b) Usando los dados disponibles en el material, construya la sección de multicubo que se presenta a continuación. Específicamente su tarea consiste en dibujar en el cuaderno las tres proyecciones que se presentan en la imagen, (apoyarse en las herramientas básicas de dibujo: regla, escuadra, compás, …). Exponer las características de cada proyección y la estrategia que utilizaron para dibujarlas en el cuaderno.

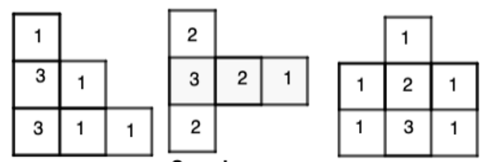
Proyección 1 Proyección 2 Proyección 3

c) Observa los siguientes planos, y construya los mismos usando los dados y a continuación superponga las construcciones de acuerdo al orden que se indica en la imagen. Compare la figura obtenida con las proyecciones construidas en el literal anterior. ¿Qué puede concluir al respecto? Argumentar.



Inferior **Central** **Superior**

d) En la imagen siguiente se observa otra forma de representación de un objeto tridimensional; con el uso del material manipulativo (dados), realice la construcción del mismo y determine el significado de la numeración. Exponer la estrategia en esta tarea fortalezas y dificultades encontradas.

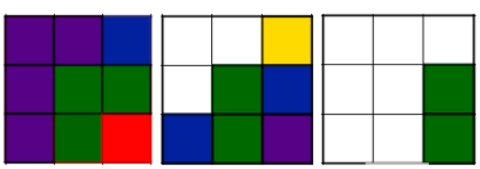


Frente **Superior** **Derecho**

e) La siguiente imagen corresponde a la fotografía (frente, superior y derecha), de una sección de multicubo, utilizando el material manipulativo (dados), construya el objeto tridimensional. Argumentar sobre los elementos que se dan en la imagen, fortalezas y dificultades encontradas en la realización de esta tarea. ¿Cree que faltó la numeración en la imagen? Argumentar.

Frente Superior Derecha

f) Observa la siguiente imagen que corresponde al plano de cada uno de los niveles de un objeto tridimensional, construya el mismo usando los dados. Compare la figura obtenida con la construidas en el literal anterior. ¿Qué puede concluir al respecto? Argumentar



Inferior Central Superior

g) Haciendo uso del material de laboratorio construir un objeto tridimensional y representarlo en el plano de dos formas diferentes.

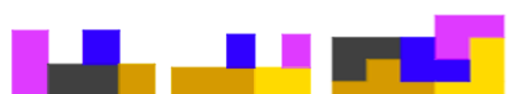
Desafío 4: Jugando con el cubo soma

Objetivos: 1. Construir objetos tridimensionales a partir de su proyección ortogonal en el plano y viceversa. 2.Resolver algunos problemas e interactuar con el software GeoGebra en el contexto 3D.

Materiales: Cubo soma, material manipulativo (dados), software GeoGebra
Con el uso del cubo soma, realizar las siguientes construcciones:
a) Construir las secciones de cubo soma utilizando solo las cuatro fichas del mismo, las cuales se indican en los siguientes planos. A continuación, represente esta construcción en un plano mediante proyección ortogonal codificada, de tal forma que sea posible su construcción con el material manipulativo cubos (tamaño dados).

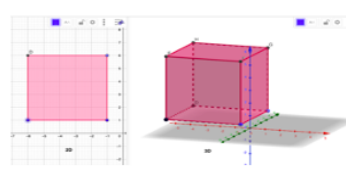
Izquierda **Frente** **Superior**

b) Construir las secciones de cubo soma utilizando cinco fichas del mismo, las cuales se indican en los siguientes planos. A continuación, represente esta construcción en un plano mediante proyección por niveles, de tal forma que sea posible también una construcción con el material manipulativo (dados).



Izquierda **Frente** **Superior**

c) La siguiente es una imagen en GeoGebra, su tarea consiste en analizar cada una de las figuras, establecer la relación entre estas e ingresar a la mencionada aplicación, realizar la construcción y exponer conclusiones.



d) Teniendo en cuenta el literal anterior, ¿cómo relaciona esta representación con el trabajo realizado en el desafío 3? Argumentar

e) Diseñar otros retos dirigidos al trabajo del pensamiento espacial en los niños mediante la resolución de problemas, la construcción apoyada en manipulativos concretos y virtuales tales como la aplicación GeoGebra entre otras. Exponer en plenaria estas propuestas con el fin de retroalimentar y ajustar si se considera necesario.

Anexo 7: Recolección e interpretación de gráficas estadísticas

Actividad 06: Recolección e interpretación de gráficas estadísticas

Objetivo: Fortalecer el pensamiento estadístico de los docentes y de sus estudiantes, a través del análisis e interpretación de gráficas, correspondientes a situaciones cotidianas en diferentes campos.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos y virtuales en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Planeen y ejecuten diferentes estrategias que les permita generar ambientes de aprendizaje en contextos estadísticos.
- Representar un conjunto de datos a partir de un pictograma, diagrama de barras y circular, e interpretar lo que estos representan.
- Resuelvan problemas retadores que involucren los conceptos básicos e interpretación de graficas estadísticas.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad.
- Generen en equipo actividades relacionadas con la representación e interpretación de datos estadísticos, proyectadas a ser desarrolladas con sus respectivos estudiantes en un ambiente de laboratorio.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (figuras geométricas, tableros prediseñados, bolsas de caramelos …), Excel y software GeoGebra.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con materiales concretos, el programa Excel y el software GeoGebra, principalmente como apoyo para la presentación e interpretación de la información. La experimentación y análisis se estructura mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción de aprendizajes en el componente estadístico.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de los desafíos que se proponen en la actividad representen e interpreten datos estadísticos, consoliden conceptos asociados, utilizando diversidad de material, el programa Excel y el software GeoGebra, los cuales estarán organizados y disponibles en el laboratorio de matemáticas; es así como mediante desafíos que relacionan situaciones de contextos reales, estratégicamente pensados para lograr en los docentes y en sus estudiantes aprendizajes significativos.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 12 horas de trabajo.

Se expone por parte del investigador una puesta en común de las actividades, haciendo énfasis en las prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por sus docentes, en las herramientas disponibles para cada uno de los desafíos y retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del pensamiento estadístico, específicamente la presentación e interpretación de datos, en los estudiantes desde sus primeros niveles de formación.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes – investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de todos los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otras actividades en las cuales se incluyan desafíos a desarrollar con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas que involucren situaciones cotidianas.

Desafío 01: Presentando la Información

Objetivo: Construir usando papel y lápiz, y programa Excel, diferentes gráficos utilizados en la presentación de información estadística, partiendo de un conjunto de datos, los cuales hacen referencia a situaciones cotidianas.

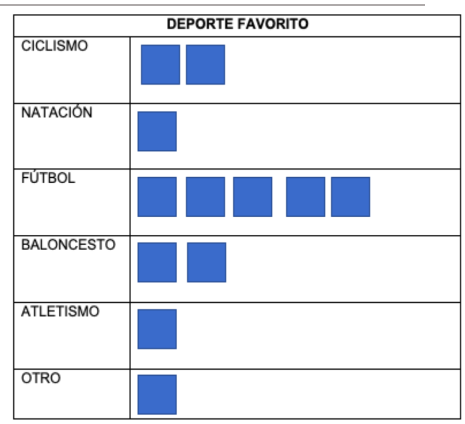
Materiales: Herramientas convencionales (regla, escuadra, compás, lápiz, papel,), listas de datos, manipulativos concretos y programa Excel.

a) El directivo de la Institución Educativa el Dorado del Municipio de Sesquilé, solicita a cada uno de los directores de grupo, la información sobre el número de estudiantes de cada familia matriculados en la Institución; esto con el fin de gestionar el apoyo de herramientas tecnológicas; pues el consejo directivo ha determinado hacer entrega de un computador por familia o dos si el número de hijos es de tres o más.

La docente directora de grado tercero recopila esta información a través del grupo de WhatsApp que tiene con sus estudiantes como uno de los medios de interacción. Luego la docente debe presentar esta información en asamblea general, para lo cual quiere utilizar una gráfica estadística que le facilite esta tarea; al respecto, solicita apoyo a sus compañeros docentes para que la orienten.
Proponer y construir un tipo de gráfica estadística, que le permita a la docente presentar su información de una manera efectiva, tenga en cuenta la siguiente tabla en la cual la docente ha recopilado la información de cada familia. Exponer la propuesta y argumentar sobre la efectividad de la misma.

GRADO TERCERO	FAMILIA	HIJOS EN EL COLEGIO
1	ALVARADO ROJAS	2
2	ALVAREZ JIMENEZ	1
3	AMAYA BUITRAGO	3
4	AMAYA CAINA	1
5	BRICEÑO GOMEZ	2
6	CARDENAS VANEGAS	3
7	CASTAÑEDA ACERO	1
8	CASTRO ZAMUDIO	4
9	CAVANZO QUIROGA	2
10	CHACON CASTELBLANCO	3
11	CHAUTA ALAGUNA	2
12	CHAUTA GARZON	4
13	CUPITRA VEGA	2
14	GARZON CABALLERO	1
15	GUAQUETA BERNAL	1
16	MALDONADO CASTAÑEDA	1
17	MARQUEZ PACHECO	3
18	MARTINEZ ALMECIGA	4
19	MEDINA SANCHEZ	3
20	MOLINA GOMEZ	2
21	MORERA MORERA	1
22	PUIN NARANJO	3
23	QUINTERO ROJAS	2
24	RODRIGUEZ PEREZ	1
25	ROJAS CARRANZA	3
26	ROMERO GIL	2
27	SANCHEZ SOLANO	1
28	SANTAMARIA MORENO	3
29	SEGURA VANEGAS	2
30	TURMEQUE PINZON	1
31	VANEGAS GUTIERREZ	1

b) La docente de grado primero aplicó a sus estudiantes una encuesta o estudio, respecto al deporte favorito de cada uno de ellos, para tal fin ella diseño una tabla como la que se observa en la siguiente imagen, por su parte los niños tenían que colocar un cuadrado que previamente habían diseñado con el fin de indicar su deporte favorito.



Con esta actividad la docente y sus estudiantes encuentran una estrategia para organizar datos e igualmente analizarlos. Su tarea consiste en hallar la moda e interpretarla.
c) Teniendo en cuenta el literal anterior, exponer las afirmaciones o inferencias que es posible realizar de la gráfica que ha construido la docente con sus estudiantes.

d) Teniendo en cuenta el literal **b.** Si se aplica la encuesta a todo el colegio, es decir para una población aproximada de 200 estudiantes, ¿Es posible utilizar la misma estrategia de la docente de primero para organizar los datos?, ¿qué ajustes realizaría? Argumentar.
e) Plantear otro tipo de representación gráfica que permita igualmente determinar el deporte favorito de los estudiantes, o estudio similar; que sea cómoda y efectiva para cualquier tamaño de la población.

Desafío 02: Interpretando Gráficas Estadísticas

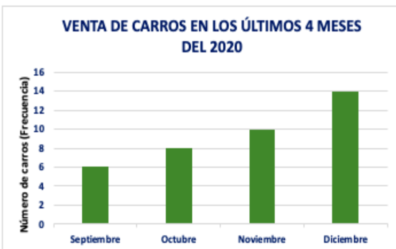
Objetivo: Interpretar datos organizados en diferentes gráficas estadísticas, mediante el uso de manipulativos concretos, programa Excel e instrumento de crecimiento infantil de la OMS.

Materiales: Manipulativos concretos, programa Excel e instrumento de crecimiento infantil de la OMS.

a) El siguiente pictograma representa el número de vehículos que un concesionario vendió en los últimos 4 meses del año 2020.

Su tarea consiste en plantear preguntas relacionadas con la interpretación de esta gráfica estadística, que considere pertinente para orientar hacia la construcción de pensamiento estadístico en sus estudiantes. Argumentar y exponer destacando los materiales a utilizar para facilitar la práctica en un ambiente de laboratorio.

b) Analizar si el siguiente diagrama de barras describe de manera acertada la situación que se presenta en el literal anterior, y sugerir ajustes al respecto. ¿Qué ventajas o desventajas puede observar de este tipo de gráfica frente al pictograma? Argumentar.

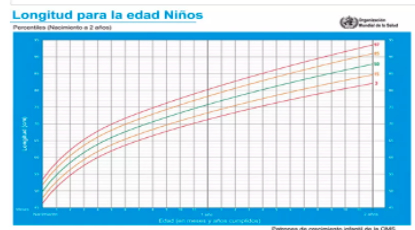


c) Analizar sobre los conocimientos previos que debe tener el estudiante para iniciar la construcción en papel del diagrama de barras. Argumentar mencionando desde que grados de la educación básica primaria es pertinente incluirlo en la práctica de aula.

d) Construir en Excel el diagrama circular correspondiente a la situación planteada en el literal **a.** Argumentar sobre los elementos que ofrece este tipo de gráfica para la interpretación de la información, sus ventajas y desventajas frente al pictograma y diagrama de barras.

e) Analizar sobre los conocimientos previos que debe tener el estudiante para iniciar la construcción en papel del diagrama circular. Argumentar mencionando desde que grados de la educación básica primaria es pertinente incluirlo en la práctica de aula.

g) El siguiente gráfico estadístico muestra el crecimiento de Francisco en sus primeros dos años. Su tarea consiste en determinar si el crecimiento de Francisco está dentro de los parámetros normales; como herramienta al respecto, en el laboratorio encontrará el instrumento (Curvas de crecimiento OMS), dispuesto por la Organización Mundial de la Salud OMS para tal fin. Exponer la estrategia utilizada para la realización de la tarea, fortalezas y dificultades.



[1]

[1] Recuperado de: https://www.sap.org.ar/docs/profesionales/percentilos/TE060V.jpg

h) Registrar la estatura de sus estudiantes una vez al mes durante el tiempo de realización del diplomado, y analizar el crecimiento de ellos utilizando el instrumento de la OMS. Exponer los hallazgos, fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora. (Asignado para trabajo autónomo).

Desafío 03: Interpretando tablas de frecuencias

Objetivo: Interpretar datos organizados en tablas de frecuencias, apoyados en actividad anteriormente desarrollada y en situaciones cotidianas diseñadas con el fin de generar discusión constructiva entre los docentes participantes.

Materiales: Tablas de datos, material concreto (chocolates m&m), programa Excel

a) En el desafío 2, se trabajó la siguiente tabla correspondiente a la frecuencia absoluta del contenido y sus colores de un paquete de m&m. En está oportunidad le agregamos otras columnas (resaltadas en color naranja), estas hacen referencia a las diferentes frecuencias, la distinción de las mismas se realizará mediante discusión constructiva con los docentes. Por ahora su tarea consiste en completar el diligenciamiento de las columnas.

Color	Frecuencia absoluta	F?	F?	F?
Rojo	13	13/62 = 0.2	13	0.2
Café	12	0.19	25	0.39
Amarillo	8		33	
Verde	9	0.14		0.65
Naranja	11			
Azul	9			
Total	62			

b) Con el fin de motivar la discusión que nos permita distinguir las diferentes frecuencias, y su relevancia en la interpretación de datos, se invita a los docentes para que teniendo en cuenta la tabla anterior de frecuencias, analicen los siguientes casos:

1. La docente de grado quinto organiza a sus estudiantes en grupos para facilitar el trabajo en equipo y les pide a ellos que interpreten las frecuencias seleccionadas en azul, a continuación se presenta la respuesta de cada uno de los equipos:
   - Equipos A: El paquete m&m incluye 9 unidades de color verde que equivale a 0.14
   - Equipos B: El paquete m&m incluye 9 unidades de color verde que equivale al 14 % del contenido total.
   - Equipos C: El paquete m&m incluye 9 unidades de color verde que equivale a 0.14
2. Similar al ejercicio anterior, la docente propone a sus estudiantes interpretar las frecuencias resaltadas en color verde, a continuación se presenta la respuesta de cada uno de los equipos:
   - Equipos A: El paquete m&m incluye un 39 % de su contenido entre rojas y café, las cuales equivalen 25 unidades.
   - Equipos B: El paquete m&m incluye 25 unidades entre rojas y café, las cuales equivalen a un 39% del contenido total.
   - Equipos C: El paquete m&m incluye 25 unidades de color café que equivalen a un 0.14

Ahora su tarea consiste en analizar la respuesta de los estudiantes. Exponer las fortalezas halladas, las dificultades y las estrategias de mejora que implementaría en el aula con sus respectivos estudiantes.

c) La Administración de un Municipio de Cundinamarca, en atención a las peticiones de apoyo de los comerciantes ante la disminución de sus ventas a causa de la pandemia, quiere ofrecer subsidios, pero distribuirlos de acuerdo a las necesidades de cada propietario evidenciadas en las ventas; para tal fin realizó seguimiento, en una etapa inicial a las cafeterías. Resultado de este estudio ha publicado a través de sus redes sociales la siguiente información: *En la siguiente tabla se publica los resultados de las ventas en miles, durante una semana correspondiente a las 60 cafeterías del Municipio.*

Entre	Frecuencia absoluta (F)
5 – 10	2
11 – 15	6
16 – 20	11
21 – 25	14
26 – 30	15
31 – 35	9
36 – 40	3
Total	**60**

Frente a esta publicación, la docente de grado quinto observa la oportunidad para fortalecer la interpretación de tablas de frecuencias y propone a sus estudiantes interpretar cada una de estas.

Teniendo en cuenta lo anterior: ¿Cuál es la interpretación acertada que deben exponer los estudiantes?, por ejemplo, ¿qué significa que la frecuencia sea 15? Argumentar.

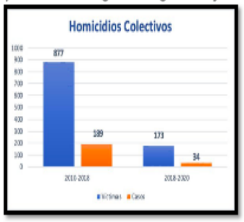
d) Teniendo en cuenta el literal anterior, la docente pide a los estudiantes hallar: Frecuencia relativa (Fr), Frecuencia absoluta acumulada (Fa) y Frecuencia relativa acumulada (Fra). Como herramienta de apoyo utilizar la siguiente tabla.

Entre	F	Fr	Fa	Fra
5 – 10	2			
11 – 15	6			
16 – 20	11			
21 – 25	14			
26 – 30	15			

31 – 35	9			
36 – 40	3			
Total	**60**			

e) Teniendo en cuenta el literal anterior y con el fin de apoyar la retroalimentación que brindará la docente al grado quinto, atender a los puntos siguientes:
1. Exponer la solución a la tarea e interpretar los datos que se resaltan en color.
2. Reflexionar sobre las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes y proponer al respecto estrategias de atención.

f) Analizar las siguientes gráficas y establecer conclusiones



g) Diseñar otros desafíos dirigidos al trabajo en el pensamiento estadístico en los niños, mediante la resolución de problemas que involucren situaciones cotidianas, el uso de manipulativos concretos, el programa Excel entre otras. Exponer en plenaria estas propuestas con el fin de retroalimentar y ajustar si se considera necesario.

Anexo 8: Pensamiento Variacional

Actividad 07: Pensamiento Variacional

Objetivo: Construir a través de la experimentación, elementos, características y propiedades del pensamiento variacional; con el uso de material concreto, actividades lúdicas y software Geogebra.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Se interesen en las actividades experimentales, los manipulativos concretos y virtuales como estrategia para trabajar el pensamiento variacional e innovar en su práctica pedagógica.
- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas y den respuestas a las preguntas de los desafíos propuestos en la actividad.
- Ejecuten diferentes estrategias para relacionar magnitudes, construir sucesiones, e identificar sus elementos y características.
- Resuelvan problemas retadores que involucren sucesiones, con el uso variado de recursos.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Generen actividades relacionadas con pensamiento variacional, para desarrollar con sus estudiantes utilizando manipulativos concretos, recursos del entorno y/o herramientas tecnológicas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (esferas, pesas, resortes, rampas, vasos plásticos y otros materiales) y software Geogebra.

Estructura: Esta actividad está compuesta por tres desafíos, cada uno con sub-tareas que serán diseñadas para que los docentes trabajen en equipo, apoyados en material concreto el cual será fundamental en la experimentación, e igualmente se apoyarán en el software Geogebra como herramienta para fortalecer el análisis mediante la visualización del comportamiento de magnitudes.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes, a través de la experimentación, construyan elementos, características y propiedades del pensamiento variacional con el uso de material concreto, actividades lúdicas y software Geogebra. Luego, los docentes seguirán la guía de trabajo como orientación, la cual está estructurada mediante desafíos, con enfoque experimental y a través del software dinámico Geogebra. Por lo tanto, cada desafío está estructurado mediante preguntas heurísticas que favorecen la construcción del pensamiento variacional, motivan al docente a realizar conjeturas sobre la relación que se establece entre magnitudes y el comportamiento de las mismas con el paso del tiempo y otros factores. Los docentes igualmente analizan los recursos utilizados, ventajas y desventajas, así como la pertinencia en eventual práctica pedagógica con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres, el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas.

Se tendrá una puesta en común de las actividades, dirigida por el investigador, haciendo énfasis en las herramientas disponibles para cada uno de los retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del pensamiento variacional en los niños.

Cada actividad se desarrollará en presencia del investigador y se evaluará con la participación activa de todos los docentes; en este espacio se identificarán fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad los docentes diseñarán otros desafíos dirigidos a la resolución de problemas en el contexto de pensamiento variacional a través de la experimentación con manipulativos concretos y virtuales (software dinámico).

Desafío 1: Vamos al campo, un primer encuentro para el razonamiento variacional.

a) Colocar en germinación una semilla (frijol, alverja, ajo, maíz, …), que será seleccionada por cada docente, de tal forma que se adapte al contexto del lugar de residencia de cada uno.

b) Teniendo en cuenta el punto anterior, realizar seguimiento al desarrollo de la planta, registrando la longitud alcanzada en cada semana, para lo cual se recomienda utilizar la siguiente tabla.

Semana	Longitud (cm)	Observaciones
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

c) Teniendo en cuenta la tabla anterior, establecer el incremento que alcanza la planta en cada semana y argumentar si se mantiene constante, aumenta o disminuye.

d) ¿Es posible estimar la longitud que alcanza la planta al cabo de la semana 9, 10, 12 y 14? Argumentar en qué recurso se puede apoyar para lograrlo, las ventajas de esta predicción para el desarrollo del cultivo y las posibles dificultades que se pueden presentar.

e) Construir una gráfica en el plano cartesiano, de tal forma que se relacione la longitud (cm) que adquiere la planta con el transcurrir del tiempo (semanas). Conjeturar sobre las posibles utilidades de esta gráfica, para el análisis del desarrollo de las plantas.

Desafío 2: Encontrando regularidades y aplicaciones de las sucesiones en diferentes campos de la ciencia.

Objetivo: Construir a través de la experimentación, actividades lúdicas y software Geogebra, elementos y características básicas del pensamiento variacional.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (esferas, pesas, resortes, rampas, vasos plásticos y otros materiales) y software Geogebra.

a) Toma la pelota que encuentra dentro de los materiales disponibles y llevarla a la altura que le permita el brazo, luego soltarla. Su tarea consiste en estimar y registrar la altura que logra la pelota en cada rebote. Argumentar sobre las estrategias que utilizaron al respecto, fortalezas y dificultades.

b) Realizar la tarea anterior, de tal forma que al fondo de la misma se tenga la pared del salón o tablero, y acordar en el grupo, para que cada uno de los integrantes se encargue de hacer seguimiento y registrar la altura de solamente un rebote del balón. ¿Esta organización facilita el registro de datos en la actividad?, argumentar al respecto.

c) Con el uso del celular, realizar el literal a y registrar en video el movimiento del balón. ¿Facilita esta estrategia el registro de datos y análisis de la actividad?, argumentar al respecto.

d) Según los literales anteriores y teniendo en cuenta aquel que le ofrezca una mayor comodidad para el análisis de los datos, responda los siguientes interrogantes, argumentando en cada caso.

¿Qué puede concluir de la altura alcanzada por la pelota en cada rebote?

¿Qué sucede con la pelota en el momento que alcanza su máxima altura en cada rebote?

¿Qué le sucede a la pelota a medida que transcurre el tiempo?

e) Teniendo en cuenta el literal anterior, construya un gráfico (el que crea pertinente), para representar el movimiento de la pelota con sus respectivas características. Argumentar sobre las dificultades que puede generar la construcción de la gráfica en un eventual trabajo con los estudiantes en el aula. ¿Cree que la construcción de la gráfica es significativa? Argumentar.

f) Analizando el movimiento de un móvil: Utilizando la rampa (ver imagen), esfera, metro y cronómetro que encuentra disponible dentro del material. Ubique la rampa en dirección y a una distancia de 5mts de la pared, suelte la esfera desde la parte más alta; su tarea consiste en tomar el tiempo que tarda esta en hacer contacto con la pared. Realizar el procedimiento en varias ocasiones cambiando la distancia a la pared. Sugerencia: organice los datos en la siguiente tabla.

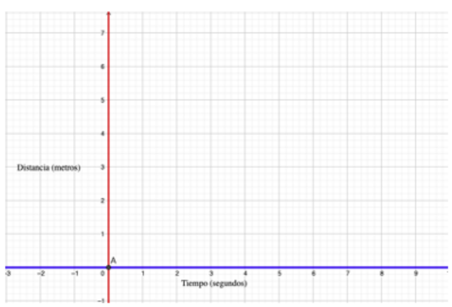
#	Distancia (metros)	Tiempo (segundos)
1	**5 m**	
2		
3		
4		
5		
6		

¿Qué le sucede a la esfera a medida que transcurre el tiempo en cada lanzamiento? Argumentar

¿Qué sucede con el tiempo a medida que se aumenta o se disminuye la distancia a recorrer por la esfera? Argumentar.

¿Qué relación puede establecer entre la distancia recorrida por la esfera y el tiempo empleado? Argumentar.

g) Teniendo en cuenta la tabla del literal anterior, construya la gráfica en el plano cartesiano que se indica a continuación



¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ¿Qué puede deducir de esta gráfica y su relación con el movimiento de un móvil? Argumentar cada una de sus respuestas.

¿Qué apoyo encuentra con la construcción de esta gráfica correspondiente al movimiento de la esfera? ¿resulta pertinente en el trabajo con estudiantes en el aula? Argumentar.

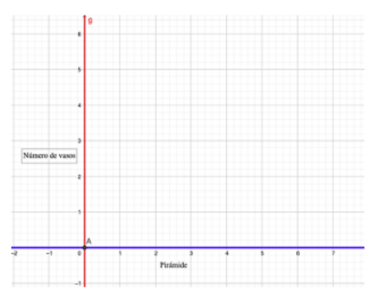
h) Organizados en grupos máximo de a cuatro docentes, construir pirámides que tengan desde un nivel hasta cinco niveles (ver imagen la cual corresponde a una pirámide de 4 niveles). ¿Cuántos vasos se necesitan para cada pirámide? Conjeturar sobre el número de vasos que se necesitarán para construir pirámides de 6, 7, 10 y 15 niveles.

i) Teniendo en cuenta el literal anterior complete la siguiente tabla, argumentando el procedimiento para tal fin.

Pirámide # de niveles	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	16
# de vasos												

j) ¿Es posible anticipar a la construcción de una determinada pirámide, el número de vasos que se necesitan? Argumentar el procedimiento al respecto

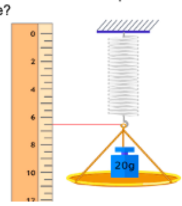
k) Representar los datos de la tabla del literal **i** en el siguiente plano cartesiano. ¿Es posible realizar la tarea del literal **j** apoyada en esta gráfica? ¿Qué otros elementos y/o características es posible identificar con el apoyo de esta gráfica? Argumentar.



l) Agregar 400 ml de agua al recipiente (tubo de ensayo) que se muestra en la siguiente imagen y halle la altura que alcanza el líquido en este recipiente. Repita este procedimiento agregando 100ml, 200ml, 300ml, 500ml, 700ml y 1000ml de agua. Organizar los datos obtenidos y responder:

¿Es posible anticipar a la experiencia, la altura que alcanza el liquido al agregar 250ml, 550ml y 900ml en el tuvo de ensayo? Argumentar
¿Qué sucede con la altura del liquido al agregar o desalojar el mismo en el recipiente?
¿Qué tipo de relación se establece entre los mililitros de agua que se agregan al tubo de ensayo y la altura que el liquido alcanza? Argumentar

m) Suspenda del resorte pesas (masas) de 4g, 6g, 8g, 10g y 20g, registre la longitud que adquiere el resorte en cada caso. Organizar la información en una tabla o gráfica que crea pertinente y le permita registrar de forma organizada la longitud que adquiere el resorte en cada caso, y responder:
¿Qué características identifica de las longitudes que adquiere el resorte a medida que se suspenden las pesas?
¿Qué sucede con la longitud del resorte al aumentar o disminuir el número de pesas suspendidas?
¿Qué relación puede establecer entre las pesas suspendidas del resorte y la longitud que este adquiere?



¿Es posible anticipar a la experimentación, la longitud que alcanza el resorte con masas diferentes a las ya experimentadas? Exponer argumentos.

Desafío 3: Software dinámico en el análisis de sucesiones

Objetivo: Modelar a través del software dinámico Geogebra situaciones que implican sucesiones

Materiales: Computador y software dinámico Geogebra

a) Construir en Geogebra la tabla y gráfica del plano cartesiano, que se trabajó en el desafío 1. Exponer las fortalezas, ventajas y desventajas de esta aplicación en el desarrollo de esta actividad y su pertinencia en una eventual práctica pedagógica con sus respectivos estudiantes.

b) Construir en Geogebra la tabla y gráfica del plano cartesiano, que se trabajó en el desafío 2, literales **i** y **k**. Exponer las fortalezas, ventajas y desventajas de esta aplicación en el desarrollo de esta actividad y su pertinencia en una eventual práctica pedagógica con sus respectivos estudiantes.

c) Modelar en Geogebra el literal **l** del desafío 2, correspondiente a los cambios de altura que se alcanza en el tubo de ensayo al agregar o extraer diferentes cantidades de agua. ¿De qué manera favorece el análisis de este cambio y la respuesta a la pregunta que allí se plantea? ¿cree que es posible ampliar el análisis de esta situación con el uso del software? Argumentar en cada caso.

d) Modelar en Geogebra el literal **m** del desafío 2, correspondiente a los cambios de longitud que adquiere el resorte. ¿De qué manera favorece el análisis de este cambio y la respuesta a la pregunta que allí se plantea? ¿cree que es posible ampliar el análisis de esta situación con el uso del software? Argumentar en cada caso.

e) Plantear otras situaciones que conlleve a realizar razonamiento variacional, mediante diferentes estrategias y herramientas incluida la tecnología tales como software dinámico y otros que considere pertinente, para fortalecer las prácticas de aula.

Anexo 9: Razones, proporciones y sus aplicaciones

Actividad 08: Razones, proporciones y sus aplicaciones

Objetivo: Contribuir al desarrollo del razonamiento proporcional en los docentes y sus estudiantes, haciendo uso de manipulativos concretos y virtuales, para que a través de situaciones cotidianas y preguntas orientadoras ellos construyan conceptos y consoliden estrategias en la solución de problemas en diferentes contextos.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos y virtuales en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Planeen y ejecuten diferentes estrategias que les permita construir el concepto de razón y proporción, así como sus propiedades.
- Resuelvan y formulen problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
- Analicen sus propias producciones en cada uno de los desafíos propuestos, y propongan estrategias de atención a las dificultades que se pueden presentar en la práctica de aula con sus respectivos estudiantes.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad y situaciones en contextos reales.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad, identifiquen fortalezas, dificultades y planteen oportunidades de mejora.
- Generen en equipo actividades relacionadas con el razonamiento proporcional, proyectadas a ser desarrolladas con sus respectivos estudiantes en un ambiente de laboratorio.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (Fichas, tableros prediseñados, …), Excel y software GeoGebra.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con material concreto, y el software GeoGebra; el primero de ellos se dirige a la construcción del concepto de razón y proporción; el segundo a la resolución de problemas en contexto apoyados en el planteamiento de razones y proporciones; y el tercer desafío está dirigido a trabajar la razón como porcentaje, su interpretación e importancia en la resolución de problemas. La experimentación y análisis en cada desafío se estructura mediante preguntas heurísticas que permiten a los docentes, conjeturar, experimentar y refinar sus propias estrategias para atender los retos propuestos, fortaleciendo de esta manera el razonamiento proporcional en los docentes y sus estudiantes.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de los desafíos que se proponen en la actividad consoliden conceptos asociados al razonamiento proporcional, utilizando manipulativos concretos y virtuales, los cuales estarán organizados y disponibles en el laboratorio de matemáticas, para que los docentes organizados en equipo (máximo 3), conjeturen, experimenten y luego reflexionen sobre los resultados obtenidos, planteen nuevas estrategias o ajustes a las mismas que crean pertinentes para alcanzar los objetivos tanto los planteados en cada uno de los desafíos, como los que se propongan para una eventual práctica de aula con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas de trabajo.

Se expone por parte del investigador una puesta en común de las actividades, haciendo énfasis en las prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por los docentes, en las herramientas disponibles para cada uno de los desafíos y retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del razonamiento proporcional para la resolución de problemas en contextos propios de las matemáticas y otros que se apoyan en esta área.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes – investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de todos los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad, se les propone a los docentes diseñar otras actividades en las cuales se incluyan desafíos a desarrollar con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas que involucren situaciones cotidianas.

Desafío 01: Descubriendo y planteando razones

Objetivo: Construir el concepto de razón geométrica y aritmética, a través de imágenes prediseñadas, el análisis de las mismas el cual está guiado por preguntas y retos diseñados para generar aprendizaje significativo.

Materiales: Guía y herramientas básicas de trabajo, fichas prediseñadas de diferentes dimensiones y software GeoGebra.

Con el fin de construir el concepto de razón, la docente presenta a sus estudiantes la ficha que se observa a continuación (imagen de un ganso); igualmente, dispone de un paquete de fichas, cada una de estas contiene la imagen del ganso. La tarea del estudiante consiste en seleccionar la ficha que represente de manera adecuada la imagen presentada por la docente.

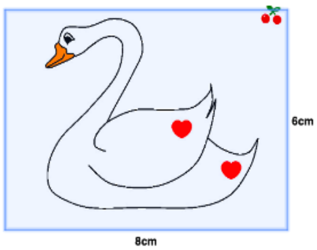
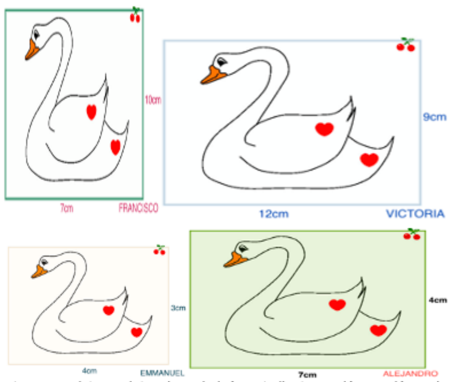


Imagen presentada por la docente

Las siguientes corresponden a las fichas que seleccionaron cuatro estudiantes



a) Su tarea consiste en determinar si algún estudiante y quién o quiénes de ellos realizaron de manera adecuada la tarea propuesta por la docente. Argumentar al respecto.

b) Exponer las condiciones que se deben cumplir para que al reproducir la imagen (reducción o ampliación), esta no se deforme.

c) Realizar el cociente correspondiente a las dimensiones de la ficha que presenta la docente (6/8), el cociente de la ficha presentada por Victoria (9/12) y la presentada por Emmanuel (3/4). ¿Qué puede concluir al respecto? Argumentar e interpretar cada uno de los cocientes.

d) En el literal anterior se relacionó el largo y ancho de las fichas mediante la división (cociente). Ahora su tarea consiste en establecer una relación a través de la diferencia (resta). Argumentar, interpretar cada una de las fichas y establecer conclusiones.

e) Teniendo en cuenta el literal anterior, ¿qué sucede con las fichas presentadas por Francisco y Alejandro? Argumentar

f) Proponga dimensiones para otras fichas, de tal forma que generen imágenes semejantes a la presentada por la docente. Exponer la estrategia utilizada en esta tarea y construir al menos una imagen utilizando el material disponible en el laboratorio.

Desafío 02: Razones y proporciones en la resolución de problemas

Objetivos: Fortalecer las habilidades en la resolución de problemas que involucren el planteamiento de proporciones, a través de situaciones en contexto, la experimentación e interacción en equipo.

Materiales: Guía y herramientas básicas de trabajo, software GeoGebra, actividad 04 (Pensamiento variacional).

Con el fin de fortalecer los conceptos de razón y proporción, el docente de grado tercero propone los siguientes problemas:

a) Para una receta de cocina, se sabe que, por cada dos libras de harina de maíz, se necesitan tres libras de harina de trigo. ¿Si se requiere mezclar 15 libras de harina de trigo, cuántas libras de maíz se requieren? Al respecto, uno de los grupos le presenta al docente la siguiente tabla, resaltando en la misma la respuesta.

Harina de maíz (libras)	Harina de trigo (libras)
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15

Su tarea consiste en analizar el recurso que utilizó los estudiantes: ¿Cree que el docente logró el objetivo planteado con sus estudiantes en esta actividad? Argumentar.

b) Suponga que en el problema planteado por el docente sólo debe mezclar 14 libras de harina de trigo, ¿es posible utilizando el recurso que presentaron los estudiantes, determinar las libras de harina que se requieren para esta mezcla? Justificar y exponer una estrategia de solución.

c) Teniendo en cuenta el literal **a**, construir proporciones con los datos de la tabla que los estudiantes le han presentado a la docente. Argumentar sobre las fortalezas que brindan en la solución de problemas.

d) ¿Es posible multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades en las proporciones construidas en el literal anterior, sin que estas se alteren? Exponer las condiciones que se deben cumplir al respecto.

e) En un cierto colegio, por cada 12 mujeres hay 28 hombres, si en total son 440 estudiantes; ¿Cuál es el número total de hombres y total de mujeres que pertenecen al colegio? Exponer la estrategia que ha utilizado al respecto.

f) Un camión transporta cierta carga de la ciudad de Bogotá a la ciudad de Tunja en 12 viajes. ¿Cuántos viajes se deben realizar si se utilizaran 2,3,4 y 6 camiones? Exponer fortalezas, dificultades y la estrategia utilizada al respecto.

g) Carlos Antonio quiere hacer entrega de sus 15 lingotes como los que se observan en la siguiente imagen, en partes iguales a sus 4 hijos. La dificultad para Carlos Antonio radica en la distribución de manera equitativa del residuo que obtiene en la división. Por lo tanto, su tarea consiste en plantear y exponer una estrategia que le permita a Carlos Antonio entregar en partes iguales a sus hijos los 15 lingotes de oro.

h) Haciendo uso del material concreto disponible para la actividad, específicamente los rectángulos en cartulina, y representando con estos los lingotes de oro, proponga y exponga una estrategia mediante dobleces de papel que le permita a Carlos Antonio, una distribución equitativa para sus 4 hijos.

i) En una sesión de clase, la docente le presenta a sus estudiantes de grado cuarto las anteriores dos situaciones; y ante las dificultades que algunos de ellos presentaron, realizó lo siguiente:

1. Organizó a sus estudiantes en cuatro grupos.
2. Llevó parte de un paquete de galletas saltínas, exactamente 21 unidades, para ser distribuidas de manera equitativa a los cuatro grupos.
3. Realizaron la división con la participación activa de estudiantes y docente, mediante un extraño procedimiento del cual se tiene como evidencia una fotografía del razonamiento que siguieron en el tablero, la cual se muestra a continuación.
4. Siguiendo el resultado que obtienen, el cual se muestra en la imagen anterior; docente y estudiantes distribuyen de a cinco galletas y la que les sobra la dividen en cuatro partes ($\frac{1}{4}$), una para cada grupo.

j) Analizar el procedimiento de los estudiantes y docentes de grado cuarto. ¿Cree que es un método efectivo para dividir? Argumentar y exponer las condiciones que se deben cumplir para que este método funcione; construir otros ejemplos.

m) Exponer mediante este método de división una estrategia al Sr Carlos Antonio, para que él pueda distribuir los lingotes de oro de manera equitativa. Argumentar sobre las ventajas y desventajas de este método en problemas como este y en otros que se pueden presentar en diferentes contextos.

k) Teniendo en cuenta el razonamiento que expone la docente y sus estudiantes en el tablero para realizar la división **21 ÷ 4**, ¿cree que es posible multiplicar siguiendo un procedimiento similar? Conjeturar al respecto y exponer algunos casos específicos de multiplicación.

l) En el Papiro de Rhind (c. 2300 a.C.), se presenta el siguiente problema: *Si a una cantidad le añadimos su séptima parte se convierte en 19 ¿cuál es dicha cantidad?*[1] Al respecto, el docente de grado quinto y sus estudiantes proceden de la siguiente manera:

1. Expresan el problema de la siguiente manera:

$x + \frac{x}{7} = 19$

2. Hacen uso del método egipcio para solucionar este tipo de problemas. En este caso suponen que la cantidad solicitada es 7 (llamada posición falsa), y por lo tanto al reemplazar en la expresión del numeral anterior, obtienen 8 = 19, lo cual es falso; sin embargo, esta civilización argumenta que el 8, debe ser multiplicado por $\frac{19}{8}$, para obtener 19, es decir para que se verifique la igualdad. Igualmente, razonan que 7 (la cantidad que suponen inicialmente),

[1] Tomado de: ACEVEDO, Miriam y FALK, Mary. Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. SANTA FE DE BOGOTÁ: Impresores & publicistas,1997.

debe ser multiplicada por esta misma cantidad $\frac{19}{8}$, y así obtienen la cantidad buscada (llamada x en el numeral 1).

h) Plantear y exponer una estrategia de solución al problema presentado en el literal anterior.

i) Plantear una proporción que permita encontrar igualmente la solución al problema del literal **g**, teniendo en cuenta la cantidad que los egipcios suponen inicialmente, es decir ($x = 7$). Argumentar.

Desafío 03: Razones porcentuales

Objetivos: Fortalecer las habilidades en la resolución de problemas que involucren porcentajes, a través de situaciones en contexto, la experimentación e interacción en equipo.

Materiales: Guía y herramientas básicas de trabajo, material concreto tales como: cuadrícula, el almacén didáctico (artículos, monedas y billetes didácticos, ...).

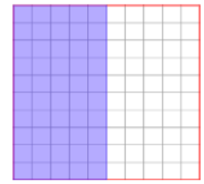
Como estrategia dentro del marketing, es muy frecuente encontrar diversidad de publicidad, como la que se evidencia en las siguientes imágenes.

a) Teniendo en cuenta este panorama analizar en equipo la siguiente situación: se dirige a un almacén, y este ofrece un descuento para compras mayores de $40.000, mediante las siguientes opciones, de las cuales el cliente debe escoger una:

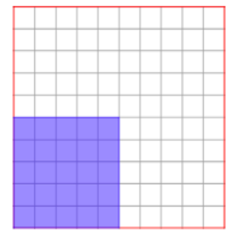
1. Un descuento de $ 10.000 por cada $ 40.000 en compras.
2. Un descuento del 25% por compras mayores de $40.000

Como cliente del almacén, ¿qué opción seleccionaría? Argumentar

b) ¿Qué fracción del cuadrado representa la parte azul?, la misma parte, ¿qué porcentaje del rectángulo representa? Argumentar



c) La docente de grado cuarto, asigna como tarea a sus estudiantes, determinar qué fracción representa la parte azul en el siguiente cuadrado. Al respeto los grupos de trabajo 3 y 4, responden que la fracción correspondiente es $\frac{25}{100}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente. Su tarea consiste en analizar las respuestas de los dos grupos de trabajo y argumentar sobre las mismas.



d) Teniendo en cuenta el literal anterior, determine el porcentaje que representa la parte coloreada en azul. ¿Es posible expresarlo como $\frac{25}{100}$? Argumentar.

e) Utilizando el material concreto (cuadrados en cuadricula), el cual encuentra disponible para la actividad; representar los siguientes porcentajes, estableciendo su fracción correspondiente: 58%, 30%, 75%, 15%, 5%. Exponer fortalezas, dificultades y posibles estrategias de atención al respecto.

f) Realizar las siguientes tareas teniendo en cuenta el rectángulo que observa a continuación, cuya área es de $32cm^2$, el cual encuentra además en cartulina dentro de los materiales disponibles para la actividad:

1. Representar mediante dobleces de papel el 50%, y determinar a que área corresponde este porcentaje.

2. Representar mediante dobleces de papel el 75%, y determinar a que área corresponde este porcentaje.

3. Proponga una estrategia que le permita establecer el área correspondiente al 50% y al 75%, sin el uso de ningún tipo de representación del rectángulo dado de $32cm^2$.

g) *"En un almacén puede conseguir un descuento del 20%, pero, al mismo tiempo, tiene que pagar unos impuestos del 15%. ¿Qué prefiere que le calculen primero, el descuento o el impuesto?"*[2]. Experimentar utilizando el almacén que se estableció en el punto anterior, consolidar y exponer las estrategias de solución.

h) "*Una hamburguesa está hecha de pan, tomate, lechuga y carne. Si el precio de cada uno de los cuatro ingredientes aumenta en un 5%, ¿cuánto aumenta el costo total de los ingredientes?"*[3].

[2] Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically* (p. 1). Pearson Education

[3] Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically* (p. 189). Pearson Education

Anexo 10: Análisis e interpretación de imágenes de la naturaleza

Actividad 09: Análisis e interpretación de imágenes de la naturaleza

Objetivo: Modelar algunas imágenes de la naturaleza, con el fin de analizar su relación con las matemáticas.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos y virtuales en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Planeen y ejecuten diferentes estrategias que les permita identificar objetos de la naturaleza y su relación geométrica.
- Analicen sus propias producciones en cada uno de los desafíos propuestos, y propongan estrategias de atención a las dificultades que se pueden presentar en la práctica de aula con sus respectivos estudiantes.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad y situaciones en contextos reales.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad, identifiquen fortalezas, dificultades y planteen oportunidades de mejora.
- Planteen en equipo actividades apoyadas en objetos del entorno, con el objetivo de ser desarrolladas con sus respectivos estudiantes en un ambiente de laboratorio.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas con imágenes), software GeoGebra y aplicaciones en línea.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con material concreto, y el software GeoGebra; el primero de ellos se dirige a identificar elementos básicos de geometría: puntos, tipos de rectas, polígonos, … tanto en imágenes dadas como en imágenes que gestionan los docentes; el segundo desafío se dirige al trabajo con material concreto, software GeoGebra y otros recursos en línea, diseñados con el fin de construir e identificar simetría. El tercer desafío se dirige a la construcción de algunos fractales con el uso de herramientas básicas de dibujo y el software GeoGebra. Igualmente, en este desafío se les propone a los docentes una salida de exploración del medio ambiente, con el fin de realizar tomas fotográficas e identificar elementos geométricos y sus características. La experimentación y análisis en cada desafío se estructura mediante preguntas heurísticas que permiten a los docentes, conjeturar, experimentar y refinar sus propias estrategias para atender los retos propuestos, fortaleciendo de esta manera el razonamiento geométrico.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de los desafíos que se proponen en la actividad experimenten diversas formas de desarrollar pensamiento matemático y específicamente a través de la exploración del medio, manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra, recursos los cuales estarán organizados y disponibles en el laboratorio de matemáticas, para que los docentes a través del trabajo en equipo (máximo 3), conjeturen, experimenten y luego reflexionen sobre los resultados obtenidos, planteen nuevas estrategias o ajustes a las mismas que crean pertinentes para alcanzar los objetivos tanto los planteados en cada uno de los desafíos, como los que se propongan para una eventual práctica de aula con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas de trabajo.

Se expone por parte del investigador una puesta en común de las actividades, haciendo énfasis en las prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por los docentes, en las herramientas disponibles para cada uno de los desafíos y retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del razonamiento proporcional para la resolución de problemas en contextos propios de las matemáticas y otros que se apoyan en esta área.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes – investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de todos los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad, se les propone a los docentes diseñar otras actividades en las cuales se incluyan desafíos a desarrollar con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas que involucren situaciones cotidianas.

Desafío 01: Identificando elementos geométricos

Objetivo: Identificar elementos geométricos en las siguientes imágenes de la naturaleza.

a) Observa y caracteriza las siguientes imágenes de acuerdo a sus elementos geométricos. Exponer la estrategia y recursos utilizados en esta tarea.

b) Relacione otros recursos del medio que apoyarían la construcción de pensamiento geométrico en los estudiantes del nivel de educación básica primaria.

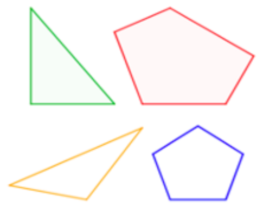
Desafío 02: Encuentro objetos simétricos

Objetivo: Revisar y aplicar el concepto de simetría usando manipulativos, aplicaciones en línea e imágenes dadas.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas con imágenes), software GeoGebra y aplicaciones en línea.

a. Usando las fichas de papel que encontrará dentro del material, explique el concepto de simetría mediante dobleces. Puede complementar con otros recursos si así lo considera. Exponer el procedimiento en cada una de las construcciones.

b. Usando las siguientes figuras que encuentra recortadas en cartulina, trazar dobleces en cada una de estas, de tal forma que se construya simetría. Justificar en cada caso.



c) Tomar varias frutas: manzanas, peras, papaya, … realizar un corte central, observar y exponer los elementos geométricos presentes. Como sugerencia apoyarse en tomas fotográficas.

d) Dadas las siguientes imágenes, trace los elementos que permiten evidenciar simetría. ¿Es posible en todas las figuras? Argumentar

e) Ingresar en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/g8sfa86s en el cual encontrará la construcción que observa en la imagen; mover los puntos A, B y C del triángulo y exponer que sucede en la figura de la derecha. ¿Qué sucede entre puntos homólogos de los triángulos respecto al eje de simetría?, ¿qué función cumple el eje de simetría, y qué otro nombre le podría asignar? Argumentar.

f) Ingrese al siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/ad76ffwg, el cual le mostrará una ventana como la que se muestra a continuación, desarrolle la actividad teniendo en cuenta las orientaciones que allí encuentra. Exponer las fortalezas, dificultades presentadas y oportunidades de mejora.

g) Teniendo en cuenta el literal anterior, ¿qué aprendizajes cree que es posible abordar con sus respectivos estudiantes? Argumentar.

Desafío 03: Las matemáticas a través de elementos en la naturaleza, buscando estrategias de análisis e interpretación.

Objetivos:

- Construir algunos fractales utilizando herramientas básicas de dibujo y el software GeoGebra.
- Identificar y caracterizar elementos geométricos del entorno, mediante la exploración del medio y con el apoyo de tomas fotográficas.

Materiales: Herramientas básicas de dibujo, cámara fotográfica (Celular) software GeoGebra y aplicaciones en línea.

a) A través de la historia, se evidencia que la naturaleza además de inspirar a los matemáticos para desarrollar sus teorías, como por ejemplo el movimiento de los planetas a Newton; posee una construcción matemática sorprendente y que asombra al ser humano. Al respecto, a continuación se mencionan algunos ejemplos. Su tarea consiste en plantear y ejecutar un plan para verificarlos de forma constructiva utilizando diversidad de manipulativos concretos y virtuales.

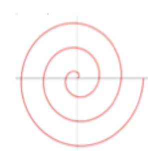
– La tela de una araña contiene numerosas formas geométricas, además de circunferencias concéntricas.

–Las celdas de los panales de abejas y los copos de nieve son hexagonales.

– El corazón de la manzana o de la papaya, es una estrella de cinco puntas.

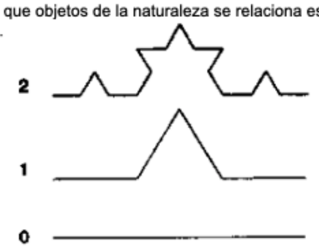
– Muchos frutos, como las cerezas, las naranjas, las ciruelas, …, tienen forma esférica.

– La espiral de Arquímedes la cual se aprecia en la siguiente imagen. Al pedirle a un paciente que la dibuje, como una manera de cuantificar el temblor humano, permite diagnosticar enfermedades neurológicas.



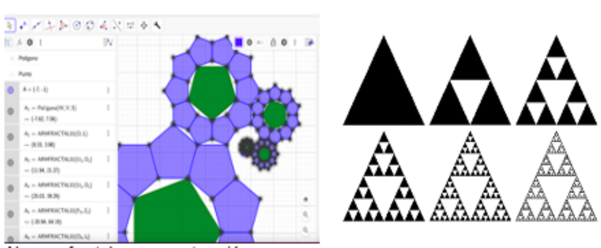
b) En la siguiente imagen, se observa la construcción del nivel **1** y **2**, teniendo en cuenta el nivel **0** (segmento de entrada). Su tarea consiste en construir dos niveles más, para lo cual dispone de un pliego de papel.

- Argumentar y exponer sobre los elementos de geometría que están involucrados en esta construcción.
- Exponer con que objetos de la naturaleza se relaciona esta construcción.



c) Realizar la construcción propuesta en el numeral anterior utilizado el software dinámico GeoGebra. Argumentar sobre las ventajas y desventajas en relación con la construcción en lápiz y papel.

d) Identificar los objetos de entrada de cada fractal que se observa en la siguiente imagen y construirlos en la aplicación GeoGebra. Exponer los elementos geométricos necesarios en esta construcción y su relación con diferentes contextos.



Algunos fractales en construcción.

Anexo 11: Aritmética

Actividad 10: Aritmética

Objetivo: Fortalecer las habilidades de los docentes en el campo de la aritmética, mediante el uso de los números naturales, sus operaciones y propiedades en diferentes contextos.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos y virtuales en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula.
- Planeen y ejecuten diferentes estrategias que les permita abordar los desafíos planteados.
- Analicen sus propias producciones en cada uno de los desafíos propuestos, y propongan estrategias de atención a las dificultades que se pueden presentar en la práctica de aula con sus respectivos estudiantes.
- Socialicen sus construcciones y planteen problemas retadores que incluyan los elementos trabajados en la actividad y situaciones en contextos reales.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad, identifiquen fortalezas, dificultades y planteen oportunidades de mejora.
- Planteen en equipo actividades apoyadas de objetos del entorno, con el objetivo de ser desarrolladas con sus respectivos estudiantes en un ambiente de laboratorio.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas, tableros, …) y aplicaciones en línea.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con material concreto; el primero de ellos se dirige a la experimentación con múltiplos y divisores de un número, motivados por el juego torre de Jenga; así como a utilizar una estrategia para identificar números primos y sus características, a través de la criba de Eratóstenes; en el segundo desafío los docentes utilizarán diferentes estrategias para hallar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de un número, así como a la resolución de problemas. En el tercer desafío los docentes apoyados con material concreto, se disponen a resolver problemas tipo olimpiada e igualmente a la solución y construcción de cuadrados mágicos. La actividad finalmente incluye el espacio para que los docentes propongan sus propios desafíos en el campo de la aritmética. La experimentación y análisis en cada desafío se estructura mediante preguntas heurísticas que permiten a los docentes, conjeturar, experimentar y refinar sus propias estrategias para atender los desafíos propuestos, fortaleciendo de esta manera el razonamiento numérico.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de los desafíos que se proponen en la actividad experimenten diversas formas de construir pensamiento matemático, específicamente en el campo de la aritmética, apoyados en manipulativos concretos y diferentes estrategias, recursos los cuales estarán organizados y disponibles en el laboratorio de matemáticas, para que los docentes a través del trabajo en equipo, conjeturen, experimenten y luego reflexionen sobre los resultados obtenidos, planteen nuevas estrategias o ajustes a las mismas que crean pertinentes para alcanzar los objetivos tanto los planteados en cada uno de los desafíos, como los que se propongan para una eventual práctica de aula con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas de trabajo.

Se expone por parte del investigador una puesta en común de las actividades, haciendo énfasis en las prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por los docentes, en las herramientas disponibles para cada uno de los desafíos y retos, destacando sus fortalezas, oportunidades de mejora y la relevancia en el desarrollo del razonamiento aritmético para la resolución de problemas en contextos propios de las matemáticas y otros que se apoyan en esta área.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes e investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad, se les propone a los docentes diseñar otras actividades en las cuales se incluyan desafíos a desarrollar con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas que involucren situaciones cotidianas.

Desafío 01: Múltiplos y divisores

Objetivos:

1. Fortalecer el concepto de múltiplo y divisor de un número, a través del juego torre de Jenga.

2. Fortalecer el concepto de número primo y aplicarlo en la descomposición en factores

Materiales: Guía de trabajo, torres de Jenga y aplicación online.

a) Con la torre de Jenga dispuesta en cada grupo conformado por cuatro integrantes máximo, se disponen los docentes a jugar teniendo en cuenta las siguientes reglas:

1. Cada participante lanza los dos dados y retira una ficha (que no haga parte del último nivel de la torre), correspondiente a un múltiplo o divisor del número obtenido al sumar las caras de los dos dados. Esta ficha debe ubicarla en la parte superior de la torre de tal forma que se construya nuevos niveles.

2. Cada grupo establece los turnos con los cuales interviene cada participante.

3. Si el participante lo considera pertinente, puede retirar una segunda ficha siempre y cuando esta corresponda con un número primo.

4. El participante que se le derrumbe la torre, sale del juego; el ganador será quien obtenga la mayor cantidad de puntos, teniendo en cuenta la siguiente tabla la cual debe ir registrando cada participante a medida que se desarrolla el juego.

5.El participante que registre en la tabla números que no corresponden, igualmente sale del juego.

b) De acuerdo a la experiencia en el juego propuesto en el literal anterior, ¿cree que existe estrategias para ganarlo? Argumentar

c) Ingresar en el siguiente enlace y realizar el ejercicio propuesto. ¿Cree que es pertinente este ejercicio para una posible práctica pedagógica con sus estudiantes? Argumentar.

http://agrega.educacion.es//repositorio/19012017/37/es_2011022212_9114258/CL-NO-69/index.html

d) Teniendo en cuenta la siguiente tabla realizar lo siguiente:

- Dejar el 2, pero a partir de él eliminar los números que sean múltiplos de 2.
- Luego, el primer número de los que quedan es el 3, dejarlo y desde el número 3 eliminamos los números que sean múltiplos de 3.
- El siguiente número de los que quedan es el 5, dejarlo y desde el número 5 eliminamos los números que sean múltiplos de 5.
- Así seguir avanzando, cuando encuentre a un número que no ha sido eliminado se deja, pero a partir de él eliminamos los números que sean múltiplos de él. Así hasta el final.

e) Analizar las características de los números que en la tabla anterior han quedado sin tachar. ¿cuáles son los divisores de estos números? ¿Qué puede concluir? Argumentar

f) Descomponer los siguientes números como un producto de factores primos: 26, 86, 394, 1238. ¿Es posible ampliar esta descomposición a todos los números naturales? Argumentar

Desafío 02: Máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm).

Objetivo:
1. Experimentar con diferentes estrategias en el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
2. Resolver problemas que involucran mcm y mcd

Materiales: Guía de trabajo y aplicación online.

a) Hallar el mcd de las siguientes números, y exponer el método utilizado

1) 18 y 24

2) 72 y 16

3) 656 y 848

4) 72, 24 y 84

b) Utilizar el método de Euclides para hallar el máximo común divisor de los números del literal anterior.

c) Hallar el mcm de los siguientes números y exponer la estrategia utilizada al respecto

1) 20, 16

2) 40, 15 y 100

3) 18 y 28

d) El 6 es denominado número perfecto, porque: $6 = 1 + 2 + 3$; ¿qué relación encuentra entre estos sumandos y el número 6? ¿el 8 es número perfecto? Argumentar. ¿Cuáles serían los siguientes dos números perfectos? Exponer la estrategia de búsqueda de los mismos.

e) Teniendo en cuenta el literal anterior, caracterizar los números perfectos

f) Resuelva los siguientes problemas:

- Una empresa elabora aceites de tres calidades distintas. Del primer aceite se elaboran 4800 L, del segundo, 1350 L, y del tercero, 2646 L. Si se quiere envasar el aceite en contenedores del mismo tamaño, sin mezclar los de distinto tipo, ¿cuál será el mayor tamaño que puede tener el contenedor? Argumentar.
- Daniel y Pedro comen en el mismo restaurante, pero Daniel asiste cada 20 días y Pedro cada 38. Si se encuentran en el restaurante hoy, ¿cuándo volverán a encontrarse allí? Argumentar.
- Una cartelera gigante mide 240 cm de largo y 180 cm de alto. Para transportarlo mejor se decide cortarlo en cuadrados, que deben ser del mayor tamaño posible. Calcula la longitud que debe tener el lado de cada cuadrado. Exponer la estrategia utilizada.
- Un astrónomo, sabe que Venus le da la vuelta al Sol en 225 días y Marte en 687 días. Si sabe que la última vez que se alinearon Venus, Tierra y Marte, fue hace 1805645 días, ¿en cuánto tiempo se volverán a alinear los 3 planetas en el mismo punto?
- Una parcela mide 180 m de largo por 160 m de ancho. El agricultor decide dividirla en parcelas iguales, de forma cuadrada y del máximo tamaño posible. ¿Cuál es la medida del lado de cada parcela? Argumentar.
- Jorge está cambiando el suelo de su cocina que mide 360 cm de ancho y 630 cm de largo. Quiere que las baldosas sean cuadrados y del mayor tamaño posible.
  a) ¿Qué medidas tendrá cada baldosa?
  b) ¿Cuántas necesitará?

Desafío 3: Descubriendo talentos y formando olímpicos

Objetivo: Fortalecer las habilidades en la ejercitación de operaciones básicas como un recurso en la resolución de problemas tipo olimpiada.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas y tableros)

a) La suma de las cifras de un número de cuatro cifras es 18. Si la cifra de las unidades es el doble de la cifra del millar, la cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las unidades mas la del millar y la cifra de las decenas es cero. Encontrar el número que verifica estas condiciones. Exponer la estrategia utilizada al respecto.

b) Encuentra todos los números de cuatro cifras que se pueden formar con los dígitos 3, 0, 5 y 9. Recordando que ningún número lleva un 0 a la izquierda, ordénalos en forma creciente y exponga la estrategia utilizada al respecto.

c) La suma de dos números es 335600, si uno de los sumandos es 57028, entonces encuentre el otro. Argumentar.

d) Una empresa internacional de dispositivos tecnológicos posee sucursales en Italia, Chile y México. Cuando el sistema operativo de una de las sucursales se reinicia, todas sus computadoras dejan de funcionar durante un tiempo y sus tareas deben llevarse a cabo por las otras dos sucursales.

Para evitar males mayores, los ingenieros de la empresa establecen que los sistemas deben reiniciarse cada cierto tiempo según indica la siguiente tabla:

	Tiempo (días)
Italia	30
Chile	27
México	32

Calcular cuánto tiempo transcurre para que coincida el día en que los sistemas se reinician. Exponer la estrategia utilizada en esta tarea.

d) Observa el siguiente cuadrado y exponga las características que en este puede determinar

2	9	4
7	5	3
6	1	8

- Que puede concluir de la suma de sus las columnas y diagonales
- Es posible determinar entonces que la constante mágica es: _________
- Encuentra otras formas de distribuir los números, de tal forma que se mantenga la constante mágica.
- Multiplique cada uno de los números del cuadrado por un mismo número y determine si el nuevo cuadrado conserva las características del original.
- Encuentre otras estrategias que al aplicarlas al cuadrado dado, generen un nuevo cuadrado mágico. Justificar

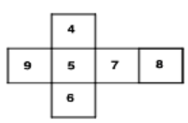
e) Construya un cuadrado mágico de 4 x 4 con los números del 1 hasta el 16. Se recomienda determinar en primer lugar la constante mágica (apoyarse en el literal anterior).

f) Determinar la constante mágica para un cuadrado 5 x 5, con las características de los cuadrados mágicos que se han presentado en los literales anteriores. Exponer la estrategia y analizar si la misma se puede aplicar a otros cuadrados mágicos.

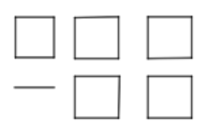
g) Completa el siguiente tablero de tal forma que construya un cuadrado mágico.

7		5
	8	
11		9

h) En el diagrama se muestra un cubo desdoblado donde se ha asignado un número a cada una de las caras. Al armar nuevamente el cubo, ¿cuál es la mayor suma que se obtiene sumando los números que aparecen en las tres caras que concurren en una esquina?



i) Si se colocan los dígitos 2, 3, 5, 7 y 9 en cada uno de los cuadros del problema de sustracción que se muestra, sin repetir número, ¿cuál es la menor diferencia que se puede obtener?



. j) Teniendo en cuenta las siguientes fichas:

- Conformar dos grupos de fichas, y construir un número en cada grupo de tal forma que, al sumarlos, generen el mayor valor posible. Exponer la estrategia utilizada al respecto.

5	7	9	3	6
0	4	1	8	2

k) Una prueba de 12 preguntas fue calificada asignando 10 puntos por cada respuesta correcta y luego restando 5 puntos por cada respuesta incorrecta. David contestó las 12 preguntas sin dejar ninguna sin contestar. Si David obtuvo un total de 75 puntos, ¿cuántas respuestas malas tuvo?

Anexo 12: Pensamiento estratégico

Actividad 11: Pensamiento estratégico

Objetivos:
1. Fortalecer en los docentes las habilidades en la resolución de problemas a través de un ambiente lúdico en donde ellos asumen diferentes roles, planean, ejecutan y evalúan estrategias de solución.
2. Fomentar en los docentes la imaginación, la creatividad, la agilidad mental, la memoria, el pensamiento creativo, el pensamiento lógico, la expresión de ideas y la toma de decisiones en diferentes contextos.

Aprendizajes esperados

Se espera que los docentes:

- Trabajen en equipo apoyados en herramientas que ofrece el laboratorio de matemáticas.
- Se interesen por el uso de manipulativos concretos y virtuales en el laboratorio de matemáticas como estrategia para fortalecer las prácticas de aula de una manera lúdica.
- Planeen, ejecuten y evalúen diferentes planes en la solución de problemas en el contexto de los juegos de estrategia.
- Analicen sus propias producciones en cada uno de los desafíos propuestos, y propongan estrategias de atención a las dificultades que se pueden presentar en la práctica de aula con sus respectivos estudiantes.
- Socialicen sus construcciones, planteen otros problemas retadores a trabajar con sus respectivos estudiantes, e incluyan los elementos trabajados en la actividad.
- Den respuestas a las preguntas de los retos propuestos en la actividad, identifiquen fortalezas, dificultades y planteen oportunidades de mejora.

Materiales: Guía de trabajo, material concreto (fichas, piezas del ajedrez, tableros, …), y aplicaciones en línea.

Estructura: Esta actividad está compuesta por 3 desafíos, cada uno con sub-tareas diseñadas para que los docentes trabajen apoyados con material concreto. El primero de estos se dirige a que los docentes interactúen con el compañero en los juegos que se proponen, identifiquen características y evalúen sus propias estrategias. El segundo desafío tiene como objetivo además de interactuar en el juego propuesto, aplicar algunas heurísticas de George Polya en la solución de problemas, principalmente lo que este autor denomina "trabajo hacia atrás o método analítico", en la búsqueda de la estrategia ganadora. El tercer desafío se dirige a la interacción de los docentes con algunos juegos de estrategia en línea. Luego, tendrán la oportunidad de analizar este material y su pertinencia en la práctica pedagógica con sus respectivos estudiantes. Finalmente, se les propone a los docentes plantear sus propios desafíos a desarrollar en ambiente de laboratorio, con el fin de fortalecer las habilidades en la resolución de problemas, a través de los juegos de estrategia.

La experimentación y análisis que se propone en cada desafío se estructura mediante preguntas heurísticas que permiten a los docentes conjeturar, experimentar y refinar sus propias estrategias para atender de manera efectiva los retos propuestos.

Sugerencia metodológica.

Se pretende que los docentes a través de los desafíos que se proponen en la actividad experimenten diversas formas de desarrollar pensamiento matemático y específicamente a través de los juegos de estrategia, manipulativos concretos y aplicaciones en línea. Estos recursos estarán organizados y disponibles en el laboratorio de matemáticas, para que los docentes a través del trabajo en equipo (máximo 3), conjeturen, experimenten y luego reflexionen sobre los resultados obtenidos, planteen nuevas estrategias o ajustes a las mismas que crean pertinentes para alcanzar los objetivos, tanto los planteados en cada uno de los desafíos como los que se propongan para una eventual práctica de aula con sus respectivos estudiantes.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de tres docentes; el líder de cada grupo surgirá de forma natural durante el transcurso de la actividad. Además, los docentes contarán con un tiempo estimado de 10 horas de trabajo.

Se expone por parte del investigador una puesta en común de las actividades haciendo énfasis en las prácticas pedagógicas innovadoras planeadas y ejecutadas por los docentes, en las herramientas disponibles para cada uno de los desafíos y retos, destacando sus fortalezas, dificultades y la relevancia en el desarrollo del pensamiento estratégico para la resolución de problemas en diferentes contextos.

Cada desafío se desarrollará en un 50% como mínimo de forma presencial y con la orientación del investigador, el otro 50% de forma virtual en interacción constante docentes – investigador de forma asincrónica y sincrónica. La actividad se evaluará con la participación activa de todos los docentes, en esta se identificarán fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora.

Al finalizar la actividad, se les propone a los docentes diseñar otras actividades en las cuales se incluyan desafíos a desarrollar con el uso de herramientas del laboratorio y otras que ellos crean pertinentes, dirigidos a la resolución de problemas que involucren los juegos de estrategia.

Desafío 01: Los juegos de estrategia en el aula

Objetivo: Identificar las características de los juegos de estrategia a través de la práctica y uso de manipulativos concretos.

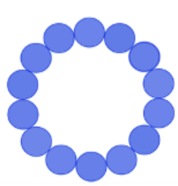
Materiales: Fichas, tableros, piezas del ajedrez y guía de trabajo.

a) Se tiene una torre construida con 15 fichas como se observa en la siguiente imagen. La ficha de la base es un tesoro el cual puede obtenerse en un juego. Para el juego usted(es) debe(n) construir la torre con el material que encuentra disponible en el laboratorio. Tenga en cuenta las siguientes reglas de juego.

- Dos jugadores se turnan. Cada jugador en su turno puede retirar 1 o 2 fichas de la parte superior de la torre con el ánimo de ganarse el tesoro. El que extrae la última ficha se queda con el tesoro.
- Usted debe jugar con un compañero, repetir la experiencia las veces que sean necesarias para entenderlo y responder las siguientes preguntas:

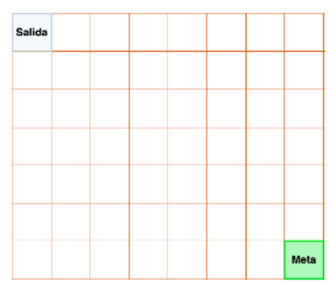
¿A qué factores atribuye ganar el juego, es decir obtener el tesoro?
¿Es posible establecer una estrategia que permita a uno de los dos jugadores obtener el tesoro sin que importe cómo juega su contrincante? Argumentar.
¿Cualquiera de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora sin importar si juegue de primero o de segundo?

b) El círculo de fichas. Se ponen 14 fichas en un círculo como se indica en la figura. Dos jugadores se turnan para sacar una o dos fichas, pero si se sacan dos, estás deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío. La persona que saca la última ficha pierde. Practicar el juego con el uso del material concreto y establecer las condiciones que se deben cumplir para no perder. ¿Hay diferencia entre las posibilidades que se tienen si se es el primero o el segundo en jugar? Argumentar



d) La torre. Se juega en un tablero como el del ajedrez, pero con 7×8 casillas, con la pieza del ajedrez "la torre" que se sitúa en el extremo superior izquierdo (salida); y la meta es la casilla del extremo inferior derecho.

Dos jugadores se turnan para mover la torre en uno de los dos sentidos: o bien horizontal hacia la derecha, o bien vertical hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero al menos un espacio. Gana el jugador que llega a la meta. Su tarea consiste en practicarlo y tratar de ganar siempre o impedir que su oponente lo haga. Teniendo en cuenta la experiencia, ¿a qué le atribuye el hecho de ganar o de perder? Exponga sus estrategias.



e) La Reina. Se juega en un tablero como el del ajedrez, pero con 7×8 casillas, con la pieza del ajedrez "la reina" que se sitúa en el extremo superior izquierdo (salida); y la meta es la casilla del extremo inferior derecho.

Cada jugador en su turno mueve la reina en uno de los tres sentidos: horizontal-hacia a la derecha, vertical-hacia abajo, y también diagonal-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta. Su tarea consiste en practicarlo y tratar de ganar siempre o impedir que su oponente lo haga. Teniendo en cuenta la experiencia, ¿a qué le atribuye el hecho de ganar o de perder? Exponga sus estrategias.

Salida							
							Meta

Desafío 02: En busca de la estrategia para ganar

Objetivo: Diseñar y aplicar en equipo técnicas que permitan establecer la estrategia ganadora* en cada uno de los juegos propuestos.

*Usted tiene una estrategia ganadora si usted puede asegurar su victoria sin importar cómo juega su contrincante.

Materiales: Fichas, tableros, piezas del ajedrez y guía de trabajo.

a) Recuerda y práctica con un compañero el juego Pinocho "en la casa de pinocho todos cuentan hasta ocho: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8"; a quien le corresponda el 8 pierde. Experimentar con el fin de responder a las siguientes preguntas:

¿Qué sucede si el conteo inicia con el oponente, es decir le asigna el 1? ¿Qué sucede en otros casos? Argumentar

¿Es posible establecer una estrategia para ganar? ¿Para cualquiera de los dos jugadores? Exponerla.

b) En grupos de tres, practicar el juego que se presenta en el literal anterior y establecer la estrategia ganadora. Argumentar.

c) Se tiene un área al lado de una piscina (4x6), donde los bañistas pueden colocar sus toallas a secar en el sol. Cada toalla ocupa dos cuadritos sucesivos. Se turnan un equipo de niñas y un equipo de niños en colocar sus toallas a secar allí. Gana el equipo que coloca la última toalla. ¿Cuál de los dos equipos tiene una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?

d) Los bañistas que se describen en el punto anterior, han generado un nuevo reto, el cual consiste en utilizar un área 4 x 5. Igualmente, gana el equipo que coloque la última toalla. ¿se mantiene la misma estrategia para el caso del área 4 x 6? Argumentar.

e) En el siguiente tablero interactúan dos jugadores. El primer jugador hace una marca en la casilla de salida. En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada: directamente encima, directamente a la derecha, o en diagonal (encima y a la derecha), de la última marca hecha por su oponente. Gana el primer jugador que consiga llegar a la meta. Practicar haciendo uso de los tableros que encuentra disponibles dentro de los materiales disponibles. Exponer la estrategia que utilizaron para no perder el juego.

				Meta
Salida				

d) En la siguiente tabla se expone el método "trabajo hacia atrás o analítico"[1], una de las estrategias heurísticas de George Polya, la cual permite establecer la estrategia ganadora. Es así como en la casilla "meta" se ha asignado **G** (casilla ganadora), lo cual significa que el jugador oponente tuvo que realizar movimientos que lo llevó a una de las casillas que se muestran con la **P** (casillas perdedoras). Su tarea consiste en completar la tabla con **G** o **P**, y finalmente exponer la estrategia ganadora.

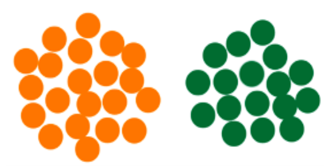
			P	G
			P	P
Salida				

e) Exponer la estrategia ganadora, teniendo en cuenta el siguiente tablero y las reglas del juego expuestas en el literal anterior.

						Meta
Salida						

f) Dado un grupo de 21 fichas, en turnos dos jugadores van recogiendo de a 1, 2 o 3 fichas, quien recoja la última ficha gana. Su tarea consiste en establecer un método que permita encontrar la estrategia ganadora. Argumentar.

g) Dados dos grupos de fichas (la cantidad que se quiera), en turnos dos jugadores van recogiendo las fichas que deseen de uno de los dos grupos. El jugador que realice la última recogida gana el juego. Exponer la estrategia para ganar.



h) Experimentar el mismo juego del literal anterior, iniciando con igual número de fichas en los dos grupos. ¿Es posible ganar el juego utilizando la estrategia establecida en el literal anterior? Argumentar.

i) Dados dos grupos de fichas, dos jugadores por turnos realizan la siguiente acción: recoger uno de los grupos y dividir al otro grupo de fichas en dos partes (no necesariamente iguales). Pierde el jugador que no pueda realizar esta acción. Exponer la estrategia para ganar en cada una de las siguientes variantes:

1. Los dos grupos iniciales tienen un número par de fichas.

2. En los grupos iniciales uno tiene un número par de fichas y el otro un número impar.

3. Los dos grupos iniciales tienen un número impar de fichas.

j) Dos jugadores: El que empieza dice un número cualquiera del 1 al 10. El otro jugador le suma al número que dijo su oponente un número del 1 al 10 y dice el resultado. Continúan jugando así, por turnos. Gana el que primero diga 100. Exponer la estrategia ganadora, puede apoyarse en la siguiente tabla para determinar celdas ganadoras y celdas perdedoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

[1] Pólya, G. (1945). How to solve it. New York: Doubleday Anchor Books.

k) ¿Cree que los juegos de estrategia apoyados en material concreto, favorecen la construcción de pensamiento matemático en los estudiantes de la educación básica primaria? Argumentar.

Desafío 03: Juegos de estrategia en línea

Objetivo: Experimentar y analizar la pertinencia de los juegos de estrategia en línea como un recurso en las prácticas de aula para fortalecer las habilidades en la resolución de problemas.

Materiales: Recursos en línea y guía de trabajo.

a) Interactuar en algunos de los juegos de estrategia que encuentra en el siguiente enlace.
https://www.ufreegames.com/play/tic-tac-toe.html?ref=ref
Analizar y exponer fortalezas y posibles dificultades en un eventual trabajo con los estudiantes.
b) Teniendo en cuenta el literal anterior, analizar la pertinencia de los juegos en línea en eventuales prácticas de aula con sus respectivos estudiantes. Exponer las habilidades que se fortalecerían en los estudiantes y los cuidados que ellos y sus familias deben tener.
c) Diseñar otros desafíos dirigidos a fortalecer el pensamiento estratégico en docentes y estudiantes, mediante la resolución de problemas a trabajar en un ambiente de laboratorio.

Anexo 13: Rúbrica general de análisis de la experiencia

Componente	Nivel Bajo	Nivel Medio	Nivel Alto
Plantea y ejecuta estrategias de comprensión de un problema	Presenta dificultades para comprender un problema	Expone las tareas a realizar para resolver el problema.	Relaciona el problema con situaciones del contexto
Planteamiento de estrategias en la resolución de problemas	Se le dificulta establecer estrategias apropiadas para resolver problemas.	Plantea estrategias efectivas para resolver problemas.	Plantea diversas estrategias de resolución de problemas y argumenta el proceso.
Ejecución de estrategias de resolución de problemas	Presenta dificultades en la ejecución de estrategias de resolución de problemas.	Ejecuta estrategias de resolución de problemas de manera efectiva.	Ejecuta de manera efectiva las estrategias de resolución de problemas y las relaciona en otros contextos.
Uso de material manipulativo en la construcción de significado de conceptos	El material manipulativo le es irrelevante en la construcción de significado de conceptos	Utiliza material manipulativo de manera efectiva en la construcción de conceptos	Gestiona y utiliza diversidad de material manipulativo como una prioridad en la construcción de significado de conceptos y en la consolidación de los mismos.
Uso de material manipulativo en la resolución de problemas.	El material manipulativo le es irrelevante en la resolución de problemas.	Utiliza material manipulativo de manera efectiva en la resolución de problemas	Gestiona y utiliza diversidad de material manipulativo como una prioridad en la resolución de problemas.
Uso de manipulativos virtuales en la construcción de significado de conceptos.	No utiliza los manipulativos virtuales en la construcción de significado de conceptos.	Utiliza los manipulativos virtuales de manera efectiva en la construcción de significado de conceptos.	El uso de manipulativos virtuales es una prioridad en la construcción de significado de conceptos.
Uso de manipulativos virtuales en la resolución de problemas.	El uso de manipulativos virtuales le es irrelevante en la resolución de problemas.	Utiliza manipulativos virtuales de manera efectiva en la resolución de problemas.	Utiliza los manipulativos virtuales como una prioridad en la resolución de problemas.
Aplicación de procesos de metacognición	No realiza metacognición sobre los procesos de aprendizaje.	Reflexiona sobre el proceso de aprendizaje y toma conciencia de sus procesos mentales.	Reflexiona sobre el proceso de aprendizaje, toma conciencia de sus procesos mentales y complementa los mismos con sus compañeros.